

# UNE VUE PANORAMIQUE SUR L'ANALYSE SEMI-CLASSIQUE

OLIVIER LABLÉE

## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	2
2. La géométrie symplectique	2
2.1. La mécanique de Hamilton	2
2.2. Les variétés symplectiques	3
2.3. Premiers résultats et applications	4
2.4. Flot hamiltonien	4
2.5. Crochet de Poisson	6
2.6. Un peu de topologie symplectique	6
3. Mécanique quantique et théorie spectrale	6
3.1. La révolution de la physique	6
3.2. Rappels de théorie spectrale hilbertienne	7
3.3. Généralités sur la dynamique quantique	10
4. Spectre du laplacien et de l'opérateur de Schrödinger	11
4.1. Le contexte	12
4.2. Motivation	12
4.3. Le caractère auto-adjoint	12
4.4. Le spectre de l'opérateur est-il discret ?	13
4.5. Un aperçu sur les problèmes directs	13
4.6. Problèmes inverses : la géométrie spectrale	15
4.7. Métrique de Agmon et puits multiples	17
5. Quantification et limite semi-classique	19
5.1. Problématique	19
5.2. Impossibilité de la quantification idéale	19
5.3. Principe de l'analyse semi-classique	20
6. Opérateurs pseudo-différentiels	20
6.1. De Fourier à nos jours...	20
6.2. Symboles et transformée de Weyl	21
6.3. Quelques propriétés	22
7. Analyse microlocale	22
7.1. Fonctions admissibles	23
7.2. Micro-support et microfonctions	23
7.3. Analyse microlocale et faisceaux	24
7.4. Théorème d'Egorov et opérateurs intégraux de Fourier	24
8. Vers la quantification par déformation	25
8.1. Cas de $T^*X$	25
8.2. Cas général	26
9. Les systèmes complètement intégrables	26
9.1. Définitions	26
9.2. Théorie locale	27
9.3. Théorie semi-globale	28
9.4. ... aux fibres singulières	31
References	32

## 1. INTRODUCTION

Dans ce papier, on présente un rapide et partiel survol de l'analyse semi-classique. Cette théorie mathématique est un carrefour entre la géométrie et la théorie spectrale. Comme ce chapitre ne contient que des résultats standards, on ne trouvera que quelques démonstrations, mais on donnera des références précises. Ce chapitre ne prétend à aucune originalité dans les résultats.

Pour plus de détails sur la géométrie symplectique voir par exemple les premiers chapitres des livres de M. Audin [8] et [9], voir aussi les ouvrages de A.T. Fomenko [62], [63]. On peut aussi consulter le très bon livre de D. McDuff et D. Salomon [96]. Pour les généralités sur le formalisme mathématique de la mécanique quantique on peut se reporter à [76]. Pour la partie théorie spectrale, voir par exemple le livre de P. Lévy-Bruhl [93], le livre de T. Kato [85], ou encore la collection des Reed-Simon [106]. En ce qui concerne la quantification voir par exemple le livre A. Cattaneo, B. Keller, C. Torrossian et A. Bruguières [30]. Enfin, pour l'analyse semi-classique voir les références classiques : le livre de D. Robert [107], celui de M. Dimassi et J. Sjöstrand [52], le livre de A. Martinez [94] et le photocopié de Y. Colin de Verdière [107]. Pour la partie analyse microlocale, voir [118], [119], [107], [73]. En ce qui concerne les systèmes intégrables symplectique on pourra voir [8], [9], [99] et [119]. Le récent livre de S. Vu Ngoc [119] propose un grand panorama très complet sur les systèmes intégrables symplectique et semi-classique.

## 2. LA GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

A la différence de la géométrie riemannienne, la géométrie symplectique est une géométrie de mesure de surface, dédiée à la base pour la formulation de la mécanique de Hamilton, elle joue aussi un rôle très important à l'intérieur même des mathématiques, notamment en topologie. Pour commencer on définira la notion de variété symplectique, on donnera ensuite des exemples simples, comme par exemple le fait que pour n'importe quelle variété différentiable  $M$ , on peut munir son fibré cotangent  $T^*M$  d'une structure symplectique. On verra ensuite les principales caractéristiques de la géométrie symplectique : comme la structure de Lie induite sur l'algèbre des fonctions  $C^\infty(M)$ . Puis on finira sur l'absence de géométrie locale, ce qui constitue encore une différence majeure avec le cas riemannien.

**2.1. La mécanique de Hamilton.** La mécanique de Hamilton par rapport à la formulation de Lagrange n'apporte rien de nouveau sur le contenu physique, mais elle offre un cadre géométrique puissant, elle apporte une nouvelle façon de voir la physique : une façon moderne et géométrique. Une des principales caractéristique de la physique moderne, c'est la géométrie (relativité générale, cordes...). La géométrie riemannienne est une généralisation de l'ancienne géométrie euclidienne, elle est liée à la théorie de la relativité générale et à la théorie des jauges. Il existe une autre géométrie, encore plus liée à la physique : la géométrie symplectique. Moins connue que sa cousine riemannienne, elle est pourtant très riche, elle formalise parfaitement la mécanique de Hamilton. Dans la théorie d'Hamilton, les particules physiques sont décrites par leurs positions et leurs vitesses ; par exemple dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  un point est caractérisé par un vecteur  $(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^6$ . Pour un hamiltonien  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^6, \mathbb{R})$ , la dynamique est alors donnée par les équations de Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_j = -\frac{\partial f}{\partial x_j} \\ \dot{x}_j = \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \end{cases}$$

2

## 2.2. Les variétés symplectiques.

**Définition 1.** Une variété symplectique  $(M, \omega)$  est une variété différentiable de dimension  $m$  muni d'une 2-forme  $\omega$  fermée et non-dégénérée.

Rappelons que non-dégénérée signifie que pour tout point  $x$  de  $M$ , la forme bilinéaire  $\omega(x)$  est non-dégénérée sur l'espace vectoriel  $T_x^*M$ . Ainsi comme pour tout point  $x$  de  $M$ , la forme bilinéaire  $\omega$  est à la fois non-dégénérée et alternée, la dimension de l'espace  $T_x^*M$  doit être nécessairement pair ; ainsi la dimension de la variété  $M$  est elle aussi paire :  $m = 2n$ .

Une variété symplectique  $(M, \omega)$  est naturellement munie d'une forme volume  $\tau = \frac{1}{n!} \omega^n$ , où  $\omega^n = \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega$ , on a donc à disposition une orientation et une mesure de Lebesgue sur la variété  $M$ .

Donnons quelques exemples standards de variétés symplectiques :

**Exemple 2. L'espace  $\mathbb{R}^{2n}$  :** c'est l'exemple type, en notant par  $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$  la base canonique de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{2n}$ , et en notant par  $dx_j := (x_j)^*$ ,  $j \in \{1, \dots, 2n\}$  la base duale de  $\mathbb{R}^{2n}$  ; alors la 2-forme

$$\omega_0 = \sum_{i,j=1}^n dx_i \wedge dx_j$$

munie la variété  $\mathbb{R}^{2n}$  d'une structure symplectique. Si en particulier  $n = 1$ ,  $\omega_0$  est un déterminant, c'est alors une mesure d'aire algébrique sur le plan.

*Remarque 3.* Il est bon de noter que la géométrie symplectique ne donne que des notions d'aire, il n'y a pas de notions de longueurs, encore moins de notions d'angles, en effet, tout vecteur est orthogonal à lui même !

Donnons un exemple sur une variété compacte :

**Exemple 4. La sphère  $S^2$  :** sur  $S^2$  on définit pour tout  $x \in S^2$  :

$$\omega_x(\eta, \xi) := \langle x, \eta \wedge \xi \rangle_{\mathbb{R}^3}$$

avec  $(\eta, \xi) \in (T_x S^2)^2 \subset \mathbb{R}^3$  ce qui munit la sphère d'une structure de variété symplectique.

Plus généralement on a :

**Exemple 5. Sur une surface :** il suffit de prendre :

$$\omega = \sqrt{|g|} dq \wedge dp$$

où  $|g| = \det(g_{i,j})$  dans la carte de coordonnées locales  $(p, q)$ .

Finissons maintenant un exemple fondamental :

**Exemple 6. Sur le fibré cotangent d'une variété :** Le fibré cotangent d'une variété différentiable est naturellement muni d'une structure symplectique. En effet, pour toute variété  $M$  lisse de dimension  $n$ , on peut munir de façon intrinsèque son fibré cotangent  $T^*M$  d'une structure de variété symplectique  $(T^*M, \omega)$  de dimension  $2n$  définie par la différentielle extérieure

$$\omega = d\alpha$$

de la 1-forme de Liouville  $\alpha$ .

**2.3. Premiers résultats et applications.** Rappelons d'abord une notion importante : celle de symplectomorphisme.

**Définition 7.** Soient  $(M_1, \omega_1)$  et  $(M_2, \omega_2)$  deux variétés symplectique de même dimension, un symplectomorphisme de  $M_1$  sur  $M_2$  est un difféomorphisme  $f : M_1 \rightarrow M_2$  tels que :

$$f^* \omega_2 = \omega_1.$$

Sur les variétés symplectique, le premier résultat géométrique majeur est le théorème de Darboux qui donne la "géométrie" locale des ces variétés.

**Théorème 8. (Darboux).** *Toute variété symplectique  $(M, \omega)$  de dimension  $2n$  est localement symplectomorphe à  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ .*

Ce qui signifie que pour tout point  $x_0 \in M$ , il existe un ouvert  $U$  de  $M$  contenant  $x_0$  et il existe un système  $(x_1, \dots, x_n, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$  de coordonnées locales<sup>1</sup> tels que sur l'ouvert  $U$  on ait l'expression :

$$\omega = \sum_{i,j=1}^n d\zeta_i \wedge dx_j.$$

Le théorème de Darboux établit une différence majeure entre les géométries riemannienne et symplectique, en effet : dans le premier cas, il y a un invariant local : la courbure, alors que dans le second cas tout est localement isomorphe à  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  :

**2.4. Flot hamiltonien.** Comme la 2-forme  $\omega$  est non-dégénérée, pour tout point  $x_0$  de  $M$ , on peut avec la 2-forme  $\omega$ , identifier les deux espaces vectoriels  $T_{x_0}^* M$  et  $T_{x_0} M$ . Ainsi pour  $f \in C^\infty(M)$  par dualité il existe un unique vecteur  $\chi_f(x_0) \in T_{x_0} M$  tel que pour tout  $v_{x_0} \in T_{x_0} M$  on ait :

$$\omega(x_0) (\chi_f(x_0), v_{x_0}) = -df(x_0).v_{x_0}.$$

Ensuite, pris fibre par fibre, nous avons l'existence et l'unicité d'un champs de vecteur  $\chi_f \in \Gamma(M)$  tel que pour tout champs de vecteur  $v \in \Gamma(M)$  on ait :

$$\omega (\chi_f, v) = -df.v$$

c'est-à-dire :

$$i_{\chi_f}(\omega) = -df.$$

En coordonnés locales de Darboux on a alors l'écriture :

$$\chi_f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \zeta_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial x_j} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \right).$$

On note alors par  $\varphi_t^f$  le flot associé au champs de vecteur  $\chi_f : \varphi_t^f : m = m \mapsto \varphi_t^f(m)$ . Ce flot est donné comme étant la trajectoire associé au champs de vecteur  $\chi_f$  passant par  $m$ . C'est à dire que :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (\varphi_t^f(m)) = \chi_f (\varphi_t^f(m)) \\ \varphi_0^f(m) = m \end{cases}$$

où  $\frac{d}{dt} (\varphi_t^f(m)) \in T_{\varphi_t^f(m)} M$ .

<sup>1</sup>dites coordonnées canonique, ou encore coordonnées de Darboux.

En coordonnées de Darboux on a l'expression familière des équations de Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_j = -\frac{\partial f}{\partial x_j} \\ \dot{x}_j = \frac{\partial f}{\partial \xi_j}. \end{cases}$$

Sur une variété riemannienne  $(X, g)$  le flot géodésique est donné par :

$$G_t(x, v) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$$

où  $\gamma$  est la géodésique de  $X$  telle que  $\gamma(0) = x \in X$  et  $\dot{\gamma}(0) = v \in T_x X$ . Le groupe  $G_t$  à un paramètre est un groupe de difféomorphismes de  $T^*X$  (que l'on a identifié à  $TX$  via la métrique  $g$ ) qui conserve le fibré unitaire  $UX$ . Ce flot est exactement le flot hamiltonien sur  $T^*X$  associé à la fonction

$$f(x, \xi) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{i,j}(x) \xi_i \xi_j.$$

**Exemple 9. Exemple de calcul de flot :** L'oscillateur harmonique en dimension 2 : si on considère la variété différentiable canonique  $M = \mathbb{R}^2$ , son fibré cotangent  $N = T^*M = \mathbb{R}^4$  a une structure de variété symplectique. Notons par  $H$  l'oscillateur harmonique en dimension 2 :

$$H(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = H_1(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) + H_2(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = \alpha_1 \frac{x_1^2 + \xi_1^2}{2} + \alpha_2 \frac{x_2^2 + \xi_2^2}{2}$$

avec  $\alpha_1, \alpha_2$  deux réels strictement positifs.

On va calculer le flot hamiltonien de point initial :

$$m_0 = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ \xi_{1,0} \\ \xi_{2,0} \end{pmatrix} \in H_1^{-1}(E_1) \cap H_2^{-1}(E_2)$$

où  $E_1 > 0$  et  $E_2 > 0$ .

Les équations de Hamilton sont alors :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \xi_1(t) \\ \alpha_2 \xi_2(t) \\ -\alpha_1 x_1(t) \\ -\alpha_2 x_2(t) \end{pmatrix}.$$

En posant pour  $j \in \{1, 2\}$ ,  $Z_j(t) := x_j(t) + i\xi_j(t) \in \mathbb{C}$ , on a immédiatement que  $\dot{Z}_j(t) = -i\alpha_j Z_j(t)$  et donc en intégrant cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 on obtient :

$$Z_j(t) = Z_j(0)e^{-i\alpha_j t}$$

et

$$|Z_j(0)|^2 = x_j^2(0) + \xi_j^2(0) = \frac{2E_j}{\alpha_j}$$

donc le flot hamiltonien est tracé sur le tore :

$$\mathbb{T}^2 = \sqrt{\frac{2E_1}{\alpha_1}} \mathbb{S}^1 \times \sqrt{\frac{2E_2}{\alpha_2}} \mathbb{S}^1.$$

En coordonnées angulaire le flot s'écrit alors linéairement :

$$\varphi_t : \begin{pmatrix} \theta_{1,0} \\ \theta_{2,0} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t\alpha_1 + \theta_{1,0} \\ t\alpha_2 + \theta_{2,0} \end{pmatrix}.$$

*Remarque 10.* Revenons maintenant à un fait important, qui justifie que la 2-forme doit être fermée : la forme  $\omega$  (ainsi que la forme volume associée) est conservée par le flot hamiltonien :

$$\forall t \geq 0 \quad (\varphi_t^f)^* \omega = \omega$$

pour le voir il suffit d'écrire la définition de la dérivée de Lie :  $\mathcal{L}_{\chi_f}(\omega) = \frac{d}{dt} (\varphi_t^f)^*$  et d'utiliser la formule de Cartan pour voir que  $\mathcal{L}_{\chi_f}(\omega) = 0$ .

**2.5. Crochet de Poisson.** À partir du champ  $\chi$  on peut munir  $\mathcal{C}^\infty(M)$  d'une structure d'algèbre de Lie : avoir une application à valeurs dans  $\mathcal{C}^\infty(M)$ , bilinéaire, alternée et vérifiant l'identité de Jacobi. Pour toutes fonctions  $(f, g) \in (\mathcal{C}^\infty(M))^2$  on définit le crochet de Poisson :

$$\{.,.\} : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \\ (f, g) \mapsto \{f, g\} := \omega(\chi_f, \chi_g). \end{cases}$$

En fait l'application :

$$\chi : \mathcal{C}^\infty(M), \{.,.\} \rightarrow \Gamma(M), [.,.]$$

est un homéomorphisme d'algèbre de Lie. En coordonnées de Darboux, le crochet de Poisson de deux fonctions  $f$  et  $g$  s'écrit simplement :

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \tilde{\xi}_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial \tilde{\xi}_j}.$$

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathcal{C}^\infty(M)$ , et notons simplement par  $\varphi_t$  le flot hamiltonien associé à  $f$ , alors pour tout point  $m \in M$  nous avons que :

$$\frac{d}{dt} (g \circ \varphi_t(m)) = \{g, f\} \circ \varphi_t(m).$$

Ainsi la fonction  $g$  est constante le long des trajectoires du flot hamiltonien associé à  $f$ , si et seulement si  $\{g, f\} = 0$ .

**2.6. Un peu de topologie symplectique.** Finissons cette partie sur un résultat étonnant. Comme on la verra, la géométrie symplectique est isochore : elle conserve le volume, de plus par l'absence de courbure, elle est moins rigide que la géométrie riemannienne, et on peut espérer que dans une telle géométrie on peut "faire passer un chameau par le chat d'une aiguille", plus précisément on peut se demander si on peut plonger de manière symplectique une boule dans un cylindre de rayon plus petit. Cette question est restée ouverte jusqu'en 1985 où M. Gromov a répondu par la négation [74].

En notant  $B^{2n}(r) := B_{\mathbb{R}^{2n}}(0, r)$  et  $Z^{2n}(R) := B_{\mathbb{R}^{2n}}(0, r) \times \mathbb{R}^{2n-2}$  on a le :

**Théorème 11. (Gromov).** *Si il existe un plongement symplectique (un plongement qui conserve  $\omega_0$ ) de  $B^{2n}(r)$  dans  $Z^{2n}(R)$ , alors  $r \leq R$ .*

### 3. MÉCANIQUE QUANTIQUE ET THÉORIE SPECTRALE

**3.1. La révolution de la physique.** La physique jusqu'à la fin du XIX siècle était constituée par deux entités : tout d'abord les corpuscules, c'est-à-dire les points matériels, qui constituent la matière, la seconde entité est les ondes, qui constituent les vibrations et les rayonnements. Le mouvement des corpuscules est décrit par des trajectoires déterministes dans l'espace, on connaît à tout instant la position et la vitesse d'un corpuscule. Les ondes sont quand à elles non localisées, elle amené des phénomènes d'interférences. Alors que les physiciens penser encore pouvoir tout décrire avec ces deux entités, certaines expériences, comme celle des fentes

de Young, de la photo de Wilson (1911) et même l'effet photo-électrique qui datait de 1887 ne pouvait s'expliquer avec les deux entités de base. On peut alors situer la naissance de la mécanique quantique au moment où est a débuté l'interrogation des physiciens au sujet de l'interprétation des ces fameuses expériences. Au début de XX siècle, ce furent les idées révolutionnaires de Bohr, Einstein, Heisenberg, et Schrödinger qui fournirent une théorie respectable. Construite pour expliquer des phénomènes de rayonnement, cette théorie débouche sur beaucoup d'autres thèmes de la physique. Un des grands succès de la théorie quantique est que celle-ci s'attaque directement à la structure fondamentale de la matière, en expliquant notamment les structures moléculaires, atomiques et les propriétés des électrons. La mécanique quantique est à la fois un bouleversement intellectuel, culturel et philosophique. En effet, c'est une toute nouvelle façon de penser, opposée à l'intuition immédiate, et qui est nécessaire pour comprendre le monde sous un aspect quantique. Par sa puissance analytique et prédictive, elle a permis d'ouvrir de nouvelles voies dans la recherche scientifique et dans l'évolution de la technologie.

La mécanique quantique décrit la réalité physique avec des principes et des postulats. Afin de mieux comprendre l'origine du cadre mathématique de cette théorie, citons quelque postulats (pour plus de détails voir par exemple [97]). Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  la description quantique d'un point à l'instant  $t$  se fait avec une fonction d'onde, c'est-à-dire un vecteur  $\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$  que l'on interprète de la manière suivante : pour toute partie  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  le réel

$$\int_{\Omega} |\varphi(t)|^2 dx_1 \dots dx_n$$

est la probabilité de présence de la particule dans le domaine  $\Omega$  à l'instant  $t$ ; bien sur ceci impose la normalisation :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(t)|^2 dx_1 \dots dx_n = 1.$$

Un second principe donne la dynamique (l'analogie quantique des équations de Hamilton) : lorsque la particule est soumise à un champs de forces dérivant d'un potentiel  $V$ , la fonction d'onde associé vérifie l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d\varphi(t)}{dt} = H\varphi(t)$$

où  $H = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V$ . L'équation de Schrödinger tient sa justification physique des ses conséquences.

Un autre principe, encore bon a mentionner est celui concernant les observables : a toute grandeur physique  $\mathbf{a}$  on lui associe un opérateur linéaire (à domaine) auto-adjoint  $A$  agissant sur l'espaces des fonction d'ondes de sorte que le réel

$$\int_{\Omega} A\varphi(t) \overline{\varphi(t)} dx_1 \dots dx_n$$

représente la valeur moyenne des résultats de la mesure de la grandeur  $\mathbf{a}$ .

**3.2. Rappels de théorie spectrale hilbertienne.** La théorie des opérateurs linéaires à domaine et l'étude de leurs réduction, ce qu'on nomme théorie spectrale constitue les fondements mathématiques de la mécanique quantique. En 1932, J. Von Neuman donne la définition abstraite des espaces de Hilbert et il montre que les points de vue de Heisenberg et de Schrödinger sont équivalent, en même temps il développe la théorie de réduction des opérateurs à domaine. Le théorème spectral est l'un des résultat les plus profond de l'analyse moderne, et est fondamental en mécanique quantique. Grâce à ce théorème on peut introduire la notion de mesure spectrale associé à un état, cette mesure conduit à une loi de probabilité sur  $\mathbb{R}$ ,

qui amène à l'interprétation probabiliste de la mécanique quantique. Le théorème spectral permet aussi des opérations sur les observables, comme la composition, qui est similaire à ce qu'on sait déjà faire en mécanique classique. En mécanique quantique, les observables sont des opérateurs auto-adjoints à domaine, et d'un point de vue technique, la difficulté de définir des fonctions d'opérateurs non bornée est levée en grande partie par le théorème spectral, plus précisément par son corollaire : le calcul fonctionnel. Un autre fait remarquable en mécanique quantique est que les opérateurs ne commutent pas, ceci conduit aux fameuses relations d'incertitude de Heisenberg.

On va rappeler quelques résultats de théorie spectrale avec cette fois des démonstrations : le lemme central au théorème spectral concernant les opérateurs non bornés est le suivant :

**Lemme 12.** Soit  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré, que l'on notera plus simplement  $(X, \mu)$  et  $F$  une fonction réelle finie  $\mu$  presque partout sur  $X$ . Alors l'opérateur de multiplication par  $F$  définit par :

$$M_F : D(M_F) = \left\{ \varphi \in L^2(X, \mu) / F\varphi \in L^2(X, \mu) \right\} \rightarrow L^2(X, \mu)$$

$$\varphi \mapsto F\varphi$$

est un opérateur à domaine dense et auto-adjoint. En outre si  $F$  est bornée, l'opérateur  $M_F$  est continu sur  $L^2(X, \mu)$  avec  $\|M_F\| \leq \|F\|_\infty$ .

*Démonstration.* Vérifions dans un premier temps que  $D(M_F)$  est dense dans  $L^2(X, \mu)$  : Pour cela soit  $\varphi \in L^2(X, \mu)$  et considérons la suite  $(\varphi_n)_n$  de  $L^2(X, \mu)$  définie par  $\varphi_n = \varphi \chi_{(|F| \leq n)}$ ,  $\chi$  désignant la fonction indicatrice. Compte tenu que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|F\varphi_n| \leq n\varphi$ , on a que  $(\varphi_n)_n$  est une suite de  $D(M_F)$ . Ensuite comme  $F$  est finie presque partout il est clair que  $(\varphi_n)_n$  converge simplement presque partout sur  $X$  vers  $\varphi$ . Enfin comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|\varphi_n| \leq \varphi \in L^2(X, \mu)$  on a grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue que  $(\varphi_n)_n$  converge dans  $L^2(X, \mu)$  vers  $\varphi$ .

Vérifions que l'opérateur  $M_F$  est fermé : considérons donc une suite  $(\varphi_n)_n \in (D(M_F))^{\mathbb{N}}$  telle que  $\varphi_n$  converge dans  $L^2(X, \mu)$  vers un certain  $\varphi \in L^2(X, \mu)$  et que  $M_F(\varphi_n)$  converge dans  $L^2(X, \mu)$  vers un certain  $\psi \in L^2(X, \mu)$ . Avec la réciproque du théorème de convergence dominée de Lebesgue on a d'une part que, quitte à extraire une sous suite,  $\varphi_n$  converge simplement presque partout sur  $X$  vers  $\varphi$ , donc en particulier  $F\varphi_n$  converge simplement presque partout sur  $X$  vers  $F\varphi$ , ainsi  $\psi = F\varphi$  presque partout. Donc  $\varphi \in D(M_F)$  et  $M_F(\varphi) = \psi$ .

Ensuite montrons que  $M_F$  est auto-adjoint : comme  $F$  est à valeurs réelles  $M_F$  est trivialement symétrique sur  $D(M_F)$ , maintenant pour montrer que  $M_F$  est auto-adjoint montrons que  $\ker(M_F^* \pm iI) = \{0\}$ , prenons donc  $\varphi \in \ker(M_F^* - iI)$ , on a d'une part que  $M_F^*(\varphi) = i\varphi$ , et d'autre part comme :

$$\forall \psi \in D(M_F), \langle M_F^*(\varphi), \psi \rangle_{L^2} = \langle \varphi, M_F(\psi) \rangle_{L^2}$$

on a que

$$\forall \psi \in D(M_F), \int_X i\varphi \bar{\psi} d\mu = \int_X \varphi \overline{F\psi} d\mu$$

c'est à dire :

$$\forall \psi \in D(M_F), \int_X \varphi (i - F) \bar{\psi} d\mu = 0.$$

Donc comme  $D(M_F)$  est dense dans  $L^2(X, \mu)$  et  $F$  est à valeurs réelles, on a que  $\varphi = 0$ . De même on a que  $\ker(M_F^* + iI) = \{0\}$ . Donc  $M_F$  est bien auto-adjoint.

Ensuite le cas où  $F$  bornée est trivial.  $\square$

Citons un théorème issu de la théorie spectrale sur les  $\mathbb{C}^*$  algèbres [6], [7] :

**Théorème 13. (Théorème spectral des opérateurs normaux bornés).** Soit  $N$  un opérateur borné normal sur un hilbert  $\mathcal{H}$  séparable. Il existe un espace mesuré fini  $(Y, \mu)$  et une fonction bornée  $F$  sur  $Y$ , tels que  $N$  soit unitairement équivalent à la multiplication par  $F$  dans  $L^2(Y, \mu)$  au sens du lemme .

A partir de ce théorème, on va pouvoir en donner une version pour les opérateurs auto-adjoint non bornés. Commençons par des notations :

*Notation 14.* On va considérer un opérateur à domaine  $(A, D(A))$  auto-adjoint sur un hilbert  $\mathcal{H}$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  séparable. Comme  $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ , on a que  $\pm i$  ne sont pas dans le spectre de  $A$ , on notera alors  $R_{\pm i} = (\pm iI + A)^{-1}$  les résolvantes en ces points.

Du précédent théorème et avec les notations ci-dessus on a :

**Corollaire 15.** Avec les notations précédentes, il existe un espace mesuré fini  $(Y, \mu)$ , un opérateur unitaire  $U : \mathcal{H} \rightarrow L^2(Y, \mu)$  et une fonction bornée  $F$  non nulle  $\mu$  presque partout sur  $Y$ , tels que avec les notations du lemme :

$$UR_iU^{-1} = M_F.$$

*Démonstration.* Vérifions dans un premier temps que les opérateurs  $R_{\pm i}$  sont normaux : comme  $Im(\pm iI + A) = \mathcal{H}$ , on en déduit donc que :  $\forall (u, v) \in \mathcal{H}^2, \exists! (z, w) \in D(A)^2$  tel que  $v = (-iI + A)(z)$  et  $u = (iI + A)(w)$ , donc on a :

$$\begin{aligned} \langle v, R_i u \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle (-iI + A)(z), w \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle z, (-iI + A)^* w \rangle_{\mathcal{H}} = \langle z, (iI + A)w \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle R_{-i}(v), u \rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $R_{\pm i}^* = R_{\mp i}$ . D'autre part d'après l'équation résolvante, les résolvantes  $R_i$  et  $R_{-i}$  commutent, ainsi  $R_i$  et  $R_{-i}$  sont des opérateurs bornés normaux. On utilise ensuite le théorème : le seul point non contenu dans le théorème est la non nullité de la fonction  $F$  : par définition  $R_i$  est injectif, donc par conjugaison unitaire  $M_F$  doit l'être aussi, c'est à dire que  $F$  soit non nulle  $\mu$  presque partout.  $\square$

Du cas particulier de la résolvante on a le théorème spectral sous sa forme multiplicative pour les opérateurs auto-adjoints à domaine :

**Corollaire 16. (Théorème spectral multiplicatif).** Toujours avec les notations précédentes, il existe un espace mesuré fini  $(Y, \mu)$ , un opérateur unitaire  $U : \mathcal{H} \rightarrow L^2(Y, \mu)$  et une fonction réelle  $f$  finie  $\mu$  presque partout sur  $Y$ , tels que avec les notations du lemme  $v \in D(A) \Leftrightarrow U(v) \in D(M_f)$  et puis

$$UAU^{-1} = M_f \text{ sur } U(D(A))$$

*Démonstration.* Posons  $f = \frac{1}{F} - i$  qui est donc finie  $\mu$  presque partout sur  $Y$  car  $F$  est elle même non nulle  $\mu$  presque partout sur  $Y$ . Notons bien que par construction  $F(f + i) = 1$  et  $UR_i = M_F U$ .

Montrons que  $v \in D(A) \Leftrightarrow U(v) \in D(M_f)$  : Soit  $v \in D(A)$  alors  $\exists! u \in \mathcal{H}$  tel que  $v = R_i u$ . Donc  $Uv = M_F Uu$ . En multipliant cette égalité par  $f$  on a :  $fUv = (1 - iF)Uu$ . Comme  $Uu \in L^2(Y, \mu)$  et que la fonction  $F$  est bornée on en déduit que  $fUv \in L^2(Y, \mu)$ , ie :  $Uv \in D(M_f)$ . Réciproquement si  $Uv \in D(M_f)$  alors d'une part  $(f + i)Uv \in L^2(Y, \mu)$ , d'autre part comme  $U$  est unitaire entre  $\mathcal{H}$  et  $L^2(Y, \mu)$ ,  $\exists! u \in \mathcal{H}$  tel que  $(f + i)Uv = Uu$ . Enfin en multipliant cette égalité par  $F$  on obtient :  $Uv = FUu$ , donc  $v = U^{-1}FUu = R_i u$  donc en particulier  $v \in D(A)$ .

Montrons maintenant  $UAU^{-1} = M_f$  sur  $U(D(A))$  : notons bien que  $\forall u \in \mathcal{H}$   $FUu = UR_iu$  et donc  $Uu = \frac{1}{F}UR_iu$ . Prenons  $v \in D(A) \exists !u \in \mathcal{H}$  tel que  $v = R_iu$  ; avec l'équation résolvante on obtient que  $Av = u - iv$ , donc  $UAv = (\frac{1}{F} - i)Uv$ , soit encore  $UAv = fUv$  ce qui montre l'égalité.

Reste à vérifier que la fonction  $f$  est à valeurs réelles : si on suppose que la partie imaginaire  $\text{Im}(f)$  de  $f$  est strictement positive sur un sous ensemble  $\Omega$  de  $Y$  tels que  $\mu(\Omega) > 0$ , compte tenu que  $(Y, \mu)$  est un mesuré finie  $\chi_\Omega \in D(M_f)$ . Maintenant on sait avec le lemme précédent que  $M_f$  est auto-adjoint, donc  $\langle \chi_\Omega, f\chi_\Omega \rangle_{L^2} \in \mathbb{R}$ , ce qui est absurde par définition de  $\Omega$ , donc au final  $f$  est à valeurs réelles  $\mu$  presque partout. Ce qui montre le corollaire.  $\square$

A partir de ce corollaire on en déduit le calcul fonctionnel borné standard :

**Définition 17.** Soit  $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ , avec les notations du corollaire précédent, on définit l'opérateur borné  $h(A)$  sur  $\mathcal{H}$  par :

$$h(A) = U^{-1}M_{h \circ f}U.$$

On montre facilement le théorème suivant qui servira fortement dans la suite :

**Théorème 18. (Calcul fonctionnel borné).** Soit  $A, D(A)$  un opérateur auto-adjoint sur  $\mathcal{H}$ . L'application  $\phi$  définit par :

$$\phi : \begin{cases} L^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow L_c(\mathcal{H}) \\ h \mapsto h(A) \end{cases}$$

vérifie les propriétés suivantes :

(i)  $\phi$  est un  $\star$ -homomorphisme d'algèbre normées continu, et on a :

$$\forall h \in L^\infty(\mathbb{R}), |||h(A)||| \leq \|h\|_\infty$$

(ii) Si  $(h_n)_n \in (L^\infty(\mathbb{R}))^\mathbb{N}$  telle que  $(x \mapsto h_n(x))_n$  converge simplement vers  $x \mapsto x$  et  $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$  on ait  $|h_n(x)| \leq |x|$  alors :

$$\forall u \in D(T), h_n(A)u \rightarrow Au \text{ dans } \mathcal{H}$$

(iii) Si  $(\lambda, u) \in \sigma_p(A) \times (\mathcal{H} - 0)$  tels que  $Au = \lambda u$ , alors si  $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ ,  $h(\lambda) \in \sigma_p(h(T))$  et  $h(A)u = h(\lambda)u$ .

**3.3. Généralités sur la dynamique quantique.** La dynamique constitue un aspect essentiel de la mécanique quantique, elle détermine au cours du temps les états quantiques, et par conséquent l'espace de Hilbert des états ou des opérateurs agissant sur cet espace. En considérant une grandeur physique mesurable par un observateur, les postulats de la mécanique quantique indiquent qu'il peut être associé à cette grandeur physique un opérateur auto-adjoint agissant sur l'espace des états, et que le résultat de la mesure donnera : soit la valeur propre de l'opérateur considéré si l'état quantique est unique (cas pur), soit la valeur propre pondérée par la probabilité d'existence d'un état quantique. La mesure de l'observable peut changer au cours du temps, est-ce l'état quantique qui va évoluer au cours du temps ? Ou est-ce l'opérateur ? Ou encore les deux en même temps ? Ces différents points de vue conduisent à des descriptions différentes de la dynamique quantique. Le point de vue de Schrödinger est que l'espace des états du Hilbert évoluent au cours du temps tandis que les opérateurs sont invariant temporellement. Mathématiquement, à partir d'un opérateur auto-adjoint on peut définir la dynamique quantique via le calcul fonctionnel borné comme étant un groupe unitaire à un paramètre (ici le temps) fortement continu, en effet (voir par exemple [85] ou [93]) :

**Théorème 19.** Soit  $A, D(A)$  un opérateur auto-adjoint sur un hilbert  $\mathcal{H}$  alors la famille d'opérateur bornée :

$$U(t) = \left\{ e^{itA} \right\}_{t \in \mathbb{R}}$$

est un groupe unitaire fortement continu, de générateur  $(iA, D(A))$ .

L'évolution d'un système physique  $S$  au cours du temps peut donc être représentée mathématiquement par un groupe unitaire de générateur  $(iA, D(A))$  dans un hilbert  $\mathcal{H}$  associé à  $S$ , plus précisément si l'état initial à l'instant 0 est représenté par le vecteur  $\psi_0 \in D(A)$ , l'état à l'instant  $t$  est représenté par le vecteur :

$$\psi(t) = U(t)\psi_0$$

avec

$$U(t) = e^{itA} \in L_c(\mathcal{H}).$$

L'opérateur  $H = -\hbar A$  est appelé hamiltonien du système  $S$  et représente l'observable énergie totale de  $S$ , on a donc que pour tout  $\psi_0 \in D(A)$  :

$$U(t)\psi_0 = e^{-i\frac{t}{\hbar}H}\psi_0.$$

#### 4. SPECTRE DU LAPLACIEN ET DE L'OPÉRATEUR DE SCHRÖDINGER

On va faire quelques rappels sur la théorie spectrale du laplacien et de l'opérateur de Schrödinger. Pour plus de détails on pourra consulter mon article [90] qui donne un panorama partiel et historique sur l'étude spectrale du laplacien et de l'opérateur de Schrödinger sur des variétés riemanniennes.

Dans un système physique constitué d'une particule se déplaçant dans une partie ouverte  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ , l'espace de Hilbert associé est  $L^2(X)$ , et, si la particule n'est soumise à aucune force, l'hamiltonien est :

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

où  $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$  est le laplacien de  $\mathbb{R}^n$ ,  $m$  la masse de la particule, et  $\hbar$  la constante

de Planck. Si au contraire la particule est soumise à un champ de force dérivant d'un potentiel réel  $V$ , l'hamiltonien est alors :

$$H = H_0 + V$$

$V$  désignant l'opérateur de multiplication par la fonction  $V$ .

En géométrie riemannienne, l'opérateur de Laplace-Beltrami<sup>2</sup> est la généralisation du laplacien de  $\mathbb{R}^n$ . Pour une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  à valeurs réelles définie sur une variété riemannienne  $(M, g)$ , et pour  $\phi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$  une carte locale de la variété  $M$ , l'opérateur de Laplace-Beltrami, ou plus simplement laplacien de  $(M, g)$ , appliqué à la fonction  $f$  est donné par la formule locale :

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_k} \right)$$

<sup>2</sup>On utilise ici la convention de signe des analystes pour l'opérateur de Laplace-Beltrami. Dans la convention des géomètres  $\Delta_g f = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_k} \right)$ .

où  $g = \det(g_{ij})$  et  $g^{jk} = (g_{jk})^{-1}$ . Cet opérateur joue un très grand rôle au sein même des mathématiques : son spectre est un invariant géométrique majeur.

**4.1. Le contexte.** Considérons une variété riemannienne  $(M, g)$  complète connexe de dimension  $n \geq 1$ . On lui associe l'espace de Hilbert  $L^2(M) = L^2(M, d\mathcal{V}_g)$ ,  $\mathcal{V}_g$  désignant le volume riemannien associé à la métrique  $g$ . L'opérateur de Schrödinger  $H$  associé à la variété  $(M, g)$  de potentiel  $V$ ,  $V$  étant une fonction de  $M$  dans  $\mathbb{R}$ , est défini comme l'opérateur linéaire non-borné sur les fonctions lisses à support compacte  $C_c^\infty(M, \mathbb{R})$  par :

$$(4.1) \quad H = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta_g + V$$

$\Delta_g$  étant le laplacien de  $(M, g)$ .

**4.2. Motivation.** On s'intéresse au problème spectral : Trouver les couples non-triviaux  $(\lambda, u)$  de scalaires complexes et de fonctions tels que :

$$-\Delta_g u + Vu = \lambda u$$

(avec  $u \in L^2(M)$  dans le cas non compact).

Dans le cas des variétés à bord on a besoin en supplément d'imposer des conditions au bord sur les fonctions  $u$ , comme par exemple les conditions de Dirichlet : on impose  $u = 0$  sur le bord de  $M$ , ou celles de Neumann :  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  sur le bord de  $M$ ,  $n$  étant la normale extérieure au bord de  $M$ . Dans le cas des variétés compactes sans bord, comme par exemple la sphère, on parle de problème fermé. Il y a deux problématiques majeures liées au spectre du laplacien (ou de l'opérateur de Schrödinger) sur une variété riemannienne complète  $(M, g)$  :

- (1) les problèmes directs : étant donnée une variété riemannienne  $(M, g)$ , que dire du spectre de l'opérateur  $-\Delta_g$  ou de celui de l'opérateur  $-\Delta_g + V$  ?
- (2) Les problèmes inverses : étant donné le spectre de l'opérateur  $-\Delta_g$ , que dire géométriquement de la variété  $(M, g)$  ?

Avant de répondre à ces questions, examinons quelques propriétés générales du spectre.

**4.3. Le caractère auto-adjoint.** Une des premières questions à traiter lors de l'étude spectrale d'un opérateur linéaire est celle du caractère auto-adjoint, ou à défaut du caractère essentiellement auto-adjoint. Rappelons que un opérateur linéaire  $H$  est essentiellement auto-adjoint si son unique fermeture  $\overline{H}$  est auto-adjointe. Quel est l'intérêt du caractère auto-adjoint ? Il y a au moins deux bonnes raisons d'en parler :

- (1) si  $H$  est auto-adjoint, on a déjà une première information spectrale importante : le spectre de l'opérateur  $H$  est une partie de  $\mathbb{R}$ .
- (2) Le caractère auto-adjoint assure en mécanique quantique l'unicité de la solution de l'équation de Schrödinger : en effet, à partir de l'hamiltonien auto-adjoint  $H$ , on peut, via le calcul fonctionnel construire de manière unique le groupe unitaire fortement continu  $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  où :  $U(t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H}$ .

Quels sont les principaux résultats connus sur le caractère auto-adjoint ?

- Dans le cas où la variété  $M = \mathbb{R}^n$  avec sa métrique standard, T. Carleman [28] en 1934 a montré que si la fonction  $V$  est localement bornée et globalement minorée, alors l'opérateur de Schrödinger  $H$  est essentiellement auto-adjoint.
- En 1972, T. Kato [84] a montré que l'on pouvait remplacer dans l'énoncé de Carleman l'hypothèse  $V \in L_{loc}^\infty(M)$  par  $V \in L_{loc}^2(M)$ .

- En 1994, I. Olenik [102], [103], [104] donne un énoncé très général concernant des variétés riemanniennes complètes connexes quelconques avec des hypothèses plus complexes sur la fonction  $V$ . Un corollaire sympathique de cet énoncé est le suivant :

**Théorème 20.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète connexe de dimension  $n \geq 1$ , et  $V$  une fonction de  $L_{loc}^{\infty}(M)$  tels que  $\forall x \in M, V(x) \geq C$ , où  $C$  est une constante réelle, alors l'opérateur

$$H = -\Delta_g + V$$

est essentiellement auto-adjoint.

**4.4. Le spectre de l'opérateur est-il discret ?** Hormis le fait que le spectre est réel, que savons nous de plus ? En 1934 K. Friedrichs [64] a montré que dans le cas où la variété  $M = \mathbb{R}^n$  avec sa métrique standard, si la fonction  $V$  est confinante, ie  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ , alors le spectre de l'opérateur de Schrödinger  $H$  est constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicités finies s'accumulant en  $+\infty$  :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Dans le contexte d'une variété riemannienne compacte avec un laplacien pur ( $V \equiv 0$ ) nous savons aussi que le spectre de l'opérateur  $-\Delta_g$  est constitué d'une suite de valeurs propres positives, de multiplicités finies, et s'accumulant en  $+\infty$

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Qu'en est-il des variétés non compactes ? Commençons par donner une définition :

**Définition 21.** Soit  $(M, g)$  une variété lisse et  $V$  une fonction de  $M$  dans  $\mathbb{R}$ , on dira que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ , si et seulement si

$$\forall A > 0, \exists K \subset\subset M, \forall x \in M \setminus K, |f(x)| \geq A.$$

Un des théorèmes concernant le spectre de l'opérateur de Schrödinger est celui de Kondratev et Shubin [86], [87] qui donnent un énoncé assez technique sur les variétés à géométrie bornée ; de cet énoncé, on a le corollaire bien pratique suivant :

**Théorème 22.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète connexe de dimension  $n \geq 1$ , et  $V$  une fonction de  $L_{loc}^{\infty}(M)$  telle que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ . Alors le spectre de l'opérateur  $H = -\Delta_g + V$  est constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicités finies s'accumulant en  $+\infty$

$$\inf_{x \in M} V(x) \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Le théorème de Courant de 1953 [50], assure en particulier que la première valeur propre  $\lambda_1$  de l'opérateur  $H$  est simple :

$$\inf_{x \in M} V(x) \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

**4.5. Un aperçu sur les problèmes directs.** L'objectif est, à géométrie fixée, de pouvoir calculer, ou à défaut de donner des propriétés sur le spectre de l'opérateur  $-\Delta_g$  ou de celui de l'opérateur  $-\Delta_g + V$ . On va d'abord parler de résultats exacts, puis de méthodes qualitatives.

*Calcul explicite de spectre.* Il n'y a bien sûr pas de méthodes générales pour calculer un spectre d'opérateur linéaire ; même dans le cas de Schrödinger sur une variété raisonnable, le calcul est souvent difficile, et finalement on dispose de peu d'exemples ou l'on peut expliciter complètement le spectre. Voici tout de même quelques un exemple de calcul exact : l'oscillateur harmonique, ou opérateur d'Hermite comme on le nomme en analyse harmonique. C'est l'un des rares exemples d'opérateur de Schrödinger sur une variété non compacte pour lequel on arrive à calculer explicitement son spectre. L'oscillateur harmonique joue un rôle très important dans l'étude des systèmes intégrables en classification symplectique : il sert en effet de modèle de référence des équilibres stables de type elliptique ; pour plus de détails, on peut consulter le livre de Vu Ngoc [San4]. Ici on prend  $M = \mathbb{R}$  et :

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2}.$$

Les propriétés spectrales de l'opérateur  $H$  sont très remarquables : on arrive à calculer son spectre et les vecteurs propres associés de manière explicite. Ces calculs, d'un point de vu très formel, se trouvent dans n'importe quel bon livre de mécanique quantique. Pour des démonstrations précises, on conseille par exemple le livre de M.E. Taylor [115]. Le résultat est alors le suivant, le spectre de l'opérateur  $H$  est :

$$\sigma(H) = \left\{ n + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

avec comme vecteurs propres associés la base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R})$  constituée des fonctions d'Hermite :

$$e_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \text{ où } H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad .$$

*Etude qualitative spectrale en bas du spectre.* Dans nombre de cas on ne sait pas calculer un spectre, on essaye alors de le décrire de manière qualitative. Il y a disons deux sous thèmes :

- le premier concerne le bas du spectre : on s'intéresse aux plus petites valeurs propres de l'opérateur.
- Le second est l'étude de l'asymptotique des grandes valeurs propres : analyse semi-classique.

Donnons quelques exemples de résultats concernant le bas du spectre. Commençons par des résultats de comparaison des premières valeurs propres.

**Théorème 23. (Théorème de Faber-Krahn, 1953).** Soit  $M$  une partie bornée de  $\mathbb{R}^n$ . En notant par  $\lambda_1(M)$  la première valeur propre de l'opérateur  $-\Delta$  avec conditions de Dirichlet, on a :

$$\lambda_1(M) \geq \lambda_1(B_M)$$

$B_M$  désignant la boule euclidienne de volume égal à  $\text{Vol}(M)$ . Et on a égalité si et seulement si  $M$  est isométrique à  $B_M$ .

Dans le même style, on a aussi la version avec conditions de Neumann où l'inégalité est dans l'autre sens :

**Théorème 24. (Théorème de Szegö-Weinberger, 1954).** Soit  $M$  une partie bornée de  $\mathbb{R}^n$ . En notant par  $\mu_1(M)$  la première valeur propre de de l'opérateur  $-\Delta$  avec conditions de Neumann, on a :

$$\mu_1(M) \leq \mu_1(B_M)$$

$B_M$  désignant la boule euclidienne de volume égal à  $\text{Vol}(M)$ . Et on a égalité si et seulement si  $M$  est isométrique à  $B_M$ .

Un autre type de résultat classique concerne les constantes de Cheeger : soit  $(M, g)$  une variété riemannienne connexe et compacte de dimension  $n \geq 1$ . Pour toute partie bornée régulière  $D$  de  $M$ , on considère la quantité

$$h(D, g) = \frac{\text{Vol}(\partial D, g)}{\text{Vol}(D, g)}$$

où  $\text{Vol}(\partial D, g)$  est le volume  $n - 1$  dimensionnel. On définit ensuite la constante de Cheeger par

$$h(M, g) = \inf_{D \in X} h(D, g)$$

$X$  étant l'ensemble de tous les domaines de  $M$  de volumes majorés par  $\frac{\text{Vol}(M, g)}{2}$ . Alors un des résultats de Cheeger est que la première valeur propre non nulle du Laplacien est minorée par  $\frac{h(M, g)^2}{4}$  [19].

Pour finir, donnons un autre résultat intéressant qui concerne la multiplicité des valeurs propres en fonction de la topologie. Pour cela plaçons nous un instant dans le cas des surfaces : si  $(M, g)$  est une surface complète connexe, et

$$H = -\Delta_g + V$$

avec  $V \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  tels que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ . En notant (cf. Théorème 2) par

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

le spectre de l'opérateur  $H$  et par  $m_k$  la multiplicité de la  $k$ -ème valeur propre  $\lambda_k$ , nous avons le résultat dû à S. Y. Cheng [32] et amélioré par G. Besson [21], Y. Colin De Verdière [38], N. Nadirashvili [101] et B. Sévenec [113] :

**Théorème 25.** *Sous les hypothèses précédentes nous avons :*

- Si  $X = \mathbb{S}^2$  ou  $\mathbb{R}^2$ , alors pour tout  $k \geq 3$ ,  $m_k \leq 2k - 3$ .
- Si  $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  ou  $K_2$  (la bouteille de Klein), alors pour tout  $k \geq 1$ ,  $m_k \leq 2k + 1$ .
- Si  $X = \mathbb{T}^2$ , alors pour tout  $k \geq 1$ ,  $m_k \leq 2k + 2$ .
- En notant par  $\chi(M)$  la caractéristique d'Euler-Poincaré, si  $\chi(M) < 0$ , alors pour tout  $k \geq 1$ ,  $m_k \leq 2k - 2\chi(M)$ .

*Etude qualitative spectrale en haut de spectre.* L'exemple de base est la formule asymptotique de Weyl de 1911, [19]. Pour le laplacien dans un domaine rectangulaire  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  avec des conditions de Dirichlet aux bords, le physicien P. Debye conjectura que le nombre de valeurs propres  $\mathcal{N}(\lambda)$  inférieure à un réel positif  $\lambda$ , vérifie l'équivalence, pour  $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\mathcal{N}(\lambda) \sim \frac{\text{Vol}(\Omega)}{4\pi} \lambda$$

où  $\text{Vol}(\Omega)$  est l'aire du rectangle  $\Omega$ . En 1911, H. Weyl démontra cette conjecture.

**Théorème 26.** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte connexe de dimension  $n$ , si on note par  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$  les valeurs propres de l'opérateur  $-\Delta_g$  sur  $M$ , on a l'équivalent pour  $\lambda \rightarrow +\infty$*

$$\text{Card}(\{k \in \mathbb{N}, \lambda_k \leq \lambda\}) \sim \frac{B_n \text{Vol}(M, g)}{(2\pi)^n} \lambda^{\frac{n}{2}}$$

où  $B_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$  est le volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^n$ .

On reviendra dans la dernière partie à l'étude du "haut" du spectre en utilisant l'analyse semi-classique.

#### 4.6. Problèmes inverses : la géométrie spectrale.

*Le son détermine-t-il la forme d'un tambour ?* La problématique inverse est la suivante : étant donné le spectre d'un laplacien ou d'un opérateur de Schrödinger, quelles informations géométriques sur la variété  $(M, g)$  peut-on avoir ? Dans le cas du laplacien, un des premiers à formaliser mathématiquement cette question est sans doute M. Kac [83] en 1966 dans son célèbre article "Can one hear the shape of a drum?"<sup>3</sup> : pour le laplacien riemannien, une suite de valeurs propres (un ensemble d'harmoniques du tambour) caractérise-t-elle, à isométrie près, la variété de départ (la géométrie du tambour) ? Il est connu que si deux variétés sont isométriques, elles sont alors isospectrales (c'est-à-dire ont le même spectre). Mais qu'en est-il de la réciproque ?

On sait depuis 1964, que la réponse au problème de M. Kac est négative ; en effet, J. Milnor [98] donne comme exemple de variétés isospectrales mais non isométriques, une paire de tores plats de dimension 16. Depuis, de nombreux autres exemples ont été trouvés, à commencer par T. Sunada [114], qui en 1985 donne une méthode de construction systématique de variétés isospectrales non isomorphes. C. Gordon et E.N. Wilson [69] ont aussi donné en 1984 une méthode de construction de déformations continues de variétés qui sont isospectrales sans être isométriques. L'histoire ne s'arrête pas là, d'autres méthodes de construction apparaissent, comme par exemple la méthode de transplantation de P. Bérard [12], [13] etc...

En 1992, C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert [70] donnent le premier exemple de deux domaines plans non isométriques, mais ayant tout de même un spectre commun pour le laplacien avec conditions de Neumann ou de Dirichlet.



Fig 1. Une photographie de C. Gordon et D. Webb avec leurs fameux domaines plans isospectraux mais non isométriques.

Pour plus de détails sur cet exemple ou pourra consulter les auteurs [70], [71] mais aussi voir les articles très pédagogiques de P. Bérard [15], [16], [17]. Mentionnons aussi le travail de S. Zelditch [121] datant de 2000, où il montre que si on se restreint à des parties de  $\mathbb{R}^2$  simplement connexes avec un bord analytique et possédant deux axes de symétrie orthogonaux, alors le spectre détermine complètement la géométrie.

*Spectre des longueurs et formules de traces.* La donnée du spectre du laplacien donne des informations sur d'autres invariants géométriques comme la dimension, le volume et l'intégrale de la courbure scalaire. En fait le laplacien fournit aussi d'autres invariants, comme par exemple le spectre des longueurs d'une variété.

<sup>3</sup>"Peut-on entendre la forme d'un tambour ?"

Le spectre des longueurs d'une variété riemannienne est l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques. En 1973 Y. Colin de Verdière [33], [34] montre que dans le cas compact, modulo une hypothèse de genericité toujours vérifiée à courbure sectionnelle négative, le spectre du laplacien détermine complètement le spectre des longueurs. La technique utilisée par Y. Colin de Verdière repose sur les formules de traces. Ces dernières s'utilisent dans un cadre beaucoup plus général que celui des opérateurs de Schrödinger.

Le principe formel des formules de traces est le suivant : considérons d'abord un opérateur linéaire  $H$  non-borné sur un Hilbert ayant un spectre discret :  $\sigma(H) = \{\lambda_n, n \geq 1\}$ , et puis une fonction  $f$  "sympathique". La formule de trace consiste alors à calculer la trace de l'opérateur  $f(H)$  de deux façons différentes :

- la première façon, lorsque que cela a un sens, avec les valeurs propres de l'opérateur linéaire  $f(H)$  :

$$\text{Tr}(f(H)) = \sum_{k \geq 1} f(\lambda_k).$$

- La seconde façon, avec le noyau de Schwartz de l'opérateur  $f(H)$  : si  $f(H)\varphi(x) = \int_M K_f(x, y)\varphi(y) dy$ , alors

$$\text{Tr}(f(H)) = \int_M K_f(x, x) dx.$$

Ainsi

$$\sum_{k \geq 1} f(\lambda_k) = \int_M K_f(x, x) dx.$$

La difficulté réside dans le choix de  $f$ , d'une part pour légitimer ces formules, et d'autre part pour arriver à en tirer des informations spectro-géométriques. Les choix de fonctions  $f$  les plus courants sont :  $f(x) = e^{-xt}$  où  $t \geq 0$  (fonction de la chaleur),  $f(x) = \frac{1}{x^s}$ , où  $s \in \mathbb{C}$ , avec  $\text{Re}(s) > 1$  (fonction zêta de Riemann),  $f(x) = e^{-\frac{ix}{h}}$  où  $t \geq 0$  (fonction de Schrödinger), etc ...

Pour fixer les idées, donnons un exemple simple de formule de trace exacte : la formule sommatoire de Poisson pour un réseau  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^n$ . La formule de Poisson sur le tore  $\Gamma \backslash \mathbb{R}^n$  nous donne l'égalité :

$$(4.2) \quad \sum_{\lambda \in \sigma(\Delta_g)} e^{-\lambda t} = \frac{\text{Vol}(\Gamma \backslash \mathbb{R}^n)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \sum_{l \in \Sigma} e^{-\frac{l^2}{4t}}$$

où  $\sigma(\Delta_g)$  est le spectre de l'opérateur  $\Delta_g$  et  $\Sigma$  le spectre des longueurs comptés avec leurs multiplicités, la multiplicité d'une longueur étant le nombre de classes d'homotopies de lacets du tore plat  $\Gamma \backslash \mathbb{R}^n$  représentées par une géodésique périodique de cette longueur. Dans l'égalité (4.2) le terme de droite correspond à la partie géométrique (volume, dimension,...) alors que le terme de gauche contient les informations spectrales. Pour une référence récente voir [47].

#### 4.7. Métrique de Agmon et puits multiples.

*Définition de la métrique.* Dans tout la suite  $(M, g)$  est, soit une variété riemannienne compacte, ou bien l'espace  $\mathbb{R}^n$  tout entier. L'opérateur de Schrödinger  $P_h$  associé à la variété  $(M, g)$  de potentiel  $V$ ,  $V$  étant une fonction de  $M$  dans  $\mathbb{R}$ , est défini comme l'opérateur linéaire non-borné sur les fonctions lisses à support compact  $C_c^\infty(M, \mathbb{R})$  par

$$(4.3) \quad P_h = -\frac{h^2}{2}\Delta_g + V$$

avec une fonction  $V$  est localement bornée, globalement minorée et confinante :  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$  ;

ce qui assure un spectre réel discret constitué de valeurs propres. Soit  $E > 0$  ; dans le cas où  $M = \mathbb{R}^n$  on suppose en outre sur la fonction  $V$  que  $\lim_{|x| \rightarrow 0} V(x) - E > 0$ .

**Définition 27.** La métrique de Agmon est donnée par  $\int \max(V(x) - E, 0) dx^2$  où  $dx^2 = g(x)$  ;  $g$  est la métrique de la variété  $(M, g)$ .

Ainsi l'application  $m_A : x \in M \mapsto \max(V(x) - E, 0) g(x)$  est un produit scalaire sur  $T_x M' \times T_x M$ .

*Remarque 28.* C'est une métrique dégénérée sur  $(M, g)$ .

**Définition 29.** La distance de Agmon sur  $(M, g)$  est définie par :  $d_A(a, b) = \inf_{\gamma: a \rightarrow b} \mathcal{L}(\gamma)$  où

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{m_A(\gamma(t)) (\dot{\gamma}(t); \dot{\gamma}(t))} dt;$$

$\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  est un arc de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $M$  tel que  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma(1) = b$ .

Si on se place sur  $M = \mathbb{R}^n$  et si on considère deux réels  $a$  et  $b$  avec  $a < b$  nous avons que  $d_A(a, b) = \int_0^1 \sqrt{m_A(\gamma(t)) (\dot{\gamma}(t); \dot{\gamma}(t))} dt$  avec  $\gamma(t) = at + (1 - t)b$ ,  $t \in [0, 1]$  ; ainsi  $\dot{\gamma}(t) = a - b$  ; et donc

$$\begin{aligned} d_A(a, b) &= \int_0^1 \sqrt{V(\gamma(t)) - E |a - b|} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{V(x) - E} dx. \end{aligned}$$

*Application aux puits multiples.* Pour plus de commodité on prendra  $E = 0$  et on suppose que la fonction potentiel à  $N$  puits :

$$\{x \in M; V(x) \leq 0\} = \bigsqcup_{j=1}^N U_j$$

où  $N$  est un entier et les  $U_j$  sont des compacts de  $M$  (on parle de puits). Avec la distance  $d_A$  on peut définir  $S_0$  : la distance de Agmon entre deux puits

$$S_0 := \min_{j \neq k} d_A(U_j, U_k).$$

Soit  $s \in ]0, S_0[$  et posons

$$B_A(U_j, s) := \{x \in M, d_A(x, U_j) < s\};$$

alors si  $j \neq k$  on a  $\overline{B(U_j, s)} \cap U_k = \emptyset$  et on peut trouver des variétés compactes à bords  $\mathcal{C}^2$ -lisses  $(M_j)_j \subset M$  telles que  $\overline{B(U_j, s)} \subset \text{Int}(M_j)$  et si  $j \neq k$  alors  $M_j \cap U_k = \emptyset$ . Sur les hilberts  $L^2(M_j)$  on considère les restrictions (avec conditions de Dirichlet) auto-adjointes de  $P_h$  à  $M_j$ , notée  $P_j$ . Soit  $I(h) = [\alpha(h), \beta(h)]$  un intervalle qui tend vers le singleton  $\{0\}$  quand  $h \rightarrow 0$ . On a le :

**Théorème 30.** [77] Il existe  $s_1 < s_0$  tel que pour  $h$  assez petit, il existe une bijection

$b : \sigma(P_h) \cap I(h) \rightarrow \bigsqcup_{j=1}^N (\sigma(P_j) \cap I(h))$  telle que pour tout  $\tau < s_1$  on ait :

$$b(\lambda) - \lambda = O\left(e^{-\frac{\tau}{h}}\right).$$

Ce théorème explique le phénomène de séparation des valeurs propres dans chaque puits ; avec une distance exponentiellement petite.

## 5. QUANTIFICATION ET LIMITE SEMI-CLASSIQUE

**5.1. Problématique.** Le principe de correspondance est à la base des postulats de la mécanique quantique, c'est le "dictionnaire" entre le monde classique et le monde quantique. La quantification est la théorie mathématique qui a pour but d'essayer de justifier ce dictionnaire ; plus précisément d'essayer de construire un morphisme entre ces deux mondes. La quantification est le passage du classique au quantique ; l'opération inverse est qualifiée de limite semi-classique. Pour plus de détails sur la quantification voir par exemples les livres [60] et [30].

Mécanique classique	Mécanique quantique
$(M, \omega)$ variété symplectique	$\mathcal{H} \subset L^2(X)$ , où $X$ variété .
Points $x \in M$ .	Vecteurs $\varphi \in \mathcal{H}$ .
Algèbre $\mathcal{C}^\infty(M)$ .	Algèbre d'opérateurs sur $\mathcal{H}$ .
Crochet de Poisson $\{.\}$ .	Commutateur $[.]$ .
Équation de Hamilton.	Équation de Schrödinger.

On voit très nettement les premières grosses difficultés mathématiques du passage d'un monde à l'autre : passage de la dimension finie à infinie, passage du commutatif au non commutatif, la linéarité qui apparaît en mécanique quantique, etc...

**5.2. Impossibilité de la quantification idéale.** Commerçons par le passage de la mécanique classique à la mécanique quantique ; la question mathématique précise de ce passage se formule par l'existence de :

**Définition 31.** On appelle quantification (idéale) de la variété symplectique  $(M, \omega)$  toute application linéaire :

$$\mathbf{Q} : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \{\text{Algèbre d'opérateurs sur un Hilbert}\}$$

vérifiant les quatres axiomes suivants :

$$\text{(i)} \quad \mathbf{Q}(1) = \mathbb{I}_d$$

$$\text{(ii)} \quad \mathbf{Q}(\{f, g\}) = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{Q}(f), \mathbf{Q}(g)]$$

$$\text{(iii)} \quad \mathbf{Q}(x_k) = x_k \text{ et } \mathbf{Q}(\xi_k) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$\text{(iv)} \quad (\mathbf{Q}(f))^* = \mathbf{Q}(\bar{f}).$$

En fait si on se place sur la variété symplectique la plus simple possible :  $\mathbb{R}^{2n}$  il n'existe pas de quantification idéale : en effet on a le fameux (voir par exemple [61]) :

**Théorème 32. (Van Hove, 1952).** *Il n'existe pas de quantification :*

$$\mathbf{Q} : \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] \rightarrow \{\text{Algèbre d'opérateurs sur } L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Il faut alors affaiblir la définition de la quantification idéale, en particulier l'axiome (ii). Cela est possible dans le cas de  $\mathbb{R}^{2n}$ . On verra ça dans la partie 7 à l'aide des opérateurs pseudo-différentiels.

**5.3. Principe de l'analyse semi-classique.** De manière extrêmement simple et naïve l'idée de l'analyse semi-classique est de comprendre le quantique lorsque le paramètre  $h \rightarrow 0$ . Pour le lecteur qui voudrait en savoir plus sur l'analyse semi-classique, on conseille la littérature suivante : Y. Colin de Verdière [46], Dimassi-Sjöstrand [52], L. Evans et M. Zworski [58], A. Martinez [94], D. Robert [109], S. Vu Ngoc [119]. Revenons un instant à la limite  $h \rightarrow 0$ , quel est son sens physique ? En "principe" tout système physique est de par nature quantique. D'après les fameuses inégalités d'incertitude de Heisenberg, on ne peut pas mesurer précisément à la fois vitesse et position d'un électron, sauf si  $h = 0$ . En fait plus  $h$  est petit, plus on peut faire des mesures simultanées précises. Ainsi plus  $h \rightarrow 0$ , plus on se rapproche du déterminisme de la mécanique classique sur le fibré cotangent  $T^*M$ . En pratique quand on fait de l'analyse semi-classique, on travaille à la fois avec des objets classiques (variétés symplectiques, algèbre des fonctions  $C^\infty$ , crochet de Poisson, équations de Hamilton,...) et des objets quantiques (espace de Hilbert, algèbre d'opérateurs, commutateur, équation de Schrödinger,...).

Une autre philosophie de l'analyse semi-classique est la suivante : dans la limite des grandes valeurs propres, le spectre de l'opérateur de Schrödinger sur une variété riemannienne  $(M, g)$

$$H = -\frac{h^2}{2}\Delta_g + V$$

ou plus généralement d'un opérateur pseudo-différentiel, est remarquablement liée à une géométrie sous-jacente. Celle-ci vit sur le fibré cotangent  $T^*M$ , vu comme une variété symplectique : c'est la géométrie de l'espace des phases. C'est d'ailleurs le même phénomène qui permet de voir la mécanique classique (structure de variété symplectique) comme limite de la mécanique quantique (structure d'algèbre d'opérateurs).

Voyons pourquoi s'intéresser à l'asymptotique du spectre de l'opérateur  $H$ , revient dans une certaine mesure à faire tendre le paramètre  $h$  vers 0 (limite semi-classique). Par exemple, pour  $E > 0$  fixé, l'équation :

$$-\frac{h^2}{2}\Delta_g\varphi = E\varphi$$

admet  $\varphi_k$ , le  $k$ -ième vecteur propre du laplacien  $\Delta_g$ , comme solution si

$$-\frac{h^2}{2}\lambda_k = E.$$

Ainsi si  $h \rightarrow 0^+$ , alors  $\lambda_k \rightarrow +\infty$ . C'est pourquoi la limite semi-classique peut aussi se voir comme l'asymptotique des grandes valeurs propres du laplacien.

## 6. OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

**6.1. De Fourier à nos jours...** Historiquement on peut dire que c'est Fourier en utilisant la transformée de Fourier pour résoudre l'équation de la chaleur  $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$  qui fut le pionnier des opérateurs pseudo-différentiels. Dans le début des années 60, Caldéron et Zygmund introduisent les opérateurs intégraux à noyaux singuliers en vue de résoudre des équations aux dérivées partielles avec des coefficients variables. Entre 60 et 70, Nirenberg et Hörmander ont donné la théorie des opérateurs pseudo-différentiels sans le paramètre semi-classique  $h$ . Un peu plus tard Maslov, Helffer, Robert et Sjöstrand se sont intéressés à l'étude avec  $h$ . Il y en a en réalité moult opérateurs pseudo-différentiels, destinés à tel ou tel application et il est difficile de présenter une théorie très générale. Dans la suite, on va rapidement décrire "une" théorie des opérateurs pseudo-différentiels avec le paramètre

semi-classique  $h$ . De nos jours la théorie des opérateurs pseudo-différentiels est devenu un outil d'analyse très puissant, en particulier en équations aux dérivées partielles, en analyse sur les variétés et même en géométrie algébrique complexe. On va rappeler brièvement une des définitions des opérateurs pseudo-différentiels : celle de la quantification de Weyl sur  $\mathbb{R}^{2n}$  (ou sur  $T^*X$ ) et donner les principales propriétés. de ce type d'opérateurs pseudo-différentiels. Pour plus de détails, voir [52].

**6.2. Symboles et transformée de Weyl.** De manière très formelle, la quantification de Weyl consiste à associer à une fonction symbole convenable  $a : (x, \xi) \mapsto a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  un opérateur linéaire  $\mathbf{O}_p^w(a)$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même, admettant une représentation intégrale : pour toute fonction  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  :

$$\left(\mathbf{O}_p^w(a)(u)\right)(x) := \frac{1}{(2\pi h)^n} \int \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi.$$

Une des premières difficulté des la théorie des opérateurs pseudo-différentiels est de donner un sens à ce type de formule. Bien sur pour des symboles  $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  c'est plutôt facile à définir, mais pour faire de la quantification il faut au moins autoriser des symboles polynomiaux en  $x$  et  $\xi$ . On va définir une classe de symboles usuelle pour faire de la quantification : sur la variété  $X := \mathbb{R}^n$ , et pour  $k, m \in \mathbb{Z}^2$ , on définit l'ensemble de symboles d'indice  $k$  et de poids  $\langle z \rangle^m$  sur la variété  $X$  où  $\langle z \rangle = \langle x, \xi \rangle := (1 + |z|^2)^{\frac{1}{2}}$ , par :

$$S^k(X, \langle z \rangle^m)$$

$$:= \left\{ a_h(z) \in C^\infty(T^*X), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists C_\alpha \geq 0, \forall z \in T^*X, |\partial_z^\alpha a_h(z)| \leq C_\alpha h^k \langle z \rangle^m \right\}.$$

Avec des intégrations par parties habiles (technique des intégrales oscillantes), voir [52] ou [94] on montre que :

**Théorème 33.** Si  $a \in S^k(X, \langle z \rangle^m)$ , avec  $m \geq 0$ , alors  $\mathbf{O}_p^w(a)$  est un opérateur linéaire de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même.

Donnons un exemple très important de calcul de transformée de weyl : celles des variables canoniques.

**Exemple 34.** Le quantifié de Weyl de la fonction  $(x, \xi) \mapsto 1$  est l'opérateur identité. Le quantifié de Weyl de la fonction  $(x, \xi) \mapsto x_j$  est l'opérateur de multiplication par la variable  $x_j$ . Le quantifié de Weyl de la fonction  $(x, \xi) \mapsto \xi_j$  est l'opérateur de dérivation  $-ih \frac{\partial}{\partial x_j}$ .

En analyse semi-classique, on est aussi amené à considérer des symboles ayant des développements asymptotiques en puissance de  $h$  : soit  $a_h \in S^0(X, \langle z \rangle^m)$ , on dira que ce symbole est classique si et seulement s'il existe une suite de symboles  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \in S^0(X, \langle z \rangle^m)^{\mathbb{N}}$  indépendant de  $h$  tels que pour tout  $k' \geq 0$ , on ait :

$$\left( a_h(z) - \sum_{j=0}^{k'} a_j(z) h^j \right) \in S^{k'+1}(X, \langle z \rangle^m).$$

On note alors  $a_h = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j h^j$ , on dira aussi que  $a_0$  est le symbole principal de  $a_h$ .

Le théorème de resommation de Borel (voir [Mar]) assure que pour toute suite

arbitraire de symboles  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \in S(X, \langle z \rangle^m)$ , il existe une unique, modulo  $O(h^\infty)$ , fonction symbole  $a_h$  telle que  $a_h = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j h^j$ .

**6.3. Quelques propriétés.** Si on fait le produit de deux opérateurs pseudo-différentiels de symboles  $a$  et  $b$ , alors l'opérateur produit est encore un opérateur pseudo-différentiel :

**Théorème 35.** *Quel que soient les symboles  $(a, b) \in S(X, \langle \xi \rangle^{m_1}) \times S(X, \langle \xi \rangle^{m'})$ , il existe un symbole  $c \in S(X, \langle \xi \rangle^{m+m'})$  tels que*

$$\mathbf{O}_p^w(a) \circ \mathbf{O}_p^w(b) = \mathbf{O}_p^w(c).$$

De plus un choix possible pour le symbole  $c$  est donné par la formule de Moyal :

$$c = a \star b := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h^j}{j!(2i)^j} a \left( \sum_{p=1}^n \overleftarrow{\partial_{\xi_p}} \overrightarrow{\partial_{x_p}} - \overleftarrow{\partial_{x_p}} \overrightarrow{\partial_{\xi_p}} \right)^j b$$

où la flèche indique sur quelle fonctions,  $a$  ou  $b$  la dérivée doit opérer.

Citons maintenant un théorème de continuité fondamental :

**Théorème 36.** (Calderon-Vaillancourt) *Si le symbole  $a \in S^k(X, 1)$ ,  $k \geq 1$ , alors l'opérateur  $\mathbf{O}_p^w(a)$  est un opérateur linéaire continu de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  :*

$$\exists C, M > 0, \quad |||\mathbf{O}_p^w(a)||| \leq C \sum_{|\alpha| \leq M} \|\partial^\alpha a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})}.$$

Une des principales applications de ce théorème de continuité est l'inversion des opérateurs pseudo-différentiels : un symbole  $a \in S(X, \langle z \rangle^m)$  est elliptique en  $(x_0, \xi_0) \in T^*X$  si et seulement si  $|a(x_0, \xi_0)| \neq 0$ .

**Théorème 37.** *Soit  $m \in \mathbb{R}$  et  $a \in S(X, \langle \xi \rangle^m)$  elliptique sur  $T^*X$ , alors il existe un symbole  $b \in S(X, \langle \xi \rangle^{-m})$  tels que :*

$$\mathbf{O}_p^w(a) \circ \mathbf{O}_p^w(b) = I_d + R_1 \text{ et } \mathbf{O}_p^w(b) \circ \mathbf{O}_p^w(a) = I_d + R_2$$

où  $R_1, R_2$  sont des opérateurs linéaire continus de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  et vérifiant  $|||R_1||| + |||R_2||| = O(h^\infty)$ .

## 7. ANALYSE MICROLOCALE

Il semble que l'analyse microlocale prenne naissance dans les années 70 pour des applications en équations aux dérivés partielles. Aujourd'hui l'analyse microlocale est présente dans beaucoup de mathématiques, comme la topologie, la géométrie analytique,...

Le principe moral de l'analyse microlocale est alors d'utiliser des variétés symplectique pour faire de l'analyse : pour des objets vivants naturellement sur une variété quelconque  $X$ , on peut aussi les faire vivre sur la variété  $T^*X$ .

Donnons ici quelques éléments d'analyse microlocale, pour plus de détails voir par exemple [118], [119], [46] ou [73].

7.1. **Fonctions admissibles.** Pour  $h_0 > 0$  fixé, l'ensemble

$$A := \left\{ \lambda(h) \in \mathbb{C}^{[0, h_0]}, \exists N \in \mathbb{Z}, |\lambda(h)| = O(h^{-N}) \right\}$$

est un anneau commutatif pour les opérations usuelles sur les fonctions. On voit aussi sans peine que

$$I := \{ \lambda(h) \in A, \lambda(h) = O(h^\infty) \}$$

est un idéal bilatère de  $A$ , on définit alors l'anneau  $\mathbb{C}_h$  des constantes admissibles comme étant l'anneau quotient  $A/I$ .

On peut alors définir le  $\mathbb{C}_h$ -module des fonctions admissibles :

**Définition 38.** L'ensemble  $\mathcal{A}_h(X)$  des fonctions admissibles sur  $X$  est l'ensemble des distributions  $u_h \in \mathcal{D}'(X)$  tels que pour tout opérateur pseudo-différentiel  $P_h$  dont le symbole dans une carte locale est à support compact

$$\exists N \in \mathbb{Z}, \|P_h u_h\|_{L^2(X)} = O(h^N).$$

L'ensemble  $\mathcal{A}_h(X)$  est un  $\mathbb{C}_h$ -module pour les lois usuelles des fonctions. Un premier fait important est que par le théorème de Calderon-Vaillancourt, on a l'inclusion :  $L^2(X) \subset \mathcal{A}_h(X)$ .

**Exemple 39.** Les fonctions WKB<sup>4</sup> de la forme :

$$u_h(x) = \alpha(x) e^{i \frac{S(x)}{h}}$$

$S$  étant une fonction réelle  $\mathcal{C}^\infty$ , sont des fonctions admissibles stables par l'action d'un opérateur pseudo-différentiel.

7.2. **Micro-support et microfonctions.** Lorsque on regarde une équation du type  $P_h u_h = 0$ , l'étude dans  $T^*X$  de la fonction symbole  $p$  de l'opérateur pseudo-différentiel  $P_h$  permet de localiser les singularités de la solution  $u_h$  grâce à la notion de micro-support. Historiquement la notion de micro-support a été introduite par Sato et Hörmander. On va donner une définition proche de celle de Hörmander : à tout élément  $u_h$  du  $\mathbb{C}_h$ -module des fonctions admissibles est associé un sous-ensemble de  $T^*X$ , cet ensemble, nommé micro-support<sup>5</sup> décrit la localisation de la fonction  $u_h$  dans l'espace des phases.

**Définition 40.** Soit  $u_h \in \mathcal{A}_h(X)$ , on dira que  $u_h$  est négligeable au point  $m \in T^*X$ , si et seulement s'il existe  $P_h$  un opérateur pseudo-différentiel elliptique en  $m$  tels que :

$$\|P_h u_h\|_{L^2(X)} = O(h^\infty).$$

On définit alors  $MS(u_h)$ , le micro-support de  $u_h$  comme le complémentaire dans  $T^*X$  de l'ensemble des points  $m \in T^*X$  où  $u_h$  est négligeable.

Moralement le micro-support de  $u_h$  est le complémentaire de l'ensemble des directions où, à une variante près, la transformée de Fourier de  $u_h$  est à décroissance rapide. Parmi les propriétés liées au micro-support nous avons que si  $P_h$  est un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal  $p$  alors on a l'implication :

$$P_h u_h = O(h^\infty) \Rightarrow MS(u_h) \subset p^{-1}(0).$$

Donc si par exemple  $P_h$  est un opérateur de symbole principal  $p$ ,  $\lambda$  un scalaire, et si  $u_h$  est une fonction non nulle telle que :  $(P_h - \lambda I_d) u_h = O(h^\infty)$  alors  $MS(u_h) \subset p^{-1}(\lambda)$ . Ceci est une propriété fondamentale de l'analyse microlocale : elle donne une localisation des fonctions propres dans l'espace des phases.

<sup>4</sup>Pour Wentzel, Kramers et Brillouin.

<sup>5</sup>Où front d'ondes.

**Exemple 41.** Pour une fonction WKB :  $u_h(x) = \alpha(x)e^{i\frac{S(x)}{h}}$  on a :

$$MS(u_h) = \{(x, dS(x)), \alpha(x) \neq 0\}.$$

**Définition 42.** Soient  $u_h, v_h \in \mathcal{A}_h(X)^2$ , on dira que  $u_h = v_h + O(h^\infty)$  sur un ouvert  $U \subset T^*X$  si et seulement si :

$$MS(u_h - v_h) \cap U = \emptyset.$$

Avec les propriétés du micro-support, on peut montrer que pour tout ouvert  $U$  de  $T^*X$ , l'ensemble  $\{u_h \in \mathcal{A}_h(X) / MS(u_h) \cap U = \emptyset\}$  est un  $\mathbb{C}_h$ -sous-module de  $\mathcal{A}_h(X)$ , on peut alors définir l'espace des micro-fonctions :

**Définition 43.** Soit  $U$  un ouvert non vide de  $T^*X$ , on définit l'espace des micro-fonctions sur  $U$  comme étant le  $\mathbb{C}_h$ -module quotient :

$$\mathcal{M}_h(U) := \mathcal{A}_h(X) / \{u_h \in \mathcal{A}_h(X), MS(u_h) \cap U = \emptyset\}.$$

Les opérateurs pseudo-différentiels agissent sur  $\mathcal{M}_h(U)$ , en effet : pour tout opérateur pseudo-différentiel  $P_h$  on a :

$$MS(P_h u_h) \subset MS(u_h)$$

et ainsi  $P_h(\mathcal{M}_h(U)) \subset \mathcal{M}_h(U)$ .

**7.3. Analyse microlocale et faisceaux.** Le langage le plus adapté à l'analyse microlocale est le langage des faisceaux. Sans rentrer dans les détails, en voici le principe : a tout triplet  $(P_h, \lambda, U)$  où  $P_h$  est un opérateur pseudo-différentiel,  $\lambda$  un scalaire de l'anneau  $\mathbb{C}_h$  et  $U$  un ouvert non vide de  $T^*X$ , on peut associer l'ensemble  $\mathcal{L}(P_h, \lambda, U)$  des microfonctions  $u_h$  solutions dans l'ouvert  $U$  de  $(P_h - \lambda I_d)u_h = O(h^\infty)$ . L'ensemble  $\mathcal{L}(P_h, \lambda, U)$  est un  $\mathbb{C}_h$ -module, et si  $\Omega$  désigne un ensemble d'indices quelconque, la famille d'ensembles  $\{\mathcal{L}(P_h, \lambda, U_x), x \in \Omega\}$  est un faisceau au dessus de  $\bigcup_{x \in \Omega} U_x$ . En effet toute solution peut être restreinte sur des ou-

verts plus petits d'une unique manière, et deux solutions  $u_h$  définie sur un ouvert  $U_x$  et  $v_h$  définie sur un autre ouvert  $U_y$  et telles que  $u_h = v_h$  sur l'ouvert  $U_x \cap U_y$  peuvent être misent ensemble pour former une solution globale sur l'ouvert  $U_x \cup U_y$ . Ce faisceau est supporté<sup>6</sup> sur l'ensemble  $p^{-1}(\lambda) \subset T^*X$ .

**7.4. Théorème d'Egorov et opérateurs intégraux de Fourier.** Pour finir donnons le théorème d'Egorov qui permet de définir rapidement la notion d'opérateur intégral de Fourier, voir par exemple [57], [46] :

**Théorème 44. (Egorov) :** Soient  $(T^*X, d\alpha)$  et  $(T^*Y, d\beta)$  deux variétés symplectomorphe : il existe  $\chi$  un symplectomorphisme de  $T^*X$  dans  $T^*Y$ . On supposera que  $\chi$  est exact :  $\chi^*\beta - \alpha$  est une 1-forme exacte sur  $X$ . Alors il existe  $\tilde{\chi}$  un morphisme de  $\mathbb{C}_h$ -module de  $\mathcal{M}_h(X)$  dans  $\mathcal{M}_h(Y)$  inversible tel que pour tout  $a \in \mathcal{M}_h(Y)$ , en notant par  $\hat{a} = \mathbf{O}_p^w(a)$ , l'opérateur :

$$B = \tilde{\chi}^{-1} \circ \hat{a} \circ \tilde{\chi}$$

est un opérateur pseudo-différentiel sur  $\mathcal{M}_h(X)$ , et dont le symbole principal est donné par  $a_0 \circ \chi$ ,  $a_0$  étant le symbole principal de  $\hat{a}$ . On dit que  $\tilde{\chi}$  est un opérateur intégral de Fourier associé à  $\chi$ .

En fait il y a toute une théorie sur les opérateurs intégraux de Fourier (voir [53] et [54]), ces derniers on en effet une représentation intégrale. Leurs noyaux sont cependant plus compliqués et plus délicats à manipuler que les noyaux des opérateurs pseudo-différentiels.

<sup>6</sup>Au sens du micro-support.

## 8. VERS LA QUANTIFICATION PAR DÉFORMATION

Avec la théorie des opérateurs pseudo-différentiels, on dispose d'une quantification sur  $\mathbb{R}^{2n}$  ou sur  $T^*X$ . Cette quantification n'est en fait pas idéale au sens où l'axiome **(ii)** est vérifié avec un reste en  $O(h^2)$ . Donc si accepte de laisser tendre  $h$  vers 0 on se rapproche d'une quantification idéale.

**8.1. Cas de  $T^*X$ .** Sur la variété symplectique  $\mathbb{R}^{2n}$  ou sur  $T^*X$  la théorie des opérateurs pseudo-différentiels fournit une quantification (très idéale mais presque). De manière concrète pour toute fonction symbole  $a$  "convenable" on l'existence de l'opérateur linéaire  $\hat{a}$  définit par la quantification de Weyl :

$$\hat{a} := \mathbf{O}_p^w(a).$$

Dans l'exemple 6.2 on a vu que les axiomes **(i)** et **(iii)** de la quantification sont vérifiés ; l'axiome **(iv)** est lui aussi vrai. Par contre l'axiome **(ii)** pose problème : généralement pour tout couple de symboles  $\varphi, \psi$  on a que :

$$\mathbf{O}_p^w(\varphi) \circ \mathbf{O}_p^w(\psi) \neq \mathbf{O}_p^w(\varphi\psi)$$

mais le théorème 6.4 assure l'existence d'un unique symbole  $\pi$  donné par la formule de Moyal :

$$\pi = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h^j}{j!(2i)^j} \varphi \left( \sum_{p=1}^n \overleftarrow{\partial_{\xi_p}} \overrightarrow{\partial_{x_p}} - \overleftarrow{\partial_{x_p}} \overrightarrow{\partial_{\xi_p}} \right)^j \psi$$

vérifiant la relation :

$$\mathbf{O}_p^w(\varphi) \circ \mathbf{O}_p^w(\psi) = \mathbf{O}_p^w(\pi).$$

On définit alors le produit de Moyal des symboles  $\varphi$  et  $\psi$  par :

$$(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \star \psi := \pi$$

soit encore :

$$\widehat{\varphi \star \psi} = \widehat{\varphi} \widehat{\psi}.$$

Et comme d'après la formule de Moyal :  $\varphi \star \psi := \varphi\psi + O(h)$ , on en déduit alors la formule :

$$\widehat{\varphi \star \psi} = \widehat{\varphi} \widehat{\psi} + O(h).$$

Par conséquent si on calcule le commutateur de deux symboles quantifiés  $\widehat{\varphi}$  et  $\widehat{\psi}$  on obtient :

$$\begin{aligned} [\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}] &= \widehat{\varphi} \widehat{\psi} - \widehat{\psi} \widehat{\varphi} \\ &= \widehat{\varphi \star \psi} - \widehat{\psi \star \varphi} \\ &= \varphi \star \widehat{\psi} - \widehat{\psi} \star \varphi \end{aligned}$$

et comme par la formule de Moyal  $\varphi \star \psi - \psi \star \varphi = \frac{h}{i} \{\varphi, \psi\} + O(h^2)$  on arrive la formule :

$$[\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}] = \frac{h}{i} \widehat{\{\varphi, \psi\}} + O(h^2).$$

On vient donc de montrer que l'axiome **(ii)** est vrai modulo  $O(h^2)$ .

En fait, on peut voir le produit non-commutatif  $\star$  comme définit sur un anneau de fonctions en oubliant la représentation par les opérateurs pseudo-différentiels. La quantification apparaît donc comme une déformation du commutatif vers le non-commutatif, la trace de la non-commutativité étant donné par le crochet  $\{.,.\}$ .

**8.2. Cas général.** Le programme de quantification par déformation est initié par Bayer, Flato,... il consiste à essayer de définir sur chaque variété symplectique un produit  $\star$  analogue à celui de Moyal. Localement cela est facile (on se ramène à  $\mathbb{R}^{2n}$  par le théorème de Darboux), mais bien évidemment la difficulté de ce programme est le passage du local au global. Concrètement quand on dispose d'un produit  $\star$  sur une variété  $M$ , on peut quantifier : on associe à chaque fonction  $u \in C^\infty(M)$  un opérateur  $\hat{u}$  défini par :

$$\hat{u}(v) := u \star v.$$

Le problème des produits  $\star$  sur des variétés est d'abord celui de leurs existences et de leurs classifications. Parmi les résultats majeurs citons d'abord les travaux de De Wilde-Lecompte [51] qui en 1983 montrent que toute variété symplectique admet un produit  $\star$ . En 1997, Kontsevitch [88] montre que toute variété de Poisson<sup>7</sup> admet un produit  $\star$ .

### 9. LES SYSTÈMES COMPLÈTEMENT INTÉGRABLES

Pour finir ce chapitre on va donner les principaux résultats connus sur les systèmes complètement intégrables symplectiques et semi-classique.

**9.1. Définitions.** En physique hamiltonienne un système intégrable est un système possédant un nombre suffisant de constantes de mouvement indépendantes ; mathématiquement on a la définition suivante :

**Définition 45.** Un système intégrable classique est la donnée d'une variété symplectique  $(M, \omega)$  de dimension  $2n$  et de  $n$  fonctions  $(f_1, \dots, f_n)$  de l'algèbre  $C^\infty(M)$  telles que les différentielles  $(df_i(x))_{i=1, \dots, n}$  sont libres presque partout sur  $M$  ; et telles que pour tout indices  $i, j$  on ait  $\{f_i, f_j\} = 0$ . On définit alors l'application moment classique associée :

$$\mathbf{f} : \begin{cases} M \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)). \end{cases}$$

**Exemple 46.** L'oscillateur harmonique classique : sur la variété symplectique  $\mathbb{R}^2$  on note par  $p$  l'oscillateur harmonique :  $\mathbf{p}(x, \xi) = p(x, \xi) = (x^2 + \xi^2) / 2$ . En effet  $dp = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$  est non nul presque partout, donc libre presque partout.

**Définition 47.** Un système complètement intégrable semi-classique sur une variété  $X$  est la donnée de  $n$  opérateurs pseudo-différentiels  $P_1, \dots, P_n$  sur  $L^2(X)$  tels que pour tout indices  $i$  et  $j$  on ait  $[P_i, P_j] = 0$  et dont les symboles principaux forment un système complètement intégrable symplectique sur  $M := T^*X$ . On notera par  $\mathbf{P} := (P_1, \dots, P_n)$  l'application moment quantique et par  $\mathbf{p} := (p_1, \dots, p_n)$  l'application moment classique associée aux symboles principaux de  $\mathbf{P}$ .

En géométrie symplectique et en analyse semi-classique, l'application moment joue un rôle important pour classifier les systèmes complètement intégrables. En analyse semi-classique on travaille avec le spectre (spectre exact et semi-classique) d'un système complètement intégrable :

**Définition 48.** Le spectre exact  $\sigma(P_1, \dots, P_n)$  d'un système complètement intégrable semi-classique  $(X, \mathbf{P})$ , ou encore spectre conjoint exact des opérateurs pseudo-différentiels  $P_1, \dots, P_n$ , est défini par :

$$\sigma(P_1, \dots, P_n)$$

<sup>7</sup> $C$  est une variété avec une structure de poisson sur l'algèbre des fonctions.

$$:= \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \exists u \in L^2(\mathbb{R}^n), u \neq 0; P_j u = \lambda_j u \right\}.$$

La définition semi-classique est :

**Définition 49.** Le spectre semi-classique  $\Sigma_h(P_1, \dots, P_n)$  d'un système complètement intégrable semi-classique  $(X, \mathbf{P})$ , ou encore spectre conjoint des opérateurs pseudo-différentiels  $P_1, \dots, P_n$  est défini par :

$$\Sigma_h(P_1, \dots, P_n)$$

$$:= \left\{ (\lambda_1(h), \dots, \lambda_n(h)) \in \mathbb{R}^n, \exists u_h \in L^2(\mathbb{R}^n), u_h \neq 0; (P_j - \lambda_j(h)I_d) u_h = O(h^\infty) \right\}$$

$I_d$  étant l'opérateur identité.

On appelle multiplicité microlocale de  $E_h$  la dimension du  $\mathbb{C}_h$ -module des solutions microlocales de cette équation.

Moralement le spectre semi-classique (ou microlocal) correspond aux valeurs propres approchées avec une précision d'ordre  $O(h^\infty)$ . Le lien précis entre spectre exact et semi-classique est donné par la [119] :

**Proposition 50.** Sur un compact  $K$  de  $\mathbb{R}$ , le spectre semi-classique conjoint  $\Sigma_h(P_1, \dots, P_n)$  et le spectre exact  $\sigma(P_1, \dots, P_n)$  sont liés par :

$$\Sigma_h(P_1, \dots, P_n) = \sigma(P_1, \dots, P_n) \cap K + O(h^\infty)$$

au sens où si  $\lambda_h \in \Sigma_h(P_1, \dots, P_n)$  alors il existe  $\mu_h \in \sigma(P_1, \dots, P_n) \cap K$  tel que  $\lambda_h = \mu_h + O(h^\infty)$ ; et si  $\mu_h \in \sigma(P_1, \dots, P_n) \cap K$  alors il existe  $\lambda_h \in \Sigma_h(P_1, \dots, P_n)$  tel que  $\mu_h = \lambda_h + O(h^\infty)$ . De plus pour toute famille  $\lambda_h$  ayant une limite finie  $\lambda \in K$  lorsque  $h \rightarrow 0$ , si la multiplicité microlocale de  $\lambda_h$  est bien définie et est finie, alors elle est égale pour  $h$  assez petit au rang du projecteur spectral conjoint des  $P_j$  sur une boule de diamètre  $O(h^\infty)$  centrée autour de  $\lambda_h$ .

**Exemple 51.** L'oscillateur harmonique quantique : ici on prend  $M = \mathbb{R}$  et :

$$\mathbf{P} = P = -\frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2}$$

alors l'application moment classique est  $\mathbf{p}(x, \xi) = p(x, \xi) = (x^2 + \xi^2) / 2$ . Dans cet exemple, le spectre exact et semi-classique coïncide et  $\sigma(P) = \left\{ h \left( n + \frac{1}{2} \right), n \in \mathbb{N} \right\}$ .

## 9.2. Théorie locale.

*Des points réguliers ...* Les points réguliers de l'application moment classique sont les points  $m \in M$  tels que les différentielles  $(dp_i(m))_{i=1, \dots, n}$  sont libres. Les points réguliers d'un système complètement intégrable ont une description symplectique locale simple donnée par le théorème de Darboux-Carathéodory (voir par exemple [9]) :

**Théorème 52. (Darboux-Carathéodory).** Soit  $(M, \omega, \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n))$  un système complètement intégrable de dimension  $2n$ . Pour tout point  $m \in M$  régulier, ie :  $(dp_i(m))_{i=1, \dots, n}$  est une famille libre; il existe un système de coordonnées canoniques locales  $(x_1, \dots, x_n, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$  tel que sur un voisinage de  $m$  :

$$\zeta_j = p_j - p_j(m).$$

Ce théorème a un analogue semi-classique du à Y. Colin de Verdière en 1979 [36] :

**Théorème 53.** Soit  $(M, \omega, F = (f_1, \dots, f_n))$  un système complètement intégrable de dimension  $2n$ . Pour tout point  $m \in M$  régulier, il existe  $U$  un opérateur intégral de Fourier unitaire définie microlocalement près de  $m$  tel que sur un voisinage microlocal de  $m$  :

$$U (P_j - p_j(m)I_d) U^{-1} = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Le théorème de Darboux-Carathéodory semi-classique permet de faire une description précise de l'ensemble des micro-solutions des équations  $P_j u_h = O(h^\infty)$ . Les résultats d'analyse microlocale nous informe déjà que les solutions  $u_h$  sont localisées sur  $\bigcap_{j=1}^n p_j^{-1}(0)$  ; mais en fait on a bien mieux :

**Théorème 54.** Pour tout point  $m \in M$  régulier de  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  tels que  $\mathbf{p}(m) = 0$ , le faisceau des micro-solutions de l'équation

$$P_j u_h = O(h^\infty)$$

est un faisceau en  $\mathbf{C}_h$  module libre de rang 1 engendré par  $U^{-1}(\mathbf{1})$ , où  $U$  est donné par le précédent théorème et  $\mathbf{1}$  est une micro-fonction égale à 1 près de l'origine.

... aux points singuliers non-dégénérés. Il y a toute une théorie sur l'étude et la classification des singularités des applications moment. Le cas de certaines singularités générique, dites singularités non-dégénérés est bien connu. Suivant une classification algébrique dut à Williamson [120] datant de 1936, ces singularités sont de trois types :

- (1) les singularités elliptiques :  $q_i = x_i \zeta_i$ ;
- (2) les singularités hyperboliques  $q_i = (x_i^2 + \zeta_i^2)/2$ ;
- (3) et les singularités loxodromique (ou focus-focus)  $q_i = x_i \zeta_{i+1} - x_{i+1} \zeta_i$  et  $q_{i+1} = x_i \zeta_i + x_{i+1} \zeta_{i+1}$ .

D'après un théorème d'Eliasson de 1984 [55], [56] toutes ces singularités non-dégénérés sont linéarisable : il existe  $\chi$  un symplectomorphisme local de  $\mathbb{R}^{2n}$  dans  $M$  tel que :  $p_i \circ \chi = g_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$ . En réalité Y. Colin de Verdière et J. Vey ont traités le cas de la dimension 1 de ce théorème en 1979 [35]. Par quantification de Weyl on obtient l'analogie semi-classique du théorème d'Eliasson (voir le livre de S. Vu Ngoc [119] pour un énoncé précis).

### 9.3. Théorie semi-globale.

*Des fibres régulières ...* Une fibre  $\Lambda_c := \mathbf{p}^{-1}(c)$  est régulière si et seulement si tous les points de  $\Lambda_c$  sont réguliers pour  $\mathbf{p}$ . Les fibres régulières sont décrites par le théorème actions-angles, nommé aussi théorème d'Arnold-Liouville-Mineur, qui donne la dynamique classique au voisinage d'une fibre régulière connexe et compacte : le flot hamiltonien associé à une intégrale première est quasi-périodique (droite s'enroulant sur un tore) :

**Théorème 55. (Actions-angles).** Soit  $(M, \omega, \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n))$  un système complètement intégrable de dimension  $2n$ . Soit  $\Lambda_c$  une composante connexe compacte de  $\mathbf{p}^{-1}(c)$  telle que tous les points de la fibre  $\Lambda_c$  sont réguliers ; alors toutes les fibres dans un voisinage de  $\Lambda_c$  sont des tores et il existe  $\varphi$  un symplectomorphisme :

$$\varphi : T^*\mathbb{T}^n \rightarrow M$$

qui envoi la section nulle  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$  de  $T^*\mathbb{T}^n$  sur  $\Lambda_c$  et tel que :

$$\mathbf{p} \circ \varphi = \chi(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$$

où  $\chi$  est un difféomorphisme local de  $\mathbb{R}^{2n}$  laissant fixe l'origine.

On dit que les variables  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les variables actions et  $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  les variables angles. San Vu Ngoc a donné la version semi-classique de ce théorème [116],[117] :

**Théorème 56. (Actions-angles semi-classique).** *Si la fibre  $\Lambda_c$  est régulière il existe  $U$  un opérateur intégral de Fourier associé à  $\chi$  un symplectomorphisme exact :*

$$\chi : T^*\mathbb{T}^n \rightarrow M$$

qui envoie la section  $\zeta = a$  sur  $\Lambda_c$  et il existe aussi des séries formelles  $\lambda_j(h) \in \mathbb{C}[[h]]$ ,  $j = 1, \dots, n$  telle que microlocalement au voisinage de la section  $\zeta = a$  on ait

$$U (P_1 - p_1(m)I_d, \dots, P_n - p_n(m)I_d) U^{-1} = N \left( \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} - \lambda_1(h)I_d, \dots, \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} - \lambda_n(h)I_d \right)$$

où  $m$  est un point quelconque de la fibre  $\Lambda_c$  et  $N$  est une matrice  $2 \times 2$  inversible à coefficients dans le  $\mathbb{C}_h$ -module des opérateurs pseudo-différentiel.

Le théorème actions-angles semi-classique fournit donc une description locale du spectre d'un système intégrable ; en effet autour d'une valeur régulière de l'application moment classique  $\mathbf{p}$  le spectre conjoint semi-classique  $\Sigma_h(P_1, \dots, P_n)$  est localement difféomorphe au réseau  $h\mathbb{Z}^n$  (voir [119]). Précisément du théorème actions-angles semi-classique on arrive aux fameuses règles de quantification de Bohr-Sommerfeld :

**Théorème 57. (Règles de Bohr-Sommerfeld).** *Il existent  $n$  fonctions  $S_j(E) = S_j(E, h)$ ,  $j = 1, \dots, n$  admettant des développements asymptotiques en puissance de  $h$  avec des coefficients de classe  $C^\infty$  par rapport à  $E = (E_1, \dots, E_n) \in \mathbb{R}^n$ , telles que les équations :*

$$(P_j - E_j I_d) u_h = O(h^\infty)$$

admettent une solution microlocale  $u_h$  avec son microsupport  $MS(u_h) = \Lambda_E$  si et seulement si  $S_j(E) \in 2\pi h$ .

Décrivons un peu la construction de ces fonctions  $S_j(E)$ . Pour fixer les idées, plaçons nous dans le cas de la dimension symplectique deux ; donc  $\mathbf{P} = P$ . D'après un des théorèmes précédent pour une fibre  $\Lambda_E := \mathbf{p}^{-1}(E)$  compacte, connexe et régulière, toute microsolution  $u_h$  de  $(P - EI_d) u_h = O(h^\infty)$  est engendré par  $U^{-1}(\mathbf{1})$ . La théorie des opérateurs intégraux de Fourier montre que  $u_h$  est nécessairement du type WKB. On va maintenant décrire comment on prolonge une microsolution d'un ouvert à un autre le long d'une fibre régulière (pour plus de détails, voir [119]). Pour commencer on se donne un recouvrement fini  $(U_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  d'ouverts de la fibre  $\Lambda_E$ . Pour tout couple d'ouverts non vides  $U_\alpha$  et  $U_\beta$  du recouvrement tels que  $U_\alpha \cap U_\beta$  est non vide et connexe ; si on considère alors deux microfonctions  $\varphi_\alpha$  et  $\varphi_\beta$  solutions de  $(P - \lambda I_d) u_h = O(h^\infty)$  microlocalement sur les ouverts respectifs  $U_\alpha$  et  $U_\beta$ , les microfonctions  $\varphi_\alpha$  et  $\varphi_\beta$  sont respectivement engendrés par  $U^{-1}(\mathbf{1}_\alpha)$  et par  $U^{-1}(\mathbf{1}_\beta)$ ,  $\mathbf{1}_\alpha$  et  $\mathbf{1}_\beta$  étant égale à 1 microlocalement sur  $U_\alpha$  et respectivement sur  $U_\beta$ . En se plaçant sur  $U_\alpha \cap U_\beta$  et en utilisant l'argument de la dimension 1 on a l'existence de  $c_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}_h$  tel que sur  $U_\alpha \cap U_\beta$  on ait

$$U^{-1}(\mathbf{1}_\alpha) = c_{\alpha,\beta} U^{-1}(\mathbf{1}_\beta)$$

et donc, sur  $U_\alpha \cap U_\beta$  on a :

$$\mathbf{1}_\alpha = c_{\alpha,\beta} \mathbf{1}_\beta.$$

La théorie des opérateurs intégraux de Fourier montre (voir [118],[119]) que la constante  $c_{\alpha,\beta}$  s'écrit sous la forme :

$$c_{\alpha,\beta} = e^{\frac{iS_{\alpha\beta}}{h}}$$

le scalaire  $S_{\alpha\beta}$  étant dans  $\mathbb{C}_h$  est dépendant de la variable  $E$ .

Plus généralement pour une famille finie  $(U_k)_{k=1,\dots,l}$  d'ouverts non vides recouvrant une partie compacte et connexe de la fibre régulière  $\Lambda_E$  telle que pour tout indice  $k \in \{1, \dots, l-1\}$ ,  $U_k \cap U_{k+1}$  est non vide et connexe. Sur chaque ouvert  $U_k$  on a un générateur  $\mathbf{1}_k$  de  $\mathcal{L}(P, \lambda, U_k)$  et pour tout indice  $k \in \{1, \dots, l-1\}$  il existe  $c_{k,k+1} = e^{\frac{is_{k,k+1}}{h}} \in \mathbb{C}_h$  tel que :

$$\mathbf{1}_k = c_{k,k+1} \mathbf{1}_{k+1}$$

ainsi nous avons alors l'égalité suivante

$$\mathbf{1}_1 = c_{1,2} c_{2,3} \dots c_{l-1,l} \mathbf{1}_l.$$

On peut donc écrire  $\mathbf{1}_1 = e^{\frac{is_{1,l}}{h}} \mathbf{1}_l$  où on a posé

$$S_{1,l} = \sum_{k=1}^{l-1} S_{k,k+1}.$$

On notera par  $S$  sa classe de cohomologie à valeur dans  $\mathbb{R}/2\pi h\mathbb{Z}$  associée. La dépendance en la variable  $E$  est lisse : les fonctions  $E \mapsto S.(E)$  sont  $C^\infty$  (voir [116],[118] et [119]). Ainsi, avoir une solution globale sur la fibre signifie que le réel  $S(E)$  est un multiple de  $2\pi h$ .

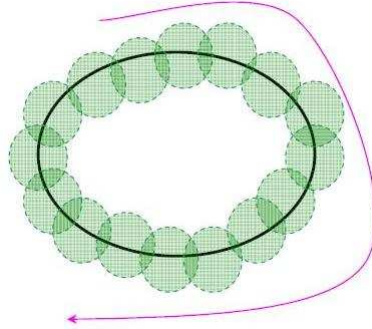


Fig. 2 : Un recouvrement par des ouverts d'une fibre régulière.

Dans les travaux de B. Helffer et D. Robert on a un énoncé plus explicite des règles de quantification de Bohr-Sommerfeld (voir l'article de B. Helffer et D. Robert [77]). Les Hypothèses fonctionnelles de B. Helffer et D. Robert [77] et [109] sont les suivantes :

**(H1)** Le symbole  $p$  de  $P_h$  est réel et lisse.

**(H2)** Le symbole principale  $p_0$  de  $P_h$  est borné inférieurement : il existe  $c_0 > 0$  et  $\gamma_0 \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $z \in T^*\mathbb{R}$ ,  $c_0 < p_0(z) + \gamma_0$ . De plus on suppose que  $p(z) + \gamma_0$  est un poids tempéré : il existe  $C > 0$  et  $M \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $(z, z') \in (T^*\mathbb{R})^2$  on ait

$$p_0(z) + \gamma_0 \leq C (p_0(z') + \gamma_0) (1 + |z - z'|)^M.$$

**(H3)** Pour tout indice  $j \in \mathbb{N}$  et pour tout multiindex  $\alpha$  il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $z \in T^*\mathbb{R}$

$$\left| \frac{\partial^\alpha H_j}{\partial z^\alpha} \right| \leq c (p_0(z) + \gamma_0).$$

(H4) Il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $N \geq N_0$  et pour tout  $\gamma > 0$  il existe  $A > 0$  tel que pour tout  $z \in T^*\mathbb{R}$

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} \left( p(z) - \sum_{j=0}^N p_j(z) h^j \right) \right| \leq Ah^{N+1}.$$

Remarque 58. Sous ces 4 hypothèses l'opérateur  $P_h$  est essentiellement auto-adjoint [107].

Les Hypothèses géométriques sont les suivantes : pour un compact  $I = [E_-, E_+]$ , avec  $E_-$  et  $E_+$  deux réels.

(H5) L'ensemble  $p^{-1}(I)$  est un anneau topologique de  $T^*\mathbb{R}$  feuilleté par des trajectoires périodiques du flot hamiltonien.

(H6) La fonction  $p$  n'a pas de points critiques sur  $p^{-1}(I)$ .

Posons aussi  $F_{+/-} := A(E_{+/-})$  où  $A(x) := \int_{p(y) \leq x} dy$ .

**Théorème 59.** ([HellRober]) *Sous les hypothèses précédentes (H1) à (H6) ; il existe une fonction  $f_h$  définie sur  $J := [F_-, F_+]$  admettant un développement asymptotique en puissance de  $h$  avec des coefficients de classe  $C^\infty$  sur  $J$  :*

$$f_h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) h^j;$$

de sorte que les valeurs propres de  $P_h$  dans le compact  $I$  sont données par

$$\lambda_n(h) = f_h \left( h \left( n + \frac{1}{2} \right) \right) + O(h^\infty)$$

avec  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $h \left( n + \frac{1}{2} \right) \in J$ . En outre  $f_0(x) = 2\pi A^{-1}(x)$  et  $f_1 \equiv 0$ .

Remarque 60. Dans [22] (voir aussi [109]) on trouve une preuve de ce résultat utilisant les états cohérents.

Avec des hypothèses légèrement différentes Y. Colin de Verdière [45] donne le calcul de tous les coefficients dans le développement asymptotique de la fonction  $E \mapsto S(E)$  et donc la valeur des coefficients  $f_j$ .

9.4. ... **aux fibres singulières.** On ne va pas décrire ici toute la théorie des fibres singulières ; on rappelle juste que dans le cas elliptique : lorsqu'on a une application moment  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  avec un point fixe  $m$  elliptique, alors il existe  $\chi$  un symplectomorphisme local de  $\mathbb{R}^{2n}$  vers  $M$  envoyant 0 sur le point  $m$  tel que :

$$\mathbf{p} \circ \chi = \varphi \circ \left( (x_1^2 + \zeta_1^2)/2, \dots, (x_n^2 + \zeta_n^2)/2 \right).$$

En version semi-classique, si on est dans le cas de la dimension 2,  $\mathbf{P} = P_1$  avec  $\mathbf{p} = p_1$  ayant une singularité elliptique en  $m$ , alors il existe  $U$  un opérateur intégral de Fourier et  $\lambda(h) \in \mathbb{C}[[h]]$  tel que microlocalement près de l'origine on ait :

$$U(\mathbf{P} - \mathbf{p}(m)I_d)U^{-1} = N(Q - h\lambda(h)I_d)$$

où  $Q$  est l'oscillateur harmonique de dimension un et  $N$  un opérateur pseudo-différentiel elliptique en 0. De là on en déduit une condition de quantification sur la série formelle  $\lambda(h)$  et aussi que l'ensemble des micro-solutions de l'équation :

$$\mathbf{P}u_h = O(h^\infty)$$

est un  $C_h$  module libre de rang 1.

Pour le cas hyperbolique, on va juste parler du "huit" en dimension 2. Pour cela, considérons donc un hamiltonien  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tel que 0 soit valeur critique

de  $\mathbf{p} = p$  et telle que la fibre  $\mathbf{p}^{-1}(0)$  est compacte et ne contient qu'un unique point critique  $m \in M$  non-dégénéré de type hyperbolique.

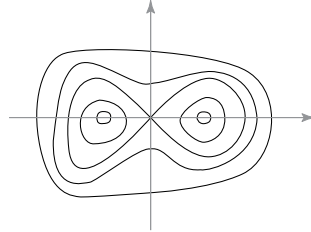


Fig. 3 : Un "huit" hyperbolique.

La fibre  $\Lambda_0 = \mathbf{p}^{-1}(0)$  est alors un "huit" : le feuilletage dans un voisinage de la fibre singulière  $\Lambda_0$  est difféomorphe à celui du double puits en dimension un (voir [91]). Dans le cas de la dimension 2,  $\mathbf{P} = P$  avec  $\mathbf{p} = p$  ayant une singularité hyperbolique, Y. Colin de Verdière et B. Parisse ont montré que l'ensemble des micro-solutions de l'équation :

$$\mathbf{P}u_h = O(h^\infty)$$

est un  $\mathbf{C}_h$  module libre de rang 2. (voir aussi [39], [40], [44] et [91]). Dans l'étude des singularités de l'application moment d'un système complètement intégrable, l'opérateur de Schrödinger avec double puits est le modèle type pour les singularités non-dégénérées de type hyperbolique. En effet, pour un hamiltonien  $p : M \rightarrow \mathbb{R}$  tel que 0 soit valeur critique de  $p$ , et tel que les fibres dans un voisinage de 0 soient compactes et connexes et ne contiennent qu'un unique point critique non-dégénéré de type hyperbolique : la fibre  $\Lambda_0 := p^{-1}(0)$  est alors un "huit" et le feuilletage dans un voisinage de la fibre singulière  $\Lambda_0$  est difféomorphe à celui du double puits. Dans [91] on montre que le spectre de l'opérateur  $\mathbf{P}$  dans le compact  $[-\sqrt{h}, \sqrt{h}]$  est constitué de deux familles de réels  $(\alpha_k(h))_k$  et  $(\beta_l(h))_l$  vérifiant :

$$\dots < \beta_{k+1}(h) < \alpha_k(h) < \beta_k(h) < \alpha_{k-1}(h) < \dots$$

et, ils existent  $C, C'$  deux constantes réelles strictement positives telles que

$$\frac{Ch}{|\ln(h)|} \leq |\alpha_{k+1}(h) - \alpha_k(h)| \leq \frac{C'h}{|\ln(h)|}, \quad \frac{Ch}{|\ln(h)|} \leq |\beta_{k+1}(h) - \beta_k(h)| \leq \frac{C'h}{|\ln(h)|}.$$

Pour le cas loxodromique (qui existe à partir de la dimension symplectique 4) on renvoie au travaux de S. Vu Ngoc [118], [119].

#### REFERENCES

- [1] M. ABRAMOWITZ & I.A. STEGUN, *Handbook of Mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*. New York : Dover, pp. 255-258 and 260-263, 1972.
- [2] C. ANNE, *Majoration de multiplicités pour l'opérateur de Schrödinger*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie de Grenoble 8 : 53-60, 1989-1990.
- [3] V. I. ARNOLD & A. AVEZ, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, N. 9 in Monographies Internationales de Mathématiques Modernes, Gauthiers-Villars, Paris, 1967.
- [4] V. I. ARNOLD, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, N. 60 in GTM. Springer, 1989.
- [5] V.I. ARNOLD, *Ordinary Differential Equations*, Springer Universitext, 2006.
- [6] W. ARVERSON, *A short course on spectral theory*, Springer, 2001 (Graduate Texts in Mathematics).
- [7] W. ARVERSON, *An invitation to  $C^*$ -Algebras*, Springer, 1976 (Graduate Texts in Mathematics).
- [8] M. AUDIN, *The topology of torus action on symplectic manifolds*, Progress in Math, Birkhäuser, 1991.
- [9] M. AUDIN, *Les systèmes hamiltoniens et leurs intégrabilité*, Cours spécialisés 8, SMF, 2001.
- [10] S. BATES & A. WEINSTEIN, *Lectures on the geometry of quantization*, Berkeley Mathematics Lecture Notes, 1997.
- [11] P. BERARD, *Variétés riemanniennes isospectrales non isométriques*, Astérisque 177-178 : 127-154, 1989.

- [12] P. BERARD, *Transplantation et isospectralité I*, Math. Ann. 292 : 547-559, 1992.
- [13] P. BERARD, *Transplantation et isospectralité II*, J. London Math. Soc. 48 : 565-576, 1993.
- [14] P. BERARD, *The isospectral problem for Riemannian manifolds*, Cours de DEA, Grenoble 1993. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/isos-dea93.ps>
- [15] P. BERARD, *On ne peut pas entendre la forme d'un tambour : Introduction*, Auxerre 2001. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/tambours.pdf>
- [16] P. BERARD, *On ne peut pas entendre la forme d'un tambour : Exposé 1*, Auxerre 2001. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/auxerre1.pdf>
- [17] P. BERARD, *On ne peut pas entendre la forme d'un tambour : Exposé 2*, Auxerre 2001. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/auxerre2.pdf>
- [18] P. BERARD & M. BERGER, *Le spectre d'une variété riemannienne en 1982*, Kaigai (Tokyo) 1983.
- [19] M. BERGER, P. GAUDUCHON & E. MAZET, *Le spectre d'une variété Riemannienne*, Lectures Notes in Mathematics 194, Springer-Verlag 1971.
- [20] M. BERRY, *Some quantum-to-classical asymptotics*. In Gionnoni & al [10], pages 251-303.
- [21] G. BESSON, *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes*, Ann. Inst. Fourier. 30 : 109-128, 1980.
- [22] J. M. BILY, *Propagation d'états cohérents et applications*, PhD Thesis, Université de Nantes, 2001.
- [23] R. BLUHM, V. A. KOSTELECKY & J. A. PORTER, *The evolution and revival structure of localized quantum wave packets*. American Journal of Physics 64, 944, 1996.
- [24] R. BLUHM & V. A. KOSTELECKY, *Long term evolution and revival structure of Rydberg wave packets for hydrogen and alkali-metal atoms*. Phys. Rev A51,4767-4786, 1995.
- [25] N. BOURBAKI, *Théorie spectrale*, Hermann, 1970.
- [26] L. BOUTET DE MONVEL & V. GUILLEMIN, *The spectral theory of Toeplitz operators*, N. 99 in Annals of Mathematics, Princeton University press, 1981.
- [27] R. BRUMMELHUIS, T. PAUL & A. URIBE, *Spectral estimates around a critical level*, Duke Math. J, 78(3) :477-530, 1995.
- [28] T. CARLEMAN, *Sur la théorie mathématique de l'équation de Schrödinger*, Ark. Mat. Astr. Fys. 24B 11 :1-7, 1934.
- [29] J. CARRY & P. RUSU, *Separatrix eigenfunction*, Phys. Review A 45(12) :8501-8512, 1992.
- [30] A. CATTANEO, B. KELLER, C. TOROSIAN & A. BRUGUIERES, *Déformation Quantification Théorie de Lie*, Panoramas et synthèses 20, SMF,2005.
- [31] S. Y. CHENG, *Eigenvalues comparison theorems and geometric applications*, Math. Z. 143 : 289-290, 1975.
- [32] S. Y. CHENG, *Eigenfunctions and nodal sets*, Comment. Math. Helv. 51 : 43-55, 1979.
- [33] Y. COLIN DE VERDIERE, *Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I*, Compositio Mathematica, 27 : 80-106, 1973.
- [34] Y. COLIN DE VERDIERE, *Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques II*, Compositio Mathematica, 27 : 159-184, 1973.
- [35] Y. COLIN DE VERDIERE & J. VEY, *Le lemme de Morse isochore*, Topology, 18 : 283-293, 1979.
- [36] Y. COLIN DE VERDIERE, *Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commute II*, Math. Z., vol 71, p. 51-73, 1980.
- [37] Y. COLIN DE VERDIERE, *Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du Laplacien*, Comment. Math. Helv, 61 : 254-270, 1986.
- [38] Y. COLIN DE VERDIERE, *Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris, 20 : 599-615, 1987.
- [39] Y. COLIN DE VERDIERE & B. PARISSÉ, *Equilibre instable en régime semi-classique I : Concentration microlocale*, Comm PDE, 19 : 1535-1564, 1994.
- [40] Y. COLIN DE VERDIERE & B. PARISSÉ, *Equilibre instable en régime semi-classique II : Conditions de Bohr-Sommerferld*, Ann IHP, 61 : 347-367, 1994.
- [41] Y. COLIN DE VERDIERE, *Le spectre du laplacien : survol partiel depuis le Berger-Gauduchon-Mazet et problèmes*, Actes de la table tournante en l'honneur de Marcel Berger, Séminaires et Congrès SMF, 1 : 233-252, 1996.
- [42] Y. COLIN DE VERDIERE, *Spectres de graphes*, Cours Spécialisés numéro 4, SMF, 1998.
- [43] Y. COLIN DE VERDIERE, M. LOMBARDI & J. POLLET, *The microlocal Landau-Zener formula*, Ann. IHP, 71 : 95-127, 1999.
- [44] Y. COLIN DE VERDIERE & B. PARISSÉ, *Singular Bohr-Sommerfeld rules*, Commun. Math. Phys, 205 : 459-500, 2000.
- [45] Y. COLIN DE VERDIERE, *Bohr-Sommerfeld rules to all orders*, Henri Poincaré Acta, 6, 925-936, 2005.
- [46] Y. COLIN DE VERDIERE, *Méthodes semi-classique et théorie spectrale*, Cours de DEA, 2006.
- [47] Y. COLIN DE VERDIERE, *Spectrum of the Laplace operator and periodic geodesics : thirty years after*, Ann. Inst. Fourier. 57 (7) : 2429-2463, 2008.

- [48] M. COMBESURE & D. ROBERT, *A phase study of the quantum Loschmidt Echo in the semi-classical limit*, [arXiv : quant-ph0510151], 2005.
- [49] A. CONNES, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1994.
- [50] R. COURANT & D. HILBERT, *Methods of mathematical physics*, Intersciences Publishers, New York, 1953.
- [51] M. DE WILDE & P. LECOMPTE, *Existence of star-product and a formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds*. Lett. Math.Phys. 7 ,487-496, 1983.
- [52] M. DIMASSI & J. SJÖSTRAND, *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, London Math Society Lectures Note Series 268, 1999.
- [53] J.J DUISTERMAAT, *Fourier Integral Operators*, Progress in mathematics, Birkhäuser, 1996.
- [54] J.J DUISTERMAAT & L. HÖRMANDER, *Fourier integral operators II*, Acta Math., Vol 128, 183-269, 1972.
- [55] L. ELIASSON, *Hamiltonians systems with Poisson commuting integrals*, PhD thesis, University of Stockholm, 1984.
- [56] L. ELIASSON, *Normals forms for hamiltonians systems with Poisson commuting integrals - elliptic case*, Comment. Math. Helv., 65, 4-35, 1990.
- [57] J.V EGOROV, *The canonical transformation of pseudodifferential operators*, Uspehi Mat. Nauk, vol 24, 149, 235-236, 1969.
- [58] L. EVANS & M. ZWORSKI, *Lectures on semiclassical analysis*. [http ://math-berkeley.edu/~zworski/semiclassical.pdf](http://math-berkeley.edu/~zworski/semiclassical.pdf).
- [59] G. FABER, *Beweis, dass unter allen homogen Menbranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kriesförmige den tiefsten Grundton gibt*. Sitzungberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München Jahrgang, 169-172, 1923.
- [60] B. FEDOSOV, *Deformation quantization and index theory*, 9, Akademie Verlag, 1996.
- [61] G. B. FOLLAND, *Harmonic analysis in phase plane*, 122, Princeton University Press, 1989.
- [62] A.T FOMENKO, *Symplectic Geometry*, Gordon and Breach Publishers, 1995.
- [63] A.T FOMENKO, *Integrability and Nonintegrability in Geometry and Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [64] K. FRIEDRICHS, *Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren*, Math. Ann. 109 : 465-487, 685-713, 1934.
- [65] S. FUJIE & T. RAMOND, *Breit-Wigner formula at barrier tops*, J. Math. Phys, 44(5) : 1971-1983, 2003.
- [66] I. GEL'FAND & G. SHILOV, *Generalized Functions*, Vol. 1, Academic Press, 1964.
- [67] C. GERARD & A. GRIGIS, *Precise estimates of tunneling and eigenvalues near a potential barrier*, Journal of Differential Equation 72 :149-177, 1988.
- [68] M.J GIANNONI, A. VOROS & J. ZINN-JUSTIN editors, *Chaos et physique théorique*, Les Houches, école d'été de physique théorique 1989, session LII, North-Holland.
- [69] C. GORDON & E.N. WILSON, *Isospectral deformations on compact manifolds*, J. Diff. Geom. 19 : 241-256, 1984.
- [70] C. GORDON, D. WEBB & S. WOLPERT, *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*, Inventiones mathematicae 110 : 1-22, 1992.
- [71] C. GORDON, D. WEBB & S. WOLPERT, *One cannot hear the shape of a drum*, Bulletin of the AMS 27 : 134-138, 1992.
- [72] C. GORDON, *Isospectral closed riemannian manifolds which are not locally isometric*, J. Diff. Geom. 37 : 639-649, 1993.
- [73] A. GRIGIS & J. SJÖSTRAND, *Microlocal analysis and differential operators, an introduction*, London Math Society Lectures Note Series 196, 1994.
- [74] M. GROMOV, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math, 82, 1985.
- [75] A. GUICHARDET, *Intégration analyse hilbertienne*, Ellipses, 1989.
- [76] S. J GUSTAFSON & I. M SIGAL, *Mathematical Concepts of Quantum Mechanics*, Springer, 2003.
- [77] B. HELFFER & D. ROBERT, *Puit de potentiel généralisé et asymptotique semi-classique*, Annales de l'IHP Physique Théorique 41(3) :291-331, 1984.
- [78] B. HELFFER & J. SJOSTRAND, *Multiple wells in the semi-classical limit I*, Comm. in Partial Differential Equation 9(4) :337-408, 1984.
- [79] B. HELFFER & J. SJOSTRAND, *Semiclassical analysis of Harper's equation*, Bulletin, Société Mathématique de France, Mémoire, 39, 1990.
- [80] B. HELFFER, *30 ans d'analyse semi-classique bibliographie commentée*, Notes d'exposé, [http ://www.math.u-psud.fr/~helffer/histoire2003.ps](http://www.math.u-psud.fr/~helffer/histoire2003.ps), 2003.
- [81] L. HÖRMANDER, *The weyl calculus of pseudodifferential operators*, Comm. Pure Appl., 32(3) :360-444, 1979.
- [82] L. HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential operators*, Vol I-IV, Springer, 1983-90.
- [83] M. KAC, *Can one hear the shape of a drum ?*, American Mathematical Monthly 73 (4) : 1-23, 1966.
- [84] T. KATO, *Schrödinger operators with singular potentials*, Israel J. Math. 13 : 135-148, 1972.

- [85] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Springer, 1980 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 142).
- [86] V. A. KONDRAT'EV & M.A. SHUBIN, *Discreteness of the spectrum for Schrödinger operators on manifolds of bounded geometry*, Proceedings of the conference "Functional Analysis, Partial Differential Equations and Applications" dedicated to the V. G. Maz'ya 60th birthday, Rostock, 1998.
- [87] V. A. KONDRAT'EV & M.A. SHUBIN, *Conditions for the discreteness of the spectrum for Schrödinger operators on manifolds*, *Funct. Anal. and Appl.* 33, 1999.
- [88] M. KONTSEVITCH, *Deformation quantization of Poisson manifolds, I*, Preprint of the IHES [arxiv : q-alg/9709040], 1997.
- [89] E. KRAHN, *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises*, *Math. Ann.* 94 : 97-100, 1925.
- [90] O. LABELLE, *Spectre du Laplacien et de l'opérateur de Schrödinger sur une variété : de la géométrie spectrale à l'analyse semi-classique*, *Gazette des Mathématiciens, Société Mathématique de France* :116, 2008.
- [91] O. LABELLE, *Sur le spectre semi-classique d'un système intégrable de dimension 1 autour d'une singularité hyperbolique*. Séminaire de théorie spectrale et géométrie de Grenoble, [arxiv : sp-/?/??], 2008.
- [92] F. LAUDENBACH, *Calcul différentiel et intégral*, Editions de l'école polytechnique, 2000.
- [93] P. LEVY-BRUHL, *Introduction à la théorie spectrale*, Dunod, 2003.
- [94] A. MARTINEZ, *An introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*, Springer, 2001.
- [95] C. MARZ, *Spectral Asymptotics for Hill's Equation near the potential maximum*, *Asymptotics Analysis* 5 :221-267, 1992.
- [96] D. McDUFF & D. SALOMON, *Introduction to symplectic topology*, Oxford Mathematical Monograph, 1995.
- [97] A. MESSIAH, *Mécanique quantique*, Dunod, 1962.
- [98] J. MILNOR, *Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds*, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 51 : 542, 1964.
- [99] E. MIRANDA, *On symplectic linearization of singular Lagrangian foliation*. PhD thesis, Universitat Autònoma de Barcelona, 2003.
- [100] J. MOSER, *The Analytic Invariants of an Area-Preserving Mapping Near a Hyperbolic Fixed Point*, *Comm. on pure and applied math.* Vol. 9, 673-692, 1956.
- [101] N. NADIRASHVILI, *Multiple eigenvalues of the Laplace operator*, *Math. USSR Sbornik*, 61 : 225-238, 1988.
- [102] I. M. OLEINIK, *On the essential self-adjointness of the Schrödinger operators on a complete Riemannian manifold*, *Math. Notes.* 54 :934-939, 1993.
- [103] I. M. OLEINIK, *On the connection of the classical and quantum mechanical completeness of a potential at infinity on complete Riemannian manifolds*, *Math. Notes.* 55 : 380-386, 1994.
- [104] I. M. OLEINIK, *On the essential self-adjointness of the Schrödinger-type operators on a complete Riemannian manifold*, PhD thesis, Northeastern University, 1997.
- [105] T. RAMOND, *Semiclassical study of quantum scattering on the line*, *Comm. Math. Phys.*, 177, p.221-254, 1996.
- [106] M. REED & B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics*, Academic Press, 1975.
- [107] D. ROBERT, *Autour de l'approximation semi-classique*, volume 68 of *Progress in Mathematics*, Birkhäuser, 1987.
- [108] D. ROBERT, *Revolutions of wave packets and Bohr-Sommerfeld quantization rules*, *Adventures in mathematical physics*, 219-235, *Contemp. Math.*, 447, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [109] D. ROBERT, *Propagation of coherent states in quantum mechanics and application*, *proc. CIMPA*, 200 ?.
- [110] R. W. ROBINNET, *Quantum wave packet revivals*, *Physics Reports.* 392, 1-119, 2005.
- [111] J. SJOSTRAND, *Microlocal analysis for the periodic magnetic Schrödinger equation and related questions*, *Microlocal analysis and applications (Montecatini Terme, 1989)*, *Lect. Notes in Math.*, 1495, Springer, Berlin, 1991.
- [112] J. SJOSTRAND, *Density of states oscillations for magnetic Schrödinger operators*, *Differential equations and mathematical physics (Birmingham, AL, 1990)*, 295-345, *Math. Sci. Engrg.*, 186, Academic Press, Boston, MA, 1992.
- [113] B. SEVENNEC, *Majoration topologique de la multiplicité du spectre des surfaces*, *Séminaire de Théorie spectrale et géométrie de Grenoble*, 12 : 29-35, 1993-1994.
- [114] T. SUNADA, *Riemannian covering and isospectral manifolds*, *Ann. of Math.* 121 : 169-186, 1985.
- [115] M. E. TAYLOR, *Noncommutative harmonic analysis*, *Mathematical Surveys and Monographs*, AMS, 1986.
- [116] S. VU NGOC, *Sur le spectre des systèmes complètement intégrables semi-classiques avec singularités*, PhD Thesis, Institut Fourier 1998.
- [117] S. VU NGOC, *Formes normales semi-classiques des systèmes complètement intégrables au voisinage d'un point critique de l'application moment*, *Asymptotic analysis*, vol. 24 (3-4), p.319-342, 2000.

- [118] S. VU NGOC, *Bohr-Sommerfeld conditions for integrable systems with critical manifolds of focus-focus type*, Comm. Pure and Applied Math., vol 53, number 2, pp.143–217, 2000.
- [119] S. VU NGOC, *Systèmes intégrables semi-classiques : du local au global*, Panoramas et synthèses 22, SMF, 2006.
- [120] J. WILLIAMSON, *On the algebraic problem concerning the normal form of linear dynamical systems*, Amer. J. Math., 58(1), 141-163, 1936.
- [121] S. ZELDITCH, *Spectral determination of analytic bi-axisymmetric plain domains*, Geom. And Func. Ana. 10 : 628-677, 2000.

**Olivier Lablée**

Université Grenoble 1- CNRS

Institut Fourier

UFR de Mathématiques

UMR 5582

BP 74 38402 Saint Martin d'Hères

mail: [lablee@ujf-grenoble.fr](mailto:lablee@ujf-grenoble.fr)

page web : <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~lablee/>