



Traitement des problèmes de contact en calcul parallèle

V. A. Yastrebov¹, G. Cailletaud¹, F. Feyel²

¹ MINES ParisTech, MAT, Centre des matériaux (CNRS UMR 7633)
BP 87, 10 rue Henri Desbruères, 91003 Evry cedex
{Vladislav.Yastrebov, Georges.Cailletaud}@mines-paristech.fr

² ONERA
29, Avenue de la Division Leclerc, BP72, F92322 Chatillon Cedex - France
Frederic.Feyel@onera.fr

Résumé — L'implantation numérique efficace des méthodes de traitement du contact reste encore un sujet de recherche à part entière. On détaille ici la mise en œuvre d'une méthode de type Lagrangien augmenté. Afin de gagner en performance, l'algorithme comporte une procédure particulière de reconnaissance (séquentiel et parallèle) de nœuds venant en contact sur la surface de contact, la reconstruction à bon escient de la matrice pour les éléments de contact et une formulation en calcul parallèle.

Mots clés — Contact-frottement, méthode de Lagrangien augmenté, reconnaissance de contact, parallélisation.

1 Introduction

S'il y a maintenant une offre importante de méthodes numériques capables de traiter le problème de contact en mécanique, l'implantation numérique de celles-ci reste encore une question délicate. La raison est que, au-delà de la méthode elle-même, il faut traiter les questions de rapidité et de robustesse de la reconnaissance de contact, de stabilisation de la solution et de parallélisation. Les difficultés sont particulièrement évidentes lorsqu'on passe à des problèmes de grande taille, impossibles à traiter séquentiellement. L'approche cohérente qui est exposée dans cet article met en avant les traits principaux et les points délicats d'implantation de la méthode du Lagrangien augmenté et d'une méthode de reconnaissance basée sur un maillage auxiliaire.

2 Méthode du Lagrangien augmenté

La méthode de Lagrangien augmenté (LA) a été introduite par Hestenes [5] et Powell [7] pour les problèmes de programmation non linéaire sous contrainte. Alart et Curnier [1] et Pietrzak [6] ont bien adapté cette méthode pour le problème de contact avec friction dans le cadre des grandes déformations. Le lecteur est renvoyé à l'article de Pietrzak pour un exposé détaillé de la méthode. On ne cite ici que les principales équations, appliquées à un milieu discrétisé par des éléments linéaires en 2D.

Pour chaque zone de contact entre deux corps, on définit un impacteur et une cible, l'impacteur correspondant aux nœuds susceptibles d'entrer en contact sur un corps, et la cible correspond à la surface de contact sur le deuxième corps ; on introduit donc une certaine asymétrie. Il y a deux valeurs importantes d'un point de vue cinématique : la distance normale entre les surfaces de

contact et la vitesse de glissement tangentielle. Dans un milieu discrétisé, on définit la distance entre chaque nœud de l'impacteur et sa projection sur la surface-cible (ou sur la prolongation de cette surface dans certains cas) : $g_n = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{n}$, où \mathbf{x}_1 est la coordonnée du nœud de l'impacteur, \mathbf{x}_2 la coordonnée d'un des nœuds de la cible et \mathbf{n} une normale de la ligne reliant deux nœuds de la surface-cible \mathbf{x}_2 et \mathbf{x}_3 . La vitesse de glissement tangentielle est définie par Curnier [2] par

$$\dot{\mathbf{g}}_t(\xi, \tau) = \mathbf{F}(\xi, \tau) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_p(\xi, \tau)}{\partial \tau},$$

où le τ est le temps, le \mathbf{F} est le gradient de la transformation $\mathbf{F} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X}$, \mathbf{X}_p la coordonnée de la projection du nœud de l'impacteur sur la surface-cible dans la configuration de référence. Il est d'usage de désigner par \mathbf{X} les coordonnées des nœuds dans la configuration initiale, et \mathbf{x} les coordonnées dans la configuration actuelle.

Après discrétisation en temps (on considère deux instants τ et $\tau + d\tau$), et en espace (on se limite à la considération d'un élément de contact composé d'un nœud de l'impacteur $\mathbf{x}_1(\tau)$ et deux nœuds de la cible $\mathbf{x}_2(\tau)$, $\mathbf{x}_3(\tau)$, fig. 1), on a l'expression suivante :

$$\dot{\mathbf{g}}_t(\tau, \tau + d\tau) = \left[\frac{\gamma(\tau + d\tau)}{\gamma(0)} \mathbf{t}(\tau + d\tau) \otimes \mathbf{t}(0) \right] \cdot \left[\frac{(\beta - \alpha) \mathbf{t}(0) \gamma(0)}{d\tau} \right] = \gamma(\tau + d\tau) \mathbf{t}(\tau + d\tau) (\beta - \alpha) d\tau,$$

où $\alpha = \frac{(\mathbf{x}_1(\tau) - \mathbf{x}_2(\tau)) \cdot (\mathbf{x}_3(\tau) - \mathbf{x}_2(\tau))}{\gamma^2(\tau)}$ et $\beta = \frac{(\mathbf{x}_1(\tau + d\tau) - \mathbf{x}_2(\tau + d\tau)) \cdot (\mathbf{x}_3(\tau + d\tau) - \mathbf{x}_2(\tau + d\tau))}{\gamma^2(\tau + d\tau)}$, $\gamma(\tau) = \|\mathbf{x}_3(\tau) - \mathbf{x}_2(\tau)\|$ et $\mathbf{t} = (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2) / \gamma$ est le vecteur tangentiel normalisé.

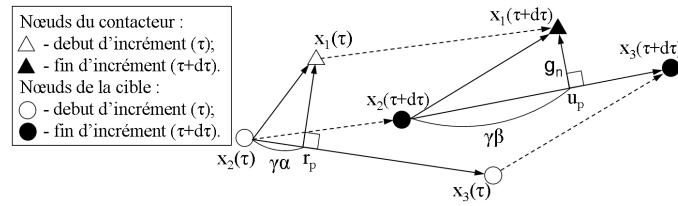


Figure 1 – Géométrie d'un élément de contact

L'approche par Lagrangien augmenté est une procédure qui associe les méthodes des multiplicateurs de Lagrange et de pénalisation, et qui s'exprime sous la forme :

$$\mathcal{L}_a(\lambda, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}_n) = \sum_{i=1}^{N_{\text{corps}}} U^i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{N_{\text{contact}}} \hat{U}_c^j(\lambda, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}_n),$$

où λ est un vecteur de multiplicateurs de Lagrange, $\hat{\mathbf{p}}_n = p_n + r g_n$ la pression normale de contact augmentée par la valeur cinématique g_n multipliée par r qui caractérise la mesure de la pénalité, U^i l'énergie potentielle du i^e corps du système et \hat{U}_c^j est l'énergie de contact qui correspond à la j^e zone de contact.

$$\hat{U}_c^j(\mathbf{x}, \lambda, \hat{\mathbf{p}}_n) = \int_{\Gamma_c^j} \ell_n(\mathbf{x}, \lambda_n) d\Gamma + \int_{\Gamma_c^j} \ell_t(\mathbf{x}, \lambda_t, \hat{\mathbf{p}}_n) d\Gamma,$$

Γ_c^j désigne la surface de contact, ℓ_n et ℓ_t sont les fonctions régularisées suivantes :

$$\ell_n(\mathbf{x}, \lambda_n) = g_n(\mathbf{x}) \lambda_n + \frac{r}{2} \|g_n(\mathbf{x})\|^2 - \frac{1}{2r} \text{dist}_{\mathbf{R}^-}^2[\sigma_n]$$

$$\ell_t(\mathbf{x}, \lambda_n, \hat{\mathbf{p}}_n) = \dot{\mathbf{g}}_t(\mathbf{x}) \cdot \lambda_t + \frac{r}{2} \|\dot{\mathbf{g}}_t(\mathbf{x})\|^2 - \frac{1}{2r} \text{dist}_{\hat{\mathbf{C}}[\hat{\mathbf{p}}_n]}^2[\sigma_t],$$

où $\sigma_n = \lambda_n + r g_n(\mathbf{x})$, $\sigma_t = \lambda_t + r \dot{\mathbf{g}}_t(\mathbf{x})$ et $\hat{C}[\hat{\mathbf{p}}_n]$ est le cône de frottement de Coulomb, définissant la valeur maximale de la force tangentielle, qui dépend de la force normale augmentée $\hat{\mathbf{p}}_n$.

Une condition nécessaire d'existence de la solution est

$$\nabla_{\mathbf{x}, \lambda} \mathcal{L}_a = \sum_{i=1}^{N_{corps}} \nabla_{\mathbf{x}} U^i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{N_{contact}} \nabla_{\mathbf{x}, \lambda} \hat{U}_c^j(\lambda, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}_n) = \mathbf{G}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \lambda) = 0$$

où $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ correspond à la part sur la structure, et $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \lambda)$ correspond à la part dans le contact. La forme de \mathbf{F} , qui correspond aux forces nodales dans les éléments de contact est

$$F(\mathbf{x}, \lambda) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\lambda}{r} \end{bmatrix}, & \text{si } \sigma_n > 0 \text{ (non contact);} \\ \begin{bmatrix} \sigma_n \mathbf{n} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \cdot \sigma_t \\ -(1 - \beta) \sigma_n \mathbf{n} - \sigma_t \cdot \left(\frac{g_n}{\gamma} \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} + (1 - \alpha) \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \right) \\ -\beta \sigma_n \mathbf{n} + \sigma_t \cdot \left(\frac{g_n}{\gamma} \mathbf{t} \otimes \mathbf{n} - \alpha \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \right) \\ -\frac{1}{r} (\lambda - \sigma_n \mathbf{n} - \sigma_t) \end{bmatrix}, & \text{si } \|\sigma_t\| \leq -\mu \sigma_n; \sigma_n < 0 \text{ (adhérence)} \\ \begin{bmatrix} (\mathbf{n} - \varepsilon \mu \mathbf{t}) \sigma_n \\ \left(-(1 - \beta) \mathbf{n} + \varepsilon \mu \left(\frac{g_n}{\gamma} \mathbf{n} + (1 - \alpha) \mathbf{t} \right) \right) \sigma_n \\ \left(-\beta \mathbf{n} - \varepsilon \mu \left(\frac{g_n}{\gamma} \mathbf{n} - \alpha \mathbf{t} \right) \right) \sigma_n \\ -\frac{1}{r} (\lambda - \sigma_n (\mathbf{n} - \varepsilon \mu \mathbf{t})) \end{bmatrix}, & \text{si } \|\sigma_t\| > -\mu \sigma_n; \sigma_n < 0 \text{ (glissement)} \end{cases}$$

Il s'ensuit que la matrice tangente élémentaire est définie comme $\mathbf{A}_c = \nabla \mathbf{F}$. Dans le cadre d'un logiciel de calcul par éléments finis, il est nécessaire de définir les nœuds de l'impacteur qui entrent en contact et de les lier avec les nœuds de la cible. On forme pour cela des nouveaux éléments, les éléments de contact, en groupant un nœud de l'impacteur et quelques nœuds de la cible (au minimum deux nœuds dans le cas 2D pour les éléments linéaires). En dehors des nœuds qui forment cet élément, on ajoute des degrés de liberté correspondant aux multiplicateurs de Lagrange, qui sont la force de contact normale λ_n et la force de contact tangentielle λ_t . Il est ensuite nécessaire de définir des forces nodales – un vecteur de vecteurs $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \lambda)$ –, et la matrice tangente de rigidité (matrice de tenseurs) \mathbf{A}_c . Après chaque incrément de chargement, il faut reconstruire les éléments de contact, c'est-à-dire répéter la procédure de reconnaissance sur la zone de contact, qui s'est déformée. Cette partie de l'algorithme global de contact, utilisée pendant tout le cycle de résolution, est donc très importante : la vitesse de résolution dépend fortement de l'efficacité de la procédure de reconnaissance, exposée dans la section suivante.

3 Reconnaissance du contact

La question de reconnaissance du contact n'est pas triviale, et bon nombre de méthodes ont été proposées pour résoudre le problème. Dans cette section, on décrit une méthode inspirée de [3], qui s'est montrée efficace pour une large gamme de problèmes de contact. La méthode est basée sur la division de l'espace de contact par un maillage régulier. Ce maillage est limité par un parallélépipède qui contient entièrement la surface-cible avec un jeu de valeur w défini par l'utilisateur. Ce paramètre définit la distance maximale sur laquelle on cherche les nœuds qui entrent en contact. Pendant la procédure de reconnaissance, on cherche d'abord pour chaque nœud

de l'impacteur le nœud le plus proche de la cible qui se trouve dans la même maille que le nœud de la cible ou dans les mailles voisines, à la suite de quoi on définit s'il y a une projection de ce nœud sur les surfaces-cibles contenant le nœud trouvé.

Il faut vérifier que le choix du paramètre w , défini par l'utilisateur, est tel que la surface-cible se trouve entièrement dans l'union des cercles, de centres les nœuds de la cible, et de rayons $r_i = w$ (fig. 2a) : $I_{cible} \in \bigcup_{i=1}^{N_{cible}} J_i$, $J_i = \{\mathbf{r} \mid \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\| < w\} \Leftrightarrow w > L/2$, où $L = \max_{i=2, \dots, N_{cible}} \{\|r_i - r_{i-1}\|\}$.

La procédure précise de reconnaissance comporte quatre étapes :

1. *Définition des limites du maillage de reconnaissance (de complexité N_{cible})*

Il est nécessaire de déterminer les coordonnées du nœud de la cible le plus éloigné ; cette procédure se passe dans le repère global, c'est-à-dire qu'on cherche $R_{min}^i = \min_{j=1, \dots, N_{cible}} [x_j^i]$ et $R_{max}^i = \max_{j=1, \dots, N_{cible}} [x_j^i]$, où $i = 1, 2$ en 2D et $i = 1, 2, 3$ en 3D, le N_{cible} est le nombre de nœuds de la cible. Les limites de la boîte de recherche vont de $\{R_{min}^1 - w, R_{min}^2 - w, R_{min}^3 - w\}$ à $\{R_{max}^1 + w, R_{max}^2 + w, R_{max}^3 + w\}$ en 3D. L'introduction du jeu w est obligatoire, faute de quoi certains nœuds de l'impacteur peuvent être oubliés.

La boîte se divise en $N_1 \times N_2 (\times N_3)$ mailles où $N_i = \max\left\{\left\lceil \frac{R_{max}^i - R_{min}^i}{2w} \right\rceil, 1\right\}$, la notation $[x]$ définissant, dans tout cet article, la partie entière, si bien que les dimensions approximatives de chaque maille sont $2w \times 2w (\times 2w)$. Cette heuristique fournit une approche optimale en temps de reconnaissance.

2. *Remplissage des vecteurs (de complexité $< N_{cible} + N_{imp}$)*

Lorsque le maillage est formé, pour chaque nœud de la cible et chaque nœud de l'impacteur qui entrent dans la boîte de recherche, le numéro de maille où il se trouve doit être déterminé :

$$N_{2D} = \left\lceil \frac{r^1 - r_{min}^1}{\Delta x} \right\rceil + n_x \left\lceil \frac{r^2 - r_{min}^2}{\Delta y} \right\rceil, N_{3D} = \left\lceil \frac{r^1 - r_{min}^1}{\Delta x} \right\rceil + n_x \left\lceil \frac{r^2 - r_{min}^2}{\Delta y} \right\rceil + n_x n_y \left\lceil \frac{r^3 - r_{min}^3}{\Delta z} \right\rceil$$

A chaque nouvelle opération, l'identificateur du nœud s'ajoute dans un vecteur de vecteurs A_{ij} , où i est le numéro de la maille dans laquelle se trouve ce nœud, et j est le numéro d'ordre du nœud trouvé dans cette maille. Cette procédure s'utilise séparément pour les nœuds de l'impacteur et de la cible, si bien qu'on obtient deux vecteurs de vecteurs I et T , qui correspondent respectivement à l'impacteur et à la cible.

3. *Définition des nœuds les plus proches (de complexité $\sim \frac{4N_{imp}N_{cible}}{(n_x n_y)^2}$ en 2D, $\sim \frac{8N_{imp}N_{cible}}{(n_x n_y n_z)^2}$ en 3D)*

On calcule le minimum de la distance entre le nœud impacteur et les nœuds de la cible dans la maille courante et un sous-ensemble des mailles voisines. Ce sous-ensemble est construit en ne gardant que les mailles situées du «même côté» que le nœud impacteur (fig. 2b, 3 mailles sur 8 en 2D et 7 sur 26 en 3D). Le choix de $2w$ pour la taille de maille assure qu'une recherche sur ce sous-ensemble est suffisante.

4. *Définition d'une surface de projection (de complexité $< 2N_{cible}$ en 2D)*

Chaque nœud est attaché à une surface (en 3D) ou une ligne (en 2D), il ne reste plus qu'à déterminer sa projection sur la surface. Si aucune projection n'existe, il est nécessaire de vérifier si le nœud de l'impacteur se trouve dans «l'angle mort» de la surface-cible discrétisée. C'est notamment important lorsqu'il y a des conditions symétriques (fig. 2b).

La complexité totale de la méthode de reconnaissance est $\sim 4N_{cible} + N_{imp} + \frac{4N_{imp}N_{cible}}{(n_x n_y)^2}$ en 2D et $\sim (2+k)N_{cible} + N_{imp} + \frac{8N_{imp}N_{cible}}{(n_x n_y n_z)^2}$ en 3D, où le k est le nombre moyen de surfaces attachées à chaque nœud de la cible. La comparaison de la méthode proposée et de la méthode «brutale» sur le cas réel est représentée sur la figure 3a. Les avantages de la nouvelle méthode sont la robustesse et la rapidité. Cependant, l'efficacité de la méthode diminue si le maillage de la cible ou de l'impacteur est très irrégulier ou si la cible est plate.

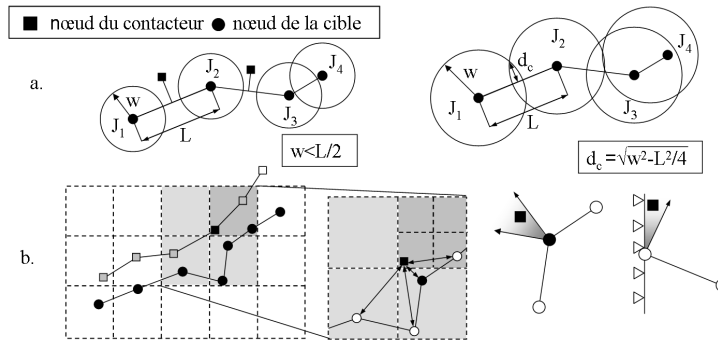


Figure 2 – a. Condition sur w ; b. Etapes de reconnaissance et exemples d'angle mort

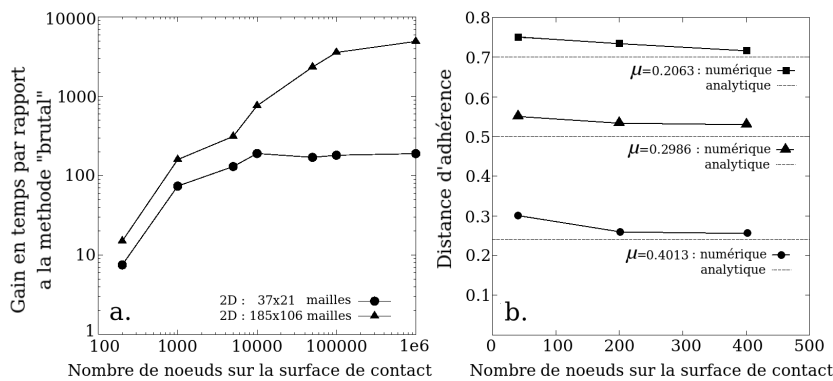


Figure 3 – a. Gain en temps en 2D de la méthode de reconnaissance par rapport à la méthode «brutale»; b. variation de la distance d'adhérence en fonction du nombre de nœuds sur la surface de contact

4 Parallélisation

La parallélisation de la méthode de contact comporte deux parties : la parallélisation de la reconnaissance, et celle de la résolution. Elle est basée sur une méthode générique de décomposition de domaines [4] (contenant notamment la méthode FETI – Finite Element Tearing and Interconnecting). On considère donc N processeurs, et une partition du modèle total en N sous-domaines. Dès que les nœuds qui entrent en contact sont trouvés, il est nécessaire d'ajouter au vol les nouveaux éléments de contact aux sous-domaines qui contiennent les zones de contact. La version parallèle de l'algorithme comprend 5 étapes :

1. Chaque sous-domaine dont une partie du maillage contient une surface de contact l'envoie au premier sous-domaine.

2. Le sous-domaine 0 définit les paramètres du maillage de reconnaissance : w , R_{min}^i , R_{max}^i , n_x , etc. Il définit ensuite le numéro de maille pour chacun des nœuds de la surface de contact. Le maillage de reconnaissance est alors divisé en N parties de même volume (fig. 4, zone A) chacune confiée à un sous-domaine. A chacune des parties envoyées, on ajoute en plus les nœuds de la cible qui se trouvent dans les zones attenantes à la frontière de la division (fig. 4, zone B) ; l'épaisseur de cette zone est égale à une maille. Cela nous permet de ne plus échanger d'informations entre les sous-domaines pendant la suite de la reconnaissance.

3. Chacun sous-domaine effectue indépendamment des autres la reconnaissance dans la partie proposée et envoie ses résultats au premier sous-domaine.

4. Le premier sous-domaine définit alors les domaines où les éléments de contact sont à créer, et envoie ces informations aux sous-domaines concernés.

5. On effectue ensuite la résolution parallèle avec la méthode générique de décomposition de domaine.

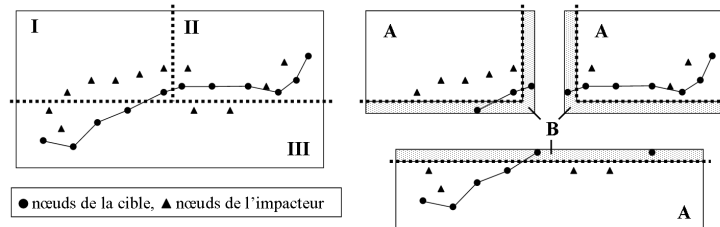


Figure 4 – Partition du maillage de reconnaissance pour la procédure parallèle

5 Conclusion

L'approche cohérente pour traiter le problème de contact en séquentiel et en parallèle est exposée. La nouvelle méthode de reconnaissance de contact est proposée en deux versions : séquentielle et parallèle. La dernière permet d'effectuer la recherche par les sous-domaines indépendamment. L'algorithme proposé dans cet article a été implanté dans Zébulon, un logiciel de calcul par éléments finis développé conjointement par l'ONERA, Northwest Numerics (Seattle, USA) et le Centre des Matériaux (CNRS UMR 7633). La méthode est validée sur le problème axisymétrique de contact entre une estampe rigide et un demi-espace en prenant en compte le frottement [8]. L'erreur maximale pour les coefficients de frottement différents ($\mu = 0.2; 0.3; 0.4$) ne dépasse pas 10% pour une surface de contact contenant 400 nœuds (fig. 3 b).

Références

- [1] P. Alart, A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 92, issue 3, pp. 353-375, 1991
- [2] A. Curnier, Q.-Ch. He and A. Klarbring. Continuum Mechanics Modeling of Large Deformation Contact with Friction. in : *Contact Mechanics*, M. Raous, M. Jean and J.-J. Moreau. (Eds.), Plenum, New York, 1995
- [3] W. Fujun, C. Jiangang, Y. Zhenhan. A contact searching algorithm for contact-impactor problems. *Acta Mechanica SINICA (English series)*, Vol 16, No 4, pp. 374-382, 2000
- [4] P. Gosselet, C. Rey. Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol 13, No 4, pp 515-572, 2006
- [5] M. Hestenes, Multiplier and gradient method, *J. Opt. Th. Appl.*, 4, pp. 303-320, 1969
- [6] G. Pietrzak, P. Alart, Large deformation frictional contact mechanics : continuum formulation and augmented Lagrangian treatment. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 177, pp. 351-381, 1999
- [7] B. T. Powell, A method for nonlinear constraints in minimisation problems, in : R. Fletcher, ed., *Optimisation*, Academic Press, London, 1969
- [8] D. A. Spence, The Hertz contact problem with finite friction. *Journal of Elasticity*, 5, No 3-4, pp. 298-319, 1975