

Modélisation des composites à fibres piézoélectriques : calcul des coefficients homogénéisés

Modelling of piezoelectric fiber composites : computation of the homogenized coefficients

A. Deraemaeker¹, H. Nasser² et A. Preumont¹

¹ Laboratoire des Structures Actives, ULB
50 av. Franklin Roosevelt, CP 165/42, 1050 Bruxelles, Belgique
email : aderaema@ulb.ac.be

² CRP Henri Tudor
29 Avenue John F. Kennedy, L-1855 Luxembourg
email : houssein.nasser@tudor.lu

Résumé

Ce travail porte sur la modélisation de composites minces à fibres piézoélectriques. En utilisant la méthode des champs uniformes et l'hypothèse des contraintes planes, nous dérivons des lois de mélange analytiques qui permettent d'évaluer les coefficients équivalents des MFCs (Macro Fiber Composites) de type d_{31} et de type d_{33} . En particulier, nous présentons les lois de mélange pour les coefficients piézoélectriques longitudinaux et transverses. Ces lois de mélanges sont validées par des calculs éléments finis.

Abstract

This paper focuses on the modelling of thin piezoelectric fiber composites. Based on the uniform field method under the plane stress assumption, we derive analytical mixing rules in order to evaluate equivalent properties for d_{31} and d_{33} MFCs (Macro Fiber Composites) transducers. In particular, mixing rules are derived for the longitudinal and transverse piezoelectric coefficients. These mixing rules are validated using finite element computations.

Mots clés : composites piézoélectriques, lois de mélange, homogénéisation, MFC (Macro Fiber Composites)
Keywords : piezoelectric fiber composites, mixing rules, homogenization, MFC (Macro Fiber Composites)

1 Introduction

Les actionneurs et capteurs piézoélectriques sont largement utilisés dans les applications de contrôle actif. Parmi les matériaux piézoélectriques, les céramiques PZT sont les plus couramment utilisées du fait de leurs bonnes propriétés d'actionnement et de leur bande passante très large. Elles présentent cependant certains inconvénients parmi lesquels on peut citer leur fragilité qui empêche de les appliquer sur des surfaces courbes, et réduit leur durabilité et leur robustesse. Une nouvelle famille d'actionneurs basés sur des fibres piézoélectriques dans une matrice epoxy permet de remédier à cet inconvénient.

Un transducteur composite piézoélectrique se compose d'une couche active prise en sandwich entre deux couches minces et souples. Cet enrobage joue deux rôles différents : (i) il permet d'appliquer une précontrainte à la couche active afin d'éviter la fissuration, et (ii), il permet d'appliquer le champ électrique dans la couche active par l'utilisation de différentes formes d'électrodes. Le premier actionneur composite à fibres piézoélectriques a été développé au MIT [1]. Il consiste en une couche active faite de fibres PZT rondes enrobées d'une matrice epoxy, actionnée selon le mode d_{31} (Figure 1a). Le problème majeur avec ce genre de configuration provient de la très grande différence entre la permittivité diélectrique du PZT ($\epsilon_r=1850$) et celle de l'epoxy ($\epsilon_r=4$). Il en résulte une réduction énorme du champ électrique effectivement appliqué à la fibre, même pour une très petite couche d'epoxy entre les électrodes et la fibre.

Durant la même période, la même équipe du MIT a proposé l'utilisation d'électrodes interdigitées (Figure 1b) qui permettent d'utiliser le mode d'actionnement d_{33} . La déformation maximale est augmentée de par le fait que la valeur de du coefficient d_{33} du PZT est généralement deux à trois fois plus élevée que la valeur du coefficient d_{31} , mais ceci nécessite l'utilisation de tensions électriques plus importantes car l'espacement entre les électrodes est de 3 à 6 fois plus élevé que l'épaisseur du transducteur.

En 2000, la NASA a développé un nouveau concept appelé MFC (Macro Fiber Composites) [2]. La différence majeure est que les fibres sont rectangulaires, ce qui permet un meilleur contact avec les électrodes et réduit l'influence de la différence de permittivité diélectrique entre la fibre et la matrice. Des MFCs de type d_{31} et de type d_{33} sont actuellement produits par la compagnie *Smart Material*.

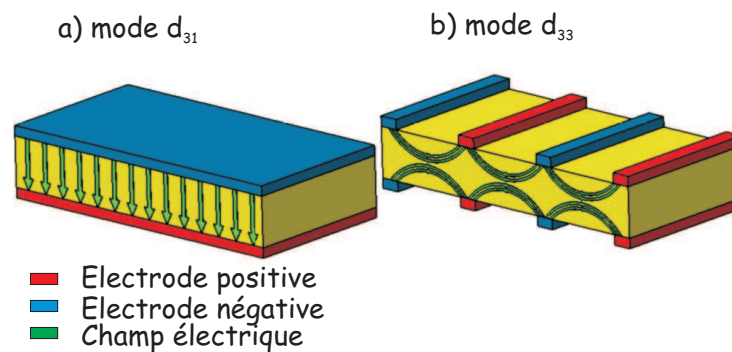


Figure 1: Distribution du champ électrique pour différentes configurations d'électrodes

De manière générale, de nombreux efforts ont été faits pour développer des transducteurs piézoélectriques composites minces [3, 4]. La modélisation de tels transducteurs reste cependant problématique. L'analyse de matériaux multi-couches comprenant des matériaux piézoélectriques peut se faire par l'utilisation d'éléments-finis adaptés [5, 6]. Les patches piézoélectriques classiques sont alors représentés par une couche uniforme de matériau actif. Pour les composites à fibres piézoélectriques, il est nécessaire de connaître les propriétés homogénéisées de chacune de leurs couches afin de les introduire dans les codes de calcul. La couche qui pose problème est la couche active pour laquelle il faut connaître, en plus des propriétés mécaniques, les propriétés piézoélectriques et diélectriques. Les fabricants de composites à fibres piézoélectriques ne donnent que des informations globales et souvent incomplètes, ce qui a motivé le développement de méthodes de calcul des coefficients homogénéisés qui sont ici appliquées aux MFCs de type d_{31} et d_{33} [7, 8]. A notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature de règles de mélange simples permettant de calculer les propriétés homogènes de composites à fibres piézoélectriques rectangulaires. Cette étude a pour but de développer de telles règles de mélanges. Celles-ci sont dérivées à partir de la méthode des champs uniformes formulée en contraintes planes. Les règles de mélanges sont ensuite validées par des calculs éléments-finis.

2 Relations de comportement

2.1 Composites piézoélectriques d_{31}

Pour les composites piézoélectriques d_{31} , la direction de polarisation (par convention notée 3) est normale au plan du transducteur (Figure 2a), ce qui implique, pour l'hypothèse des contraintes planes, $T_3 = 0$. Le champ électrique est supposé aligné avec le vecteur de polarisation ($E_2 = E_1 = 0$). En utilisant les notations standard IEEE pour la piézoélectricité linéaire et l'hypothèse de Mindlin, les relations de comportement s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{21}^E & s_{22}^E & 0 & 0 & 0 & d_{32} \\ 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E & 0 \\ d_{31} & d_{32} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

où E_i et D_i sont les composantes du champ électrique et du déplacement électrique, et T_i , S_i sont les composantes des tenseurs des contraintes et des déformations écrites sous formes vectorielles :

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \\ T_{12} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ 2 S_{23} \\ 2 S_{13} \\ 2 S_{12} \end{pmatrix} \quad (2)$$

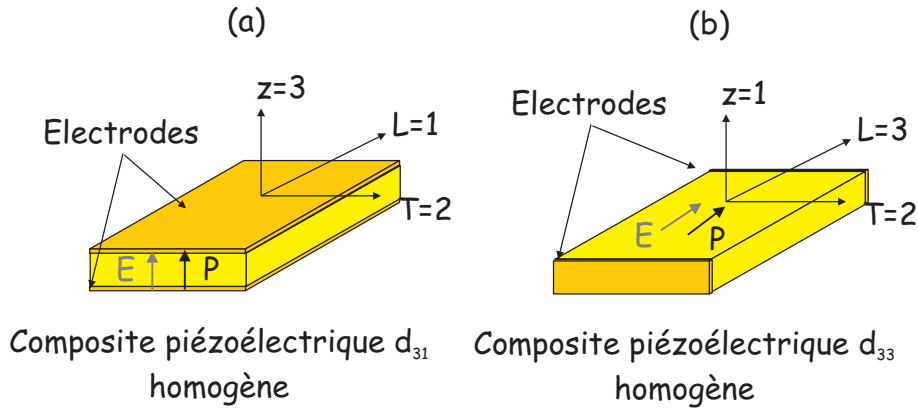


Figure 2: Modèles homogènes de la couche active des composites piézoélectriques : axes de référence pour les composites de type d_{31} et d_{33}

2.2 Composites piézoélectriques d_{33}

Pour les composites piézoélectriques de type d_{33} , bien que les lignes du champ électrique soient courbes (Figure 1b), il est raisonnable de considérer que la direction de polarisation est celle des fibres (direction 3, Figure 2b) et que le champ électrique est dans la même direction. L'hypothèse des contraintes planes implique dès lors $T_1 = 0$. Les relations de comportement s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_{22}^E & s_{23}^E & 0 & 0 & 0 & d_{32} \\ s_{32}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E & 0 \\ d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

3 Lois des mélange pour les transducteurs MFC

3.1 MFCs d_{31}

Considérons un volume élémentaire représentatif (VER, Figure 3) sur lequel nous définissons les valeurs moyennes de T_i, S_i, D_i, E_i :

$$\overline{T}_i = \frac{1}{V} \int_V T_i dV \quad \overline{D}_i = \frac{1}{V} \int_V D_i dV \quad (4)$$

$$\overline{S}_i = \frac{1}{V} \int_V S_i dV \quad \overline{E}_i = \frac{1}{V} \int_V E_i dV \quad (5)$$

où $\overline{}$ représente la valeur moyenne. Nous utilisons la méthode des champs uniformes (Uniform Field Method, UFM [9]) qui consiste à supposer tous les champs uniformes dans chaque phase. De plus, les mécanismes de déformations utilisés dans la théorie classique des laminés sont supposée (Figure 4), ce qui mène aux égalités suivantes :

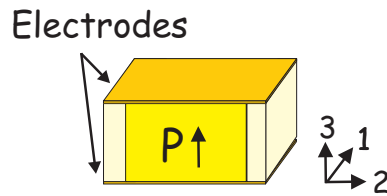


Figure 3: Volume élémentaire représentatif pour un MFC d_{31}

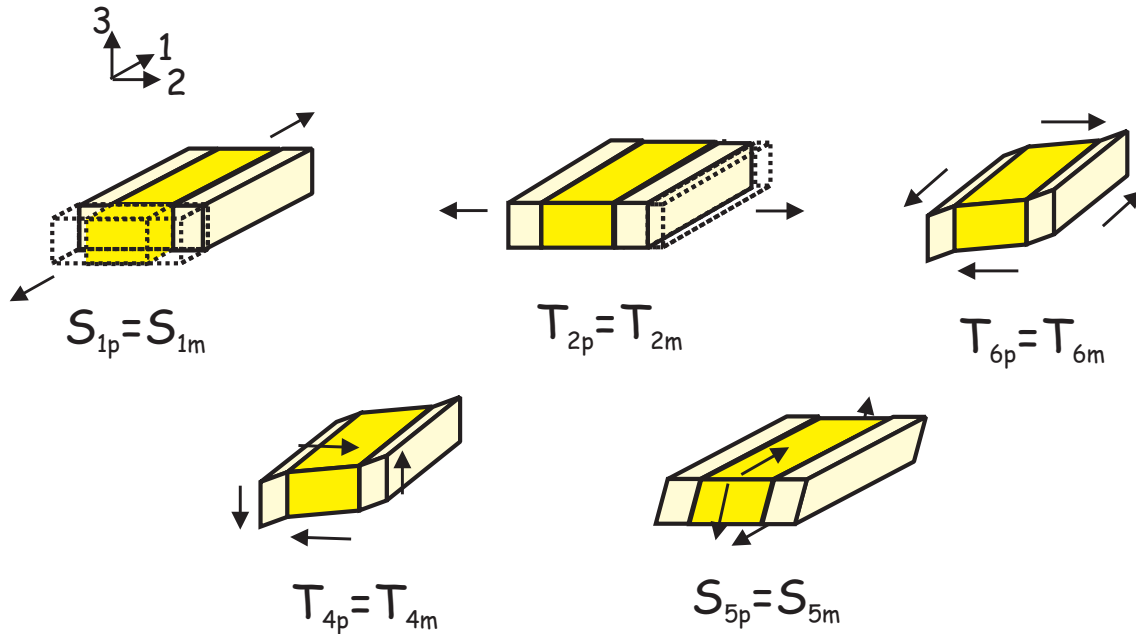


Figure 4: Mécanismes de déformation pour le VER d'un MFC d_{31}

$$\begin{aligned}
 \overline{S_1} &= S_1^p = S_1^m \\
 \overline{T_2} &= T_2^p = T_2^m \\
 \overline{T_4} &= T_4^p = T_4^m \\
 \overline{S_5} &= S_5^p = S_5^m \\
 \overline{T_6} &= T_6^p = T_6^m
 \end{aligned} \tag{6}$$

où p représente le matériau piézoélectrique et m la matrice. Pour les autres champs, les valeurs moyennes sont données par :

$$\begin{aligned}
 \overline{T_1} &= \rho T_1^p + (1 - \rho) T_1^m \\
 \overline{S_2} &= \rho S_2^p + (1 - \rho) S_2^m \\
 \overline{S_4} &= \rho S_4^p + (1 - \rho) S_4^m \\
 \overline{T_5} &= \rho T_5^p + (1 - \rho) T_5^m \\
 \overline{S_6} &= \rho S_6^p + (1 - \rho) S_6^m
 \end{aligned} \tag{7}$$

où ρ est la fraction volumique de fibres. Les électrodes étant continues sur les faces supérieures et inférieures du VER, le champ électrique est identique dans les deux phases :

$$\overline{E_3} = E_3^p = E_3^m; \tag{8}$$

et on a également :

$$\overline{D_3} = \rho D_3^p + (1 - \rho) D_3^m, \tag{9}$$

En utilisant les variables identiques dans les deux phases comme variables indépendantes, les relations de comportement s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ S_2 \\ S_4 \\ T_5 \\ S_6 \\ D_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} S_1 \\ T_2 \\ T_4 \\ S_5 \\ T_6 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_{11}^E} & -\frac{s_{21}^E}{s_{11}^E} & 0 & 0 & 0 & -\frac{d_{31}}{s_{11}^E} \\ \frac{s_{21}^E}{s_{11}^E} & s_{22}^E - \frac{(s_{21}^E)^2}{s_{11}^E} & 0 & 0 & 0 & d_{32} - d_{31} \frac{s_{21}^E}{s_{11}^E} \\ 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s_{55}^E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E & 0 \\ \frac{d_{31}}{s_{11}^E} & d_{32} - d_{31} \frac{s_{21}^E}{s_{11}^E} & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E} \end{pmatrix} \quad (11)$$

En utilisant (7), on montre que :

$$\bar{A} = \rho A_p + (1 - \rho) A_m \quad (12)$$

Ce qui indique que l'on peut écrire une loi de mélange linéaire pour chaque terme de la matrice A . En réarrangeant les équations et en exprimant les relations obtenues en fonction des constantes de l'ingénieur, on obtient :

$$E_L = \rho E_L^p + (1 - \rho) E_L^m \quad (13)$$

$$\frac{1}{E_T} = \frac{\rho}{E_T^p} + \frac{1 - \rho}{E_T^m} \quad (14)$$

$$\nu_{LT} = \rho \nu_{LT}^p + (1 - \rho) \nu_{LT}^m \quad (15)$$

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{\rho}{G_{LT}^p} + \frac{1 - \rho}{G_{LT}^m} \quad (16)$$

$$G_{Lz} = \rho G_{Lz}^p + (1 - \rho) G_{Lz}^m \quad (17)$$

$$\frac{1}{G_{Tz}} = \frac{\rho}{G_{Tz}^p} + \frac{1 - \rho}{G_{Tz}^m} \quad (18)$$

où E_L est le module d'Young longitudinal (dans la direction des fibres), E_T est le module transverse, ν_{LT} et G_{LT} sont le coefficient de Poisson et le module de cisaillement dans le plan, G_{Tz} et G_{Lz} sont les modules de cisaillement hors plan. Pour les propriétés mécaniques, nous obtenons les lois de mélange classiques pour les composites [10] (quelques termes du second ordre ont été négligés dans l'expression de E_T). Pour les propriétés piézoélectriques et diélectriques, on trouve :

$$d_{31} = \frac{1}{E_L} \rho d_{31}^p E_L^p \quad (19)$$

$$d_{32} = -d_{31} \nu_{LT} + \rho d_{31}^p (1 + \nu_{LT}^p) \quad (20)$$

$$\epsilon_{33}^T = \rho \epsilon_{33}^{Tp} + (1 - \rho) \epsilon_{33}^{Tm} \quad (21)$$

Nous avons considéré que la matrice n'est pas piézoélectrique et que $d_{31} = d_{32}$ pour les fibres. Il est intéressant de noter que ces expressions sont identiques aux lois de mélange pour le coefficient d'expansion thermique [10, 11] (il suffit de remplacer d_{31} par α pour l'analogie). d_{31} suit une loi de mélange n'impliquant que des propriétés longitudinales (E_L^p , E_L^m and d_{31}^p), alors que d_{32} dépend de propriétés longitudinales et transverses. Pour la permittivité diélectrique, la relation correspond à la mise en parallèle de capacités (ici encore quelques termes de second ordre ont été négligés).

3.2 MFCs d_{33}

La Figure 5 montre le VER pour les MFCs de type d_{33} . Nous utilisons la méthode UFM et les mécanismes de déformations identiques à ceux présentés pour les MFCs d_{31} (Figure 4).

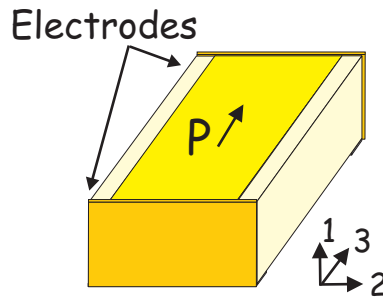


Figure 5: Volume élémentaire représentatif pour un MFC d_{33}

Comme les électrodes sont supposées continues sur les faces avant et arrière (modèle simplifié homogène), le champ électrique est égal dans les deux phases, on a donc :

$$\overline{E}_3 = E_3^p = E_3^m; \tag{22}$$

et

$$\overline{D}_3 = \rho D_3^p + (1 - \rho) D_3^m, \tag{23}$$

En utilisant un raisonnement similaire à celui utilisé pour les MFCs d_{31} , nous obtenons les lois de mélange qui sont résumées et comparées à celles obtenues pour les MFCs d_{31} dans la Table 1.

MFC d_{31}	MFC d_{33}
Propriétés mécaniques	
$E_L = \rho E_L^p + (1 - \rho) E_L^m$ $\frac{1}{E_T} = \frac{\rho}{E_T^p} + \frac{1 - \rho}{E_T^m}$ $\nu_{LT} = \rho \nu_{LT}^p + (1 - \rho) \nu_{LT}^m$ $\frac{1}{G_{LT}} = \frac{\rho}{G_{LT}^p} + \frac{1 - \rho}{G_{LT}^m}$ $G_{Lz} = \rho G_{Lz}^p + (1 - \rho) G_{Lz}^m$ $\frac{1}{G_{Tz}} = \frac{\rho}{G_{Tz}^p} + \frac{1 - \rho}{G_{Tz}^m}$	
Propriétés piézoélectriques	
$d_{31} = \frac{1}{E_L} \rho d_{31}^p E_L^p$ $d_{32} = -d_{31} \nu_{LT} + \rho d_{31}^p (1 + \nu_{LT}^p)$	$d_{33} = \frac{1}{E_L} (\rho d_{33}^p E_L^p)$ $d_{32} = -d_{33} \nu_{LT} + \rho (d_{32}^p + d_{33}^p \nu_{LT}^p)$
Propriétés diélectriques	
$\epsilon_{33}^T = \rho \epsilon_{33}^{Tp} + (1 - \rho) \epsilon_{33}^{Tm}$	

Table 1: Résumé des lois de mélange pour les MFCs d_{31} et d_{33}

4 Validation numérique des lois de mélange pour les MFCs

Afin de valider les lois de mélange présentées à la section précédente, les propriétés homogénéisées des MFCs d_{31} et d_{33} ont été calculées numériquement par la méthode des éléments finis. Au total, six problèmes locaux sont nécessaires pour identifier tous les coefficients des relations de comportement. Ces six problèmes sont représentés à la Figure 6 pour un MFC d_{33} . Le premier problème consiste à appliquer une différence de tension électrique V entre les électrodes du VER et à imposer des déplacements nuls de toutes les faces sauf celles du haut et du bas (ceci afin de laisser ces deux surfaces libres puisque l'on a fait l'hypothèse des contraintes planes). Pour les cinq problèmes suivants, la différence de potentiel électrique V est nulle et cinq mécanismes de déformations sont imposés, chacun correspondant à une déformation unitaire selon une des composantes du tenseur de déformation. Pour chaque problème, le VER est maillé à l'aide d'éléments volumiques piézoélectriques et la solution du problème est calculée à l'aide du logiciel SAMCEF [12]. Les valeurs moyennes de T_i, S_i, D_i et E_i sont calculées et utilisées pour déterminer tous les coefficients des relations de comportement.

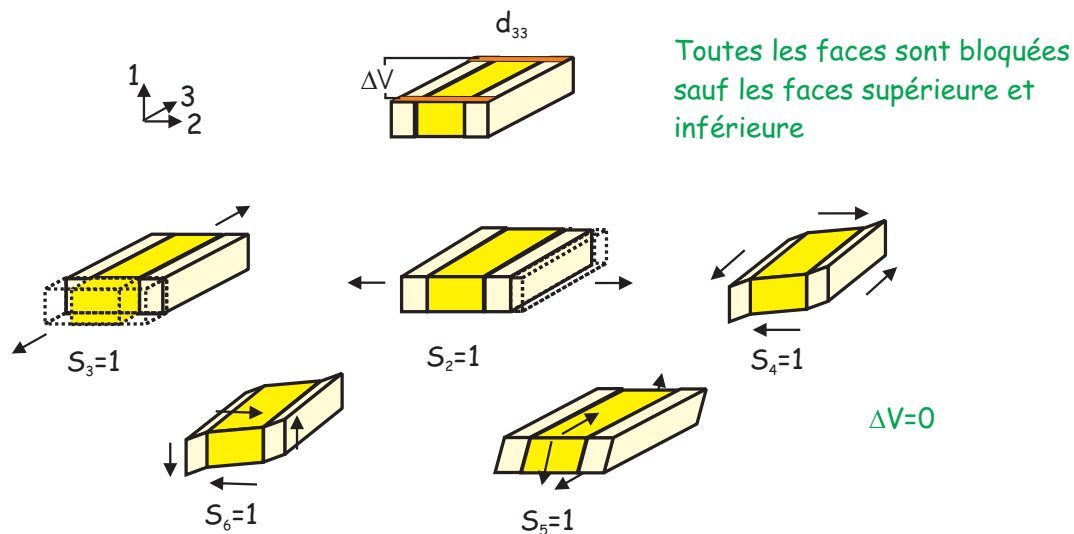


Figure 6: Les six problèmes locaux à résoudre afin de calculer les propriétés homogénéisées des MFCs d_{33} par la méthode des éléments-finis

Les propriétés homogénéisées de la couche active ont été calculées par cette méthode pour différentes valeurs de ρ . Les résultats sont comparés avec les lois de mélange analytiques développées dans la section 3. Les propriétés des fibres rectangulaires sont données dans la Table 2. Pour la matrice, des propriétés isotropes typiques pour l'époxy sont utilisées : $1/s_{11}^E = 1/s_{22}^E = 1/s_{33}^E = 2.9 \text{ GPa}$ (module d'Young), $\nu = 0.3$ et $\varepsilon_{11}^T/\varepsilon_0 = \varepsilon_{22}^T/\varepsilon_0 = \varepsilon_{33}^T/\varepsilon_0 = 4.25$.

	Symbole	Unité	Valeur
Modules d'Young	$1/s_{11}^E = 1/s_{22}^E$	GPa	54.05
	$1/s_{33}^E$	GPa	48.30
Modules de cisaillement	$2/s_{32}^E = 2/s_{31}^E$	GPa	19.48
	$2/s_{12}^E$	GPa	19.14
Coefficients de Poisson	$\nu_{23} = \nu_{13}$	-	0.44
	ν_{12}	-	0.41
Constantes piézoélectriques	$d_{32} = d_{31}$	pC/N	-185
	d_{33}	pC/N	440
	$d_{15} = d_{24}$	pC/N	560
Permittivité relative (libre)	$\varepsilon_{11}^T/\varepsilon_0 = \varepsilon_{22}^T/\varepsilon_0$	-	1950
	$\varepsilon_{33}^T/\varepsilon_0$	-	1850

Table 2: Propriétés des fibres rectangulaires PZT dans les MFCs

L'évolution des propriétés piézoélectriques en fonction de ρ est présentée à la Figure 7 pour des MFCs d_{31} . L'accord entre les lois de mélange et les calculs éléments-finis est très bon pour d_{31} et assez bon pour d_{32} .

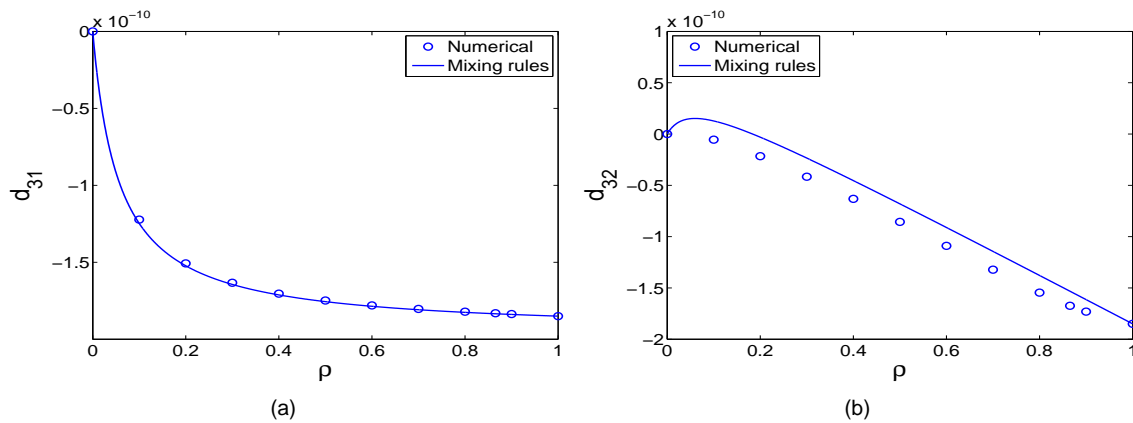


Figure 7: Evolution des coefficients piézoélectriques pour les MFCs d_{31} en fonction de ρ : comparaison entre les lois de mélange et les calculs éléments-finis

Les mêmes résultats sont présentés pour des MFCs d_{33} sur la Figure 8. Les valeurs numériques de d_{33} sont légèrement inférieures aux lois de mélange, mais la différence est faible.

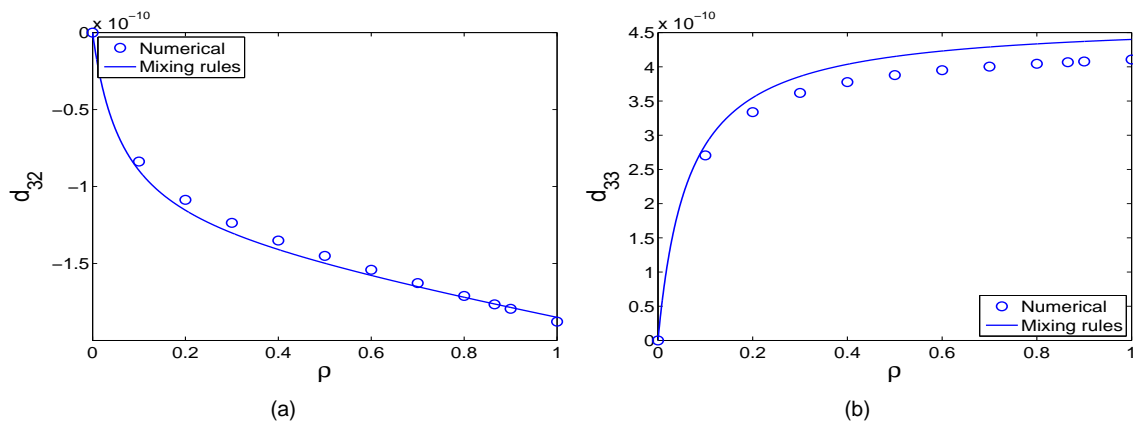


Figure 8: Evolution des coefficients piézoélectriques pour les MFCs d_{33} en fonction de ρ : comparaison entre les lois de mélange et les calculs éléments-finis

5 Conclusion

Les composites à fibres piézoélectriques sont utilisés dans de nombreuses applications telles que le contrôle actif ou le contrôle de forme. Parmi ceux-ci, les MFCs (Macro Fiber Composites) qui sont des composites piézoélectriques minces à fibres rectangulaires connaissent un succès grandissant. La modélisation de structures équipées de tels actionneurs pose cependant problème car les propriétés fournies par le fabricant ne sont pas suffisantes. Afin de résoudre ce problème, nous avons développé des lois de mélange analytiques permettant de déduire les propriétés équivalentes à partir des propriétés des constituants. En particulier, les lois de mélange pour les propriétés piézoélectriques ont été dérivées pour les deux types de MFCs (d_{31} et d_{33}). Ces lois de mélange ont été validées par des calculs éléments finis. La simplicité de telles lois permet à l'ingénieur de les utiliser pour le design de nouveaux composites à fibres piézoélectriques rectangulaires, dédiés à certaines applications (par exemple l'actionnement directionnel).

6 Remerciements

Le premier auteur est financé par le F.R.S-F.N.R.S (Belgique). Cette étude a été effectuée avec le support du projet européen CASSEM (FP6 - STREP), et du projet européen "Smart Structures" (FP6 - Marie-Curie RTN).

Références

- [1] A.A. Bent, N.W. Hagood, and J.P. Rodgers. Anisotropic actuation with piezoelectric fiber composites. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 6:338–349, 1995.
- [2] W.K. Wilkie et al. Low-cost piezocomposite actuator for structural control applications. In *Proc. SPIE 7th Annual Int. Symp. Smart. Struct. Mater.*, Newport Beach, USA, 2000.
- [3] B.R. Williams, G. Park, D.J. Inman, and W.K. Wilkie. An overview of composite actuators with piezoceramic fibers. In *Proc. of 20th Int. Modal Analysis Conference (IMAC)*, Los Angeles, USA, 2002.
- [4] P. Wierach. Low profile piezo actuators based on multilayer technology. In *Proc. of 17th Int. Conf. on Adaptive Structures and Technologies (ICAST2006)*, Taipei, Taiwan, October 2006.
- [5] Vincent Piefort. *Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures*. PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, June 2001.
- [6] U. Gabbert, H. Köppe, F. Seeger, and H. Berger. Modeling of smart composite shell structures. *J. of th. And appl Mechanics*, 3(40):575–593, 2002.
- [7] A. Deraemaeker and A. Preumont. Piezoelectric structures : modeling for control. In *Proc. Ninth International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics*, Southampton, UK, 2006.
- [8] A. Deraemaeker, S. Benelechi, A. Benjeddou, and A. Preumont. Analytical and numerical computation of homogenized properties of MFCs : Application to a composite boom with MFC actuators and sensors. In *Proc. III ECCOMAS thematic conference on Smart Structures and Materials*, Gdansk, Poland, July 2007.
- [9] P. Tan and L. Tong. Micro-electromechanics models for piezoelectric-fiber-reinforced composite materials. *Composites Science and Technology*, 61:759–769, 2001.
- [10] B. Agarwal and L. Broutman. *Analysis and performance of fiber composites (2nd Edition)*. John Wiley & Sons, 1990.
- [11] R.A. Schapery. Thermal expansion coefficients of composite materials based on energy principles. *Journal of Composite Materials*, 2(3):380–404, 1968.
- [12] Samcef from samtech, <http://www.samtech.be>.