Les ensembles du Marchandage de Mas-Colell et de Zhou en Fonction d'effectivité

Dawidson RAZAFIMAHATOLOTRA*
École d'Économie de Paris
Université Paris 1 Panthéon Sorbonne

29 juin 2009

Résumé

Nous définissons les ensembles du marchandage au sens de Mas-Colell et de Zhou dans les fonctions d'effectivité. Une fonction d'effectivité est marchandage stable si son ensemble de marchandage est non vide pour tout profil de préférences. Après quelques discussions sur les interprétations de ces nouvelles formes de stabilité, nous discutons de quelques propriétés des marchandages stabilités, mais ce travail a pour objet d'identifier les classes de fonctions d'effectivité pour lesquelles les stabilités au sens du marchandage et la stabilité au sens du coeur sont équivalentes.

Mots-clés : Ensembles du marchandage, marchandage stabilité, coeur stabilité, fonction d'effectivité, jeu NTU associé à une fonction d'effectivité.

JEL Classification : C71, C79.

AMS classification : 91A12

*Dawidson RAZAFIMAHATOLOTRA, razafimahatolotra@yahoo.ca est membre du projet DELICOM. Ce travail fait partie des recherches du programme DELICOM

1 Introduction

La question de stabilité, synonyme de l'équilibre, reste le problème central de la théorie des jeux. Dans la théorie des jeux coopératifs, les éléments stables sont une solution d'un problème de distribution de valeurs, ou le résultant des jeux de force et d'influence qui régit la société. En dehors de l'idée d'équilibre, la notion de stabilité permet également de définir un mécanisme de sélection de l'issue du jeu et de concrétiser la forme de la rationalité sociale. Par exemple, la rationalité collective peut s'exprimer par : ce qui a été opposé par un joueur ou par une coalition ne doit pas être l'issue du jeu. Dans ce cas, l'organisation ne sera stable que si elle possède une alternative non opposable. Cette exigence, connue sous le nom de coeur, conduit généralement à la vacuité de l'ensemble de solution. Une autre version, tout en restant dans la forme de la rationalité du coeur, consiste à ne donner aucune importance aux objections discutables ou contestables. Cette version qui porte le nom d'ensemble du marchandage a été définie pour la première fois par Aumann R. & Maschler M.(3). Ces auteurs ont conçu l'objection comme une menace d' un joueur contre un autre, et la contre-objection est une réponse de celui qui se sent visé contre l'offenseur. En 1989, Mass-Colell (9) propose une version plus impersonnelle qui ne repose que sur les intérêts des joueurs : personne n'est contre personne ; chacun agit pour défendre ses intérêts. Sous un contexte particulier, si le jeu est joué selon le marchandage de Mass-Colell, alors sa solution correspondra à l'équilibre de Walras (9). Malgré ce résultat agréable, en 1989, Bhaskar Dutta & Debraj Ray (4) ont constaté une manque de consistance dans la définition de Mas-Colell : une coalition en train de faire une objection peut avoir une contestation venant de l'intérieur. En supprimant cette anomalie par une chaîne d'objections, ces deux auteurs arrivent à une nouvelle forme de marchandage : le marchandage consistant (4). En 1994, Lin Zhou (20) a proposé une autre solution pour résoudre l'anomalie de non-consistance de la définition de Mas-Colell : ne pas accepter les contestations des groupes sans aucune intersection avec la coalition de l'objection. Ainsi, Lin Zhou obtient une définition complète (pas besoin d'ajouter la condition de Pareto comme chez Mas-Colell) de l'ensemble du marchandage.

Plusieurs définitions de la contre-objection sont possibles, mais celles de Mas-Colell et de Zhou peuvent nous servir de base pour discuter toutes les possibilités. Pour les définitions dans le cas des jeux coopératifs, on peut voir les propriétés de ces ensembles dans (11), (12), (19) etc. et pour des comparaisons entre ces deux versions, on peut citer (2), (7).

Jusqu'à présent, le marchandage n'a été discuté que pour les jeux coopératifs : jeux à utilités transférables et à utilités non transférables. Le jeu coalitionnel ou les fonctions d'effectivité restent à l'écart du débat. En terme de vote, qui donne lieu à un cas particulier de fonction d'effectivité simple, le seul travail qui traite du problème de marchandage est celui de Peter Südholter & Bezalel Peleg (14). Pourtant, après avoir défini les fonctions d'effectivité associées aux votes à majorité simple, ils se sont contentés de résoudre le problème de marchandage du jeu à utilités non transférables associé à la fonction d'effectivité. Cette réduction affaiblit leurs résultats en matière de choix social car la non vacuité des ensembles du marchandage du jeu à utilités non transférables associé n'assure pas l'existence d'une issue sociale stable au sens du marchandage en fonction d'effectivité : il est possible que les ensembles du marchandage du jeu coopératif associé ne soient pas vide alors que l'organisation souffre du problème de conflit, sans issue sociale négociable.

Ainsi, nous proposons dans ce travail les définitions de la contre-objection selon Mas-Colell et selon Zhou en fonction d'effectivité. Ce travail a trois parties. Après un préliminaire qui discute des définitions des contre-objections dans les jeux coopératifs, nous définissons l'ensemble du marchandage au sens de Mas-Colell et au sens de Zhou en fonction d'effectivité. Dans la deuxième partie, nous comparons ces deux ensembles et étudions leurs propriétés. En troisième partie, nous proposons des classes de fonction d'effectivité où la stabilité au sens des marchandages et la stabilité au sens du coeur sont équivalentes.

2 Notations et définitions

L'ensemble des joueurs est représenté par un ensemble fini $N = \{1, \dots, n\}$ et l'ensemble des alternatives par un ensemble fini $A = \{x_1, \dots, x_m\}$. Une coalition est un sous ensemble S de N. Si $Y \subset X$, alors $Y^c = X \setminus Y$. Notons $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties d'un ensemble X et $\mathcal{P}_0(X) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$. Une *fonction d'effectivité* est une fonction $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ telle que $E(\emptyset) = \emptyset$, $B \in E(N)$, $\forall B \in \mathcal{P}_0(A)$ et $A \in E(S)$, $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$; E est dite monotone si $\forall B, C \in \mathcal{P}_0(A), \forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$ tels que $B \in E(S)$, alors $C \supset B$ et $T \supset S$ entraîne $C \in E(T)$. La fonction E est maximale si $\forall B \in \mathcal{P}_0(A)$, $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, $B \notin E(S)$ entraîne $B^c \in E(S^c)$. La fonction E est anonyme si $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$ tel que $|S| = |T|$, alors $E(S) = E(T)$. La fonction E est neutre si $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, $\forall B,\ C \in \mathcal{P}_0(A)$ tel que $|B| = |C|$, alors $B \in E(S)$ si et seulement si $C \in E(S)$. La fonction E est simple si $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, $E(S) = \mathcal{P}_0(A)$ ou $E(S) = \{A\}$.

On note $\mathcal{L}(A)$ l'ensemble des relations d'ordre linéaires sur A. Un $S-$profil, $S \in \mathcal{P}_0(N)$, est un élément de $\mathcal{L}(A)^S$. Pour $i \in N,\ S = \{i_0, \dots, i_s\} \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \in \mathcal{P}_0(A)$, notons

$$u^i(B) = \min_{x \in B} u^i(x) \text{ et } u^S(B) = \left(u^{i_0}(B), \dots, u^{i_s}(B)\right)$$

et pour $u \in \mathcal{L}(A)^N, S \in \mathcal{P}_0(N)$, $B, C \in \mathcal{P}_0(A)$, nous notons

$$u^S(B) > u^S(C) \Leftrightarrow u^S(x) > u^S(y), \forall x \in B, y \in C,$$

$$E^\star(S, u^N) = \left\{B \in E(S) \mid \nexists B' \in E(S) \text{ tel que } u^S(B') > u^S(B)\right\}.$$

3 Les ensembles du marchandage

Une *objection* contre une alternative $x \in A$ dans un profil $u^N \in \mathcal{L}(A)^N$ est une paire (S, B) satisfaisant

$$B \in E(S) \text{ et } \forall y \in B, \forall i \in S \ : u^i(y) > u^i(x)$$

Définition 3.1 (Mas-Colell,1989). *Une contre-objection contre (S, B) est une paire (T, C) telle que*

$$C \in E(T) \text{ et } u^T(C) > (u^{T\setminus S}(x), u^{T\cap S}(B))$$

Une objection sans contre-objection est dite justifiée au sens de Mas-Colell.

Définition 3.2 (Zhou, 1994). *Une contre-objection contre (S, B) est une paire (T, C) telle que*

$$C \in E(T), \quad S \setminus T, S \cap T, T \setminus S \neq \emptyset \text{ et } u^T(B) > (u^{T\setminus S}(x), u^{T\cap S}(B))$$

Une objection sans contre-objection est dite justifiée au sens de Zhou.

La définition originale de Zhou est définie par $u^T(C) \geq (u^{T\setminus S}(x), u^{T\cap S}(B))$. Comme $u^N \in \mathcal{L}(A)^N$, $S \cap T \neq \emptyset$ et $u^i(C) \geq u^i(B) > u^i(x), \ \forall i \in S \cap T$, alors $x \notin C$. Donc, $u^{T\setminus S}(C) \geq u^{T\setminus S}(x) \Leftrightarrow u^{T\setminus S}(C) > u^{T\setminus S}(x)$

Pour mettre en évidence la différence entre ces deux définitions, prenons quelques exemples.

Exemple 3.3. Paretienneté *Soient $N = \{1, 2, 3\}$, $A = \{a, b, c, d\}$ et $E(\{1, 2\}) = \{c, d\}^+, E(\{3\}) = \{a\}^+, \ E(N) = \mathcal{P}_0(A)$ et si S ne contient ni $\{1, 2\}$ ni $\{3\}$ alors $E(S) = \{A\}$.*

Soit u^N le profil défini dans le tableau suivant :

d	d	a
c	c	b
a	a	d
b	b	c
u^1	u^2	u^3

Nous avons :

$$\mathcal{C}(E, u^N) = \emptyset,$$

et $\forall i \in N,\ u^i(a) > u^i(b)$. C'est-à-dire que b est Pareto dominé.

Mas-Colell : la contre-objection peut défendre une alternative Pareto dominée. L'alternative b est Pareto dominée. Pourtant, toutes les objections contre b admet une Mas-Colell contre-objection. En effet, supposons que $(N, \{a\})$ soit l'objection contre b, alors, la coalition $\{1, 2\}$ peut dis-crédibiliser cette action car $\{c, d\} \in E(\{1, 2\})$ et ces deux joueurs préfèrent les alternatives de $\{c, d\}$ à $\{a\}$. Donc, l'opposition $(N, \{a\})$ est neutralisée. Si $(\{1, 2\}, \{c, d\})$ est une objection contre b, alors la paire $(\{3\}, \{a\})$ est une contre-objection, et si $(\{3\}, \{a\})$ est une opposition contre a, la paire $(\{1, 2\}, \{c, d\})$ est une contre-objection.

Zhou : l'opposition à l'unanimité n'est pas discutable. En effet, les sous ensembles propres de N n'ont pas le droit d'opposer à l'objection faite par N.

On observe à partir de cet exemple que la négociation selon Mas-Colell doit se faire en deux temps : éliminer les alternatives non Pareto puis lancer la procédure de l'objection contre-objection. Par contre, la définition de Zhou supprime automatiquement les alternatives non Pareto.

Exemple 3.4. *Soient* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$*,* $A = \{a, b, c, d\}$ *et soit* E *la fonction d'effectivité définie par :* $E(\{1, 3\}) = \{a\}^+$*,* $E(\{1, 4\}) = \{a, b\}^+$*,* $E(\{3, 5\}) = \{b\}^+$*,* $E(\{4, 5\}) = \{a, b, d\}^+$*,* $E(\{2\}) = \{a\}^+$ *; et pour* $S \supset S_k$*,* $E(S) = E(S_k)$*,* $=1 \ldots 5$*.*

Soit u^N le profil montré dans le tableau suivant :

b	a	b	d	b
d	b	c	b	d
a	d	a	a	c
c	c	d	c	a
u^1	u^2	u^3	u^4	u^5

Zhou : une objection qui n'obtient pas l'adhésion totale de ses membres peut être crédible. Considérons l'objection $(\{1, 2, 3, 5\}, \{b\})$ contre d. L'alternative b est au top sauf pour 2, qui préfère a à b et qui a le pouvoir de forcer a. Mais, la condition de Zhou entraîne que le joueur 2 n'a pas le droit de contester $(\{1, 2, 3, 5\}, \{b\})$, *comme si* il était tenu par son accord avec $\{1, 3, 5\}$.

Zhou : une objection améliorable peut être crédible. Considérons l'objection $(\{1, 4\}, \{a, b, d\})$ contre c. Cette objection est nettement améliorable en terme de précision et en terme de préférence en proposant $(\{1,4,5\},\{b,d\})$. Toutefois, la condition imposée par Zhou interdit la contre-objection $(\{1,4,5\},\{b,d\})$.

Le marchandage est dans l'objectif de récupérer les alternatives négociables rejetées par le coeur. L'exemple suivant montre que les contre-objections des marchandages selon Mas-Colell et Zhou n'apportent rien de nouveau par rapport au coeur dans un profil où le contraste entre les préférences des joueurs est élevé.

Exemple 3.5. [Moulin, (10)] *Soient* $N=\{1,\ldots,5\}$, $A=\{a,b,c,d,e\}$ *et* $E:\mathcal{P}(N)\longrightarrow\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ *la fonction d'effectivité définie par* $B\in E(S) \Leftrightarrow |B|\geq\left\lceil\frac{m}{n}s\right\rceil$ *telle que* E *soit anonyme, i.e.* $|T|=|S|$, *alors* $E(T)=E(S)$, *et neutre i.e.* $|T|=|S|$, *alors* $B\in E(S)$ *si et seulement si* $C\in E(S)$.

Soit u^N le profil défini par :

$$\begin{array}{cccc}
a & e & d & c \\
b & a & e & d \\
c & b & a & e \\
d & c & b & a \\
e & d & c & b \\
\hline
u^{1,5} & u^2 & u^3 & u^4
\end{array}$$

Nous avons :

$$\mathcal{C}(E,R^N)=\{a\}$$

- *Marchandage sur* b : $\forall S\in\{S\mid\{4\}\subset S\subset N\}$, $\exists B\in E(S)$ tel que (S,B) soit une objection contre b. Inversement, toutes les objections contre b sont de la forme (S,B), $S\ni 4$. Comme $(N,\{a\})$ est une objection contre b, alors l'exclusion de b n'est pas discutable selon Zhou. Pour Mas-Colell, les coalitions $S\in\{S\mid S\ni 4\}$ peuvent en discuter mais la condition de la rationalité ou de la cohérence des préférences ne permettent pas de réaliser ces objections.
- *Marchandage sur* c : Les objections contre c sont $(S,\{a,b\})$ où $S\in\{S\mid S\subset\{1,2,3,5\},|S|=3\}$, $(\{1,2,3,5\},\{a\})$, $(\{2,3\},\{a,b,e\})$ et $(\{3\},\{a,b,d,e\})$. La seule discussion dans le marchandage de Zhou se passe entre $\{1,3,5\}$ et $\{2,3\}$, qui se neutralisent mutuellement. Quant au marchandage de Mas-Colell, il y a plusieurs coalitions qui peuvent participer à la négociation, notamment un débat entre $\{3\}$ et $\{1,2,5\}$. Toutefois, dans les deux versions, l'objection $(\{1,2,3,5\},a)$ est justifiée contre c.
- *Marchandage sur* d *et* e *:* Comme précédemment, ces deux alternatives ont des objections crédibles, que ce soit selon Zhou ou selon Mas-Colell.

En conclusion, la seule solution de ces marchandages est $\{a\}$.

Dans ce qui suit, nous n'étudions que le marchandage selon Mas-Colell sauf si le résultat n'est valide que pour le marchandage au sens de Zhou.

3.1 La non vacuité des ensembles du marchandage

Pour $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$, nous associons u^N qui représente les fonctions d'utilité associées aux préférences $R^1, \dots R^n$. Le coeur d'une fonction d'effectivité E dans $u^N \in \mathcal{L}(A)^N$ est

$$\mathcal{C}(E, u^N) = \{x \in A \mid \nexists\ (S, B) \text{ tel que } (S, B) \text{ soit une objection contre } x\}$$

Notons

$$\mathcal{I}(E, u^N) = \left\{x \in A \mid \nexists y \in A, u^N(y) > u^N(x)\right\},$$

l'ensemble des alternatives non Pareto dominées.

Définition 3.6. *L'* ensemble du marchandage au sens de Mas-Colell *de E dans $u^N \in \mathcal{L}(A)^N$ est donné par*

$$\mathcal{B}_m(E, u^N) = \mathcal{I}(E, u^N) \cap \{x \in A \mid\ x \text{ n'admet aucune objection justifiée selon Mas-Colell }\}$$

Définition 3.7. *L'* ensemble du marchandage au sens de Zhou *de E dans un profil u^N est donné par*

$$\mathcal{B}_z(E, u^N) = \{x \in A \mid\ x \text{ n'admet aucune objection justifiée au sens de Zhou}\}$$

Le marchandage en fonction d'effectivité cherche une solution parmi les alternatives proposées. Toutefois, le mécanisme de marchandage peut être perçu comme une procédure de fabrication d'états sociaux, en dehors des alternatives initialement discutées, dans lesquels les joueurs peuvent s'entendre. Selon la procédure de la non-objection, un état social $x \in \mathbb{R}^n$ est réalisable s'il existe $a \in A$ tel que $x \leq u^N(a)$. Dans ce cas, la distribution des pouvoirs aux coalitions est définie par :

$$V_{E,u^N}(S) = \left\{x \in \mathbb{R}^S_+ \mid \exists B \in E(S), u^S(B) \geq x\right\}$$

la fonction $S \mapsto V_{N,u^N}(S)$ correspond au jeu à utilités non transférables associés à la fonction d'effectivité E dans le profil u^N. Remarquons que la classe des jeux associés à une fonction d'effectivité ne représente qu'une petite partie des jeux à utilités transférables. Par exemple pour $N = \{1, 2, 3\}$, alors $\forall i \in N,\ V(E, u^N)(\{1\})$ est un segment, et $\forall S \in N, |S| = 2,\ \ V_{E,u^N}(S)$ est un pavé de $\mathbb{R}^2$. Cette inclusion entraîne que pour tout $E : \mathcal{P}_0(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, la stabilité de V_{E,u^N} exige moins de conditions que la stabilité d'un jeu NTU quelconque. Il va de soi l'importance de la connaissance des relations entre la stabilité de E et la stabilité de $V(E, u^N)$

Rappel. *Une objection contre $x \in \partial V(E, u^N)$* [1] *est une paire (S, y), $y_S \in \partial V_{E,R^N}(S)$ telle que $y_S \gg x_S$* [2]. *Une contreobjection selon Mas-Colell contre*

1. Pour une sous ensemble Y d'un espace topologique (X, τ), $\overline{Y}$ désigne la fermeture de Y dans (X, τ) et $\partial Y = \overline{Y} \setminus Y$,
2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, x_S désigne la projection de x sur $\mathbb{R}^{|S|}$.

(S, y) est une paire (T, z) tel que

$$z \in V_{E,R^N}(T) \text{ et } z_T > (y_{T\cap S}, x_{T\setminus S})$$

L'ensemble du marchandage à la Mas-Colell de V_{E,u^N} est défini par :

$$\mathcal{B}_m(V_{E,u^N}) = \{x \in \partial V_{E,u^N}(N) \mid \text{toute objection contre } x \text{ a au moins une m.c.o.}\}$$

Premièrement, nous avons :

Proposition 3.8 (Peleg, (1983))**.** *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité et $u^N \in \mathcal{L}(A)^N$. Alors :*

$$\mathcal{C}(V_{E,R^N}) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{C}(E, R^N) \neq \emptyset$$

Cette implication montre que le coeur d'une fonction d'effectivité ne diffère pas du coeur du jeu NTU associé. Pour chaque x dans le coeur du jeu NTU associé, il existe un état social $a \in A$ tel que $x = u^N(a)$. Cette implication permet en outre de trouver des conditions du coeur-stabilité d'une fonction d'effectivité. Par exemple, pour montrer qu'une fonction d'effectivité convexe est stable, B. Peleg a démontré (1) qu'une fonction d'effectivité est convexe si et seulement si le jeu NTU associé est convexe. De même, pour montrer qu'une fonction d'effectivité équilibrée est convexe, Kolpin(8) a montré qu'une fonction d'effectivité est équilibrée si et seulement si le jeu NTU associé est équilibré.

Quant à la solution du marchandage, nous avons l'inclusion suivante :

Proposition 3.9. *Pour tout profil $u^N \in \mathcal{L}(A)^N$, nous avons*

$$\mathcal{B}_m(E, u^N) = \{a \in A | u^N(a) \in \mathcal{B}_m(V_{E,R^N})\}$$

PREUVE : $\Rightarrow$. Soit $a \in \mathcal{B}_m(E, u^N)$ et montrons que $x = u^N(a) \in \mathcal{B}(V_{E,u^N})$. Soit (S, y) une objection contre x. Donc, $y_S \in V_{E,u^N}(S)$ et $y_S > x_S$. Par définition de V_{E,u^N}, il existe $B \in E(S)$ tel que $u^S(B) \geq y_S > x_S = u^S(a)$. Par conséquent, (S, B) est une objection contre $a \in A$. Comme $a \in \mathcal{B}_m(E, u^N)$, alors il existe $(T, C), C \in E^\star(T, u^N)$, une Mas-Colell contre-objection contre (S, B). Posons $z_T = u^T(C)$. Donc, $z_T \in \partial V_{E,u^N}(S)$ et $z_T > (y_{T\cap S}, x_{T\setminus S})$. C'est-à-dire que (T, z) est une contre-objection à (S, y).

$\Leftarrow$. Soit $x \in \mathcal{B}_m(V_{E,u^N})$ tel qu'il existe $a \in A$ satisfaisant $x = u^N(a)$. Montrons que $a \in \mathcal{B}_m(E, u^N)$.
Soit (S, B) une objection contre a telle que pour aucun $B' \in E(S)$ nous avons $u^S(B') > u^S(B)$. Alors, $y_S = u^S(B) \in \partial V_{E,u^N}(S)$ et $y_S = u^S(B) > u^S(a) = x_S$. D'où (S, y) est une objection contre x. Comme $x \in \mathcal{B}_m(V_{E,u^N})$, alors il existe (T, z), $z_T \in \partial V_{E,n^N})$ tel que $z_T > (y_{T\cap S}, x_{T\setminus S}) \geq (u^{T\cap S}(B), u^{T\setminus S}(a))$. Puisque $z_T \in V_{E,u^N}(T)$, alors il existe $C \in E(T)$ tel que $u^T(C) \geq z_T$. Par suite, $u^T(C) > (u^{T\cap S}(B), u^{T\setminus S}(a))$.

□

Cette proposition 3.9 donne l'inclusion :

$$\forall u^N \in \mathcal{L}(A)^N, \quad u^N(\mathcal{B}_m(E, u^N)) \subset \mathcal{B}_m(V, u^N)$$

qui est une inclusion stricte. En effet, dans Peleg & Sudhölter (12), $|A| \leq 5$ entraîne $\mathcal{B}_m(V_{E_q,u^N}) \neq \emptyset, \forall u^N \in \mathcal{L}(A)^N$ (12). Donc, en particulier, le jeu NTU de l'exemple ci-dessous est marchandage stable au sens de Mas-Colell. C'est à dire qu'il existe une solution x du marchandage du jeu NTU associé sans qu'il y ait un état social $a \in A$ du marchandage en effectivité tel que $x = u^N(a)$.

Exemple 3.10. [Peleg et Sudhölter, (14)]*Soient* $n = 3$, $A = \{a, b, c\}$ *et* E *la fonction d'effectivité définie par :* $E(S) = \mathcal{P}_0(A) \Leftrightarrow |S| \geq 2$

Soit et $u \in \mathcal{L}(A)^N$ le profil défini comme suit :

a	c	b
b	a	c
c	b	a
u^1	u^2	u^3

Nous avons $\mathcal{B}_m(E, u^N) = \emptyset$ alors que $\forall u^N \in \mathcal{L}(A)^N$, $\mathcal{B}_m(V_{E,u^N}) \neq \emptyset$. En particulier,

$$\mathcal{B}_m(V_{E,u^N}) = \left\{(u^1(b), u^1(a), 0), (0, u^1(a), u^1(c)), (u^1(b), 0, u^1(c))\right\}$$

Donc, pour tout $x \in \mathcal{B}_m(V_{E,u^N})$, il n'existe pas $a \in A$ tel que $x = u^N(a)$.

Nous terminons ce paragraphe par l'exemple suivant qui montre qu'une alternative moyennement préférée par tous les joueurs est naturellement dans le marchandage.

Exemple 3.11. [Peleg et Sudhölter, (12)] *Soient* $N = \{1, \ldots, n\}$, $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$ *et* $E_{\frac{n}{2}}$ *l'effectivité définie par :* $\forall S,\ |S| \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1;\ E_{\frac{n}{2}}(S) = \mathcal{P}_0(A)$ *et* $\forall S,\ |S| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor;\ E_{\frac{n}{2}}(S) = \{A\}$. *Notons* $\mathcal{W}_{\frac{9}{2}} = \left\{S \mid E_{\frac{9}{2}}(S) = \mathcal{P}_0(A)\right\}$.

Prenons $N = \{1, \ldots, 9\}$, $A = \{a, b, c, d\}$ et $E = E_{\frac{9}{2}}$. Soit $u^N \in \mathcal{L}(A)^N$ le profil défini dans le tableau suivant :

a	a	b	b	c	c	a	c	b
b	c	a	c	a	b	b	a	c
d	d	d	d	d	d	d	d	d
c	b	c	a	b	a	c	b	a
u^1	u^2	u^3	u^4	u^5	u^6	u^7	u^8	u^9

- *Les objections contre* a : Nous avons $\{i \mid u^i(c) > u^i(a)\} = \{4,5,6,8,9\} \in \mathcal{W}_{\frac{9}{2}}$, $\{i \mid u^i(b) > u^i(a)\} = \{3,4,6,9\} \notin \mathcal{W}_{\frac{9}{2}}$ et $\{i \mid u^i(d) > u^i(a)\} = \{4,6,9\} \notin \mathcal{W}_{\frac{9}{2}}$. Alors, $(\{4,5,6,8,9\},\{c\})$ est la seule objection contre a. Or, une contre-objection est une objection, donc, une objection unique est justifiée. Par conséquent, $a \notin \mathcal{B}_m(E,u^N)$.

- *Les objections contre* b : Nous avons $\{i \mid u^i(a) > u^i(b)\} = \{1,2,5,7,8\} \in \mathcal{W}_{\frac{9}{2}}$, $\{i \mid u^i(c) > u^i(b)\} = \{2,5,6,7\} \notin \mathcal{W}_{\frac{9}{2}}$ et $\{i \mid u^i(d) > u^i(b)\} = \{2,5,8\} \notin \mathcal{W}_{\frac{9}{2}}$. Alors, $(\{1,2,5,7,8\},\{a\})$ est la seule objection contre b. Par conséquent, $b \notin \mathcal{B}_m(E,u^N)$.

- *Les objections contre* c. Nous avons : $\{i \mid u^i(a) > u^i(c)\} = \{1,2,3,7\} \notin \mathcal{W}_{\frac{9}{2}}$, $\{i \mid u^i(b) > u^i(c)\} = \{1,3,4,7,9\} \in \mathcal{W}_{\frac{9}{2}}$, $\{i \mid u^i(d) > u^i(c)\} = \{1,3,7\} \notin \mathcal{W}_{\frac{9}{2}}$. Donc, $(\{1,3,4,7,9\},\{b\})$ est la seule objection contre c. Par conséquent, $c \notin \mathcal{B}_m(E,u^N)$.

- *Les objections contre* d. Nous avons : $\{i \mid u^i(a) > u^i(d)\} = \{1,2,3,5,7,8\} = S_1$, $\{i \mid u^i(b) > u^i(d)\} = \{1,3,4,6,7,9\} = S_2$, $\{i \mid u^i(c) > u^i(d)\} = \{2,4,5,6,8,9\} = S_3$. En tout, il y a 21 objections contre d.
Pour tout $k = 1 \ldots 3 \mod 3$, $S \subset S_k$ tel que $|S| \geq 5$, (S_k, x_k) où $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, est une objection contre d. Si S, T sont les objections et contre-objections telles que $S \cap T \neq \emptyset$, alors $S \cap T \subset \{i \mid u^i(a) > u^i(d)\} \cap \{i \mid u^i(b) > u^i(d)\} = \{1,7\}$. Dans ce cas, a est une top-alternative pour $i \in S \cap T$, ce qui donne $\{i \mid u^i(a) > u^i(d)\}$ peut faire une contre-objection à l'objection $(\{i \mid u^i(b) > u^i(d)\},\{b\})$ mais $\{i \mid u^i(b) > u^i(d)\}$ ne peut pas faire l'inverse. Ici, les solutions selon Mas-Colell et Zhou sont identiques, après avoir supprimé les contre-objections faites par les sous et les sur ensembles. En outre, toutes les objections contre d admet au moins une contre-objection. Par exemple, $\{i \mid u^i(a) > u^i(d)\} = \{1,2,3,5,7,8\}$ est neutralisé par $(\{4,5,6,8,9\},\{c\})$. Alors :

$$\mathcal{B}_m(E,u^N) = \{d\} \quad \text{et donc } u^N(d) \in \mathcal{B}_m(V_{E,u^N})$$

Remarquons que l'alternative d est presque la pire alternative de tous les joueurs, mais elle est la seule qui répond à l'attente du marchandage. Ici, si la décision a été prise avec la règle de la pluralité, d ne sera jamais une solution dans ce profil. De même, si la décision a été prise selon la règle de Borda où les scores de Borda sont $B(a,u^N) = B(b,u^N) = B(c,u^N) = 3$ et $B(d,u^N) = -7$, alors d ne sera jamais sélectionnée.

Avant d'entrer dans le coeur du problème, nous tenons à remarquer que les marchandages stabilités et le coeur stabilité ne sont visiblement différents que si l'on considère les fonctions d'effectivité non-monotones. La non-invariance des marchandages stabilités par passage à la couverture monotone joue donc un rôle crucial pour la différenciation de ces deux notions. En effet, Propriété. *Le marchandage n'est pas invariant par passage à la couverture monotone.*

Notons $\prec$ la relation entre fonctions d'effectivité définie par : pour $E, F : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, $E \prec F$ si et seulement si $\forall S \in \mathcal{P}(N)$; $E(S) \subset F(S)$. La *couverture monotone* d'une fonction d'effectivité $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ est la fonction d'effectivité E^m telle que pour toute fonction d'effectivité monotone $F : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ telle que $E \prec F$, alors $E^m \prec F$.

Proposition 3.12 (Peleg). *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité. Alors,*

$$\mathcal{C}(E, u^N) \neq \emptyset, \forall u^N \in \mathcal{L}(A)^N \Rightarrow \mathcal{C}(E^m, u^N) \neq \emptyset, \forall u^N \in \mathcal{L}(A)^N$$

La monotonie est une propriété naturelle d'une fonction d'effectivité dans le sens où l'intégration d'un nouveau membre dans une coalition ne nuit pas à son pouvoir. Donc, cette proposition exprime que la connaissance de la répartition de pouvoir aux coalitions essentielles : $E(S) \neq E(S \setminus \{i\})$, $\forall i \in S$, est suffisante pour déterminer la stabilité de E. Quand au marchandage, cette proposition n'est plus valide dans le sens où les objections supplémentaires modifieraient l'issue du jeu. En effet, considérons l'exemple suivant :

Exemple 3.13. *Soit $N = \{1, 2, 3\}$, $A = \{a, b, c\}$ et E la fonction d'effectivité définie par : pour tout $i, j \in N$, $E(\{i\}) = E(N) = \mathcal{P}_0(A)$ et $E(\{i, j\}) = \{A\}$.*

Alors pour tout profil u^N, $\mathcal{B}_m(E, u^N) \neq \emptyset$. Pourtant l'ensemble du marchandage de la couverture monotone E^m de E est vide dans le profil suivant :

$$\begin{array}{ccc} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \\ \hline u^1 & u^2 & u^3 \end{array}$$

4 Les marchandages stabilités et le coeur-stabilité

Une fonction d'effectivité E est *coeur stable* si et seulement si

$$\forall u^N \in \mathcal{L}(A)^N : \ \mathcal{C}(E, u^N) \neq \emptyset,$$

elle est dite *marchandage-stable au sens de Mas-Colell* si

$$\forall u \in \mathcal{L}(A)^N \ : \mathcal{B}_m(E, u^N) \neq \emptyset,$$

et *marchandage-stable au sens de Zhou* si

$$\forall u \in \mathcal{L}(A)^N \ : \mathcal{B}_z(E, u^N) \neq \emptyset.$$

On note $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}_m$ et $\mathcal{B}_z$ l'ensemble des fonctions d'effectivité $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ coeur stable, marchandage stable au sens de Mas-Colell et marchandage stable au sens de Zhou respectivement.

Dans un profil donnée, la relation entre le coeur et les ensembles du marchandage est donnée par

Proposition 4.1. *Si $E : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(N))$ est une fonction d'effectivité. Alors, $\forall u^N \in \mathcal{L}(A)^N$ nous avons :*

$$\mathcal{C}(E, u^N) \subset \mathcal{B}_m(E, u^N) \cap \mathcal{B}_z(E, u^N)$$

Plus précisément,

Exemple 4.2. *Il existe une fonction d'effectivité monotone et un profil $u^N \in \mathcal{L}(A)^N$ tels que $\mathcal{C}(E, u^N) \subsetneq \mathcal{B}_m(E, u^N) \cap \mathcal{B}_z(E, u^N)$.*

Soient $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{x, y, z, t\}$ et E la fonction d'effectivité définie comme suit : Pour tout $S \in \{S \mid \ |S| \geq 2\} \backslash \{1, 3\}$, $E(S) = \mathcal{P}_0(A)$, pour tout $|S| = 1$, $E(S) = \{B \subset A||B| \geq 3\}$, $E(\{3\}) = E(\{1, 3\}) = \{B \mid |B| \geq 2\}$. Soit u^N le profil consigné dans le tableau suivant :

x	t	z	y
y	x	y	t
z	z	x	z
t	y	t	x
u^1	u^2	u^3	u^4

Alors

$$\mathcal{C}(E, u^N) = \emptyset, \mathcal{B}_z(E, R^N) = \{z\} \text{ et } \mathcal{B}_m(E, R^N) = \{z, t\}$$

Le coeur. Nous avons : $(\{1\}, \{x, y, z\})$ est une objection à t, $(\{2\}, \{t, x, z\})$ est une objection à y, $(\{4\}, \{y, t, z\})$ est une objection à x et $(\{1, 2\}, \{x\})$ est une objection à z. Donc :

$$\mathcal{C}(E, u^N) = \emptyset$$

L'ensemble du marchandage selon Zhou. La paire $(\{2, 4\}, \{t\})$ est une objection justifiée contre x, $(\{1, 2\}, \{x\})$ est une objection justifiée contre y et la paire $(\{1, 3, 4\}, \{y\})$ est une objection justifiée selon Zhou contre t. Par contre, les objections contre z sont $(\{1, 2\}, \{x\})$, $(\{1, 4\}, \{y\})$ et $(\{2, 4\}, \{t\})$. On peut vérifier que $z \in \mathcal{B}_z(E, u^N)$.

L'ensemble du marchandage selon Mas-Colell. Les objections contre t sont $(\{3\}, \{y, z\})$, $(\{1, 2\}, \{x\})$ et $(\{1\}, \{x, y, z\})$. La paire $(\{3\}, \{y, z\})$ est la contre-objection à $(\{1,2\},\{x\})$, la paire $(\{1\},\{x,y,z\})$ est la contre-objection à $(\{3\},\{y,z\})$ et $(\{1,2\},\{x\})$ est la contre-objection à $(\{1\},\{x,y,z\})$. D'où

$$\mathcal{B}_m(E,R^N)=\{z,t\}$$

Entre les stabilités, nous avons l'inclusion suivante :

Proposition 4.3. *Il existe une fonction d'effectivité $E:\mathcal{P}(A)\longrightarrow\mathcal{P}(\mathcal{P}(N))$ telle que $E\in\mathcal{B}_m\setminus\mathcal{C}$.*

Preuve Soit $N=\{1,2,3\}\cup\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$, $A=\{x_1,x_2,x_3\}$ et soit E la fonction d'effectivité définie comme suit :

$$\begin{cases}\forall k,\ p=1,2,3 \mod 3,\ E(\{k,k+1,\alpha_p\})=\{x_{k+2}\}^+\\ \text{Dans les autres cas, } E(S)=\{A\}.\end{cases}$$

Nous allons démontrer que tout profil u^N, $\mathcal{B}_m(E,R^N)\neq\emptyset$ alors qu'il existe un profil u^N tel que $\mathcal{C}(E,u^N)=\emptyset$

- *Profils dans lesquels le coeur de E est vide.* Notons $A=\{x_k,x_s,x_{\bar{s}}\}$

Objections contre x_k. Les objections contre x_k sont de la forme $(\{k,s,\alpha_p\},x_{\bar{s}})$ où $s\neq\bar{s}$ sont des éléments de $\{k-1,k+1\}=\{k+2,k+1\}$. Cette condition oblige les joueurs k et s pour choisir des préférences qui satisfont :

$$\begin{cases}u^k(x_{\bar{s}})>u^k(x_k)\\ u^s(x_{\bar{s}})>u^s(x_k)\end{cases}\tag{1}$$

Objections contre x_s. Les objections contre x_s sont de la forme $(\{s,l,\alpha_p\},x_{\bar{l}})$ où $l\neq\bar{l}$ sont des éléments de $\{k,\bar{s}\}$. De là, distinguons deux cas :

Supposons que $l=k$. Alors, les préférences de k et de s satisfont :

$$\begin{cases}u^k(x_{\bar{s}})>u^k(x_s)\\ u^s(x_{\bar{s}})>u^s(x_s)\end{cases}\tag{2}$$

La combinaison de 1 et de 2 oblige les joueurs k et s à choisir $x_{\bar{s}}$ comme top alternative. Or, la définition de E oblige l'objection contre $x_{\bar{s}}$ à prendre au moins deux joueurs dans $\{1,2,3\}$, ce qui est impossible. Par conséquent :

$$k\neq l$$

Donc, les objections contre x_s sont de la forme $(\{s,\bar{s},\alpha_p\},x_k)$.

Objections contre $x_{\bar{s}}$. De ces deux premiers cas, les objections contre $x_{\bar{s}}$ sont de la forme $(\{\bar{s},k,\alpha_p\},x_s)$. Ainsi, $\mathcal{C}(E,u^N)=\emptyset$ entraîne que le profil de la coalition $\{1,2,3\}$, $u^{1,2,3}$ satisfait :

$$\begin{array}{ccccccc} x_3 & x_1 & x_2 & & x_2 & x_3 & x_1 \\ x_2 & x_3 & x_1 & \text{ou} & x_3 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_1 & x_2 & x_3 \\ u^1 & u^2 & u^3 & & u^1 & u^2 & u^3 \end{array}$$

Montrons que pour tout $u^N \in \mathcal{L}(A)^N$ *tel que* $\mathcal{C}(E, u^N) = \emptyset$*, alors* $\mathcal{B}_m(E, u^N) \neq \emptyset$

- *La non vacuité de* $\mathcal{B}_m(E, u^N)$*,* $\forall u^N \in \mathcal{L}(A)^N$. Notons a_p le pire alternative du joueur α_p $(p = 1 \ldots 3)$ et distinguons trois cas

Les a_p *sont égaux à* x_k*,* $k \in \{1, 2, 3\}$. Les objections contre x_k sont $(\{k, s, \alpha_1\}, x_{\bar{s}})$, $(\{k, s, \alpha_2\}, x_{\bar{s}})$ et $(\{k, s, \alpha_3\}, x_{\bar{s}})$. Il n'est pas difficile de voir que chacune des ces objections est une contre-objection contre les autres.

Deux des a_p *sont égaux à* x_k*,* $k \in \{1, 2, 3\}$. Les objections contre x_k sont $(\{k, s, \alpha_p\}, x_{\bar{s}})$, $(\{k, s, \alpha_{\bar{p}}\}, x_{\bar{s}})$, où $\bar{p} \neq p$ sont dans $\{1, 2, 3\}$. Comme auparavant, chacune des ces deux objections est une contre-objection contre l'autre.

Tous les a_p *sont différents.* Supposons que $a_1 = x_k$, $a_2 = x_s$ et $a_3 = x_{\bar{s}}$. Si $x_{\bar{s}}$ est sur la deuxième position pour 2, alors les objections contre x_s sont $(\{k, s, \alpha_1\}, x_{\bar{s}})$ et $(\{k, s, \alpha_2\}, x_{\bar{s}})$. Dans ce cas $x_s \in \mathcal{B}_m(E, u^N)$. Alors, $x_s \in \mathcal{B}(E, R^N) \cap \mathcal{B}_z(E, R^N)$ ou $x_{\bar{s}}$, même si x_s n'est pas dans le top pour α_3.

Ainsi, $\mathcal{C}(E, u^N) \neq \emptyset$ pour tout $u \in \mathcal{L}(A)^N$ tel que $\mathcal{C}(E, u^N) = \emptyset$.

□

Maintenant, nous allons définir un ensemble de profils qui nous est utile pour la preuve des résultats principaux de ce travail. En effet, pour chaque partition de $N \times A$, $(T_1, \ldots, T_r, C_1, \ldots, C_r)$ nous associons

$$\mathcal{U}(N, A) := \mathcal{U}(T_1, \ldots, T_r, C_1, \ldots, C_r, N, A) = \left\{u \in \mathcal{L}(A)^N \mid u \text{ satisfait } 3\right\},$$

où l'équation 3 est définie par : $\forall k, l = 1 \ldots r \mod r$,

$$\begin{cases} \forall i, j \in T_k & u^i = u^j; \\ \forall i \in T_k & u^i(c_l) > u^i(x), \ \forall x \in C_l; \\ \forall i \in T_k & u^i(C_{k+l}) > u^i(C_{k-1+l}) \end{cases} \tag{3}$$

La structure d'un $u \in \mathcal{U}(N, A)$ est montrée dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccc} C_{k-1} & \ldots & C_{k+\rho-1} & \ldots & C_{k-2} \\ & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & C_{k-1} & \vdots & C_{k+\rho-1} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \\ C_k & \ldots & C_{k+\rho} & & C_{k-1} \\ u^{T_k} & \ldots & u^{T_{k+\rho}} & \ldots & u^{T_{k-1}} \end{array}$$

Théorème 4.4. *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone. Si E est stable au sens du marchandage de Zhou, alors E ne possède aucun cycle circulaire.*

Preuve : Par contraposition. Soient E une fonction d'effectivité circulaire, $(T_1, \ldots, T_r, C_1, \ldots, C_r)$ une partition de $N \times A$ et $c, 1 \leq c \leq r-1$ tels que

$$\forall k = 1 \ldots r,\ C_k \cup \cdots \cup C_{k+c-1} \in E(T_{k+c} \cup \cdots \cup T_{k-1}),$$

et soit $u^N \in \mathcal{U}(N, A)$.

Montrons que $\mathcal{B}_z(E, u^N) = \emptyset$.

Soient $x \in A$ et $k \in \{1, \ldots, r\} \pmod r$ tel que $x \in C_{k-1}$.

- *Premièrement,* $x \neq c_{k-1}$. Alors, $(N, \{c_{k-1}\})$ est une objection justifiée selon Zhou contre x, i.e. $x \notin \mathcal{B}_z(E, u^N)$.

- *Deuxièmement, montrons que* $\forall k = 1 \ldots r \mod r : c_{k-1} \notin \mathcal{B}_z(E, u^N)$.

Posons

$$\rho = \min \left\{ \beta | \bigcup_{l=k}^{k+\beta-1} C_l \in E \left(\bigcup_{l=k+\beta}^{k-1} T_l \right) \right\} \tag{4}$$

De la circularité de E, le nombre ρ existe et $1 \leq \rho \leq p-1$. Par conséquent, si $B = C_k \cup \ldots \cup C_{k+\rho-1}$ et $S = T_{k+\rho} \cup \ldots \cup T_{k-1}$ alors la paire (S, B) est une objection Zhou - justifiée contre c_k.

En effet, si (T, C) est une contre-objection selon Zhou contre l'objection (S, B), nous avons $C \in E(T)$ et $u^T(C) \geq \left(u^{T\cap S}(B), u^{T\setminus S}(c_{k-1})\right)$. Ce qui entraîne :

$$\forall i \in S \cap T,\ u^i(C) \geq u^i(B) \tag{5}$$

$$\forall i \in T \setminus S,\ u^i(C) > u^i(c_{k-1}) \tag{6}$$

Étant donné que $T \setminus S \subset T_k \cdots \cup T_{k+\rho-1}$, alors si $\theta \in [0, \ldots, \rho-1]$ désigne le premier indice satisfaisant $(T \setminus S) \cap T_{k+\theta} \neq \emptyset$, nous obtenons pour tout $i \in (T \setminus S) \cap T_{k+\theta}$

$$\begin{cases} u^i(C_{k-1}) & > \cdots > u^i(C_{k+\theta}) \\ u^i(C_{k+\theta-1}) & > \cdots > u^i(C_{k-1}) \end{cases}$$

Comme $S \cap T \neq \emptyset$ et $T \setminus S \neq \emptyset$, alors des équations 5 et 6, nous avons :

$$x \notin C \text{ et } C \subset C_{k-1} \cup \cdots \cup C_{k+\theta-1} \tag{7}$$

Comme pour tout $i \in N$ et pout tout $x \in C_{k-1}$, $u^i(x) < u^i(c_{k-1})$, alors l'équation 6 donne :

$$C \cap C_{k-1} = \emptyset \tag{8}$$

Sachant que θ est le premier indice satisfaisant $T \cap T_{k+\theta} \neq \emptyset$, alors le choix de S nous permet de conclure que

$$T \setminus S \subset T_{k+\theta} \cup \ldots \cup T_{k+\rho-1}$$
$$T \cap S \subset T_{k+\rho} \cup \ldots \cup T_{k-1}$$

Ce qui donne :

$$T \subset T_{k+\theta} \cup \ldots \cup T_{k+\rho-1} \cup T_{k+\rho} \cup \ldots \cup T_{k-1}$$

Par conséquent, de l'équation 7 et de la monotonie de E,

$$\theta \in \left\{ \beta | \bigcup_{l=k}^{k+\beta-1} C_l \in E\left(\bigcup_{l=k+\beta}^{k-1} T_l \right) \right\}$$

Donc l'équation 8, $\theta < \rho$. D'où une contradiction avec la minimalité de ρ.

□

Corollaire 4.5. *Pour chacune des classes de fonctions d'effectivité suivantes, le coeur stabilité est équivalent au marchandage stabilité à la Zhou.*
1 - Classe des fonctions d'effectivité monotones et simples ;
2 - Classe des fonctions d'effectivité monotones et maximales ;
3 - Classe des fonctions d'effectivité monotones anonymes et neutres.

Preuve : 1- Cf le théorème 4.1 de (15)
2 - Cf le théorème 4.2 de (15).
2 - Cf le théorème 4.4 de (15).

Théorème 4.6. *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone et sur-additive. Si E est stable au sens du marchandage de Mas-Colell, alors E ne possède aucun cycle circulaire.*

Preuve : Par contraposition. Soit E une fonction d'effectivité sur-additive et circulaire, $(T_1, \ldots, T_r, C_1 \ldots, C_r)$ une partition de $N \times A$ et $c, 1 \leq c \leq r-1$ tels que

$$\forall k = 1 \ldots r,\ C_k \cup \cdots \cup C_{k+c-1} \in E(T_{k+c} \cup \cdots \cup T_{k-1}),$$

et soit $u^N \in \mathcal{U}(N, A)$.

Montrons que $\mathcal{B}_m(E, u^N) = \emptyset$.

Soient $x \in A$ et $k \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $x \in C_{k-1}$. De la définition de $\mathcal{U}(N, A)$, nous avons :

$$\forall k = 1 \ldots r,\ \forall x \in C_k \setminus \{c_k\}\ :\ x \notin \mathcal{I}(E, u^N)$$

Montrons que $c_{k-1} \notin \mathcal{B}_m(E, u^N)$, $k = 1 \dots r-1 \mod r$.

Soit $(S_h, B_h)_{h\in H}$ la liste de toutes les objections contre c_{k-1}, $k = 1 \dots r-1$ mod r. Pour $h \in H$, posons

$$x(h) = \min\left\{u^i(z) \mid i \in S_h, z \in B_h\right\}. \tag{9}$$

De la définition de u, $x(h)$ ne dépend que de h, non de $i \in S_h$. Soit $x \in \{x(h) \mid h \in H\}$ tel que

$$\forall i \in \bigcup_{h\in H} S_h, \quad \min\left\{u^i(x), u^i(x(h))\right\} > u^i(c_{k-1}) \Rightarrow u^i(x) \geq u^i(x(h)) \tag{10}$$

C'est-à-dire que s'il existe un joueur $i, i \in S_h$ et $h \in H$ qui préfère x et $x(h)$ à c_{k-1}, alors $x(h)$ est moins préféré que x. Cela nous permet de définir

$$H' = \left\{h \in H \mid u^{S_h}(B_h) = x\right\},$$

et pour $h \in H'$,

$$y(h) = \max\left\{u^i(z) \mid i \in S_h, z \in B_h\right\} \tag{11}$$

Soit alors $y \in \{y(h) \mid h \in H'\}$ tel que

$$\forall i \in \bigcup_{h\in H'} S_h, \quad \min\left\{u^i(y), u^i(y(h))\right\} > u^i(c_{k-1}) \Rightarrow u^i(y) \leq u^i(x(h)) \tag{12}$$

Soit alors B un ensemble d'alternative tel que

$$B \in \left\{B_h \mid h \in H', \min_{z\in B_h} u^{S_h}(z) = x \text{ et } \max_{z\in B_h} u^{S_h}(z) = y\right\}, \tag{13}$$

et soit S la coalition définie par :

$$S = \left\{i \in N \mid u^i(B) > u^i(c_{k-1})\right\}$$

De la définition de $\mathcal{U}(N, A)$, si

$$\theta' = \min\left\{l = 1 \dots r-1 \mid S \cap T_{k+l} \neq \emptyset, k+l = 1 \dots r \mod r\right\},$$

alors

$$S = T_{k+\theta'} \cup \dots \cup T_{k-1} \tag{14}$$

L'objection (S, B) *est Mas-Colell justifiée contre* c_{k-1}.
Si (T, C) est une contre-objection contre (S, B) alors que les contre objections sont des objections, alors il existe $h \in H$ tel que $(T, C) = (S_h, B_h)$. Dans ce cas,

$$u^{S_h}(B_h) > \left(u^{S_h\cap S}(B), u^{S_h\setminus S}(c_{k-1})\right) \tag{15}$$

- *Premier cas* : $S_h \subset S$. L'équation 15 devient

$$u^{S_h}(B_h) > u^S(B)$$

étant donné que $(S, B) = (S_{h'}, B_{h'})$ pour un $h' \in H'$, alors cette dernière équation est incompatible avec 9, 10 et 13.
- *Deuxième cas* : $S \subsetneq S_h$. Des équations 9, 10

$$u^{S_h}(x) \geq u^{S_h}(B_h) \tag{16}$$

Des équations 13 et 15

$$\min_{z \in B_h} u^{S \cap S_h}(z) \quad \geq \min\nolimits_{z \in B_h} u^{S \cap S_h}(B) \quad = u^{S \cap S_h}(x) \tag{17}$$

Les équations 16 et 21 donnent

$$u^{S_h \cap S}(B_h) = u^{S_h}(x) = u^{S_h}(B_h)$$

Donc,

$$h \in H'$$

Des équations 11 et 12,

$$\max_{z \in B_h} u^{S \cap S_h}(z) \quad \geq \max\nolimits_{z \in B_h} u^{S \cap S_h}(z) \quad = u^{S \cap S_h}(y) \tag{18}$$

De la définition de u dans l'équation 3, l'équation 18 devient

$$\max_{z \in B_h} u^{S_h}(z) \geq u^{S_h}(y)$$

Ce qui donne.

$$S_h \subset \left\{ i \mid u^i(B_h) \geq u^i(c_{k-1}) \right\} \subset \left\{ i \mid u^i(B) > u^i(c_{k-1}) \right\} = S$$

- *Troisième cas* : $S \cap S_h = \emptyset$. De la sur additivité de E, il existe $l \in H$ tel que $(S \cup S_h, B_h \cap B) = (S_l, B_l)$. Donc, $u^{S_l}(B \cap B_h) \geq \max \left\{ u^{S_l}(B_h), u^{S_l}(B) \right\}$, i.e. (S_l, B_l) est une contre-objection contre (S, B) avec $S \subsetneq S_l$. Ce qui revient au deuxième cas.

- *Quatrième cas* : $S \cap S_h \neq \emptyset, S_h \setminus S \neq \emptyset, S \setminus S_h \neq \emptyset$. Soit

$$\theta = \min \{ l = 0 \ldots r-1 \mid S_h \cap T_{k+l} \neq \emptyset, k+l = 1 \ldots r \mod r \}$$

De la définition de $\mathcal{U}(N, A)$ (équation 3) et de la monotonie de E, on peut remplacer

$$S_h := T_{k+\theta} \cup \cdots \cup T_{k-1}$$

Donc de l'équation 14, nous revenons au premier ou au deuxième cas.

□

Corollaire 4.7. *Pour chacune des classes de fonctions d'effectivité suivantes, le coeur stabilité est équivalent au marchandage stabilité à la Mas-Colell.*
1 - Classe des fonctions d'effectivité monotones, simples et propres ;
2 - Classe des fonctions d'effectivité monotones, maximales régulières ;
3 - Classe des fonctions d'effectivité monotones, anonymes et neutres sur-additive.

5 Conclusion

Dans une papier commun de H. Keiding & D. Razafimahatolotra, nous proposons un nouvel ensemble du marchandage : l'intersection entre la coalition de l 'objection et la coalition de la contre-objection est non vide. Cette définition nous a permis d'analyser les formes des dialogues dans une distribution de pouvoir donnée. Nous y montrons également que la structure du pouvoir à elle seule n'est pas suffisante pour caractériser la stabilité du marchandage, donc une nouvelle conception de la négociation est proposée.

Références

[1] Abdou, J. et H. Keiding (1991), "Effectivity Functions in Social Choice", Dordrecht : Kluwer Academic press. 8

[2] . Anderson R.M., Trockel W. and Zhou L. (1997), " Nonconverngence of the Mas-Colell and Zhou bargaining sets", Econometrica 65, p 1227-1239. 2

[3] Aumann R. & Maschler M. (1964), "The bargaining set for cooperative games", in Advence in game theory. (M. Dresher, L.S Shapley, and A.W Tucker, Eds), Annals of mathematica Studies No. 52, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ. 2

[4] Dutta B., Ray D., Sengupta K and Vohra R. (1989), "A consistent bargaining set", Journal of economic theory, vol 49, p 93 - 112. `http://www.econ.nyu.edu/user/debraj/Papers/ConsBargJET89.pdf` 2

[5] Einy E. and Wettstein D. (1996), "Equivalence between bargaining sets and the core in simple games", Int J of game theory 25, p 65-71.

[6] Greengerg J. (1987) " The core as abstract stable sets", Mimeo, university of Haifa.

[7] Holzman R. (2001), "The comparability of the classical and the Mas-Colell bargaining sets", Int J Game Theory 29, p 543-553. 2

[8] Kolpin V. (1991), "Mixed effectivity and the essence of stability", Social Choice and Welfare, vol 8, p 51 - 63. 8

[9] Mas-Colell A. (1989), " An equivalence theorem for a bargaining set", Journal of Mathematical Ecnoomics, vol 9, p 129 - 139. 2

[10] Moulin H. (1981), "The proportional veto principle", The Review of Economic Studies, vol 48 N 3. 6

[11] Peleg, B. & Sudhölter, P. (2001), "The dummy paradox of the bargaining set", Working papers 324, University of Bielefeld, Insitute of Mathematical Economics ou `http://ratio.huji.ac.il/dp/dp256.pdf`. 2

[12] Bezalel Peleg & Peter Sudhölter (2005) "On the Non-Emptiness of the Mas-Colell Bargaining Set", Journal of Mathematical Economics Volume 41, Issue 8, p 1060-1068 ou `http://ratio.huji.ac.il/dp/dp360.pdf`. 2, 9

[13] Peleg, B. and P. Südhölter (2007), "Introduction to the theory of cooperative games", 2nd ed., Springer, Berlin Heidelberg New York.

[14] Peleg, B. R Holzman and Peter Sudhölter (2005), "Bargaining sets of majority voting games", Discussion paper, 410, `http://ratio.huji.ac.il/dp/dp410.pdf` 3, 9

[15] Razafimahatolotra D. (2008), "Une contribution à la théorie du pouvoir : Conflits-négociation et stabilité", Thèse de doctorat de troisième cycle (Université Paris 1). 16

[16] U. (1994), "Bargaining set with small coalition", Int J of Game Theory, vol 23, p 49-55.

[17] Shimura K.I. (1997), "Quasi-cores in bargaining sets", Int Jour of game theory, n 26, p 283-302.

[18] Vind K. (1992), "Two wharacterizations of bargaining sets", Journal of Mathematical Economics 21, p 89-97.

[19] Vohra R. and Sorano R. (2002), "Impementing the Mas-Colell bargaining set",.Investigaciones económicas. vol. 27 (2), p 285-298 ou `http://ftp.funep.es/InvEcon/paperArchive/May2002/v26i2a3.pdf`. 2

[20] Zhou L. (1994), " A new bargaining set of an N- person game and endogenous coalition formation", Games and Economic Behaviour 6, p 512-526. 2