

# Équilibre et Stabilité des Pouvoirs dans une Organisation

Dawidson RAZAFIMAHATOLOTRA\*  
École d'Économie de Paris  
Université Paris 1 Panthéon Sorbonne

29 juin 2009

## Résumé

Une fonction d'effectivité n'est pas équilibrée s'il existe une partition généralisée de coalitions qui pourraient faire opposition contre toutes les issues sociales. En 1989, Kolpin montrait qu'une fonction d'effectivité instable n'est pas équilibrée mais que la réciproque est fautive. Nous introduisons la notion d'équilibre fort, une notion déduite de l'équilibre, et montrons que la stabilité, l'équilibre et l'équilibre fort sont équivalents pour les fonctions d'effectivité monotones et simples et pour les fonctions d'effectivité monotones et maximales.

**Mots clés :** Fonction d'effectivité, partition généralisée, équilibre, acyclicité, stabilité.

**JEL Classification :** D70, D71.

**AMS Classification :** 91A44

---

\*Dawidson RAZAFIMAHATOLOTRA, [razafimahatolotra@yahoo.ca](mailto:razafimahatolotra@yahoo.ca) est membre du projet DELICOM. Ce travail fait partie des recherches du programme DELICOM

## 1 Introduction

Une famille d'ensembles est une partition généralisée si la répartition des éléments dans cette famille est équilibrée. En fait partie, les partitions où chaque joueur appartient à un seul ensemble. Pour les jeux à utilités transférables où les coalitions agissent selon leurs valeurs, la connaissance des interventions des familles de coalitions formant une partition généralisée est nécessaire et suffisante pour caractériser la stabilité du jeu : existence d'une solution non opposable (Bondareva, (1963)(2) ; Shapley, (1967)(? )). Cette propriété a été généralisée pour les jeux à utilités non transférables mais elle a perdu la nécessité tout en gardant la suffisance pour la stabilité. Comme les fonctions d'effectivité généralisent, en un certain sens les jeux à utilités transférables et non transférables, il semble naturel qu'il y ait une structure de pouvoir formant une partition généralisée.

Kolpin (1991)(5) a défini l'équilibre de pouvoir d'une fonction d'effectivité tel que si l'on considère une partition généralisée de coalitions, il existe toujours une alternative non opposable par au moins un joueur, quoique ce joueur fasse en faisant partie d'une coalition de la partition généralisée. Si les ensembles de blocage utilisés par les coalitions dans une partition généralisée de coalitions sont connus, cette définition offre une procédure presque algorithmique permettant d'identifier des alternatives non opposables, si celles-ci existent. Toutefois, les propriétés de cette procédure ne permettent pas de déduire si la fonction d'effectivité est stable ou non. Nous avons deux interprétations possibles à cette négativité, lesquelles renvoient aux anomalies suivantes :

Premièrement, en tant que condition suffisante de stabilité, l'interprétation de la distribution équilibrée du pouvoir a tendance à donner moins de pouvoir aux coalitions, et ce, afin d'éviter l'instabilité.

Deuxièmement, en tant que mode de sélection des alternatives stables, la définition considère trop de coalitions ou impose trop de conditions pour que la non vacuité de l'ensemble des alternatives non opposables devienne difficile à atteindre, avec pour effet qu'elle perde sa nécessité pour la stabilité.

Selon nous, ce défaut viendrait du choix de la famille de coalitions car la question d'opposabilité ou non d'une alternative dépend notamment de la possibilité ou non de l'élaboration d'un profil de préférences, et pas seulement de la répartition des joueurs au travers des coalitions. Nous proposons donc dans ce travail de réécrire la définition de Kolpin (5) en remplaçant la partition généralisée par une structure plus adaptée aux fonctions d'effectivité. De ce fait, nous faisons référence à la définition de cycle, introduit par Hans Keiding (4), dont l'absence est la seule condition nécessaire et suffisante pour la stabilité. Ce travail a pour objectif de trouver des classes

de fonctions d'effectivité où la partition généralisée comme le cycle est une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité.

## 2 Préliminaires

Après avoir précisé les notations et définitions de base, nous présentons ici des exemples qui introduisent progressivement la définition d'équilibre de pouvoir en fonction d'effectivité et mettent en évidence les propriétés et les intérêts de la notion d'équilibre de pouvoir en matière d'analyse du pouvoir dans une organisation.

L'ensemble des joueurs est représenté par un ensemble fini  $N = \{1, \dots, n\}$  et l'ensemble des alternatives par un ensemble fini  $A = \{x_1, \dots, x_m\}$ . Une coalition est un sous-ensemble  $S$  de  $N$ . Si  $Y \subset X$ , alors  $Y^c = X \setminus Y$ . Notons  $\mathcal{P}(X)$ , l'ensemble des parties d'un ensemble  $X$  et  $\mathcal{P}_0(X) = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ . Une fonction d'effectivité est une fonction  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  telle que  $E(\emptyset) = \emptyset$ ,  $B \in E(N)$ ,  $\forall B \in \mathcal{P}_0(A)$  et  $A \in E(S)$ ,  $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$ ;  $E$  est dite monotone si  $\forall B, C \in \mathcal{P}_0(A)$ ,  $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$  tels que  $B \in E(S)$ , alors  $C \supset B$  et  $T \supset S$  entraîne  $C \in E(T)$ . La fonction  $E$  est maximale si  $\forall B \in \mathcal{P}_0(A)$ ,  $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$ ,  $B \notin E(S)$  entraîne  $B^c \in E(S^c)$ . La fonction  $E$  est anonyme si  $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$  tel que  $|S| = |T|$ , alors  $E(S) = E(T)$ . La fonction  $E$  est neutre si  $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$ ,  $\forall B, C \in \mathcal{P}_0(A)$  tel que  $|B| = |C|$ , alors  $B \in E(S)$  si et seulement si  $C \in E(S)$ . La fonction  $E$  est simple si  $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$ ,  $E(S) = \mathcal{P}_0(A)$  ou  $E(S) = \{A\}$ . Dans ce cas, on note  $\mathcal{W}(E) = \{S \in \mathcal{P}_0(N) \mid E(S) = \mathcal{P}_0(A)\}$ .

Une  $E$ -configuration d'ordre  $r$  d'une fonction d'effectivité  $E$  est un  $2r$ -uplet  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  tel que  $B_k \in E(S_k)$ ,  $\forall k = 1 \dots r$ . On note  $\mathcal{L}(A)$  l'ensemble des relations d'ordre linéaire sur  $A$ . Un  $R \in \mathcal{L}(A)$  est appelé préférence et un  $S$ -profil est un élément de  $\mathcal{L}(A)^S$ . Une fonction d'effectivité  $E$  est *stable* si et seulement si, pour tout  $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ , il existe  $x \in A$  tel que pour tout  $S \subset N$ , pour tout  $B \in E(S)$  on ne peut pas avoir  $y R^S x, \forall y \in B$ .

**Exemple 2.1.** Soit  $E$  un jeu à deux joueurs  $\{1, 2\}$  et à deux alternatives  $\{x_1, x_2\}$  tel que  $E(\{i\}) = \{\{x_i\}, \{x_1, x_2\}\}$ .

Si l'on connaît la distribution du pouvoir, on peut prévoir l'ensemble des alternatives éliminées, soit par la connaissance des préférences des joueurs, soit par la connaissance des intentions de blocage via la formation des coalitions. Dans le second cas, on peut savoir partiellement les préférences, en sachant que vouloir bloquer une alternative via un ensemble d'alternatives signifie que ces alternatives sont préférées à l'alternative rejetée. Cela nous permet d'avancer les analyses suivantes :

Le joueur  $i$  a le pouvoir de bloquer l'issue sociale  $x_j$ ,  $j \neq i$ . Si  $i$  préfère  $x_j$  à  $x_i$ , alors il n'exerce pas ce pouvoir.

Si, par exemple, 2 est le seul qui manifeste ses propositions en proposant  $x_2$ , alors l'issue sociale sera  $\{x_2\}$ . C'est-à-dire que la seule  $E$ -configuration active (possible de faire opposition contre un état social) est  $(\{2\}, \{x_2\})$ . Le silence de 1 peut se traduire par une préférence de  $x_2$  à  $x_1$  ou tout simplement par une non-action de sa part. Par contre, si 1 propose  $x_1$ , donc l' $E$ -configuration active, qui est d'ordre 2, est  $(\{1\}, \{2\}, \{x_1\}, \{x_2\})$ , alors l'intersection des propositions d'issue sociale ou solution du jeu de ces deux joueurs est vide. Aucune alternative n'est donc sélectionnée.

**Exemple 2.2.** Soit  $E$  un jeu à deux joueurs  $\{1, 2\}$  et à trois alternatives  $\{x_1, x_2, x_3\}$  tel que  $E(\{i\}) = \{\{x_i, x_{i+1}\}, \{x_1, x_2, x_3\}\}$ .

Ici, 1 n'a le pouvoir de bloquer que  $x_3$  et 2 a seulement le pouvoir de bloquer  $x_1$ . Donc,  $x_2$  est non opposable et fera toujours partie des propositions de 1 et de 2, quelles que soient leurs préférences. Dans ce cas, la réunion des alternatives rejetées par ces deux joueurs est un sous-ensemble strict de  $\{x_1, x_2, x_3\}$ .

Si nous augmentons le nombre de joueurs, alors chacun d'entre eux a la possibilité de choisir la coalition avec qui il veut agir contre telle ou telle alternative.

**Exemple 2.3.** Soit  $E$  un jeu à trois joueurs  $N = \{1, 2, 3\}$  et à trois alternatives  $\{x_1, x_2, x_3\}$  tel que  $E(\{i, j\}) = \{\{x_k\}, \{x_k, x_i\}, \{x_k, x_j\}, A\}$  et  $E(\{i\}) = \{A\}$  ( $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ )

Aucun joueur n'a le pouvoir de s'opposer contre une alternative. Donc, pour faire une objection, chaque joueur doit choisir un partenaire en fonction de ses objectifs. Par exemple, si 1 veut proposer  $x_3$ , il a intérêt à choisir 2 comme partenaire. Si 2 veut éviter  $x_1$ , il doit agir avec 3. Supposons que 3 veut aussi éviter  $x_1$ , et propose à 1 d'agir avec lui. Dans ce cas, les coalitions qui ont manifesté leurs intentions sur les issues sociales sont  $S_1 = \{1, 2\}$ ,  $S_2 = \{2, 3\}$  et  $S_3 = \{1, 3\}$ . Ainsi, les propositions de 1 sont  $\{x_2, x_3\}$  où  $x_2$  est une action avec 3 et  $x_3$  une action avec 2. Les propositions de 2 sont  $\{x_1, x_3\}$  et celles de 3 sont  $\{x_1, x_2\}$ . A l'issue du jeu, aucune alternative n'obtient l'intention de proposition d'issue sociale de tous les joueurs. C'est-à-dire que si  $B_k = \{x_{k+2}\}$ ,  $k = 1, 2, 3 \pmod 3$  nous avons :

$$\bigcap_{i \in N} \bigcup_{k | S_k \ni i} B_k = \emptyset$$

Ces trois exemples ont montré comment les joueurs choisissent leurs partenaires et comment on obtient l'issue sociale du jeu en fonction de la la

structure de la  $E$ -configuration. La question qui nous occupe maintenant est celle des relations qu'il y a entre les propriétés de ces coopérations et l'instabilité. Par exemple, si les joueurs se partagent en famille de coalitions deux à deux disjoints, seront-ils en mesure de déstabiliser l'organisation? Inversement, peut-on décrire les propriétés des familles de coalitions qui peuvent agir en faveur de l'instabilité? A cet effet, prenons l'exemple suivant :

**Exemple 2.4.** Soient  $n, m, a \in \mathbb{N}$  tels que  $a \geq 2$  et  $n = am$ , et  $E_q$  la fonction d'effectivité définie sur  $N = \{1, \dots, n\}$  et  $A = \{x_1, \dots, x_m\}$  par  $E_q(S) = \mathcal{P}_0(A)$  si et seulement si  $|S| \geq q = n - a$ .

Notons que la fonction  $E$  est une représentation d'un vote à quota. Comme une fonction d'effectivité associée à un vote à quota est stable si et seulement si  $\left\lfloor \frac{n}{n-q} \right\rfloor < m$  (B. Peleg (?)), alors  $E$  est stable.

Supposons que le profil des joueurs est connu et représenté par  $R^N$  tel que

$$\forall i \in N, R^i = R^{i+m} \text{ et pour tout } i = 1 \dots m; x_{i-1} R^i \dots x_k R^i x_1 \dots R^i x_i$$

Considérons deux familles de coalitions ayant manifesté leurs intentions sur les issues sociales. Dans le premier cas, la famille satisfait la propriété de circularité, qui est en relation avec la stabilité comme nous l'avons démontré (9), alors que dans le second cas, la famille a une structure qui ne fait pas partie des catégories en relation avec la stabilité.

*Première famille :* Soit  $S_j = a \{j, \dots, j + \lfloor \frac{q}{a} \rfloor\}$ ,  $j = 1 \dots m$ . Le nombre de joueurs de  $S_j$  est supérieur à  $q$ , alors  $S_j \in \mathcal{W}(E_q)$ . Supposons que  $S_j$  suggère l'état social  $x_{j-1}$  où  $aX = \{j \mid \exists i \in X, R^i = R^j\}$ . Alors  $H^i = \{j \mid S_j \ni i\} = a \{i - \lfloor \frac{q}{a} \rfloor, \dots, i\}$ . Par conséquent :

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in N} \bigcup_{j \in H^i} B_j &= \bigcap_{i=1}^m \bigcup_{j \in aH^i} x_{j-1} ; \\ &= \bigcap_{i=1}^m a \{x_{i - \lfloor \frac{q}{a} \rfloor}, \dots, x_i\} ; \\ &= \left\{ x_{j-1} \mid j \in \bigcap_{j=1}^m S_j \right\} \end{aligned}$$

Puisque l'intersection des coalitions d'une famille de coalitions gagnantes d'une fonction d'effectivité simple et stable est non vide, alors  $\bigcap_{j=1}^m S_j \neq \emptyset$ . D'où

$$\bigcap_{i \in N} \bigcup_{j \in H^i} B_j \neq \emptyset$$

Ce qui montre l'existence d'une alternative non opposée dans l' $E$ -configuration  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$ .

*Deuxième famille* : Supposons que les seules coalitions qui ont manifesté leurs intentions sont  $S_1 = a \{1, \dots, q\}$ ,  $S_2 = a \{2, \dots, q+1\}$  et  $S_3 = N \setminus S_1 \cup S_2$ . Si  $H^i = \{j \mid S_j \ni i\}$ , alors  $H^1 = H^{1+m} = \{1\}$ ,  $H^2 = H^{2+m} = \dots = H^{\lfloor \frac{q}{a} \rfloor + m} = \{1, 2\}$ ,  $H^{\lfloor \frac{q}{a} \rfloor + 1} = H^{\lfloor \frac{q}{a} \rfloor + m + 1} = \{2\}$  et pour tout  $j \notin S_1 \cup S_2$ ,  $H^j = \{3\}$ . Les membres de  $S_3$  n'ont aucun pouvoir, donc la seule proposition crédible de la coalition  $S_3$  vaut  $A$ . Si par exemple  $S_1$  propose  $x_m$  alors que  $S_2$  propose  $x_1$ , nous avons :

$$\bigcap_{i \in N} \bigcup_{k \in H^i} B_k = \{x_m\} \cap \{x_m, x_1\} \cap \{x_1\} \cap A = \emptyset$$

Cette vacuité ne s'interprète pas ici que l' $E$ -configuration  $(S_1, S_2, S_3, B_1, B_2, B_3)$  est une menace contre la stabilité. En effet, si l'on oblige les coalitions de manifester leurs préférences sur les alternatives, il doit exister des joueurs qui n'arrivent pas à trouver une préférence rationnelle. L'hypothèse sur la rationalité des joueurs entraîne que l' $E$ -configuration  $(S_1, S_2, S_3, B_1, B_2, B_3)$  n'est pas un danger pour la stabilité.

Ainsi, certaines  $E$ -configuration ne nuisent pas à la stabilité malgré les pouvoirs et les intentions des coalitions membres.

Pour identifier la structure des familles de coalition nécessaire et suffisante *compatible* à un profil, nous allons commencer par attribuer à l' $E$ -configuration  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  la structure suivante :

(PG) La famille  $\{S_1, \dots, S_r\}$  est une *partition généralisée*. C'est-à-dire qu'il existe  $\lambda_k > 0$  ( $k = 1 \dots r$ ) tels que

$$\forall i \in N : \sum_{k \mid S_k \ni i} \lambda_k = 1$$

(NV) La non vacuité des alternatives non-opposées :

$$\bigcap_{i \in N} \bigcup_{k \mid S_k \ni i} B_k \neq \emptyset$$

Rappelons que pour les jeux à utilités transférables (TU) : un couple  $(N, \nu)$  où  $N$  l'ensemble des joueurs et  $\nu : \mathcal{P}_0(N) \longrightarrow \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ , la stabilité est caractérisée par l'existence d'une alternative non-opposée si une famille de coalitions en partition généralisée se forme pour faire les objections. Une paire  $(S, y)$  est une objection contre  $x \in \mathbb{R}^n$  si  $\nu(S) \geq \sum_{i \in S} x_i$  et  $y_i < x_i, \forall i \in S$ . Donc,  $(N, \nu)$  est stable si et seulement si pour toute partition généralisée  $(S_1, \dots, S_r)$  de  $N$ , il existe  $x$  tel qu'aucune coalition  $S_k$

de la partition généralisée n'a le moyen de faire objection contre  $x$ . On remarque que (NV) est une version ensembliste de (PG), mais cela ne prouve aucune évidence de relation entre l'équilibre d'un jeu TU et l'équilibre d'une fonction d'effectivité.

Ainsi, si nous prenons l'intersection de toutes les intentions d'issues finales du jeu où les joueurs sont répartis dans une partition généralisée, nous obtenons la définition suivante :

**DÉFINITION.** Une fonction d'effectivité  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$  est dite équilibrée si pour toute partition généralisée de coalitions  $\{S_1, \dots, S_r\}$  et pour tout  $B_k \in E(S_k)$ ,  $k = 1 \dots r$ , nous avons :

$$\bigcap_{i \in N} \bigcup_{k | S_k \ni i} B_k \neq \emptyset$$

Cette définition a été introduite pour la première fois par Kolpin(5) alors qu'il étudiait l'essence de la stabilité. Dans la suite, nous réécrivons cette définition afin qu'elle soit cohérente avec les notations du présent travail.

### 3 Équilibre et acyclicité

Pour une  $E$ -configuration  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$ , nous associons les ensembles

$$D_i := D_i(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r) = \bigcup_{k | S_k \ni i} B_k;$$

$$C_j := C_j(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r) = \bigcap_{i \neq j} D_i$$

Étant donné une  $E$ -configuration  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$ , l'ensemble  $D_i$  représente l'intention de  $i \in S_1 \cup \dots \cup S_r$  sur ce que doit être le statu quo. Pour simplification, nous disons qu'une famille d'ensembles  $(B_1, \dots, B_r)$  satisfait NV (non-vacuité) si

$$D_1 \cap \dots \cap D_n \neq \emptyset$$

C'est-à-dire que si la famille de coalitions  $S_1, \dots, S_r$  se forme pour obtenir une  $E$ -configuration, alors il existe  $x \in D_1 \cap \dots \cap D_n$  qui ne soit pas opposable. De la même manière, nous pouvons attribuer à la famille  $(S_1, \dots, S_r)$  les propriétés (P) et (P') suivantes :

**Proposition 3.1.** Soit  $S_1, \dots, S_r \in \mathcal{P}(N)$ . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (P) Il existe  $k$  tel que  $S_k \neq \emptyset$  et  $\forall i, j \in N : H^i \subset H^j \Rightarrow H^i = H^j$  ;
- (P')  $S_1 \cup \dots \cup S_r = N$  et  $\forall i, j \in N : H^i \setminus H^j \neq \emptyset \Rightarrow H^j \setminus H^i \neq \emptyset$ .

PREUVE.

(P) $\Rightarrow$ (P'). Premièrement, si  $S_1 \cup \dots \cup S_r \neq N$ , alors il existe  $i_0 \in N$  tel que  $H^{i_0} = \emptyset$ . Donc,  $H^{i_0} \subset H^i, \forall i \in N$ . De (P),  $H^1 = \dots = H^n = \emptyset$  et  $S_1 = \dots = S_r = \emptyset$ . Deuxièmement, si  $H^i \setminus H^j \neq \emptyset$  alors que  $H^j \setminus H^i = \emptyset$ , alors  $H^j \subset H^i$  et  $H^j \neq H^i$ . Donc, de (P), nous avons à la fois  $H^j = H^i$  et  $H^i \neq H^j$ .

(P') $\Rightarrow$ (P). Évident.

□

**Proposition 3.2.** *Si la famille  $\{S_1, \dots, S_r\}$  est une partition généralisée de  $N$ , alors elle satisfait (P)*

PREUVE. Si  $\{S_1, \dots, S_r\}$  ne satisfait pas (P), alors il existe  $i \neq j$  tels que  $H^i \setminus H^j \neq \emptyset$  alors que  $H^j \setminus H^i = \emptyset$ . Comme  $\{S_1, \dots, S_r\}$  est une partition généralisée, alors il existe  $\lambda_k \in (0, 1)$  tel que

$$\forall i, j \in N : \sum_{k \in H^i} \lambda_k = \sum_{k \in H^j} \lambda_k = 1$$

C'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \sum_{k \in H^i \setminus H^j} \lambda_k &= 1 - \sum_{k \in H^i \cap H^j} \lambda_k \\ &= \sum_{k \in H^j \setminus H^i} \lambda_k \end{aligned}$$

Ce qui est contraire à  $\lambda_k > 0, H^i \setminus H^j \neq \emptyset$  et  $H^j \setminus H^i = \emptyset$ .

□

**Proposition 3.3.** *Si la famille  $\{S_1, \dots, S_r\}$  avec  $r \leq 3$  satisfait (P), alors elle est une partition généralisée de  $N$ .*

PREUVE :

Soient  $r \leq 3$  et  $\{S_1, \dots, S_r\}$  une famille de coalitions satisfaisant (P).

*Cas  $r = 2$ .* Alors,  $S_1, S_2$  est une partition de  $N$  ou  $S_1 = S_2 = N$ . Dans les deux cas,  $S_1, S_2$  est une partition généralisée.

*Cas  $r = 3$ .* Nous distinguons trois cas.

*Sous cas 1 :*  $H^i = H^j = H^k$ . Alors,  $S_k = N$ . En choisissant  $\lambda_k = \frac{1}{3}$ , on conclut que  $\{S_1, S_2, S_3\}$  est une partition généralisée.

*Sous cas 2 :*  $\exists i \neq j : H^i = H^j$ . Alors, on distingue deux cas. Premier cas,  $H^i = \{k\}$  est un singleton. Comme  $H^{i'} \subset \{1, 2, 3\}, \forall i' \neq i, j$  alors la propriété (P) entraîne  $H^{i'} \subset \{1, 2, 3\} \setminus H^i, \forall i' \neq i, j$ . Dans ce cas, il suffit

de choisir  $\lambda_k = 1$  et  $\lambda_l = \frac{1}{2}$  pour  $l \neq k$ . Deuxième cas,  $H^i = H^j = \{k, l\}$ . La propriété (P) entraîne que pour tout  $i' \neq i, j$ ,  $H^{i'} \in \{\{k'\}, \{k', k\}, \{k', l\}\}$  avec  $k' \neq k, l$ . Si pour tout  $i' \neq i, j$ ,  $H^{i'} = \{k'\}$ , on choisit  $\lambda_{k'} = 1$  et  $\lambda_k = \lambda_l = \frac{1}{2}$ . Si pour tout  $i' \neq i, j$ ,  $H^{i'} = \{k', k\}$  (resp  $H^{i'} = \{k', l\}$ ), on choisit  $\lambda_k = \frac{1}{3}$  et  $\lambda_l = \lambda_{k'} = \frac{2}{3}$  (resp.  $\lambda_l = \frac{1}{3}$  et  $\lambda_k = \lambda_{k'} = \frac{2}{3}$ ). Dans les autres cas,  $H^i \in \{\{k, l\}, \{k', k\}, \{k', l\}\}, \forall i \in N$ , donc on choisit  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ .

*Sous cas 3* :  $\exists i, j, i' : H^i \neq H^j \neq H^{i'}$ . Dans ce cas, la propriété (P) implique que  $H^i$  sont tous égaux à un singleton ou sont dans  $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$ . Dans les deux cas,  $\{S_1, S_2, S_3\}$  est une partition généralisée.

□

**Définition 3.4.** Une fonction d'effectivité  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  est équilibrée si pour toute  $E$ -configuration  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  telle que  $\{S_1, \dots, S_r\}$  soit une partition généralisée, alors  $(B_1, \dots, B_r)$  satisfait NV.

Si  $E$  n'est pas équilibrée, alors il existe  $r \geq 1$  et une  $E$ -configuration  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  telle que  $\{S_1, \dots, S_r\}$  soit une partition généralisée alors que  $D_1 \cap \dots \cap D_n = \emptyset$ . Dans ce cas, nous disons que  $E$  possède une structure de déséquilibre d'ordre  $r$ .

**Définition 3.5.** Une fonction d'effectivité  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  est fortement équilibrée si pour toute  $E$ -configuration  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  telle que  $\{S_1, \dots, S_r\}$  satisfait (P), alors  $(B_1, \dots, B_r)$  satisfait NV.

Si  $E$  n'est pas fortement équilibrée, alors il existe  $r \geq 1$  et  $E$ -configuration  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  telle que  $\{S_1, \dots, S_r\}$  satisfait (P) alors que  $D_1 \cap \dots \cap D_n = \emptyset$ . Dans ce cas, nous disons que  $E$  possède une structure de déséquilibre faible d'ordre  $r$ .

De la proposition 3.2, il est évident que si une fonction d'effectivité  $E$  est fortement équilibrée alors elle est équilibrée. D'une autre manière, si elle admet une structure de déséquilibre alors elle admet une structure de déséquilibre faible ; mais la réciproque est fausse. Cependant, dans les propositions suivantes, pour certains cas, ces deux structures sont équivalentes et ont la même propriété que le cycle ??

**Proposition 3.6.** Soit  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  une fonction d'effectivité monotone. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $E$  admet une structure de déséquilibre faible d'ordre  $\tau \leq 3$  ;
- (ii)  $E$  admet une structure de déséquilibre d'ordre  $\rho \leq 3$  ;
- (iii)  $E$  admet un cycle d'ordre  $r \leq 3$ .

PREUVE :

(i) $\Rightarrow$ (ii). De la proposition 3.3.

(ii) $\Rightarrow$ (i). De la proposition 3.2.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  une  $E$ -configuration telle que  $\{S_1, \dots, S_r\}$  soit une partition généralisée et  $D_1 \cap \dots \cap D_n = \emptyset$ .

*Cas où  $r = 2$ .* Alors, la famille  $\{S_1, S_2\}$  est une partition de  $N$  et  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ . Ce qui donne un cycle d'ordre 2 de base  $(C_1, C_2)$  où  $C_1 \subset B_1^c$  et  $C_2 \subset B_2^c$ .

*Cas où  $r = 3$ .* Il y a deux cas,  $\{S_1, S_2, S_3\}$  est une partition de  $N$  ou  $\{S_1 \cap S_2, S_2 \cap S_3, S_3 \cap S_1\}$  est une partition de  $N$ . Comme  $(B_1, B_2, B_3)$  ne satisfait pas NV, alors dans le premier cas nous avons  $B_1 \cap B_2 \cap B_3 = \emptyset$ , ce qui donne un cycle inférieur ; et dans le deuxième cas, nous avons  $C_1, C_2, C_3$  sont deux à deux disjoints, avec  $C_k = (B_{k-1} \cup B_k) \cap (B_k \cup B_{k+1})$  ( $k = 1 \dots 3 \text{ mod } 3$ ). En outre,  $C_k \cap (B_{k-1} \cup B_{k+1}) = \emptyset$ , alors si on remplace  $C_1$  par  $C_1 \cup [A \setminus (B_1 \cup B_2 \cup B_3)]$ , ce qui est faisable car  $E$  est monotone, alors nous obtenons un cycle d'ordre 3.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Soit  $(S_1, \dots, S_\rho, B_1, \dots, B_\rho)$  un cycle d'ordre  $\rho$  de base  $(C_1, \dots, C_\rho)$ .

*Cas où  $r = 2$ .* De la définition d'un cycle,  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  et  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ . Donc, la famille  $\{S_1, S_2, S_3 = N \setminus (S_1 \cup S_2)\}$  est une partition de  $N$  ; en particulier elle est une partition généralisée. Comme  $B_3 = A \in E(S_3)$ , alors

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in N} \left( \bigcap_{k | S_k \ni i} B_k \right) &= B_1 \cap B_2 \cap B_3 ; \\ &= B_1 \cap B_2 ; \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Ce qui montre que  $(S_1, S_2, S_3, B_1, B_2, A)$  est une structure de déséquilibre d'ordre 3 (Si  $S_1 \cup S_2 = N$ ,  $(S_1, S_2, B_1, B_2)$  est une structure de déséquilibre d'ordre 2).

*Cas où  $\rho = 3$ .* De la monotonie de  $E$ , nous pouvons supposer que  $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = N$ . Du corollaire ??, l' $E$ -configuration  $(S_1, S_2, S_3, B_1, B_2, B_3)$  est un cycle supérieur ou un un cycle inférieur. Si elle est un cycle supérieur, alors  $S_1, S_2, S_3$  forment une partition de  $N$ , donc une partition généralisée. Dans ce cas, pour tout  $i \in N$ ,  $H^i$  est un singleton. Ce qui implique que  $D_1 \cap \dots \cap D_n = B_1 \cap B_2 \cap B_3 = \emptyset$ . Donc,  $\{B_1, B_2, B_3\}$  satisfait (NV). Par contre, si  $(S_1, S_2, S_3, B_1, B_2, B_3)$  est un cycle inférieur, nous distinguons deux cas. Premier cas, il existe  $k \neq l$  tels que  $S_k \cap S_l = \emptyset$ . Comme  $B_k \cap B_l = \emptyset$ , alors nous revenons au cas où  $\rho = 2$ . Deuxième cas,  $S_k \cap S_l \neq \emptyset, \forall k \neq l$ . Comme  $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = N$ , alors  $S_1 \cap S_2, S_2 \cap S_3, S_1 \cap S_3$  est une partition

de  $N$ . C'est à dire que  $\{S_1, S_2, S_3\}$  est une partition généralisée de  $N$ . En outre pour tout  $i \in N$ ,  $H^i = \{k, k+1\}$  ( $(k = 1 \dots 3 \text{ mod } 3)$ ), alors  $D_1 \cap \dots \cap D_n = (B_1 \cup B_2) \cap (B_2 \cup B_3) \cap (B_3 \cup B_1) = \emptyset$ , i.e.  $\{B_1, B_2, B_3\}$  satisfait (NV).

En conclusion,  $(S_1, S_2, S_3, B_1, B_2, B_3)$  est une structure de déséquilibre d'ordre 3.

□

**Proposition 3.7.** Soient  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  une fonction d'effectivité et  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  une  $E$ -configuration telle qu'il existe  $(C_1, \dots, C_r)$  une partition de  $A$ ,  $(T_1, \dots, T_r)$  une partition de  $N$  et  $c < r$  tels que  $\forall k = 1 \dots r \text{ mod } r$  :

$$B_k = C_k \cup \dots \cup C_{k+c-1} \text{ et } S_k = T_{k+c} \cup \dots \cup T_{k-1}$$

Alors

1.  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  est une structure de déséquilibre d'ordre  $r$  ;
2.  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  est un cycle d'ordre  $r$  ;

PREUVE : Soient  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  une  $E$ -configuration,  $(T_1, \dots, T_r)$  une partition de  $N$ ,  $(C_1, \dots, C_r)$  une partition de  $A$  et  $c < r$  tels que

$$\forall k = 1 \dots r; C_k \cup \dots \cup C_{k+c-1} \in E(T_{k+c} \cup \dots \cup T_{k-1}) \quad (1)$$

(i) De l'équation 1,  $|\{k|S_k \ni i\}| = c$  alors  $(S_1, \dots, S_r)$  est une partition généralisée avec  $\lambda_k = \frac{1}{c}, \forall k = 1 \dots r$ . En outre, pour tout  $l = 1 \dots r$  et pour tout  $i \in T_l$ ,  $\{k|S_k \ni i\} = \{k|\{k+c, \dots, k-1\} \ni l\} = \{l-c, \dots, l+1\}$ . Alors,

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in N} \bigcup_{k|S_k \ni i} B_k &= \bigcap_{l=1 \dots r} \bigcap_{i \in T_l} \bigcup_{k|J_k \ni l} B_k \\ &= \bigcap_{l=1}^r \bigcap_{k=l-c}^{l+1} B_k \\ &= \bigcap_{l=1}^r \bigcap_{k=l-c}^{l+1} \bigcup_{p=k}^{k+c-1} C_l \\ &\subset \bigcap_{l=1}^r \bigcup_{k \in \{l\}^c} C_k = \emptyset \end{aligned}$$

(ii) La proposition ??

□

Le théorème 3.8 suivant montre que le cycle peut avoir une formulation assez proche d'une structure de déséquilibre.

**RAPPEL.** Une sélection sur un ensemble  $\{1, \dots, r\}$  est une application  $\theta : \mathcal{P}_0(\{1, \dots, r\}) \rightarrow \{1, \dots, r\}$  telle que pour tout  $K \subset \{1, \dots, r\}$ ,  $\theta(K) \in K$ .

Notons  $\Sigma_r$  l'ensemble de toutes les sélections sur  $\{1, \dots, r\}$ . Pour une famille de coalitions  $\{S_1, \dots, S_r\}$  et une sélection  $\theta \in \Sigma_r$ , nous associons les ensembles

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_l &:= \mathcal{K}_l(S_1, \dots, S_r) = \{K \subset \{1, \dots, r\} \mid \bigcap_{k \in K} S_k \neq \emptyset, K \ni l\}; \\ \mathcal{J}_k &:= \mathcal{J}_k(S_1, \dots, S_r, \theta) = \{K \subset \{1, \dots, r\} \mid \bigcap_{k \in K} S_k \neq \emptyset, \theta(K) = k\} \end{aligned}$$

Posons

$$J_k = \bigcup_{K \mid \theta(K)=k} K$$

**Théorème 3.8.** Soit  $E : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathcal{P}(A)$  une fonction d'effectivité. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe une partition de  $A$ ,  $(C_1, \dots, C_r)$  telle que  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  soit un cycle d'ordre  $r$  de base  $(C_1, \dots, C_r)$  ;

(ii) il existe  $\theta \in \Sigma_r$  tel que la famille  $B_1, \dots, B_r$  satisfasse :

$$\bigcap_{l=1}^r \bigcup_{K \in \mathcal{K}_l} B_{\theta(K)} = \emptyset \quad (2)$$

(iii) il existe  $\theta \in \Sigma_r$  tel que la famille  $B_1, \dots, B_r$  satisfasse :

$$\bigcap_{l=1}^r \bigcup_{k \in J_l} B_k = \emptyset \quad (3)$$

**PREUVE :**

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soit  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  un cycle d'ordre  $r$  et  $(C_1, \dots, C_r)$  sa base, et soit  $\theta \in \Sigma_r$  tel que : Si  $\bigcap_{k \in K} S_k \neq \emptyset$ , alors  $\theta(K) = k \in K$  avec  $B_k \cap C_l = \emptyset, \forall l \in K$ . Si  $\bigcap_{k \in K} S_k = \emptyset$ ,  $\theta(K) \in K$  est arbitraire. Alors,  $B_{\theta(K)} \subset \bigcup_{l \notin K} C_l$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \bigcap_{l=1}^r \bigcup_{K \in \mathcal{K}_l} B_{\theta(K)} &\subset \bigcap_{l=1}^r \bigcup_{K \in \mathcal{K}_l} \bigcup_{t \notin K} C_t \\ &\subset \bigcap_{l=1}^r C_l^c = \emptyset \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit une  $E$ -configuration  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  telle qu'il existe  $\theta \in \Sigma_r$  tel que  $(B_1, \dots, B_r)$  satisfasse 2. Posons

$$C_l = \bigcap_{K \in \mathcal{K}_l} B_{\theta(K)}^c,$$

et soit  $\bar{K} \subset \{1, \dots, r\}$  tel que  $\bigcap_{k \in \bar{K}} S_k \neq \emptyset$ . Comme pour tout  $l \in K$  nous avons  $K \in \mathcal{K}_l$ , alors  $C_l \subset B_{\theta(\bar{K})}^c$  ( $l \in K$ ). Ce qui donne :

$$\forall l \in K : C_l \cap B_{\theta(\bar{K})} = \emptyset$$

(i) $\Rightarrow$  (iii) Soit  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  un cycle de base  $C_1, \dots, C_r$ . De la définition du cycle ?? (C2b) nous avons : pour tout  $K \subset \{1, \dots, r\}$ , il existe  $\theta(K) \in K$  tel  $C_{\theta(K)} \cap B_k = \emptyset, \forall k \in K$ . Ce qui donne :

$$\forall K \text{ tel que } \theta(K) = l : C_l \cap \bigcup_{k \in J_l} B_k = \emptyset$$

Par conséquent :

$$\bigcap_{l=1}^r \bigcup_{k \in J_l} B_k \subset \bigcap_{l=1}^r C_l^c = \emptyset$$

(iii) $\Rightarrow$  (i) Soit  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  une  $E$ -configuration telle que la famille  $(B_1, \dots, B_r)$  satisfasse l'équation 3. Posons

$$C_l = \bigcap_{k \in J_l} B_k^c$$

alors pour tout  $K$  tel que  $\bigcap_{k \in K} S_k \neq \emptyset$ , nous avons  $C_{\theta(K)} \cap B_k = \emptyset, \forall k \in K$ . Donc,  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  est un cycle de base  $(C_1, \dots, C_r)$ .

□

Notons que la version (i) permet d'analyser l'instabilité alors que (ii) et (iii) sont dans l'esprit de localiser les issues sociales stables. Ici, la formulation (iii) qui met en évidence la similarité d'un cycle avec une structure de déséquilibre ne permet pas de conclure qu'il y ait une équivalence entre les deux. Plus précisément, ces deux structures ne sont pas équivalentes. L'objet du paragraphe suivant est de répondre à cette question dans l'optique de trouver des classes de fonctions d'effectivité où la stabilité, l'acyclité, l'équilibre et l'équilibre fort sont équivalents.

## 4 Les théorèmes d'équivalences

Le résultat de Kolpin (5) affirme qu'une fonction d'effectivité équilibrée est stable. Donc, une fonction d'effectivité fortement équilibrée est stable ; mais l'existence de structure de déséquilibre n'assure pas l'instabilité de la fonction d'effectivité. Cependant, il existe une classe de fonctions d'effectivité où la réciproque est vraie. Par exemple, Mizutani (6) a montré que pour les fonctions d'effectivité monotones, anonymes et neutres l'existence d'une structure de déséquilibre conduit à l'instabilité. Dans ce paragraphe, nous montrons que l'existence de structure de déséquilibre faible est suffisante pour l'instabilité d'une fonction d'effectivité monotone, anonyme et neutre et proposons d'autres classes de fonctions d'effectivité pour lesquelles l'équilibre fort, l'équilibre et la stabilité sont équivalents.

À cet effet, rappelons les résultats suivants :

**Théorème 4.1** (Keiding, 1985(4)). *Soit  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  une fonction d'effectivité. Alors, la fonction  $E$  est acyclique si et seulement si elle est stable.*

**Théorème 4.2** (Kolpin, 1991 (5)). *Soit  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  une fonction d'effectivité. Si la fonction  $E$  est équilibrée alors elle est stable.*

De la proposition 3.2, nous avons également :

**Théorème 4.3.** *Soit  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  une fonction d'effectivité. Si la fonction  $E$  est fortement équilibrée alors elle est stable.*

Les réciproques de ces deux derniers théorèmes sont fausses. On peut faire référence aux travaux de Mizutani, 1994 (6) ou à l'exemple ci-après. Cette fonction est stable sans être équilibrée.

**Exemple 4.4.** *Soient  $N = \{1, \dots, 5\}$  et  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(N))$  la fonction d'effectivité définie comme suit :*

$E(S) = \{T \mid T \supset (N \setminus S)\}$  si  $S \in \{S \mid S \supset S_k, k = 1 \dots r\}$  et  $E(S) = \{N\}$  sinon ; avec  $S_1 = \{1, 2, 3, 5\}$ ,  $S_2 = \{2, 4\}$ ,  $S_3 = \{1, 3, 4\}$ ,  $S_4 = \{1, 2, 5\}$ ,  $S_5 = \{3, 4, 5\}$ .

$E$  admet une structure de déséquilibre d'ordre 5. Nous avons :

$$\forall k = 1 \dots 5 : |\{k \mid J_k \ni k\}| = 3 \quad (4)$$

alors la famille de coalitions  $\{S_1, \dots, S_5\}$  est une partition généralisée. Soit  $B_k = S_k^c$  et posons  $H = \{k \mid S_k \ni i\}$  et  $D_k = \cup_{k \in H^i} B_k$ , alors

$$\begin{aligned} H^1 &= \{1, 3, 4\} & H^2 &= \{1, 2, 4\} & H^3 &= \{1, 3, 5\} \\ H^4 &= \{2, 3, 5\} & H^5 &= \{1, 4, 5\} \\ D_k &= N \setminus \{k\} & k &= 1 \dots 5 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\bigcap_{i \in N} \bigcup_{k | S_k \ni i} B_k = \bigcap_{i \in N} (N \setminus \{i\}) = \emptyset$$

$E$  ne possède aucun cycle d'ordre 5 : Nous vérifions seulement que  $E$  ne possède pas une configuration équilibrée d'ordre 5. Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 &= \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, H^1, H^2, H^5\} \\ \mathcal{K}_2 &= \{\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, H^2, H^4\} \\ \mathcal{K}_3 &= \{\{3\}, \{3, 1\}, \{3, 2\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, H^1, H^3, H^4\} \\ \mathcal{K}_4 &= \{\{4\}, \{4, 1\}, \{4, 2\}, \{4, 3\}, \{4, 5\}, H^1, H^2, H^5\} \\ \mathcal{K}_5 &= \{\{5\}, \{5, 1\}, \{5, 2\}, \{5, 3\}, \{5, 4\}, H^1, H^3, H^4, H^5\} \end{aligned}$$

On peut vérifier que pour toute sélection  $\theta \in \Sigma_r$ ,

$$\bigcap_{i \in N} \bigcup_{K \in \mathcal{K}_i} B_{\theta(K)} \neq \emptyset$$

**Théorème 4.5.** *Soit  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  une fonction d'effectivité monotone, anonyme et neutre. Alors,  $E$  est stable si et seulement si  $E$  est fortement équilibrée.*

PREUVE : Si  $E$  est fortement équilibrée, alors elle est stable (Théorème 4.3). Réciproque. Nous savons qu'une fonction d'effectivité monotone, anonyme et neutre est stable si et seulement elle admet un cycle circulaire ??, c'est-à-dire qu'il existe  $(C_1, \dots, C_r)$  une partition de  $A$ ,  $T_1, \dots, T_r$  une partition de  $N$  et  $1 \leq c \leq r - 1$  tels que

$$\forall k = 1 \dots r \quad \text{mod } r : C_k \cup \dots \cup C_{k+c-1} \in E(T_{k+c} \cup \dots \cup C_{k-1})$$

De la proposition 3.7, l' $E$ -configuration  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  avec  $S_k = T_{k+c} \cup \dots \cup C_{k-1}$  et  $B_k = C_k \cup \dots \cup C_{k+c-1}$  est une structure de déséquilibre faible.

□

Ce théorème a pour corollaire le résultat de Mizutani suivant :

**Corollaire 4.6.** *[Mizutani, 1994] Soit  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  une fonction d'effectivité monotone, anonyme et neutre. Alors,  $E$  est stable si et seulement si  $E$  est équilibrée.*

Nous avons également le résultat suivant :

**Théorème 4.7.** *Soit  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  une fonction d'effectivité monotone et simple. Alors, la fonction  $E$  est stable si et seulement si elle est fortement équilibrée.*

PREUVE :  $\Rightarrow$  Si  $E$  est fortement équilibrée, alors  $E$  est stable (théorème 4.3).

$\Leftarrow$  Soit  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  une structure de déséquilibre faible sur  $E$ . Alors, la famille  $\{S_1, \dots, S_r\}$  satisfait (P) et la famille  $\{B_1, \dots, B_r\}$  est telle que  $D_1 \cap \dots \cap D_n = \emptyset$ . Puisque  $B_k \neq A$  entraîne  $S_k \in \mathcal{W}(E)$ , alors si pour tout  $k = 1 \dots r$ ,  $B_k \neq A$  nous obtenons  $S_1, \dots, S_r \in \mathcal{W}(E)$ . Or, l'intersection des ensembles d'une famille satisfaisant (P) est vide, alors d'après le théorème de Nakamura (7),  $E$  est instable. Admettons alors qu'il existe  $p < r$  tel que  $B_1, \dots, B_p \neq A$  et  $B_{p+1} = \dots = B_r = A$ . Si  $S_1 \cap \dots \cap S_p = \emptyset$ , alors d'après le théorème de Nakamura (7),  $E$  est instable. Si  $S_1 \cap \dots \cap S_p \neq \emptyset$ , alors il existe  $i_0$  tel que

$$H^{i_0} \supset \{1, \dots, p\}$$

Posons  $Z = \{i \mid H^i \cap \{p+1, \dots, r\} = \emptyset\}$ . Alors, pour tout  $i \notin Z$ , il existe  $k \in H^i$  tel que  $B_k = A$ . Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in N} \bigcup_{k \mid S_k \ni i} B_k &= \left( \bigcap_{i \in Z} \bigcup_{k \mid S_k \ni i} B_k \right) \cap \left( \bigcap_{i \notin Z} \bigcup_{k \mid S_k \ni i} B_k \right) \\ &= \left( \bigcap_{i \in Z} \bigcup_{k \mid S_k \ni i} B_k \right) \cap A \\ &= \bigcap_{i \in Z} \bigcup_{k \mid S_k \ni i} B_k \end{aligned} \quad (5)$$

Donc

$$\bigcap_{i \in Z} \bigcup_{k \mid S_k \ni i} B_k = D_1 \cap \dots \cap D_n = \emptyset \quad (6)$$

Comme  $B_k \neq \emptyset$  ( $k = 1 \dots r$ ), alors l'équation 6 entraîne qu'il existe au moins  $i \in Z$  tel que  $H^i \not\subseteq \{1, \dots, p\}$ . C'est-à-dire que

$$H^i \not\subseteq H^{i_0}$$

Ce qui est contraire à (P).

□

Ainsi, nous avons :

**Corollaire 4.8.** *Soit  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  une fonction d'effectivité monotone et simple. Alors, la fonction  $E$  est stable si et seulement si elle est équilibrée.*

Les fonctions d'effectivité simples, ou anonymes et neutres sont des cas particuliers des *fonctions d'effectivité décomposable* : il existe deux jeux à utilités transférables normés  $(N, \nu)$  et  $(A, \omega)$  tels que

$$B \in E(S) \Leftrightarrow \omega(B) \leq 1 - \nu(S) \quad (7)$$

Donc la proposition 4.7 et le théorème 4.6 peuvent être considérés comme le prolongement de la caractérisation de la stabilité des jeux à utilités transférables. Le style de démonstration de Mizutani & al. prouve bien ce référencement. Pourtant, il n'est pas évident que l'équilibre du pouvoir puisse caractériser la stabilité d'une fonction d'effectivité décomposable<sup>1</sup>.

Dans la suite, nous nous intéressons à une classe de fonctions d'effectivité qui n'est pas une sous-classe de fonctions d'effectivité décomposables. C'est-à-dire que la notion d'équilibre de pouvoir ne se limite pas aux jeux TU et ses dérivés. Rappelons qu'une fonction d'effectivité maximale satisfait  $B \notin E(S) \Rightarrow A \setminus B \in E(N \setminus S)$  : si une coalition  $S$  n'est pas effective pour  $B$ , alors son complémentaire aura le pouvoir de le bloquer. D'une autre manière, si une coalition est faible, pour éviter la perte inutile des actions possibles, on donne à son complémentaire le droit d'agir. Donc, en cas d'instabilité, la maximalisation qui consiste à remplacer la fonction d'effectivité par la plus petite fonction d'effectivité maximale qui la contient, intensifie l'exposition de l'organisation aux conflits. La maximalité aide également à la mise en évidence des conflits d'origine structurelle d'une organisation représentée par la fonction d'effectivité (cf (9)).

Les fonctions d'effectivité maximales ne sont pas alors une sous-classe de fonctions d'effectivité décomposables alors que le théorème ?? montre qu'il y a une équivalence entre l'équilibre fort et la stabilité pour cette classe de jeu. Tout d'abord, nous avons le lemme suivant :

**Lemme 4.9.** *Soit  $E : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  une fonction d'effectivité monotone et maximale qui admet une structure de déséquilibre faible telle que  $C_j \neq \emptyset, \forall j \in N$ . Alors,  $E$  est instable.*

PREUVE :

*Montrons qu'il existe une partition  $C_1^t, \dots, C_n^t$  de  $A$  telle que pour tout  $k = 1 \dots r : \cup_{i \notin S_k} C_k^t \in E(S_k)$ .*

Par hypothèse,  $D_1 \cap \dots \cap D_n = \emptyset$  et  $C_j \neq \emptyset$ , alors  $C_1, \dots, C_n$  sont deux à deux disjoints. Posons

$$A \setminus [C_1 \cup \dots \cup C_n] = \{x_1, \dots, x_t\}$$

---

1. Dans (8), si les deux jeux à utilités transférables associés à la fonction d'effectivité sont équilibrés, alors cette dernière est stable. La question à savoir si l'équilibre des jeux à utilités transférables entraîne l'équilibre de la fonction d'effectivité associée, et que cela caractérise la stabilité est une question encore ouverte.

De la définition de  $C_j$ , il existe  $i_1 \in N$  tel que

$$x_1 \notin D_{i_1} \quad (8)$$

et remplaçons  $\{B_1, \dots, B_r\}$  par  $\{B_1^1, \dots, B_r^1\}$  telle que

$$\begin{aligned} \forall k \in H^{i_1} : B_k^1 &= B_k ; \\ \forall k \notin H^{i_1} : B_k^1 &= B_k \cup \{x\}. \end{aligned}$$

Comme pour tout  $j \in N$ ,  $C_j \neq \emptyset$  alors

$$\forall i \neq j : H_i \neq H_j \quad (9)$$

Donc, de la condition (P), nous avons :

$$\forall i \neq j : H^i \setminus H^j \neq \emptyset \text{ et } H^j \setminus H^i \neq \emptyset \quad (10)$$

Ce qui entraîne que pour tout  $i \neq i_1$ , il existe  $k \in H^i$  tel que  $x_1 \in B_k^1$ . Alors :

$$D_{i_1}^1 = D_{i_1} \text{ et } x_1 \in D_i^1, \forall i \neq i_1 \quad (11)$$

Des equations 8 et 11, nous avons :

$$C_{i_1}^1 = C_{i_1} \cup \{x_1\} \text{ et } C_i^1 = C_i, \forall i \neq i_1 \quad (12)$$

Par conséquent,  $D_1^1 \cap \dots \cap D_n^1 = \emptyset$ ,  $C_1^1, \dots, C_n^1$  sont deux à deux disjoints et  $A \setminus [C_1^1 \cup \dots \cup C_n^1] = \{x_2, \dots, x_t\}$ .

Soit alors  $(B_k^s)_{1 \leq s \leq t}$  la suite définie par :

$$\begin{aligned} \forall k \in H^{i_s} : B_k^s &= B_k^{s-1} ; \\ \forall k \notin H^{i_s} : B_k^s &= B_k^{s-1} \cup \{x_s\}. \end{aligned}$$

Avec  $i_s$  tel que  $x_s \notin D_{i_s}^{s-1}$ .

Par un même raisonnement, nous pouvons conclure que pour tout  $s = 1 \dots t$  :  $D_1^s \cap \dots \cap D_n^s = \emptyset$ ,  $C_1^s, \dots, C_n^s$  sont deux à deux disjoints et  $A \setminus [C_1^s \cup \dots \cup C_n^s] = \{x_{s+1}, \dots, x_t\}$ . En particulier, au rang  $t$ ,  $C_1^t, \dots, C_n^t$  est une partition de  $A$ . Par conséquent, au rang  $t$ , nous avons :

$$\forall j \in S_k : B_k^t \cap C_j^t \subset \left( \bigcup_{k \in H^j} B_k^t \right) \cap C_j^t = \emptyset,$$

C'est-à-dire que  $B_k \subset B_k^t \subset \bigcup_{j \notin S_k} C_j^t$ . De la monotonie de  $E$ ,  $B_k \in E(S_k)$  entraîne

$$\forall k = 1 \dots r : \bigcup_{j \notin S_k} C_j^t \in E(S_k) \quad (13)$$

Montrons qu'il existe  $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$  tel que  $\mathcal{C}(E, R^N) = \emptyset$

De la maximalité de  $E$  nous avons :

$$\forall j \in N, A \setminus C_j^t \in E(\{j\}) \text{ ou } C_j^t \in E(N \setminus \{j\})$$

Sans nuire à la généralité, supposons que pour un  $p$ ,  $0 \leq p \leq n$  nous avons :

$$\forall j = 1 \dots p; A \setminus C_j^t \in E(\{j\}) \text{ et } \forall j = p+1 \dots n; C_j^t \in E(N \setminus \{j\}) \quad (14)$$

Si  $p = n$ , i.e. pour tout  $j \in N$ ,  $A \setminus C_j^t \in E(\{j\})$ , alors  $(\{1\}, \dots, \{n\}, A \setminus C_1^t, \dots, A \setminus C_n^t)$  est un cycle supérieur d'ordre  $n$ . Donc,  $E$  est instable (1).

Si  $p = 0$ , i.e. pour tout  $j \in N$ ,  $C_j^t \in E(N \setminus \{j\})$ , alors  $E$  possède un cycle inférieur d'ordre  $n$ . Pour les définitions des cycles inférieurs et cycles supérieurs, voir par exemple (1) ou (9). Donc,  $E$  est instable (1).

Supposons que  $0 < p < n$ . Comme  $S_1 \cup \dots \cup S_r = N$ , alors on peut choisir  $S \in \{S_1, \dots, S_r\}$  tel que  $n \in S$ . Soit  $R = (R^1, \dots, R^n)$  un profil satisfaisant

$$\forall j \in N : C_{j-1}^t R^j \dots R^j C_{j+1}^t R^j C_j^t$$

Donc la structure de  $R^N$  est définie comme suit

$$\begin{array}{ccccccc} C_n^t & \dots & C_{p-1}^t & \dots & C_{n-1}^t & & \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & & \\ C_2^t & \dots & C_{p+1}^t & \dots & C_1^t & & \\ C_1^t & \dots & C_p^t & \dots & C_n^t & & \\ R^1 & \dots & R^p & \dots & R^n & & \end{array}$$

Alors,

( $\alpha$ ) Pour  $i = 1 \dots p$ , nous avons :

$$\forall j \neq i : C_j^t R^i C_i \text{ i.e. } [A \setminus C_i^t] R^i C_i$$

De l'équation 14,  $(\{i\}, A \setminus C_i^t)$  est une objection contre tout  $x \in C_i^t$ .

( $\beta$ ) Pour  $i = p+1 \dots n$ , nous avons :

$$\forall j \neq i : C_i^t R^j C_{i-1}^t$$

De l'équation 14,  $(\{i\}^c, C_i^t)$  est une objection contre tout  $x \in C_{i-1}^t$ .

( $\gamma$ ) Pour tout  $i \in S$ , et pour tout  $j \notin S$  nous avons  $C_j^t R^i C_i^t$ . Comme  $n \in S$ , alors nous avons en particulier

$$\forall i \in S, \forall j \notin S : C_j^t R^i C_n^t$$

De l'équation 13  $(S, \cup_{j \notin S} C_j^t)$  est une objection contre tout  $x \in C_n^t$ .

Étant donné que  $C_1^t, \dots, C_n^t$  et une partition de  $A$ , alors pour tout  $x \in A$ , il existe  $j \in N$  tel que  $x \in C_j^t$  et une paire  $(S(j), B(j))$  telle que  $B(j) R^i x, \forall i \in S(j)$ . D'où l'instabilité de  $E$ .

□

**Théorème 4.10.** *Soit  $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  une fonction d'effectivité monotone et maximale. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $E$  est fortement équilibrée ;
- (ii)  $E$  est équilibrée ;
- (iii)  $E$  est stable.

PREUVE : (i) $\Rightarrow$ (ii) découle de la proposition 3.2 et (ii) $\Rightarrow$ (iii) découle du théorème 4.3. Donc, il nous reste à démontrer que (iii) $\Rightarrow$ (i).

En effet, soit  $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$  une structure de déséquilibre faible sur  $E$ . Alors,  $\{S_1, \dots, S_r\}$  satisfait (P) et la famille  $(B_1, \dots, B_r)$  satisfait  $D_1 \cap \dots \cap D_n = \emptyset$ . Si pour tout  $j \in N$ ,  $C_j \neq \emptyset$ , alors  $E$  est instable (Lemme 4.9). Admettons alors que  $E$  est stable et qu'il existe  $j \in N$  tel que  $C_j = \emptyset$ . C'est-à-dire que :

$$\bigcap_{i \neq j} \bigcup_{k | S_k \ni i} B_k = \emptyset \quad (15)$$

Définissons la fonction d'effectivité  $E_j : \mathcal{P}(N \setminus \{j\}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$  telle que

$$E_j(\emptyset) = \emptyset \text{ et } \forall S \in \mathcal{P}_0(N \setminus \{j\}) : E_j(S) = E(S \cup \{j\})$$

*Montrons que si  $E$  est stable, alors  $E_j$  est maximale et convexe*

Premièrement,  $E_j$  est maximale. Soient  $S \in \mathcal{P}_0(N \setminus \{j\})$  et  $B \in \mathcal{P}_0(A)$  tels que  $B \notin E_j(S)$ . Donc,  $B \notin E(S \cup \{j\})$ . De la maximalité de  $E$ ,  $A \setminus B \in E((N \setminus \{j\}) \setminus S)$ . Comme  $E$  est monotone, alors  $A \setminus B \in E(((N \setminus \{j\}) \setminus S) \cup \{j\})$ . Ce qui montre que  $A \setminus B \in E_j((N \setminus \{j\}) \setminus S)$ . Donc,  $E_j$  est maximale.

Deuxièmement,  $E_j$  est convexe. Soient  $S, T \in \mathcal{P}_0(N \setminus \{j\})$  et  $B, C \in \mathcal{P}_0(A)$  tels que  $B \in E_j(S)$  et  $C \in E_j(T)$ . Donc,  $B \in E(S \cup \{j\})$  et  $C \in E(T \cup \{j\})$ . Comme la fonction  $E$  est maximale et stable, donc convexe, alors  $B \cup C \in E((S \cup T) \cup \{j\})$  ou  $B \cap C \in E((S \cap T) \cup \{j\})$ . Ce qui entraîne,  $B \cap C \in E_j(S \cup T)$  ou  $B \cup C \in E_j(S \cap T)$ . D'où la convexité de  $E_j$ .

*Montrons que  $E_j$  admet une structure de déséquilibre  $(S'_{k_1}, \dots, S'_{k_\rho}, B_{k_1}, \dots, B_{k_\rho})$ .*

Posons

$$\Delta = \{k \mid S_k = \{j\}\} \text{ et } \{k_1, \dots, k_\rho\} = \{k \mid S_k \neq \{j\}\}$$

Pour  $s = 1 \dots \rho$ , posons

$$S'_{k_s} = S_{k_s} \setminus \{j\}$$

Alors

$$\forall s = 1 \dots \rho : S'_{k_s} \neq \emptyset \text{ et } S'_{k_1} \cup \dots \cup S'_{k_\rho} = N \setminus \{j\}$$

Ainsi, pour  $i_2 \neq i_1 \in N \setminus \{j\}$  tels que

$$\{k_s \mid S'_{k_s} \ni i_1\} \subset \{k_s \mid S'_{k_s} \ni i_2\}$$

Alors,  $\{k_s \mid S'_{k_s} \ni i_1\} \cup \Delta \subset \{k_s \mid S'_{k_s} \ni i_2\} \cup \Delta$ . Donc,  $H^{i_1} \subset H^{i_2}$ . Comme  $(S_1, \dots, S_r)$  satisfait (P), alors  $H^{i_1} = H^{i_2}$ . Donc,  $H^{i_1} \setminus \Delta = H^{i_2} \setminus \Delta$ . Ce qui entraîne

$$\{k_s \mid S'_{k_s} \ni i_1\} = \{k_s \mid S'_{k_s} \ni i_2\}$$

Ce qui montre que  $(S'_{k_1}, \dots, S'_{k_\rho})$  satisfait (P).

En outre,

$$\bigcap_{i \in N \setminus \{j\}} \bigcup_{k_s \mid S'_{k_s} \ni i} B_{k_s} \subset \bigcap_{i \in N \setminus \{j\}} \bigcup_{k_s \mid S_{k_s} \ni i} B_{k_s} = \emptyset$$

Donc, pour que  $(S'_{k_1}, \dots, S'_{k_\rho}, B_{k_1}, \dots, B_{k_\rho})$  soit une structure de déséquilibre sur  $E_j$ , il nous reste à montrer que  $B_{k_s} \in E(S'_{k_s})$  ( $s = 1 \dots \rho$ ). En effet, si  $j \in S_{k_s}$ , alors  $B_{k_s} \in E(S'_{k_s} \cup \{j\})$ , donc  $B_{k_s} \in E(S'_{k_s})$ . Si  $j \notin S_{k_s}$ , i.e.  $S'_{k_s} = S_{k_s}$ , alors de la monotonie de  $E$ ,  $B_{k_s} \in E(S'_{k_s} \cup \{j\})$ . Donc,  $B_{k_s} \in E_j(S'_{k_s})$ . En tout

$$\forall s = 1 \dots \rho : B_{k_s} \in E(S'_{k_s})$$

En conclusion :  $E$  convexe, maximale et admet une structure de déséquilibre entraîne  $E_j$  convexe, maximale et admet une structure de déséquilibre. Cette implication montre que l'on peut avoir une suite  $j_1, \dots, j_q$  telle que les fonctions d'effectivité

$$E_{j_1}, \dots, E_{j_q}$$

soient convexes, maximales et admet une structure de déséquilibre et  $E_{j_q}$  soit à trois joueurs. Des propositions 3.2 et 3.6, la fonction d'effectivité  $E_{j_q}$  admet un cycle d'ordre  $\rho \leq 3$ , donc instable. D'où une contradiction.  $\square$

## 5 Conclusion

La connaissance des intentions des joueurs via leurs intégrations dans plusieurs coalitions permet de maîtriser les éventuels conflits dans une organisation. Les théorèmes d'équivalence de ce travail suggèrent par exemple que s'il y a une coalition à laquelle tous les joueurs font référence à toute intention de blocage d'alternatives, l'organisation est stable. La non-équivalence de l'équilibre à la stabilité nous a incité à proposer une nouvelle forme de répartition des pouvoirs au travers des coalitions. Les questions sont dès lors les suivantes : la structure de balancement peut-elle avoir un sens pour les jeux à utilités transférables et les jeux à utilités non-transférables ? Sera-t-elle nécessaire pour les jeux à utilités non transférables où le Scarf balancement n'est pas nécessaire ?

## Références

- [1] Abdou, J. et H. Keiding (1991), "Effectivity Functions in Social Choice", Dordrecht : Kluwer Academic press. 19
- [2] Bondareva, Olga N (1963), "Some applications of linear programming methods". *Problemy Kybernetiki* 10, p 119 - 139. 2
- [3] Danilov V. and Alexander I. S. (2002), "Social Choice Mechanism", Springer.
- [4] Hans Keiding (1985), "Necessary and sufficient conditions for stability of effectivity functions", *International Journal of Game Theory*, 14 N°2. 2, 14
- [5] Kolpin V. (1991), "Mixed effectivity and the essence of stability", *Social Choice and Welfare*, vol 8, p 51 - 63. 2, 7, 14
- [6] Mizutani M., Nae Chan Lee, Nishino H.( 1994), "On the Equivalence of Balancedness and the Stability in Effectivity Function Games", *Journal of Operation Research, Society of Japan*, vol 37, N° 3. 14
- [7] Nakamura K. (1979), " The vetoers in a simple game with ordinal preferences", *International Journal of Game Theory*, 8 : 55-61. 16
- [8] Otten G.-J., Borm P., Storcken T. and Tijs S.(1997), "Decomposable effectivity functions", *Mathematical Social Sciences* 33 Number 3, 1, p 277 - 289. 17
- [9] Razafimahatolotra D. (2008), "Une contribution à la théorie du pouvoir : Conflit Négociation et Stabilité", thèse de doctorat de troisième cycle, chapitre 2. 5, 17, 19