



N° d'ordre : D. U. 1596
E D S P I C : 328

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL – CLERMONT II
ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR DE CLERMONT-FERRAND

Thèse

Présentée par

JULIEN BAROTH

Ingénieur C/U/S/T/ Génie Civil

Formation Doctorale

Matériaux – Structures – Fiabilité

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

Spécialité : Génie Civil

**Analyse par éléments finis stochastiques de la propagation
d'incertitudes dans un modèle mécanique non linéaire**

Soutenue publiquement le 21 octobre 2005 devant le jury :

M. Sergio Bellizzi	Rapporteur
M. Alain Millard	Rapporteur
M. Michel Fogli	Directeur de thèse
M. Laurent Bodé	Examineur
M. Philippe Bressolette	Examineur
M. Maurice Lemaire	Examineur, président du jury
M. Yvon Riou	Invité

Avant-propos

Cette thèse a été financée par le ministère délégué à l'enseignement supérieur et à la recherche (contrat n° 1925-2005 d'allocation de recherche de l'Université Blaise Pascal). Ce travail a été validé par le jury rassemblé lors de la soutenance publique du 21 octobre¹.

J'exprime ici ma reconnaissance aux membres de ce jury pour leur contribution scientifique et leurs marques d'estime.

Je remercie les rapporteurs, Sergio Bellizzi, chargé de recherche au Laboratoire (CNRS) de Mécanique et l'Acoustique de Marseille et Alain Millard, ingénieur de recherche au CEA de Saclay, chargé de cours à l'École Polytechnique.

Leurs remarques constructives m'ont permis de clarifier et compléter ce travail.

Cette thèse est aussi le fruit du travail d'une équipe. J'ai en effet été encadré par Michel Fogli, professeur au Laboratoire de Mécanique et Ingénieries, directeur de cette thèse, ainsi que Laurent Bodé et Philippe Bressolette, maîtres de conférence au Laboratoire de Génie Civil.

Ces hommes ont été pour moi des modèles de rigueur, de disponibilité et de persévérance.

Maurice Lemaire, professeur au Laboratoire de Mécanique et Ingénieries, a bien voulu présider le jury. Ce dernier, ainsi que Alain Millard, sont parmi ceux qui m'ont donné l'envie de me lancer dans cette thèse.

Je remercie enfin Yvon Riou, maître de conférences à l'École Centrale de Nantes, qui a su répondre à une invitation bien tardive.

Que toutes celles et ceux, plus ou moins proches, qui m'ont accompagné, sachent reconnaître ici une marque sincère de gratitude.

Au terme de mes études universitaires, je me souviens enfin de quelques absents qui ont aussi contribué à ma formation :

Michel Saint-André, Alain Vergne, Yves Nénot, custards aînés,

Yvonne et André Julien, Albert Baroth, mes grands-parents.

Divers commentaires de mes encadrants semblent faire écho à celui de mon professeur de mathématiques de classe de terminale², M. Thierry, qui avec inspiration écrivait sur mon bulletin trimestriel ces deux seuls mots :

« *Comprenez mieux* »

¹Amphithéâtre de recherche de l'observatoire de physique du globe de Clermont-Ferrand (OPGC).

²Lycée Loritz, Nancy.

Résumé

Analyse par éléments finis stochastiques de la propagation d'incertitudes dans un modèle mécanique non linéaire

Alternatives aux méthodes de Monte-Carlo pour le traitement des problèmes de propagation d'incertitudes dans les modèles mécaniques structuraux, les méthodes d'éléments finis stochastiques (MEFS) connaissent un succès grandissant depuis une dizaine d'années, concrétisé par de nombreux travaux de recherche internationaux. Le présent travail est une contribution à ces recherches et son but est double.

D'une part, considérant la MEFS spectrale [Gha91], qui est actuellement très utilisée, nous en faisons une présentation détaillée afin d'en cerner les limites. Cette méthode, essentiellement valable pour les problèmes linéaires, présente l'intérêt de permettre l'emploi, non seulement de variables aléatoires mais également de processus ou champs stochastiques pour la modélisation probabiliste des paramètres incertains du modèle. Deux applications, l'une sur une barre en traction, l'autre sur une structure formée de poutres modélisant un assemblage bois, permettent de juger de ses possibilités.

D'autre part, et c'est le coeur du travail, nous proposons une MEFS originale pour la résolution de problèmes mécaniquement non linéaires. Cette approche, de type surface de réponse, comprend deux étapes clés : une projection de la réponse mécanique non linéaire sur une base de polynômes d'Hermite et une approximation de cette réponse par B-splines cubiques interpolantes pour le calcul des coefficients de la projection. Sa pertinence vis-à-vis de l'estimation des moments de la réponse est jugée à travers quatre exemples de complexité variable : un treillis élastoplastique, une sphère élastoplastique sous pression et un cylindre en contact avec un plan, étudié en phases élastique puis élastoplastique.

Mots-clés : propagation d'incertitudes, problèmes non linéaires, surface de réponse, B-spline cubique, variable aléatoire, processus et champs stochastiques, méthode des éléments finis stochastiques

Abstract

Stochastic finite element analysis of uncertainties propagation in nonlinear mechanical problems

Stochastic finite element methods (SFEM) have been developed for thirty years to study uncertainty propagation in structural problems. The crucial issue is to replace Monte-Carlo simulation, too expensive for many problems. This thesis is a contribution to the development of SFEM to mechanically nonlinear problems.

In the one hand, the widely used spectral SFEM [Gha91] is presented in detail to delimit its validity domain. This method, practicable for linear problems, has the advantage to allow the modelization of the uncertain entry parameters as random variables and stochastic process or fields. Two applications of the approach are proposed to test its possibilities. The first deals with a truss problem ; the second application presents a beams structure, modelizing a glulam element connection.

In the other hand, the main contribution of this work is the proposal of a SFEM for nonlinear mechanical systems whose uncertain parameters can be modelled as random variables. This method is based on a Gaussian standardization of the problem and on a Hilbertian approximation of the nonlinear mechanical function using Hermite polynomials.

The coefficients of the approximation are obtained using a cubic B-spline interpolation of the response function. It provides simple expressions of the response moments. Some of its possibilities are illustrated through four numerical examples concerning one linear problem and three nonlinear problems (elasto-plastic behaviours and contact problem) in which the random parameters are modelled as correlated lognormal random variables. The numerical results obtained attest the relevance of this approach.

Keywords : uncertainty propagation, nonlinear problems, response surface, cubic B-spline interpolation, random variable, stochastic process or fields, stochastic finite elements method

Table des matières

Avant-propos	1
Résumé	2
Abstract	3
Introduction générale	8
1 Le problème et ses difficultés	10
1.1 Position du problème	10
1.1.1 Contexte et objectif de l'étude	10
1.1.2 Formulation probabiliste du problème	12
1.2 Modélisation probabiliste des paramètres incertains	15
1.2.1 Variables aléatoires lognormales vectorielles	15
1.2.2 Processus aléatoires lognormaux scalaires	16
1.2.3 Représentations possibles des processus ou champs lognormaux	16
1.3 Conclusion du chapitre	19
2 Principales méthodes d'éléments finis stochastiques	20
2.1 Méthodes basées sur le principe de perturbation	21
2.1.1 La méthode fondatrice	21
2.1.2 La méthode des perturbations	24
2.2 Autres méthodes	26
2.2.1 La méthode de quadrature	26
2.2.2 Les méthodes des surfaces de réponse	27
2.2.3 Méthode fondée sur une discrétisation aléatoire par Intégrales Pondérées	28
2.2.4 Approches utilisant un développement de Neumann	28
2.2.5 La Méthode des Eléments Finis Stochastiques Spectraux	29
2.3 Quelques éléments de comparaison des méthodes	30
2.3.1 Comparaisons disponibles dans la littérature	30
2.3.2 Quelques critères de classification des méthodes	31
2.4 Conclusion du chapitre	32
3 Étude de la MEFS Spectrale	33
3.1 La méthode des éléments finis stochastiques spectrale	33
3.1.1 Choix de modèles probabilistes pour le module d'élasticité	34
3.1.2 Approximation de \mathbf{Q} et \mathbf{E}	34
3.1.3 Formulation du problème	38
3.1.4 Caractéristiques du second ordre du champ de déplacement aléatoire	40
3.2 Application à une barre en traction	42
3.2.1 Position du problème	42

3.2.2	Choix des modèles d'autocorrélation	43
3.2.3	Résolution du problème spectral	44
3.2.4	Construction des approximations	46
3.2.5	Formulation et résolution du problème	47
3.2.6	Expérimentation numérique	47
3.3	Application à une structure formée de poutres	59
3.3.1	Position du problème	59
3.3.2	Formulation de la MEFSS pour un vecteur de v.a. lognormales	59
3.3.3	Calcul des moyennes et variances des <i>ddl</i> aléatoires	63
3.3.4	Application à l'assemblage d'une poutre en bois par tiges collées	67
3.4	Conclusion du chapitre	71
4	Développement d'une MEFS pour des problèmes non linéaires	72
4.1	Formulation d'une MEFS pour des problèmes non linéaires	72
4.1.1	Contexte de l'étude et principe de la méthode	72
4.1.2	Développement hilbertien de la fonction étudiée	74
4.1.3	Interpolation par B-splines cubiques pour l'approximation des coefficients du développement	75
4.1.4	Approximation des moments de la réponse	77
4.1.5	Conclusion	78
4.2	Approches alternatives et discussions	79
4.2.1	Justification d'une surface de réponse stochastique	79
4.2.2	Usage de splines interpolantes pour l'approximation des coefficients g_j	81
4.2.3	Bilan, discussion	85
4.3	Applications et comparaisons	86
4.3.1	Mise en œuvre de l'approche proposée et alternatives testées	86
4.3.2	Treillis élasto-plastique	91
4.3.3	Sphère élasto-plastique sous pression	99
4.3.4	Cylindre en contact sur un plan	104
4.4	Conclusion du chapitre et perspectives	111
	Conclusion générale	112
	Annexes	124
	A Notations	125
	B Normalisation gaussienne d'une v.a. lognormale vectorielle et d'un processus lognormal scalaire	127
	C Polynômes d'Hermite	129
	D Interpolation par B-splines cubiques	134

Table des figures

1.1	<i>Lien entre les modèles probabilistes en présence</i>	13
3.1	<i>Barre en traction</i>	42
3.2	<i>Fonctions d'autocorrélation du processus E et du processus gaussien standard associé</i>	45
3.3	<i>Comportement en fonction de M de la fonction d'autocorrélation du processus</i>	51
3.4	<i>Évolution en fonction de x, pour plusieurs valeurs de M et pour le modèle A (exponentiel), de l'erreur de variance relative à l'approximation \tilde{G} de G ; $l_c = 0,1 m$, $a_E = 0,1$</i>	52
3.5	<i>Évolution en fonction de x, pour plusieurs valeurs de M et pour les modèles A (exponentiel) et B (triangulaire), de l'erreur de variance relative à l'approximation \tilde{G} de G ; $l_c = 1 m$, $a_E = 0,1$</i>	52
3.6	<i>Évolution en fonction de l_c, pour les modèles A (exponentiel) et B (triangulaire) et pour plusieurs valeurs de a_E, de l'erreur de variance relative à l'approximation \tilde{G} de G, au point $x = L$</i>	52
3.7	<i>Évolution en fonction de x, pour le modèle A (exponentiel) et pour plusieurs valeurs de $M_E = op_E = \alpha$, de l'erreur de variance relative à l'approximation \tilde{E} de E ; $l_c = 1 m$, $a_E = 0,1$</i>	53
3.8	<i>Évolution en fonction de op_E, pour le modèle B (triangulaire) et pour plusieurs valeurs de a_E et l_c, de l'erreur de variance relative à l'approximation \tilde{E} de E, au point $x = L$; $M_E = 5$</i>	53
3.9	<i>Évolution en fonction de x, pour le modèle A (exponentiel) et pour plusieurs valeurs de $M_U = op_U = \alpha$, de l'erreur de moyenne relative à l'approximation \tilde{U} de U ; $l_c = 0,1 m$, $op_E = 2$, $a_E = 0,1$</i>	54
3.10	<i>Évolution en fonction de x, pour le modèle A (exponentiel) et pour plusieurs valeurs de $M_U = op_U = \alpha$, de l'écart type de l'approximation \tilde{U} de U ; $l_c = 0,1 m$, $op_E = 2$, $M_E = 2$</i>	54
3.11	<i>Évolution en fonction de op_E, pour le modèle A et pour plusieurs valeurs de a_E, de l'erreur de variance relative à l'approximation \tilde{E} de la v.a. E ; $M_E = 1$</i>	55
3.12	<i>Évolution en fonction de op_E, pour le modèle A (exponentiel) de l'erreur de moyenne relative à l'approximation \tilde{E} de E lorsque E est successivement une v.a. ($M_E = 1$) puis un processus ($M_E = 5$, $x=L$), avec prise en compte dans ce cas de plusieurs valeurs de l_c ; $a_E = 0,1$</i>	56
3.13	<i>Évolution en fonction de op_U, pour le modèle A (exponentiel, pour $x = L$), et pour plusieurs valeurs de a_E, de l'erreur de moyenne relative à l'approximation \tilde{U} de U lorsque E est une v.a. ; $M_U = M_E = 1$, $op_E = 2$</i>	56
3.14	<i>Évolution en fonction de op_U, pour le modèle A (exponentiel), pour $x = L$ et pour plusieurs valeurs de a_E, de l'erreur d'écart type relative à l'approximation \tilde{U} de U lorsque E est une v.a. ; $M_E = M_U = 1$, $op_E = 2$</i>	56
3.15	<i>Évolution en fonction de x, pour le modèle A (exponentiel), de l'erreur de moyenne relative à l'approximation \tilde{U} de U lorsque E est successivement une v.a. ($M_U = M_E = 1$) puis un processus ($M_U = M_E = 5$), avec prise en compte dans ce cas de plusieurs valeurs de l_c ; $a_E = 0,1$, $op_E = op_U = 2$</i>	57
3.16	<i>Évolution en fonction de x, pour le modèle A (exponentiel), de l'écart type de l'approximation \tilde{U} de U lorsque E est successivement une v.a. ($M_E = M_U = 1$) puis un processus ($M_E = M_U = 5$), avec prise en compte dans ce cas de plusieurs valeurs de l_c ; $a_E = 0,1$, $op_E = op_U = 2$</i>	57
3.17	<i>Poutre i : repère local et repère global</i>	59
3.18	<i>Discrétisation par EF de la poutre i</i>	59
3.19	<i>Étude d'un assemblage de poutres en bois par tiges collées</i>	67
3.20	<i>Modélisation EF de l'assemblage</i>	68

3.21	<i>Convergence numérique des premiers moments en fonction de l'ordre du nombre de termes du développement d'un ddl (cible issue de n_{sim} simulations en trait continu)</i>	69
3.22	<i>Influence du coefficient de variation sur la moyenne de l'effort normal</i>	70
4.1	<i>Interpolation de la fonction g_2</i>	83
4.2	<i>Mise en valeur de l'amplification de défauts d'interpolation par des polynômes d'Hermite.</i>	84
4.3	<i>Évolution des erreurs sur la moyenne et l'écart type ($a_{Y_1} = a_{Y_2} = 0,1$, $\rho_{Y_1Y_2} = 0,8$)</i> . . .	88
4.4	<i>Évolution du coefficient de variation de Z</i>	89
4.5	<i>Treillis élémentaire</i>	91
4.6	<i>Évolution des premiers moments de Z obtenus par simulation en fonction du coefficient de variation de E ($a_{Y_1} = a_{Y_2} = a_E$; $op = 5$; $\rho_{Y_1Y_2} = 1$)</i>	92
4.7	<i>Évolution de l'écart type et d'un coefficient de variation de Z estimés par l'approche proposée ($a_{Y_1} = a_{Y_2} = 0,3$; $\rho_{Y_1Y_2} = 0$)</i>	93
4.8	<i>Évolution des premiers moments de Z en fonction du nombre d'appels à la fonction mécanique ($op = 5$; $a_{Y_1} = a_{Y_2} = 0,3$; $\rho_{Y_1Y_2} = 0$), pour différentes stratégies de calcul de dérivées</i> . .	95
4.9	<i>Évolution des moyennes et écarts-types en fonction du nombre d'appels à la fonction mécanique ($op = 5$; $a_{Y_1} = a_{Y_2} = 0,3$; $\rho_{Y_1Y_2} = 0$),</i>	96
4.10	<i>Évolution des erreurs respectives ε_{a_z}, $\varepsilon_{(\beta_1)_Z}$, $\varepsilon_{(\beta_2)_Z}$, en fonction du coefficient de variation $a_{Y_1} = a_{Y_2} = a_E$, pour $\rho_{Y_1Y_2} = 0$)</i>	98
4.11	<i>Sphère sous pression interne</i>	99
4.12	<i>Évolution des premiers moments simulés de du nombre d'appels à la fonction mécanique ($op = 5$; $\rho_{Y_1Y_2} = 1$)</i>	100
4.13	<i>Évolution du coefficient de variation de Z en fonction de a_{Y_1} ($a_{Y_2} = 0,1$; $\rho_{Y_1Y_2} = 0,9$; $op = 3$)</i>	100
4.14	<i>Évolution des premiers moments en fonction du nombre d'appels à la fonction mécanique ($a_{Y_1} = a_{Y_2} = 0,1$; $\rho_{Y_1Y_2} = 0,9$; $op = 3$)</i>	101
4.15	<i>Évolution des erreurs respectives $\text{Log}(\varepsilon_{a_z})$, $\text{Log}(\varepsilon_{(\beta_1)_Z})$, $\text{Log}(\varepsilon_{(\beta_2)_Z})$ sur les coefficients de variation \hat{a}_Z, d'asymétrie $(\hat{\beta}_1)_Z$ et d'aplatissement $(\hat{\beta}_2)_Z$ de la réponse Z, en fonction du nombre N de calculs mécaniques, pour $op = 3$, $a_{Y_2} = 0,1$ et $\rho_{Y_1Y_2} = 0,8$</i>	103
4.16	<i>Problème de contact de Hertz – (a) géométrie, (b) maillage EF</i>	104
4.17	<i>Cylindre élastique – Convergence numérique des densités de probabilité – Déplacement z_1 – Incrément de charge 5</i>	106
4.18	<i>Cylindre élastique – Convergence numérique des densités de probabilité – Déplacement z_1 – Incrément de charge 5</i>	106
4.19	<i>Points plastiques à différents incréments de charge</i>	107
4.20	<i>Cylindre élasto-plastique – Convergence numérique des densités de probabilité – Déplacement z_1 – Incrément de charge 5</i>	108

Introduction générale

Les moyens de calcul modernes autorisent l'utilisation de modèles numériques, et notamment de modèles éléments finis (EF), de plus en plus sophistiqués pour l'étude des problèmes mécaniques déterministes. Le recours, en particulier, à des modèles non linéaires, que la non-linéarité soit matérielle (élasto-plasticité . . .) ou géométrique (grands déplacements, contact . . .), est de plus en plus courant, y compris pour des problèmes industriels. Dans le domaine du calcul des structures, on rencontre très souvent des lois de comportement intégrant, par exemple, des phénomènes de fluage, des variations de température, des grandes déformations, etc. Toutefois, la mise en œuvre de ces modèles EF présente des inconvénients notables. En effet, la complexification des modèles s'accompagne généralement d'une augmentation du nombre de paramètres. Par ailleurs, tous ces paramètres sont naturellement entachés d'incertitude qu'il convient de prendre en compte dans les modèles pour en évaluer l'impact sur les réponses. D'où la nécessité de formuler le problème en termes probabilistes et d'utiliser des outils d'évaluation appropriés (Grigoriu, [Gri00]).

Une telle approche a souvent pour objectif de caractériser la sensibilité de la réponse du modèle à la variabilité aléatoire des paramètres d'entrée. Elle peut aussi être exploitée pour étudier la fiabilité de la structure (Lemaire, [Lem05]). Dans tous les cas, il est nécessaire d'estimer les quelques premiers moments statistiques de la réponse mécanique. L'estimation de ces moments peut exiger un nombre important d'appels au modèle EF. Or, le temps de calcul d'un modèle EF complexe est parfois très important, de quelques heures à quelques jours. Il est donc crucial de contrôler le nombre d'appels aux calculs EF pour mener à bien l'estimation des moments.

Les méthodes de simulation de type Monte-Carlo (Ditlevsen et Madsen [Dit96], Shreider, [Shr66]) ont été mises en œuvre de longue date pour estimer des moments. Même si leur robustesse, leur relative simplicité d'utilisation et les perfectionnements dont elles ont fait l'objet (Au et Beck [Au 99], Bernard et Fogli [Ber87], Bucher [Buc88a]) leur conservent un intérêt certain, leur handicap réside dans leur coût de calcul qui peut vite devenir prohibitif lorsque la taille et la complexité des modèles déterministes augmentent. Partant du constat que la méthode des éléments finis est une des méthodes actuelles les plus performantes pour le calcul des structures complexes et afin de trouver une alternative aux méthodes de Monte Carlo, un ensemble de techniques, regroupées sous le nom de *Méthodes d'Éléments Finis Stochastiques*³ (MEFS), a été développé depuis une trentaine d'années. Il existe ainsi une abondante bibliographie sur le sujet (plusieurs monographies, thèses et quelques centaines d'articles). Si ces MEFS offrent une alternative intéressante aux simulations de Monte-Carlo pour des problèmes mécaniquement linéaires, elles restent néanmoins encore souvent difficilement généralisables à l'étude de problèmes non linéaires.

³Les premières études dans les années 80 ont employé différents vocables : *Probabilistic finite elements* [Liu88, Gua01a] ou *Random Finite Element Method* [Flo97].

Une MEFS a sa place parmi d'autres approches dans le cadre général de l'aide à la décision (Roy [Roy85]), et plus précisément de la sûreté de fonctionnement, comme par exemple les arbres de défaillances (cf. Villemeur [Vil97], thèse en cours de Hähnel et [Häh04], ou Pendola [Pen00]). Des travaux basés sur les réseaux de neurones (Hurtado, [Hur02]) sont par exemple utilisés pour l'aide à la décision, mais sortent du cadre classique des MEFS, dont nous donnons une définition dans le premier chapitre.

Nous choisissons de centrer la thèse sur les problèmes de mécanique statique, même s'il existe aussi des MEFS conçues pour les problèmes de dynamique. Concernant ce dernier aspect, les travaux sont nombreux (cf. par exemple [Bel99a, Bel99b, Ber98, Gru96, Lei00b, Lei00a, Li 97, Ren98, Soi01]).

Nous nous focalisons de plus sur l'analyse de sensibilité par l'estimation des premiers moments statistiques de la réponse du modèle mécanique. Nous ne nous attarderons donc pas dans notre démarche sur toutes les questions touchant de près à l'analyse fiabiliste.

Le premier chapitre pose le problème qui peut être résolu par les MEFS et présente la nature des difficultés rencontrées dans le développement de ces méthodes. Il s'agit en outre d'introduire un cadre probabiliste adapté. Nous proposons nos choix de modèles probabilistes pour les paramètres incertains du modèle EF et, dans le cas d'une modélisation par champs aléatoires, présentons quelques techniques de discrétisation possibles pour ces derniers.

Le deuxième chapitre est consacré tout d'abord à une présentation des premières MEFS, basées sur le principe de perturbation. Puis il passe en revue les principales autres méthodes, à savoir les méthodes de quadrature, d'intégrales pondérées, de surfaces de réponse, ainsi que la MEFS Spectrale (MEFSS). Il propose également quelques critères de classification pour les MEFS recensées.

Les troisième et quatrième chapitres constituent le coeur du travail.

Le troisième est consacré à la MEFS Spectrale (MEFSS) proposée par Ghanem et Spanos [Gha91], intéressante par la possibilité qu'elle offre de tenir compte de modèles probabilistes de type champs aléatoires dans les problèmes mécaniquement linéaires. La propagation d'incertitudes y est analysée à travers l'exemple simple d'une barre en traction. Puis, une version de cette approche est appliquée à l'assemblage d'une poutre en bois par tiges collées.

La quatrième chapitre concerne la résolution des problèmes mécaniquement non linéaires. Une approche originale est proposée, qui peut être classée dans la famille des méthodes de surfaces de réponse. Cette approche comprend deux étapes clés : une projection de la réponse mécanique non linéaire sur une base de polynômes d'Hermite et une approximation de cette réponse par B-splines cubiques interpolantes pour le calcul des coefficients de la projection. Après une présentation détaillée de la méthode et une discussion sur quelques variantes possibles que l'on peut en tirer, elle est comparée à la méthode classique de quadrature sur quelques exemples non linéaires : un treillis élasto-plastique, une sphère élasto-plastique sous pression et un cylindre en contact avec un plan, d'abord étudié en phase élastique, puis en phase élasto-plastique.

Enfin, une conclusion générale permet de dresser un bilan de ce travail et de tirer quelques perspectives de poursuites.

Chapitre 1

Le problème et ses difficultés

Ce premier chapitre pose le problème résolu par les méthodes d'éléments finis stochastiques (MEFS) et présente la nature des difficultés rencontrées dans le développement de ces méthodes. Dans un premier paragraphe, nous précisons le contexte et les objectifs de la thèse, puis établissons la formulation probabiliste du problème. Dans un second paragraphe, nous introduisons nos choix en matière de modélisation probabiliste pour les paramètres incertains du modèle éléments finis étudié : des variables aléatoires (v.a.) vectorielles ou des processus ou champs aléatoires scalaires. La loi de probabilité lognormale est retenue dans tous les cas. Enfin, nous passons en revue les principales techniques de représentation discrétisée des processus ou champs.

1.1 Position du problème

1.1.1 Contexte et objectif de l'étude

Sauf mention contraire explicite, toutes les grandeurs aléatoires (variables, champs) considérées dans ce document sont supposées définies sur le même espace de probabilité (Θ, \mathcal{F}, P) , où Θ est un ensemble abstrait, \mathcal{F} une tribu sur Θ et P une probabilité sur \mathcal{F} .

Le contexte de notre travail est le suivant. On considère une structure dont le comportement mécanique statique est décrit par un modèle éléments finis (EF) à m degrés de liberté (*ddl*), de la forme :

$$G(\mathbf{q}) = 0 \quad (1.1)$$

où $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur inconnu des déplacements nodaux et G une fonction de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^m (la fonction mécanique) qui peut être soit non linéaire, soit affine et que l'on écrit en pratique sous la forme suivante :

$$G(\mathbf{q}) = \mathbf{k}\mathbf{q} - \mathbf{f} \quad (1.2)$$

avec $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ la matrice de rigidité globale régularisée (par prise en compte des conditions aux limites) du modèle et $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des efforts nodaux. Dans le premier cas (G non linéaire), on parle de *modèle mécaniquement non linéaire*, dans le second cas (G affine) de *modèle mécaniquement linéaire*.

Ce modèle comporte M paramètres scalaires incertains y_1, \dots, y_M regroupés dans un vecteur $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_M) \in \mathbb{R}^M$ et on note g la correspondance entre \mathbf{y} et \mathbf{q} :

$$\mathbf{q} = g(\mathbf{y}) \quad (1.3)$$

Par exemple, dans le cas d'un modèle mécaniquement linéaire, et en supposant que seuls des paramètres de \mathbf{k} sont affectés d'incertitude, ce que l'on note $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{y})$, $g(\mathbf{y})$ s'écrit formellement, d'après (1.1) et (1.2) :

$$g(\mathbf{y}) = \mathbf{k}^{-1}(\mathbf{y})\mathbf{f} \quad (1.4)$$

Toujours dans le cas du modèle mécaniquement linéaire, on peut aussi avoir :

$$g(\mathbf{y}) = (\mathbf{k}^{-1}\mathbf{f})(\mathbf{y}) \quad (1.5)$$

notation qui signifie que \mathbf{k} et \mathbf{f} contiennent tous deux des paramètres incertains (dans cette situation, on adopte aussi quelquefois la notation abusive : $g(\mathbf{y}) = \mathbf{k}^{-1}(\mathbf{y})\mathbf{f}(\mathbf{y})$).

Soit $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{R}^N$, telle que :

$$\mathbf{z} = \text{Obs}(\mathbf{q}) \quad (1.6)$$

une N -observation vectorielle de \mathbf{q} (un déplacement, une contrainte, une déformation, ...), où Obs est une fonction connue, linéaire ou non, de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^N . Par exemple, si \mathbf{z} est un sous-vecteur de \mathbf{q} (donc un déplacement), alors Obs est un opérateur de projection, donc une fonction linéaire.

Cette observation est prise pour paramètre de contrôle de la fiabilité du comportement structural. Le paramètre \mathbf{y} étant affecté d'incertitude, il en est de même de \mathbf{z} lié à \mathbf{y} par, d'après (1.3) et (1.6) :

$$\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad (1.7)$$

avec \mathbf{f} la fonction de \mathbb{R}^M dans \mathbb{R}^N telle que :

$$\mathbf{f} = \text{Obs} \circ g \quad (1.8)$$

Connaissant \mathbf{f} et se donnant une description probabiliste appropriée de l'incertitude sur \mathbf{y} , on cherche alors, via (1.7), à évaluer en termes probabilistes l'incertitude sur \mathbf{z} .

Il s'agit typiquement d'un problème de propagation d'incertitude à travers un problème mécanique. Pour le résoudre, on commence par choisir (généralement sur la base d'une analyse statistique) un modèle probabiliste convenable pour \mathbf{y} . Soit \mathbf{Y} un tel modèle, de type variable ou champ aléatoire. Supposons \mathbf{f} mesurable de $(\mathbb{R}^M, \mathcal{B}_M)$ dans $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}_N)$, avec \mathcal{B}_M et \mathcal{B}_N les tribus de Borel respectives de \mathbb{R}^M et \mathbb{R}^N . Le modèle probabiliste correspondant \mathbf{Z} de \mathbf{z} s'en déduit par :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{f}(\mathbf{Y}) \quad (1.9)$$

On cherche alors, le couple (\mathbf{f}, \mathbf{Y}) étant connu, à caractériser le plus complètement possible la grandeur aléatoire \mathbf{Z} , avec pour objectif minimal d'accéder à ses deux premiers moments.

On voit tout de suite que la difficulté du problème est liée à deux causes :

(i) la difficulté plus ou moins grande à calculer $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ numériquement, pour tout \mathbf{y} fixé dans \mathbb{R}^M , où l'on notera que, sauf cas très exceptionnel, \mathbf{f} n'est jamais linéaire, même lorsque le comportement mécanique de la structure l'est ; d'où la nécessité de disposer d'un modèle EF performant ;

(ii) la nature de la modélisation probabiliste choisie pour décrire la variabilité aléatoire de \mathbf{y} , l'ordre de la difficulté n'étant bien évidemment pas le même selon que \mathbf{y} est modélisé par une v.a. ou un champ aléatoire. À titre d'illustration, prenons pour caractéristiques cibles les deux premiers moments de \mathbf{Z} et considérons les deux cas suivants :

- le modèle \mathbf{Y} de \mathbf{y} est une v.a. définie sur (Θ, \mathcal{F}, P) , à valeurs dans \mathbb{R}^M , de loi \mathbf{P}_Y sur $(\mathbb{R}^M, \mathcal{B}_M)$. Alors \mathbf{Z} est une v.a. définie sur (Θ, \mathcal{F}, P) , à valeurs dans \mathbb{R}^N , de loi \mathbf{P}_Z sur $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}_N)$ et les deux caractéristiques recherchées sont la moyenne $\mu_Z \in \mathbb{R}^N$ et la matrice de covariance $C_Z \in \mathbb{R}^{N \times N}$ de \mathbf{Z} , données par :

$$\mu_Z = \mathbf{E}[\mathbf{Z}] \quad (1.10)$$

$$C_Z = \mathbf{E}[(\mathbf{Z} - \mu_Z)(\mathbf{Z} - \mu_Z)^T] \quad (1.11)$$

• \mathbf{y} est modélisé par un champ aléatoire $\mathbf{Y} = (Y(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega)$ défini sur (Θ, \mathcal{F}, P) , indexé sur $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (*i.e.* $\mathbf{x} \in \Omega$), à valeurs dans \mathbb{R}^M , de loi $\mathbf{P}_{\mathbf{Y}}$ sur $((\mathbb{R}^M)^\Omega, \mathcal{T}_{\mathcal{M}})$, où $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ est la tribu cylindrique de $(\mathbb{R}^M)^\Omega$ et Ω est la partie compacte (*i.e.* fermée, bornée) de \mathbb{R}^3 occupée par la structure. Alors, $\mathbf{Z} = (Z(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega)$ est un champ aléatoire défini sur (Θ, \mathcal{F}, P) , indexé sur Ω , à valeurs dans \mathbb{R}^N , de loi $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$ sur $((\mathbb{R}^N)^\Omega, \mathcal{T}_{\mathcal{N}})$ et les caractéristiques cherchées sont la moyenne $x \rightarrow \mu_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ et la fonction de covariance $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rightarrow C_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ de \mathbf{Z} , telles que, $\forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \Omega \times \Omega$:

$$\mu_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}[\mathbf{Z}(\mathbf{x})] \quad (1.12)$$

$$C_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathbf{E}[(\mathbf{Z}(\mathbf{x}) - \mu_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}))(\mathbf{Z}(\mathbf{x}') - \mu_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}'))^T] \quad (1.13)$$

On voit que dans le premier cas, le calcul de $\mu_{\mathbf{Z}}$ et $C_{\mathbf{Z}}$ nécessite la connaissance de la loi $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$, donc celle du couple $(f, \mathbf{P}_{\mathbf{Y}})$ (cf. § 1.1.2 ci-après), tandis que dans le second cas, le calcul de $\mu_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x})$ et $C_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ pour tout \mathbf{x} dans Ω et tout $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ dans $\Omega \times \Omega$ nécessite la connaissance des systèmes de lois finidimensionnelles d'ordres un et deux de \mathbf{Z} , donc celle de f et des systèmes de lois finidimensionnelles correspondants de \mathbf{Y} . Il est clair, dans ces conditions, que, quelle que soit la complexité de f , il sera toujours plus facile d'accéder au premier groupe de caractéristiques qu'au second.

1.1.2 Formulation probabiliste du problème

Commençons par le cas où \mathbf{Y} est une v.a. Il s'agit donc de calculer la loi $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$ sur $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}_N)$ de la v.a. $\mathbf{Z} = f(\mathbf{Y})$, définie sur (Θ, \mathcal{F}, P) , à valeurs dans \mathbb{R}^N , connaissant f , mesurable de $(\mathbb{R}^M, \mathcal{B}_M)$ dans $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}_N)$ et décrite numériquement via un modèle EF, et la loi $\mathbf{P}_{\mathbf{Y}}$ sur $(\mathbb{R}^M, \mathcal{B}_M)$ de la v.a. \mathbf{Y} définie sur (Θ, \mathcal{F}, P) , à valeurs dans \mathbb{R}^M . Pour obtenir la relation gouvernant $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$, commençons par observer que les espaces de probabilité (Θ, \mathcal{F}, P) , $(\mathbb{R}^M, \mathcal{B}_M, \mathbf{P}_{\mathbf{Y}})$ et $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}_N, \mathbf{P}_{\mathbf{Z}})$ sont en correspondance selon le schéma de la figure 1.1, dans lequel les flèches indiquent des applications mesurables.

Ce schéma montre que, au sens des mesures images :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}(P) \quad , \quad \mathbf{P}_{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}(P) \quad (1.14)$$

d'où, puisque $\mathbf{Z} = f(\mathbf{Y}) = f \circ \mathbf{Y}$:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{Z}} = f(\mathbf{P}_{\mathbf{Y}}) \quad (1.15)$$

Autrement dit, $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$ est l'image de $\mathbf{P}_{\mathbf{Y}}$ par f , ce qui s'écrit en explicitant (1.15) :

$$\forall B \in \mathcal{B}_N \quad , \quad \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}(B) = \mathbf{P}_{\mathbf{Y}}(f^{-1}(B)) \quad (1.16)$$

où $f^{-1}(B)$ est l'élément de \mathcal{B}_M tel que :

$$f^{-1}(B) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M : f(\mathbf{y}) \in B\} \quad (1.17)$$

Par conséquent, la loi inconnue $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$ est solution du problème intégral :

$$\forall B \in \mathcal{B}_N \quad , \quad \int_B \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}(d\mathbf{z}) = \int_{f^{-1}(B)} \mathbf{P}_{\mathbf{Y}}(d\mathbf{y}) \quad (1.18)$$

où $d\mathbf{y} = dy_1 \cdots dy_M$ et $d\mathbf{z} = dz_1 \cdots dz_N$ sont les mesures de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^M, \mathcal{B}_M)$ et $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}_N)$ respectivement.

Notons qu'en utilisant les fonctions caractéristiques, on peut montrer que $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$ est aussi solution du problème intégral équivalent :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle} \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}(d\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{R}^M} e^{i\langle \mathbf{v}, f(\mathbf{y}) \rangle} \mathbf{P}_{\mathbf{Y}}(d\mathbf{y}) \quad (1.19)$$

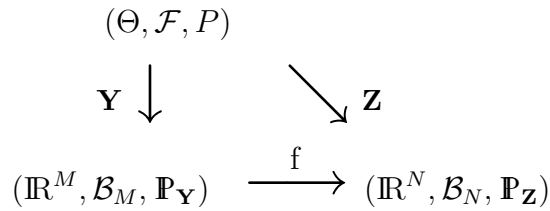


FIG. 1.1 – Lien entre les modèles probabilistes en présence

avec $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_M)$ et $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$ les éléments génériques respectifs de \mathbb{R}^M et \mathbb{R}^N , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien canonique de \mathbb{R}^N et i l’imaginaire pur ($i^2 = -1$).

Supposons, et nous admettrons cette hypothèse dans tout ce travail, que $\mathbf{P}_{\mathbf{Y}}$ admet une densité $\varphi_{\mathbf{Y}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue $d\mathbf{y}$ et que le couple $(f, \mathbf{P}_{\mathbf{Y}})$ possède les propriétés requises pour que $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}$ admette aussi une densité $\varphi_{\mathbf{Z}}$ par rapport à $d\mathbf{z}$. Les formules (1.18) et (1.19) deviennent alors :

$$\forall B \in \mathcal{B}_N \quad , \quad \int_B \varphi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})(d\mathbf{z}) = \int_{f^{-1}(B)} \varphi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})(d\mathbf{y}) \quad (1.20)$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle} \varphi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})(d\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{R}^M} e^{i\langle \mathbf{v}, f(\mathbf{y}) \rangle} \varphi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})(d\mathbf{y}) \quad (1.21)$$

Nous obtenons ainsi de nouveaux problèmes intégraux dans lesquels l’inconnue est cette fois la densité $\varphi_{\mathbf{Z}}$. Il est clair que, en dehors de quelques cas très particuliers, la résolution de tels problèmes ne peut être envisagée que par la voie numérique.

À titre d’exemple, rappelons un cas particulier bien connu : celui où $M = N$ et f est un difféomorphisme de \mathbb{R}^M dans \mathbb{R}^M . Alors, $\mathbf{z} = f(\mathbf{y})$ définit un changement de variable et en procédant à ce changement de variable dans l’intégrale du membre de droite de (1.20) ou (1.21), il est facile de voir que les deux problèmes intégraux ont pour unique solution :

$$\varphi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \varphi_{\mathbf{Y}}(f^{-1}(\mathbf{z})) \left| \det J_{f^{-1}}(\mathbf{z}) \right| \quad (1.22)$$

où $J_{f^{-1}}$ désigne la matrice jacobienne de f^{-1} et $\det \bullet$ le déterminant de la matrice \bullet . La difficulté réside ici dans l’inversion de la fonction f .

Une fois le problème intégral (1.20) ou (1.21) résolu, on peut calculer les moments cherchés, donnés, d’après (1.10) et (1.11), par :

$$\mu_{\mathbf{Z}} = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{z} \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}(d\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{z} \varphi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (1.23)$$

$$C_{\mathbf{Z}} = \int_{\mathbb{R}^N} (\mathbf{z} - \mu_{\mathbf{Z}})(\mathbf{z} - \mu_{\mathbf{Z}})^T \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}(d\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{R}^N} (\mathbf{z} - \mu_{\mathbf{Z}})(\mathbf{z} - \mu_{\mathbf{Z}})^T \varphi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (1.24)$$

soit encore, en fonction de la loi de \mathbf{Y} :

$$\mu_{\mathbf{Z}} = \int_{\mathbb{R}^M} f(\mathbf{y}) \mathbf{P}_{\mathbf{Y}}(d\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^M} f(\mathbf{y}) \varphi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (1.25)$$

$$C_{\mathbf{Z}} = \int_{\mathbb{R}^M} (f(\mathbf{y}) - \mu_{\mathbf{Z}})(f(\mathbf{y}) - \mu_{\mathbf{Z}})^T \mathbf{P}_{\mathbf{Y}}(d\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^M} (f(\mathbf{y}) - \mu_{\mathbf{Z}})(f(\mathbf{y}) - \mu_{\mathbf{Z}})^T \varphi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (1.26)$$

Dans le cas d’une modélisation par champs aléatoires, on obtient des expressions similaires, bien que plus complexes, pour les caractéristiques cibles. En effet, plaçons-nous dans la situation décrite au deuxième point de l’item (ii) du paragraphe précédent, donc dans le cas où \mathbf{Y} et \mathbf{Z} sont des champs aléatoires, et notons respectivement $\{\mathbf{P}_{\mathbf{Y}(\mathbf{x})}; \mathbf{x} \in \Omega\}$, $\{\mathbf{P}_{\mathbf{Y}(\mathbf{x})\mathbf{Y}(\mathbf{x}')}; (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \Omega \times \Omega\}$,

les familles finidimensionnelles d'ordres un et deux de \mathbf{Y} et $\{\mathbf{P}_{\mathbf{Z}(\mathbf{x})}; \mathbf{x} \in \Omega\}$, $\{\mathbf{P}_{\mathbf{Z}(\mathbf{x})\mathbf{Z}(\mathbf{x}')}; (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \Omega \times \Omega\}$ celles correspondantes de \mathbf{Z} . Supposons en outre que chaque élément de ces familles admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue de l'espace sur lequel il est défini, donc que : $\forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \Omega \times \Omega, \mathbf{P}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{d}\mathbf{y}) = \varphi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})\mathbf{d}\mathbf{y}$, $\mathbf{P}_{\mathbf{Y}(\mathbf{x})\mathbf{Y}(\mathbf{x}')}(d\mathbf{y}d\mathbf{y}') = \varphi_{\mathbf{Y}(\mathbf{x})\mathbf{Y}(\mathbf{x}')}(\mathbf{y}, \mathbf{y}')\mathbf{d}\mathbf{y}\mathbf{d}\mathbf{y}'$, $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}(\mathbf{x})}(d\mathbf{z}) = \varphi_{\mathbf{Z}(\mathbf{x})}(\mathbf{z})\mathbf{d}\mathbf{z}$, $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}(\mathbf{x})\mathbf{Z}(\mathbf{x}')}(d\mathbf{z}d\mathbf{z}') = \varphi_{\mathbf{Z}(\mathbf{x})\mathbf{Z}(\mathbf{x}')}(\mathbf{z}, \mathbf{z}')\mathbf{d}\mathbf{z}\mathbf{d}\mathbf{z}'$. Alors, les caractéristiques cherchées $\mu_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x})$ et $C_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, définies par (1.12) et (1.13), s'écrivent, en fonction de ces densités :

$$\mu_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{z}\varphi_{\mathbf{Z}(\mathbf{x})}(\mathbf{z})\mathbf{d}\mathbf{z} \quad (1.27)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^M} f(\mathbf{y})\varphi_{\mathbf{Y}(\mathbf{x})}(\mathbf{y})\mathbf{d}\mathbf{y} \quad (1.28)$$

$$C_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} (\mathbf{z} - \mu_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}))(\mathbf{z} - \mu_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}'))^T \varphi_{\mathbf{Z}(\mathbf{x})\mathbf{Z}(\mathbf{x}')}(z, z')\mathbf{d}\mathbf{z}\mathbf{d}\mathbf{z}' \quad (1.29)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M} (f(\mathbf{y}) - \mu_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}))(f(\mathbf{y}) - \mu_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}'))^T \varphi_{\mathbf{Y}(\mathbf{x})\mathbf{Y}(\mathbf{x}')}(y, y')\mathbf{d}\mathbf{y}\mathbf{d}\mathbf{y}' \quad (1.30)$$

Pour évaluer ces caractéristiques, tout comme celles $(\mu_{\mathbf{Z}}, C_{\mathbf{Z}})$ données par (1.23)-(1.25) et (1.24)-(1.26), la stratégie qui vient naturellement à l'esprit, compte tenu de la difficulté de l'entreprise, est de recourir à l'emploi d'une méthode directe de Monte-Carlo (Ditlevsen et Madsen [Dit96], Shreider [Shr66]). Mais les méthodes de ce type, qui consistent à simuler des réalisations de \mathbf{Y} , à calculer les réalisations correspondantes de \mathbf{Z} par $\mathbf{Z} = f(\mathbf{Y})$ et à estimer statistiquement les caractéristiques cherchées à partir de l'échantillon numérique de \mathbf{Z} ainsi obtenu, peuvent être très onéreuses en temps de calcul du fait du nombre important d'appels à la fonction f qu'elles nécessitent pour garantir de bonnes approximations. C'est pourquoi on préfère généralement les réserver à des calculs exceptionnels ou au traitement d'exemples de référence destinés à tester la validité et les propriétés d'autres méthodes d'approximation. C'est le rôle que nous leur avons attribué dans ce travail. On notera que les méthodes de Monte-Carlo ont connu un essor considérable ces vingt dernières années, dû non seulement aux progrès exceptionnels réalisés dans le domaine de l'informatique mais également à la prise de conscience des chercheurs et industriels (comme une décennie plus tôt pour la méthode des éléments finis déterministes) des immenses possibilités de ces méthodes (Bucher [Buc88a], Bernard et Fogli [Ber87], Au et Beck [Au 99]).

En dehors des méthodes directes de Monte-Carlo, toutes les méthodes existantes dédiées à la résolution de ce problème sont regroupées sous l'appellation commune de *Méthodes d'Éléments Finis Stochastiques* (MEFS), car fondées sur l'emploi d'un modèle EF. Les recherches menées autour de ces méthodes ont pour beaucoup en perspective l'élaboration de procédures de calcul capables de traiter des problèmes réels (*i.e.* industriels), dans des temps raisonnables. La plupart des travaux concerne des problèmes mécaniquement linéaires. Ceux relatifs aux problèmes mécaniquement non linéaires sont plus rares mais font l'objet d'un engouement grandissant. On peut citer, par exemple, les travaux de Anders et Hori [And99, And01], Mellah [Mel99] et Zhao *et al.* [Zha98b] pour les comportements élasto-plastiques, ceux de Zhang et Ellingwood [Zha98a] pour les comportements élastiques bilinéaires, ceux de Zeldin et Spanos [Zel98] pour les comportements avec matériaux endommageables, ou encore ceux de Liu *et al.* [Liu87] et Baldewck [Bal99] pour les non-linéarités géométriques.

Toutes ces recherches montrent qu'une MEFS se construit en deux grandes étapes : une étape opérant sur les modèles probabilistes des paramètres incertains et concernant notamment la façon de les prendre en compte (*i.e.* de les représenter) dans le modèle EF et une étape de choix et de construction des outils numériques destinés au calcul des grandeurs cibles (moments) liées au paramètre de contrôle. Plusieurs options existent dans chacune de ces étapes qui, croisées,

conduisent à plusieurs MEFS. Il importe de noter, et c'est un point de distinction très important, que certaines MEFS modifient le modèle EF (Kleiber et Hien [Kle92], Deodatis [Deo91a], Ghanem et Spanos [Gha91]), tandis que d'autres ne le modifient pas (Cornell [Cor71], Der Kiureghian [Der88], Baldeweck [Bal99]).

Notre travail est une contribution à ces recherches. Le chapitre 3 est consacré aux problèmes mécaniquement linéaires avec paramètres incertains modélisés par des champs ou des v.a. aléatoires, alors que le chapitre 4 est dédié aux problèmes mécaniquement non linéaires avec modélisation par variables aléatoires pour les paramètres incertains.

1.2 Modélisation probabiliste des paramètres incertains

Les recherches sur les éléments finis stochastiques utilisent deux grandes classes de modèles probabilistes pour les paramètres incertains : les variables aléatoires et les processus ou champs stochastiques. Les champs sont par exemple utilisés pour modéliser le caractère aléatoire de la variabilité spatio-temporelle du vent, de la houle ou des séismes, ou de la variabilité spatiale de certaines propriétés mécaniques des sols.

Nous aurons recours à ces deux types de modèles dans ce travail. Les modèles du premier type seront utilisés pour l'étude des problèmes mécaniquement non linéaires et nous nous limiterons dans ce cas à des v.a. lognormales vectorielles. Les modèles du second type seront quant à eux réservés à la formulation EFS des problèmes mécaniquement linéaires et nous nous limiterons à des processus aléatoires (champs à paramètre d'indexation scalaire) lognormaux scalaires stationnaires. Nous rappelons brièvement ci-dessous comment sont définis ces modèles probabilistes.

Remarque : si la traditionnelle hypothèse gaussienne permet de simplifier l'écriture et la résolution des problèmes, elle demeure parfois irréaliste, ne serait-ce que parce qu'elle autorise des réalisations négatives à des paramètres fondamentalement positifs. C'est pour cette raison notamment qu'on lui préfère très souvent l'hypothèse lognormale (Brenner et Schuëller [Bre98] ou Micaletti [Mic00]).

1.2.1 Variables aléatoires lognormales vectorielles

Soient M un entier positif ≥ 1 , $\mu_{\mathbf{Y}} = ((\mu_{\mathbf{Y}})_i) = (\mu_{Y_i})$ un élément de $(\mathbb{R}_+^*)^M$, $C_{\mathbf{Y}} = ((C_{\mathbf{Y}})_{ij}) = (C_{Y_i Y_j})$ un élément symétrique et défini positif de $\mathbb{R}^{M \times M}$ et $\mathbf{Y} = (Y_i)$ une v.a. vectorielle M -dimensionnelle. On a alors la définition suivante :

On dit que \mathbf{Y} est lognormale non dégénérée de moyenne $\mu_{\mathbf{Y}}$ et de matrice de covariance $C_{\mathbf{Y}}$, et on note $\mathbf{Y} \sim \mathcal{LN}(\mu_{\mathbf{Y}}, C_{\mathbf{Y}})$, si la loi $\mathbf{P}_{\mathbf{Y}}$ de \mathbf{Y} sur $(\mathbb{R}^M, \mathcal{B}_M)$ admet une densité $\varphi_{\mathbf{Y}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^M, \mathcal{B}_M)$ et si $\varphi_{\mathbf{Y}}$ s'écrit, $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$:

$$\varphi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} |\Gamma|^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^M y_i} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \Gamma^{-1}(\ln \mathbf{y} - \ln \boldsymbol{\eta}), (\ln \mathbf{y} - \ln \boldsymbol{\eta}) \rangle_M\right) \mathbb{I}_{(\mathbb{R}_+^*)^M}(\mathbf{y}) \quad (1.31)$$

avec $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i)$ l'élément de \mathbb{R}^M et $\Gamma = (\Gamma_{ij})$ l'élément symétrique et défini positif de $\mathbb{R}^{M \times M}$ tels que, $\forall (i, j) \in \{1, \dots, M\}^2$:

$$\eta_i = \frac{\mu_{Y_i}}{\sqrt{1 + a_{Y_i}^2}} \quad ; \quad \Gamma_{ij} = \ln\left(1 + \frac{C_{Y_i Y_j}}{\mu_{Y_i} \mu_{Y_j}}\right) \quad ; \quad a_{Y_i} = \frac{C_{Y_i Y_i}^{1/2}}{\mu_{Y_i}} \quad (1.32)$$

et $\ln \mathbf{y}$, $\ln \boldsymbol{\eta}$ les éléments de \mathbb{R}^M tels que, $\forall \boldsymbol{\eta} \in (\mathbb{R}_+^*)^M, \forall \mathbf{y} \in (\mathbb{R}_+^*)^M$:

$$\ln \mathbf{y} = ((\ln \mathbf{y})_i) = (\ln y_i) \quad ; \quad \ln \boldsymbol{\eta} = ((\ln \boldsymbol{\eta})_i) = (\ln \eta_i) \quad (1.33)$$

On a, de plus, le résultat important suivant :

Il existe une v.a. $\mathbf{X} = (X_i)$ à valeurs dans \mathbb{R}^M , gaussienne, non dégénérée, de moyenne $\mu_{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\eta}$

et de matrice de covariance $C_{\mathbf{X}} = \Gamma$, telle que, en loi :

$$\mathbf{Y} = e^{\mathbf{X}} \iff Y_i = e^{X_i} \quad ; \quad i = 1, \dots, M \quad (1.34)$$

Ce résultat est à la base de la définition des processus et champs aléatoires lognormaux.

1.2.2 Processus aléatoires lognormaux scalaires

Soit $G = (G(x), x \in \mathbb{R})$ un processus gaussien, stationnaire, à valeurs dans \mathbb{R} (*i.e.* scalaire), de moyenne $\mu_G \in \mathbb{R}$ et de fonction de covariance $C_G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : u \rightarrow C_G(u)$ telle que $C_G(u) = \mathbb{E}[(G(x+u) - \mu_G)(G(x) - \mu_G)]$. Alors le processus stationnaire $Y = (Y(x), x \in \mathbb{R})$, à valeurs dans \mathbb{R}_+ , tel que :

$$Y = e^G \quad (1.35)$$

est dit lognormal scalaire. Sa moyenne $\mu_Y = \mathbb{E}[Y(x)] \in \mathbb{R}_+^*$ et sa fonction de covariance $C_Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : u \rightarrow C_Y(u) = \mathbb{E}[(Y(x+u) - \mu_Y)(Y(x) - \mu_Y)]$ sont liées à celles de G par :

$$\mu_Y = \exp\left(\mu_G + \frac{C_G(0)}{2}\right) \quad (1.36)$$

$$C_Y(u) = [\exp(2\mu_G + C_G(0))][\exp(C_G(u) - 1)] \quad (1.37)$$

Il en résulte que tout processus lognormal scalaire stationnaire $Y = (Y(x), x \in \mathbb{R})$, de moyenne μ_Y et fonction de covariance $u \rightarrow C_Y(u)$ données peut s'écrire : $Y = e^G$, avec $G = (G(x), x \in \mathbb{R})$ un processus gaussien stationnaire de moyenne μ_G et fonction de covariance $u \rightarrow C_G(u)$ telles que :

$$\mu_G = \ln\left(\frac{\mu_Y}{\sqrt{1 + a_Y^2}}\right) \quad (1.38)$$

$$C_G(u) = \ln\left(1 + \frac{C_Y(u)}{\mu_Y^2}\right) \quad (1.39)$$

où :

$$a_Y = \frac{C_Y^{1/2}(0)}{\mu_Y} \quad (1.40)$$

est la coefficient de variation de Y .

1.2.3 Représentations possibles des processus ou champs lognormaux

Toutes les MEFS basées sur l'emploi de modélisations par processus ou champs aléatoires pour les paramètres incertains n'utilisent *in fine*, dans leur formulation opérationnelle, que des v.a. vectorielles résultant d'une approximation de ces modèles probabilistes. On distingue deux grandes classes d'approximations que nous allons succinctement évoquer : les approximations discrètes et les approximations fonctionnelles. Pour ce faire, nous nous limiterons au contexte gaussien stationnaire, qui est le contexte naturel pour traiter celui lognormal stationnaire qui est le nôtre (nous venons en effet de voir, dans le paragraphe précédent, que tout processus lognormal pouvait s'interpréter comme une transformation exponentielle d'un processus gaussien, résultat qui se généralise bien entendu au cas des champs). Nous nous bornerons en outre, pour simplifier, à un modèle probabiliste de dimension scalaire. Nous considérerons alors un champ aléatoire

$G = (G(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$ défini sur (Θ, \mathcal{F}, P) , à valeurs dans \mathbb{R} , indexé sur \mathbb{R}^3 , du second ordre, continu en moyenne quadratique, gaussien, stationnaire (on dit encore homogène dans le cas d'un champ), supposé modéliser la variabilité aléatoire d'un paramètre incertain scalaire du modèle mécanique. Notons que comme le système mécanique considéré occupe, par hypothèse, une région compacte Ω de \mathbb{R}^3 , le modèle probabiliste à considérer est en fait la restriction de G à Ω , encore notée $G = (G(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega)$. Ce champ confiné, qui possède les mêmes propriétés que le champ source non confiné précédent, est entièrement caractérisé par sa moyenne constante $\mu_G = \mathbb{E}[G(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}$ et sa fonction de covariance $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \rightarrow C_G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathbb{E}[(G(\mathbf{x}) - \mu_G)(G(\mathbf{x}') - \mu_G)] = \Gamma_G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) Approximations discrètes

Nous regroupons sous l'appellation *approximations discrètes*, les approximations du champ G obtenues, soit à partir de ses observations en des points de Ω , soit à partir de ses moyennes locales sur les éléments d'une partition de Ω , résultant par exemple d'un maillage EF, si celui-ci est utilisé. Considérons le premier cas.

Soient $F_n = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n), n \in \mathbb{N}^*$, une famille finie de points de $\Omega : \forall j \in J_n = \{1, \dots, n\}, \mathbf{x}_j \in \Omega$. Approcher ponctuellement G sur F_n consiste à remplacer G par la famille finie de ses observations aux points de F_n , autrement dit par la v.a. n -vectorielle $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ telle que $\xi_j = G(\mathbf{x}_j), \forall j \in J_n$, dont on notera qu'elle est complètement caractérisée : elle est gaussienne, à valeurs dans \mathbb{R}^n , a pour moyenne :

$$\mu_{\boldsymbol{\xi}} = \mathbb{E}[\boldsymbol{\xi}] = (\mu_{\xi_1}, \dots, \mu_{\xi_n})^T$$

avec :

$$\mu_{\xi_j} = \mathbb{E}[\xi_j] = \mathbb{E}[G(\mathbf{x}_j)] = \mu_G, \quad \forall j \in J_n$$

et pour covariance :

$$C_{\boldsymbol{\xi}} = \mathbb{E}[(\boldsymbol{\xi} - \mu_{\boldsymbol{\xi}})(\boldsymbol{\xi} - \mu_{\boldsymbol{\xi}})^T] = (C_{\boldsymbol{\xi}}^{ij})$$

où, $\forall (i, j) \in J_n \times J_n$:

$$C_{\boldsymbol{\xi}}^{ij} = C_{\xi_i \xi_j} = \mathbb{E}[(\xi_i - \mu_{\xi_i})(\xi_j - \mu_{\xi_j})] = \mathbb{E}[(G(\mathbf{x}_i) - \mu_G)(G(\mathbf{x}_j) - \mu_G)] = C_G(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \Gamma_G(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$$

On voit ici le défaut de ce type d'approximation : pour qu'il soit fidèlement représentatif du comportement statistique du champ G et notamment de sa corrélation, il nécessite un nombre de points conséquent (*i.e.* n très grand) et engendre de ce fait des temps de calcul très importants, voire irréalistes. Par ailleurs, il ne tient pas compte, par construction, du maillage EF : les points de F_n sont choisis *a priori*, indépendamment de ce dernier. C'est pourquoi d'autres versions de cette approche ont été développées, qui tiennent compte du maillage et utilisent moins de points (cf. par exemple Matthies *et al.* [Mat97a] ou Lemaire [Lem05]). On peut citer :

1. la méthode utilisant les centres de gravité des éléments (*Midpoint method*, cf. Shinozuka et Yamazaki [Shi88b], Der Kiureghian et Fe, [Der88], Liu et Der Kiureghian [Liu91] ou Falsone et Impolonia [Fal02, Imp03b, Fal04a]) ;
2. la méthode utilisant les nœuds des éléments (*Nodal point method*, Hisada et Nakagari [His83]) et ses versions améliorées : la méthode d'interpolation polynomiale (*Interpolation method*, Matthies *et al.* [Mat97a]), la méthode des fonctions de forme (*Shape function method*, Liu *et al.* [Liu86c]), la méthode basée sur l'emploi d'une technique d'estimation linéaire optimale (*Optimal Linear Estimation*, Li et Der Kiureghian [Li 93]), dite méthode OLE et qui n'est qu'une application particulière des techniques de krigeage [Mat65] ;
3. la méthode utilisant les points d'intégration (*Integration point method*, méthode citée par Matthies *et al.* [Mat97a] et utilisée, à notre connaissance, par Brenner et Bucher [Bre95]) ;
4. la méthode de la moyenne spatiale par élément (*Local averaging method*, Cornell [Cor71], Zhu *et al.* [Zhu86, Zhu92]), basée sur l'idée de construire la v.a. vectorielle $\boldsymbol{\xi}$ en attribuant à chacune de ces composantes ξ_j la moyenne spatiale de G sur un élément. Cette moyenne spatiale

peut *a priori* être calculée analytiquement ou estimée dans la pratique à partir d'observations du champ en des points (par exemple des sondages en géotechnique).

On notera que, dans toutes ces méthodes, le champ cible G est approché par un champ \tilde{G} de la forme :

$$\tilde{G}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(\mathbf{x}) \xi_j \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.41)$$

ou :

$$\tilde{G}(\mathbf{x}) = \mu_G + \sum_{j=1}^n \Phi_j(\mathbf{x}) \overset{o}{\xi}_j \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.42)$$

où les ξ_j sont des v.a. gaussiennes, les $\overset{o}{\xi}_j$ des v.a. gaussiennes centrées et les Φ_j des applications de Ω dans \mathbb{R} dont les expressions dépendent de la méthode d'approximation considérée ; ce sont, par exemple, des fonctions indicatrices (celles des éléments) pour les première et quatrième méthodes et des fonctions d'interpolation ou de forme pour les deuxième et troisième méthodes.

5. la méthode de discrétisation par intégrales pondérées (*Weighted integral method*, Deodatis [Deo91a, Gra01], Shinozuka [Deo91b] et Takada [Tak90b, Tak90a]) propose la discrétisation d'un champ gaussien, dépendante des fonctions de forme de la discrétisation EF [Mat97a]. Cependant, contrairement à la méthode des fonctions de forme précitée, il n'est pas nécessaire d'estimer le champ G en des points, ce qui rend l'approche très intéressante.

De l'expérience des utilisateurs de ces méthodes, on peut avancer qu'aucune d'elles ne s'est véritablement imposée comme méthode de référence. Chacune a son domaine d'application, qui est plus au moins bien délimité, et de toute évidence des progrès restent à faire dans ce domaine. En particulier, toutes ces méthodes restent seulement applicables à des champs gaussiens¹[Sud00]. De plus, *le fait que l'approximation discrète dépende du maillage peut être un handicap dans certaines situations* (cf. par exemple Mahadevan et Haldar [Mah91]). Auvinet [Auv02] montre en outre, pour la méthode 4, que la variance du champ approché varie avec les dimensions du maillage EF (phénomène de réduction de variance ou effet d'échelle). On peut être alors amené à utiliser une autre forme d'approximation, basée sur un développement en série du champ, que nous allons brièvement évoquer maintenant.

(b) Approximations fonctionnelles

L'idée est de chercher une représentation du champ aléatoire sous la forme d'un développement en série, c'est-à-dire de l'écrire sous la forme (Lawrence, [Law87]) :

$$G(\mathbf{x}) = \mu_G + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\mathbf{x}) X_j \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.43)$$

où les X_j sont des v.a. gaussiennes centrées indépendantes et les φ_j des fonctions orthogonales (relativement à une certaine métrique) de Ω dans \mathbb{R} , puis d'approcher G par un champ \tilde{G} obtenu en tronquant à un certain ordre P la série précédente :

$$\tilde{G}(\mathbf{x}) = \mu_G + \sum_{j=1}^P \varphi_j(\mathbf{x}) X_j \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.44)$$

L'intérêt d'une telle procédure, basée sur l'écriture de G sur une certaine base fonctionnelle, est qu'elle ne fait pas intervenir la maillage EF. Ajoutons que, dans son application spécifique au

¹En effet, la loi du champ approché \tilde{G} est gaussienne si les fonctions $\overset{o}{\xi}_j$ sont gaussiennes dans (1.42). Si ces dernières ne sont pas gaussiennes, la loi de \tilde{G} est *a priori* inconnue.

contexte EF, elle est souvent couplée à un développement des coefficients aléatoires X_j en chaos de Wiener [Wie38] (cf. chapitre 3 sur la méthode des éléments finis stochastiques spectraux). Les deux bases fonctionnelles les plus courantes sont celle des polynômes d'Hermitte normalisés (cf. annexe C) et celle des fonctions propres de l'opérateur de covariance du champ G . Par exemple, dans ce dernier cas, que nous verrons en détail plus loin (cf. chapitre 3) et qui correspond au développement de Karhunen-Loève du champ G , les fonctions φ_j sont solutions du problème spectral suivant : trouver les couples $(\lambda_j, \varphi_j)_{j=1,2,\dots,n,\dots}$ vérifiant, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$:

$$\int_{\Omega} C_G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \lambda \varphi(\mathbf{x}) \quad (1.45)$$

Dans l'équation intégrale (1.45), les valeurs propres solutions, notées $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots$, sont telles que : $\lambda_j = \mathbf{E}[X_j^2]$, de sorte que (1.43) et (1.44) peuvent se réécrire :

$$G(\mathbf{x}) = \mu_G + \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} \varphi_j(\mathbf{x}) \overset{\circ}{X}_j \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.46)$$

$$\tilde{G}(\mathbf{x}) = \mu_G + \sum_{j=1}^P \sqrt{\lambda_j} \varphi_j(\mathbf{x}) \overset{\circ}{X}_j \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.47)$$

où les $\overset{\circ}{X}_j$ sont des copies indépendantes d'une v.a. $\overset{\circ}{X}$ gaussienne standard à valeurs dans \mathbb{R} , l'égalité dans (1.46) étant une égalité dans $L^2(\Theta, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$.

On notera que la faiblesse de cette méthode réside dans la difficulté de résolution du problème spectral (1.45). En effet, en dehors de quelques classes particulières de fonctions de covariance C_G (Ghanem et Spanos [Gha91]) (et qui ne sont pas toujours très réalistes (Xiu *et al.* [Xiu02])), cette résolution n'est pas explicite et doit être effectuée numériquement, avec tous les inconvénients liés à ce type de procédure pour les équations intégrales de type (1.45).

D'autres développements se substituant à celui de Karhunen-Loève existent. Ce dernier est en fait un cas particulier d'une famille plus large de développements, nommés OSE (*Optimal Serie Expansions*), applicable à un champ aléatoire non nécessairement gaussien. Ce développement, cité dans [Sud00], semble cependant n'avoir été exploité que par ses auteurs, Zhang et Ellingwood [Zha94]. Un autre développement, nommé EOLE (*Expansion Optimal Linear Estimation*, Li et Der Kiureghian [Li 93]), qui est une extension de la méthode OLE (variante de la méthode 2 pré-citée), est appliqué dans le cadre d'une MEFS (Sudret et Der Kiureghian, [Sud00]). Cette dernière méthode n'est plus limitée dans la pratique à quelques fonctions de covariance, mais dépend néanmoins du maillage EF, contrairement au développement de Karhunen-Loève.

1.3 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons posé et formulé le problème que nous nous proposons d'étudier dans cette thèse, en mettant l'accent sur les spécificités et les difficultés qui lui sont attachées. Nous avons ensuite rappelé brièvement les modèles probabilistes que nous utiliserons tout au long de ce travail : des v.a. vectorielles lognormales et des champs aléatoires scalaires gaussiens. Enfin, pour les champs, nous avons rappelé les deux grands types d'approximations dont on fait généralement usage, et que nous utiliserons nous-mêmes dans ce travail, en contexte éléments finis : l'approximation ponctuelle et l'approximation fonctionnelle.

Nous allons maintenant, dans le chapitre qui suit, évoquer brièvement les principales méthodes d'éléments finis stochastiques disponibles dans la littérature. Cet état des lieux effectué, nous pourrons alors nous attaquer au problème posé.

Chapitre 2

Principales méthodes d'éléments finis stochastiques

Ce chapitre présente succinctement les principales méthodes d'éléments finis stochastiques (MEFS) actuellement disponibles dans la littérature, en nous focalisant sur la plus ancienne, qualifiée de méthode fondatrice, puis en passant en revue les autres méthodes. Le chapitre se termine par quelques éléments de comparaison entre ces méthodes.

Alors que le principe de la méthode des éléments finis (MEF déterministe) est clairement formulé depuis plusieurs décennies, le vocable « MEFS » regroupe un ensemble de techniques faisant encore l'objet de recherches. Rappelons donc tout d'abord comment nous définissons les MEFS et le problème à résoudre par ces méthodes.

Soit le modèle EF d'un système mécanique, dont certains paramètres sont représentés par une v.a. vectorielle. Le chapitre précédent a montré que cette v.a. vectorielle pouvait être obtenue par discrétisation de champs aléatoires et/ou par modélisation d'une ou plusieurs paramètres par des v.a. scalaires. Le problème à résoudre consiste à utiliser le modèle EF et cette v.a. vectorielle, afin de fournir une caractérisation probabiliste de la réponse mécanique, en termes, au moins, de moyenne et de variance. Une classe importante de méthodes appropriées à ce type de problème est celle des techniques numériques directes basées sur l'approche de Monte-Carlo (Ditlevsen et Madsen [Dit96], Shreider, [Shr66]). Toutes les autres techniques numériques alternatives à ces méthodes sont généralement regroupées sous l'appellation *Méthodes d'Éléments Finis Stochastiques*.

Les techniques de Monte-Carlo restent les méthodes de référence dans la grande majorité des publications concernant les MEFS, lorsque des résultats analytiques ne sont pas disponibles. De nombreux travaux utilisent de plus ces simulations, en employant des méthodes de discrétisation, introduites au chapitre précédent. Nous relevons plusieurs applications au génie civil : par exemple des modélisations de structures de poutres par Padadopoulos et Papadrakakis [Pap96, Pap97], de barrages par Gaouar [Gao97] ou Mellah [Mel00], de tours de transmission électrique par Brenner [Bre95], etc.

La bibliographie relative aux MEFS comporte des centaines d'articles et quelques monographies : Nakagiri et Hisada [Nak85], Shinozuka et Yamasaki [Shi88b], Schuëller *et al.* [Sch97], Matthies *et al.* [Mat97a], Sudret et Der Kiureghian [Sud00], Keese *et al.* [Kee03a]. Citons aussi le récent ouvrage de Lemaire [Lem05] comportant un chapitre sur le sujet. Il existe enfin quelques articles de synthèse (dont Shinozuka et Yamasaki [Shi88b], Matthies *et al.* [Mat97a], Florès et Lemaire [Flo97]) ou thèses (dont Baldeweck [Bal99] ou Mellah [Mel99]).

2.1 Méthodes basées sur le principe de perturbation

Plusieurs alternatives aux méthodes de Monte-Carlo sont apparues dès les années 70. Nous retenons la méthode FOSM (*First Order Second Moment Method*), développée par Cornell [Cor71], parmi d'autres méthodes¹. Cette méthode est antérieure aux approches appelées « méthodes de perturbation », qui sont basées sur la méthode FOSM et sont encore utilisées aujourd'hui.

2.1.1 La méthode fondatrice

Cette méthode, basée sur la méthode FOSM [Cor71], concerne le problème (1.1), formulé sous sa forme (1.2), c'est-à-dire :

$$\mathbf{k}\mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (2.1)$$

et se propose de résoudre ce problème lorsque les incertitudes affectent M paramètres scalaires y_1, \dots, y_M du modèle répartis dans les expressions de \mathbf{k} et \mathbf{f} , ce que l'on note formellement, en posant $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_M)^T$:

$$\mathbf{k}(\mathbf{y})\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad (2.2)$$

Elle s'appuie pour cela sur l'hypothèse que \mathbf{y} peut être modélisé par une v.a. du second ordre \mathbf{Y} non dégénérée à valeurs dans \mathbb{R}^M , que la moyenne $\mu_{\mathbf{Y}} = \mathbf{E}[\mathbf{Y}] \in \mathbb{R}^M$ et la matrice de covariance $C_{\mathbf{Y}} = \mathbf{E}[(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}})(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}})^T] \in \mathbb{R}^{M \times M}$ de \mathbf{Y} sont connues, que \mathbf{Y} est à faible dispersion (*i.e.* que le réel strictement positif $\sqrt{\text{tr}(C_{\mathbf{Y}})}$ est petit), que la fonction $\mathbf{y} \rightarrow g(\mathbf{y}) = \mathbf{k}^{-1}(\mathbf{y})\mathbf{f}(\mathbf{y}) : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^m$ est mesurable, différentiable au point $\mu_{\mathbf{Y}}$ et proche de son application affine tangente en $\mu_{\mathbf{Y}}$ dans un voisinage « suffisamment » grand de ce point. On accorde au mot « résoudre » le sens suivant : \mathbf{y} étant modélisé par une v.a. \mathbf{Y} M -dimensionnelle et la fonction $g : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^m$ étant mesurable, \mathbf{q} est une v.a. m -dimensionnelle, notée \mathbf{Q} , telle que :

$$\mathbf{Q} = g(\mathbf{Y}) = \mathbf{k}^{-1}(\mathbf{Y})\mathbf{f}(\mathbf{Y}) \quad (2.3)$$

On cherche alors une approximation de la moyenne $\mu_{\mathbf{Q}} = \mathbf{E}[\mathbf{Q}] \in \mathbb{R}^m$ et de la matrice de covariance $C_{\mathbf{Q}} = \mathbf{E}[(\mathbf{Q} - \mu_{\mathbf{Q}})(\mathbf{Q} - \mu_{\mathbf{Q}})^T] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ de cette v.a.

(a) Principe de la méthode

Cette stratégie formelle se décompose en cinq étapes :

1. g étant différentiable au point $\mu_{\mathbf{Y}}$, on peut écrire, $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$:

$$g(\mathbf{y}) = g(\mu_{\mathbf{Y}}) + J_g(\mu_{\mathbf{Y}})(\mathbf{y} - \mu_{\mathbf{Y}}) + o(\mathbf{y} - \mu_{\mathbf{Y}}) \quad (2.4)$$

où $J_g(\mu_{\mathbf{Y}}) \in \mathbb{R}^{m \times M}$ est la matrice jacobienne de g au point $\mu_{\mathbf{Y}}$.

2. Or, par hypothèse, g est proche de son application affine tangente en $\mu_{\mathbf{Y}}$ dans un certain voisinage (supposé « suffisamment » grand) de $\mu_{\mathbf{Y}}$. En tout point \mathbf{y} de ce voisinage, on peut donc raisonnablement adopter l'approximation :

$$g(\mathbf{y}) \simeq g_{L, \mu_{\mathbf{Y}}}(\mathbf{y}) = g(\mu_{\mathbf{Y}}) + J_g(\mu_{\mathbf{Y}})(\mathbf{y} - \mu_{\mathbf{Y}}) \quad (2.5)$$

où $g_{L, \mu_{\mathbf{Y}}}$ est l'application affine tangente de g en $\mu_{\mathbf{Y}}$.

¹Nous nous contentons de citer les méthodes des approximations ponctuelles (Rosenblueth [Ros75]) et des perturbations indépendantes (Bolle [Bol88]), citées par Mellah [Mel99], appliquées dans le domaine des structures (Lind [Lin83]) ou des écoulements souterrains (Alonso *et al.* [Alo87]). À notre connaissance, ces approches n'ont pas été retenues par Mellah ou d'autres auteurs depuis la fin des années 80.

3. On introduit la v.a. \mathbf{Q}_L à valeurs dans \mathbb{R}^m telle que :

$$\mathbf{Q}_L = g_{L,\mu_Y}(\mathbf{Y}) = g(\mu_Y) + J_g(\mu_Y)(\mathbf{Y} - \mu_Y) \quad (2.6)$$

4. Compte tenu de cette expression (*i.e.* de son caractère affine), la moyenne $\mu_{\mathbf{Q}_L} = \mathbf{E}[\mathbf{Q}_L] \in \mathbb{R}^m$ et la matrice de covariance $C_{\mathbf{Q}_L} = \mathbf{E}[(\mathbf{Q}_L - \mu_{\mathbf{Q}_L})(\mathbf{Q}_L - \mu_{\mathbf{Q}_L})^T] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ de \mathbf{Q}_L s'écrivent :

$$\mu_{\mathbf{Q}_L} = g(\mu_Y) \quad (2.7)$$

$$C_{\mathbf{Q}_L} = J_g(\mu_Y)C_Y J_g^T(\mu_Y) \quad (2.8)$$

5. Ces deux grandeurs sont prises pour approximations de $\mu_{\mathbf{Q}}$ et $C_{\mathbf{Q}}$. D'où les approximations cherchées :

$$\mu_{\mathbf{Q}} \simeq \mu_{\mathbf{Q}_L} \quad (2.9)$$

$$C_{\mathbf{Q}} \simeq C_{\mathbf{Q}_L} \quad (2.10)$$

Reste maintenant à calculer numériquement $\mu_{\mathbf{Q}_L}$ et $C_{\mathbf{Q}_L}$.

(b) Stratégie numérique

1. Calcul de $\mu_{\mathbf{Q}_L}$

De l'expression de g et de (2.7) on tire :

$$\mu_{\mathbf{Q}_L} = k^{-1}(\mu_Y)\mathbf{f}(\mu_Y) \quad (2.11)$$

soit :

$$k(\mu_Y)\mu_{\mathbf{Q}_L} = \mathbf{f}(\mu_Y) \quad (2.12)$$

On est ainsi ramené à la résolution d'un système linéaire standard, pour laquelle existent de nombreux algorithmes.

2. Calcul de $C_{\mathbf{Q}_L}$

La jacobienne $J_g(\mu_Y)$ est une matrice $m \times M$ telle que :

$$J_g(\mu_Y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\mu_Y) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(\mu_Y) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_M}(\mu_Y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(\mu_Y) & \frac{\partial g_m}{\partial y_2}(\mu_Y) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_M}(\mu_Y) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Considérons-en la décomposition blocs-colonnes suivante :

$$J_g(\mu_Y) = [\partial_1 g(\mu_Y) \quad \partial_2 g(\mu_Y) \quad \dots \quad \partial_M g(\mu_Y)] \quad (2.14)$$

où, $\forall j \in \{1, \dots, M\}$, $\partial_j g(\mu_Y)$ est la j -ième colonne de $J_g(\mu_Y)$:

$$\partial_j g(\mu_Y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_j}(\mu_Y) \\ \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_j}(\mu_Y) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Considérons ensuite la relation $k(\mathbf{y})g(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ déduite de la relation formelle $g(\mathbf{y}) = k^{-1}(\mathbf{y})\mathbf{f}(\mathbf{y})$ et dérivons-la par rapport à y_j . Il vient, $\forall j \in \{1, \dots, M\}$:

$$\frac{\partial k}{\partial y_j}(\mathbf{y})g(\mathbf{y}) + k(\mathbf{y})\frac{\partial g}{\partial y_j}(\mathbf{y}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_j}(\mathbf{y}) \quad (2.16)$$

D'où, au point $\mu_{\mathbf{Y}}$:

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial y_j}(\mu_{\mathbf{Y}})g(\mu_{\mathbf{Y}}) + \mathbf{k}(\mu_{\mathbf{Y}})\frac{\partial g}{\partial y_j}(\mu_{\mathbf{Y}}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_j}(\mu_{\mathbf{Y}}) \quad (2.17)$$

Or, comme d'après (2.7), $g(\mu_{\mathbf{Y}}) = \mu_{\mathbf{Q}_L}$, il en résulte que la colonne $\frac{\partial g}{\partial y_j}(\mu_{\mathbf{Y}}) = \partial_j g(\mu_{\mathbf{Y}})$ est solution du système linéaire :

$$\mathbf{k}(\mu_{\mathbf{Y}})\partial_j g(\mu_{\mathbf{Y}}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_j}(\mu_{\mathbf{Y}}) - \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial y_j}(\mu_{\mathbf{Y}})\mu_{\mathbf{Q}_L} \quad (2.18)$$

On est ainsi ramené à la résolution de M systèmes linéaires de ce type dans lesquels les termes $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_j}(\mu_{\mathbf{Y}})$ et $\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial y_j}(\mu_{\mathbf{Y}})$ des membres de droite se calculent généralement de façon numérique à l'aide d'un schéma aux différences finies². Par exemple, en utilisant un schéma aux différences finies centrées, il vient, en notant (e_1, \dots, e_M) la base canonique de \mathbb{R}^M :

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_j}(\mu_{\mathbf{Y}}) \simeq \frac{\mathbf{f}(\mu_{\mathbf{Y}} + he_j) - \mathbf{f}(\mu_{\mathbf{Y}} - he_j)}{2h} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial y_j}(\mu_{\mathbf{Y}}) \simeq \frac{\mathbf{k}(\mu_{\mathbf{Y}} + le_j) - \mathbf{k}(\mu_{\mathbf{Y}} - le_j)}{2l} \quad (2.20)$$

où h et l sont des réels strictement positifs petits à choisir.

(c) Domaine de validité

Cette méthode n'a d'intérêt que si \mathbf{Y} est à faible dispersion et g est faiblement non linéaire, ce qu'elle suppose dans ses hypothèses. Concernant l'approximation de la moyenne, on peut ainsi montrer que l'erreur $\|\mu_{\mathbf{Q}} - \mu_{\mathbf{Q}_L}\|_m$ est telle que :

$$\|\mu_{\mathbf{Q}} - \mu_{\mathbf{Q}_L}\|_m \leq \gamma(\text{tr}C_{\mathbf{Y}})^{\frac{1}{2}} \quad (2.21)$$

où $\|\cdot\|_m$ est la norme euclidienne canonique de \mathbb{R}^m et γ une constante réelle strictement positive dont la valeur augmente avec le degré de non-linéarité de g au voisinage de $\mu_{\mathbf{Y}}$. L'approximation sera donc d'autant meilleure que g sera faiblement non linéaire (*i.e.* que γ sera petit) et \mathbf{Y} à faible dispersion (*i.e.* que $\text{tr}C_{\mathbf{Y}}$ sera petite).

La méthode FOSM a pu être utilisée pour la modélisation d'ouvrages du génie civil mécaniquement non linéaires. Mellah [Mel99] emploie cette approche pour la modélisation d'un barrage, en tenant compte d'un comportement élasto-plastique du matériau. Ces travaux sont dans la continuité des travaux de Auvinet ou Cambou depuis 1975 en géotechnique [Cam75, Auv02]. À la suite de Cambou, Magnan [Mag95] utilise cette MEFS, par exemple pour la consolidation uni et bidimensionnelle des sols sous une semelle isolée. Bouayed [Bou97] aborde ensuite, parmi d'autres, l'étude probabiliste des barrages en terre en utilisant FOSM, en élasticité linéaire et non linéaire. Mellah rapproche enfin ces travaux de ceux de Baecher *et al.* [Bae81] qui ont étudié les incertitudes sur les tassements d'une fondation. Baecher *et al.* sont aussi cités dans l'état de l'art de Sudret et Der Kiureghian [Sud00] comme des précurseurs de la méthode classique des perturbations que nous introduisons dans le paragraphe suivant.

²Mellah [Mel99] a aussi utilisé, pour effectuer ce calcul, *la méthode d'Evans* [Eva67] ou *la méthode du rapport polynomial* de Chowdhury [Cho93].

2.1.2 La méthode des perturbations

Comme la méthode précédente, cette méthode, qui a fait l'objet de nombreux développements et applications ces vingt dernières années (par exemple, Hisada *et al.* [His83], Yamazaki *et al.* [Yam88], Kleiber et Hien [Kle92]), concerne le problème (1.1) sous sa forme (1.2). Elle suppose que M paramètres scalaires y_1, \dots, y_M , regroupés dans un vecteur \mathbf{y} et répartis dans les expressions de \mathbf{k} et \mathbf{f} , sont affectés d'incertitude, que cette incertitude est correctement prise en compte par une modélisation de \mathbf{y} par une v.a. de second ordre \mathbf{Y} à valeurs dans \mathbb{R}^M et que cette v.a. est connue par sa moyenne $\mu_{\mathbf{Y}} = \mathbf{E}[\mathbf{Y}] \in \mathbb{R}^M$ et sa matrice de covariance $C_{\mathbf{Y}} = \mathbf{E}[(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}})(\mathbf{Y} - \mu_{\mathbf{Y}})^T] \in \mathbb{R}^{M \times M}$. Elle cherche alors à fournir une approximation de la moyenne $\mu_{\mathbf{Q}} = \mathbf{E}[\mathbf{Q}] \in \mathbb{R}^m$ et de la matrice de covariance $C_{\mathbf{Q}} = \mathbf{E}[(\mathbf{Q} - \mu_{\mathbf{Q}})(\mathbf{Q} - \mu_{\mathbf{Q}})^T] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ de la réponse aléatoire du système, c'est-à-dire de la v.a. m -dimensionnelle \mathbf{Q} liée à \mathbf{Y} par :

$$\mathbf{k}(\mathbf{Y})\mathbf{Q} = \mathbf{f}(\mathbf{Y}) \quad (2.22)$$

et telle que, formellement, la v.a. \mathbf{Q} à caractériser s'écrive :

$$\mathbf{Q} = g(\mathbf{Y}) = \mathbf{k}^{-1}(\mathbf{Y})\mathbf{f}(\mathbf{Y}) \quad (2.23)$$

Pour cela, elle s'appuie sur la formulation (2.22) dans laquelle \mathbf{Q} est remplacé par $g(\mathbf{Y})$, autrement dit :

$$\mathbf{k}(\mathbf{Y})g(\mathbf{Y}) = \mathbf{f}(\mathbf{Y}) \quad (2.24)$$

Elle suppose en outre que les termes aléatoires $\mathbf{k}(\mathbf{Y})$, $g(\mathbf{Y})$ et $\mathbf{f}(\mathbf{Y})$ de (2.24) sont peu sensibles à l'aléa porté par \mathbf{Y} . Dans ces conditions, considérant les développements de Taylor au voisinage³ de $\mu_{\mathbf{Y}}$ des fonctions \mathbf{k} , g et \mathbf{f} , on peut tronquer ces développements au premier ou au second ordre. Dans ce dernier cas, les v.a. $\mathbf{k}(\mathbf{Y})$, $g(\mathbf{Y})$ et $\mathbf{f}(\mathbf{Y})$ peuvent être approchées par :

$$\mathbf{k}(\mathbf{Y}) \simeq \mathbf{k}_0 + \sum_{i=1}^M \mathbf{k}_i^I \overset{\circ}{Y}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mathbf{k}_{ij}^{II} \overset{\circ}{Y}_i \overset{\circ}{Y}_j \quad (2.25)$$

$$g(\mathbf{Y}) \simeq g_0 + \sum_{i=1}^M g_i^I \overset{\circ}{Y}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M g_{ij}^{II} \overset{\circ}{Y}_i \overset{\circ}{Y}_j \quad (2.26)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{Y}) \simeq \mathbf{f}_0 + \sum_{i=1}^M \mathbf{f}_i^I \overset{\circ}{Y}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mathbf{f}_{ij}^{II} \overset{\circ}{Y}_i \overset{\circ}{Y}_j \quad (2.27)$$

avec :

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}(\mu_{\mathbf{Y}}) \quad , \quad g_0 = g(\mu_{\mathbf{Y}}) = \mathbf{k}^{-1}(\mu_{\mathbf{Y}})\mathbf{f}(\mu_{\mathbf{Y}}) \quad , \quad \mathbf{f}_0 = \mathbf{f}(\mu_{\mathbf{Y}}) \quad (2.28)$$

$$\mathbf{k}_i^I = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial y_i}(\mu_{\mathbf{Y}}) \quad , \quad g_i^I = \frac{\partial g}{\partial y_i}(\mu_{\mathbf{Y}}) \quad , \quad \mathbf{f}_i^I = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_i}(\mu_{\mathbf{Y}}) \quad (2.29)$$

$$\mathbf{k}_{ij}^{II} = \frac{\partial^2 \mathbf{k}}{\partial y_i \partial y_j}(\mu_{\mathbf{Y}}) \quad , \quad g_{ij}^{II} = \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j}(\mu_{\mathbf{Y}}) \quad , \quad \mathbf{f}_{ij}^{II} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial y_i \partial y_j}(\mu_{\mathbf{Y}}) \quad (2.30)$$

$$\overset{\circ}{Y}_i = Y_i - \mu_{\mathbf{Y}_i} \quad , \quad \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad (2.31)$$

où $\mu_{\mathbf{Y}_i}$ est la moyenne de la coordonnée Y_i du vecteur aléatoire \mathbf{Y} . Les coefficients à déterminer sont g_0 , g_i^I et g_{ij}^{II} .

En reportant (2.25), (2.26) et (2.27) dans (2.24) et en identifiant terme à terme, il vient :

³On pourrait éventuellement prendre un autre point de référence.

$$g_0 = \mathbf{k}_0^{-1} \mathbf{f}_0 \quad (2.32)$$

$$g_i^I = \mathbf{k}_0^{-1} (\mathbf{f}_i^I - \mathbf{k}_i^I g_0) \quad (2.33)$$

$$g_{ij}^{II} = \mathbf{k}_0^{-1} (\mathbf{f}_{ij}^{II} - \mathbf{k}_i^I g_j^I - \mathbf{k}_j^I g_i^I - \mathbf{k}_{ij}^{II} g_0) \quad (2.34)$$

Par suite, la v.a. \mathbf{Q} donnée par (2.23) peut être approchée par :

$$\tilde{\mathbf{Q}} = g_0 + \sum_{i=1}^M g_i^I (Y_i - \mu_{Y_i}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M g_{ij}^{II} (Y_i - \mu_{Y_i})(Y_j - \mu_{Y_j}) \quad (2.35)$$

avec g_0 , g_i^I et g_{ij}^{II} donnés par (2.32)-(2.34). Les approximations cherchées de $\mu_{\mathbf{Q}}$ et $C_{\mathbf{Q}}$ sont alors prises égales aux caractéristiques correspondantes de $\tilde{\mathbf{Q}}$, qui se calculent explicitement. Notons que très souvent, on se limite aux deux premiers termes de l'approximation (2.35), autrement dit, on la considère sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{Q}} = g_0 + \sum_{i=1}^M g_i^I (Y_i - \mu_{Y_i}) \quad (2.36)$$

Dans ce cas, on obtient les approximations suivantes pour $\mu_{\mathbf{Q}}$ et $C_{\mathbf{Q}}$:

$$\mu_{\mathbf{Q}} \simeq \mu_{\tilde{\mathbf{Q}}} = \mathbf{E}[\tilde{\mathbf{Q}}] = g_0 \quad (2.37)$$

$$C_{\mathbf{Q}} \simeq C_{\tilde{\mathbf{Q}}} = \mathbf{E}[(\tilde{\mathbf{Q}} - \mu_{\tilde{\mathbf{Q}}})(\tilde{\mathbf{Q}} - \mu_{\tilde{\mathbf{Q}}})^T] = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M g_i^I (g_j^I)^T C_{Y_i Y_j} \quad (2.38)$$

où $C_{Y_i Y_j}$ est le terme de rang (i, j) de la matrice de covariance $C_{\mathbf{Y}}$, c'est-à-dire la covariance des coordonnées Y_i et Y_j du vecteur aléatoire \mathbf{Y} :

$$C_{Y_i Y_j} = \mathbf{E}[(Y_i - \mu_{Y_i})(Y_j - \mu_{Y_j})] \quad (2.39)$$

On notera que l'approximation de $\mu_{\mathbf{Q}}$ fournie par (2.37) coïncide avec celle obtenue en utilisant la méthode fondatrice (cf. formules (2.11), (2.7) et (2.3)).

La méthode de perturbation est applicable dans un cadre non linéaire mais les conclusions des travaux sur cette approche (Schuëller G.I. *et al.* [Sch97], Sudret et Der Kiureghian [Sud00]) soulignent que les coefficients de variations des v.a. d'entrée doivent être faibles et que le nombre de v.a. nécessaires au développement de la réponse est trop grand pour espérer généraliser la méthode à des problèmes complexes (plusieurs champs aléatoires, non-linéarité prononcée, ...).

Cette méthode a été mise en œuvre à la suite de certaines méthodes de discrétisations présentées auparavant : la méthode de moyenne locale (étude d'un soutènement, Baecker et Ingra [Bae81]; Vammarche et Grigoriu [Van83b]; Phoon et al [Pho90]), les méthodes de fonctions de forme (Liu *et al.* [Liu86c]). Le couplage de la méthode de perturbation avec la méthode de discrétisation par intégrales pondérées (MIP), annoncé comme inefficace par Matthies *et al.* [Mat97a], ne semble pas poser de difficulté dans [Sud00] et fait même l'objet de différentes applications dans [Cho00] (plaque dont le module d'élasticité longitudinal et l'épaisseur sont aléatoires), à condition de pratiquer la perturbation au second ordre, *i.e.* en prenant en compte des dérivées secondes dans (2.30) ou (2.34).

Bien qu'il soit délicat d'estimer numériquement des dérivées d'ordre supérieur ou égal à deux, un développement au second ordre est en fait souvent nécessaire pour une estimation précise des moments de la réponse mécanique recherchée (par exemple, Liu *et al.* [Liu87]). Les développements au second ordre furent aussi appliqués à de nombreux problèmes de transfert de chaleur (Kaminski [Kam04], Hien et Kleiber [Kam04]) ou d'optimisation de structures (Lee [Lee88]).

Kaminski [Kam04] pose les bases d'une approche par perturbations généralisée à un ordre quelconque, en s'appuyant sur une formulation variationnelle. L'auteur applique son approche à une barre élasto-plastique en traction.

Une extension de la méthode classique de perturbations a été développée par Elishakoff *et al.* [Eli95a]. Cette démarche a été appliquée sur les exemples simples d'une structure à deux barres et une barre en traction. Cette *méthode de perturbation améliorée (improved FEM for stochastic problems)* a été appliquée ensuite à des problèmes de poutres [Eli96, Eli99].

Une autre extension de la méthode de perturbation (Falsone et Impolonia [Fal02]) utilise une série de fractions rationnelles pour représenter le vecteur de déplacements nodaux. Cette méthode a été appliquée en considérant une discrétisation du champ de déplacement par points moyens. Une densité de probabilité exacte de la réponse analytique est aussi disponible si le nombre de degrés de liberté (ddl) par nœud est égal à un. Ces résultats sont intéressants sur de premières applications (problèmes de barres et poutres à 1 ddl (1 v.a.) [Imp03b],[Fal04a],[Fal04b]).

2.2 Autres méthodes

Nous passons en revue d'autres méthodes d'éléments finis stochastiques, sans prétendre à un relevé exhaustif des méthodes existantes.

2.2.1 La méthode de quadrature

La méthode de quadrature (Baldeweck [Bal99]) permet d'estimer les moments d'ordre i d'une v.a. $\mathbf{Z} = g(\mathbf{Y})$; cette méthode est en fait une méthode d'intégration numérique du type schéma de Gauss.

Dans le cas simplifié où les v.a. \mathbf{Z} et \mathbf{Y} sont scalaires, *i.e.* $\mathbf{Z} = Z_1 = Z$ et $\mathbf{Y} = Y_1 = Y$, la méthode de quadrature consiste alors à approcher le moment d'ordre i de la v.a. Z par une somme de la forme :

$$\mu_Z^i \simeq \sum_{k=1}^N g^i(y_k) \omega_k \quad (2.40)$$

où $(y_k, \omega_k)_{k=1, N}$ sont N couples des points et poids définis en utilisant la relation de récurrence suivante :

$$\Phi_{-1}(y) = 0 \quad ; \quad \Phi_0(y) = 1 \quad ; \quad \Phi_{j+1}(y) = (y - a_j)\Phi_j(y) - b_j\Phi_{j-1}(y) \quad (2.41)$$

Cette relation est valable pour toute famille de polynômes orthogonaux Φ_j dont le coefficient du monôme de plus haut degré est égal à 1 (cf. par exemple Guédé, [Gué01]), avec :

$$a_j = \frac{\mathbb{E}[y\Phi_j | \Phi_j]}{\Phi_j | \Phi_j} \quad ; \quad b_j = \frac{\mathbb{E}[\Phi_j | \Phi_j]}{\Phi_{j-1} | \Phi_{j-1}} \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (2.42)$$

Les poids w_k sont déduits de la relation :

$$w_k = \frac{\mathbb{E}[\Phi_{N-1} | \Phi_{N-1}]}{\frac{\partial \Phi_N}{\partial y_k}(y_k)\Phi_{N-1}(y_k)} \quad (2.43)$$

Les points y_k sont les racines des polynômes Φ_N .

Dans un cadre non linéaire, statique ou dynamique, pour un nombre modéré de v.a., la quadrature semble une alternative intéressante aux simulations. Une limite de l'approche est que le

nombre d'évaluations de la fonction f s'élève alors à N^M , où M est la dimension de \mathbf{Y} , ce qui rend les temps de calcul prohibitifs.

Nous notons enfin quelques applications à des problèmes de géotechnique (Baldeweck [Bal99]), de poutre (Guédé [Gué01]), d'une sphère sous pression (Sudret *et al.* [Sud03]), de béton armé (Baroth [Bar01]). Suite à l'estimation de plusieurs moments statistiques, une densité de probabilité de défaillance, puis une probabilité de défaillance sont éventuellement estimées.

Si la dimension M est trop grande (suite à la discrétisation de champs aléatoires par exemple, cf. § 1.2.3), les simulations de Monte-Carlo et variantes sont plus intéressantes (cf. Ghanem [Gha99a]).

2.2.2 Les méthodes des surfaces de réponse

(a) Principe

Soit une expérience (une procédure expérimentale ou par extension un modèle numérique), caractérisée par M paramètres $(y_j)_{1 \leq j \leq M}$, $M \in \mathbb{N}^*$, rassemblés dans un vecteur \mathbf{y} . On note f la fonction qui associe à \mathbf{y} le résultat de l'expérience. On suppose par commodité que ce résultat est scalaire, noté $z = f(\mathbf{y})$.

La *méthodologie des surfaces de réponses* (MSR, Myers [Mye95]) regroupe différentes techniques, ayant pour but l'approximation de f par une fonction \tilde{f} de forme simple, souvent polynomiale.

Nous notons $(\mathbf{y}^{(i)})_{1 \leq i \leq n}$, n jeux de valeurs des paramètres d'entrée \mathbf{y} (aussi appelés les points d'expérience), permettant d'engendrer n observations $(z^{(i)} = f(\mathbf{y}^{(i)}))_{1 \leq i \leq n}$ de la réponse. Dans

le cas où l'approximation \tilde{f} s'écrit comme un polynôme de degré deux, le problème de la MSR consiste à estimer les coefficients $(\beta_j)_{0 < j < P} \in \mathbb{R}$ définissant \tilde{f} , telle que :

$$\tilde{f}(\mathbf{y}) = \beta_0 + \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_M y_M + \beta_{M+1} y_1^2 + \cdots + \beta_{2M} y_M^2 + \beta_{2M+1} y_M y_1 + \cdots + \beta_P y_M y_{M-1} \quad (2.44)$$

avec $P = 1 + 2M + \frac{M(M+1)}{2}$.

Le problème d'estimation des coefficients $(\beta_j)_{0 < j < P}$ de (2.44) se résout classiquement par la méthode des moindres carrés, à partir des n points d'expérience, avec $n \gg P$. L'obtention de ces points pouvant être coûteuse, une difficulté de la MSR est de minimiser le nombre de points d'expérience à déterminer.

Myers [Mye95] précise quelques moyens d'évaluer et d'affiner la qualité de cette estimation (analyses de variance ou factorielle⁴). Ces analyses sont appliquées par exemple par Wong [Won84] (interaction sol-structure).

(b) Utilisation dans le cadre de la mécanique aléatoire

L'utilisation de la MSR en contexte probabiliste apparaît clairement dans les travaux de Faravelli [Far89]⁵. L'auteur considère tout d'abord que le système mécanique étudié peut être décrit par un modèle EF du type (1.1) p.10. Soit $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$ une v.a. gaussienne standard M -dimensionnelle et g la fonction traduisant la composée du modèle EF et de la procédure de normalisation gaussienne des v.a. modélisant les paramètres d'entrée (cf. annexe B). Une approximation $\tilde{g}(\overset{\circ}{\mathbf{X}})$ de $g(\overset{\circ}{\mathbf{X}})$ est obtenue par moindres carrés, à partir de n points d'expérience, notés $(\overset{\circ}{\mathbf{x}}^{(i)})_{1 \leq i \leq n}$. Ce type d'approximation, nommée surface de réponse (SR), est largement utilisé en fiabilité, afin

⁴Les analyses de variance et factorielle donnent respectivement des indicateurs sur les contributions relatives des différents termes et des différents facteurs $(y_i)_{1 \leq i \leq M}$ de l'approximation (2.44).

⁵Cette étude visait à estimer la durée de vie d'un élément de réacteur nucléaire.

de définir des fonctions de performance⁶ (cf. approches FORM, SORM (*first, second order reliability methods*), Der Kiureghian, [Der98]). Le coût de ce type d'approche mécano-fiabiliste (cf. Mohamed et Lemaire [Moh99, Moh00]) dépend directement du nombre d'appels à la fonction g . Un problème important concerne alors le choix des n points d'expérience $\mathbf{x}^{(i)}$ et fait l'objet de multiples travaux. Guan et Melchers [Gua01b] ou Gayton *et al.* [Gay03] donnent un aperçu de l'évolution de ces travaux (cf. entre autres : [Far89, Buc88b, Raj93, Kim97, You04]).

Une méthode de SR stochastique (MSRS) (*stochastic surface response method*) est introduite par Isukapalli *et al.* [Isu98] dans le cadre d'études expérimentales en biologie. Cette méthode consiste à projeter la réponse $g(\mathbf{X})$ sur une famille de polynômes d'Hermite (cf. annexe C) et à choisir des points d'expérience $\mathbf{x}^{(i)}$ comme les racines de ces polynômes. Cette méthode de détermination des points d'expérience est appelée méthode de collocation (*Collocation method*). Le principe de généralisation de cette MSRS aux champs aléatoires a été proposé par Mahadevan [Mah03]. Sudret *et al.* [Sud04] puis Berveiller *et al.* [Ber04] ont appliqué la MSRS pour le calcul de tassements d'une fondation et d'un tunnel, et des indices de fiabilité associés, en prenant en compte des v.a.

Cette méthode de SR sera davantage introduite dans le quatrième chapitre de la thèse.

2.2.3 Méthode fondée sur une discrétisation aléatoire par Intégrales Pondérées

La méthode fondée sur une discrétisation aléatoire par Intégrales Pondérées fut surtout développée par Deodatis [Deo91a, Gra01] et Takada [Tak90b, Tak90a]. Cette technique, appelée dans la littérature « méthode des intégrales pondérées (MIP) » (*weighted integrals method*) est à l'origine une technique de discrétisation de champs aléatoires, citée au chapitre précédent (§ 1.2.3 (a)). Par extension, les auteurs pré-cités et les états de l'art ont appelé *Méthode des Intégrales Pondérées* la MEFS incluant cette technique de discrétisation originale, associée à une technique d'estimation de moments statistiques.

La MIP applique le principe de la perturbation à la représentation de la matrice de rigidité \mathbf{K} , dépendant d'un champ aléatoire d'entrée \mathbf{G} , gaussien, stationnaire ; le vecteur des déplacements nodaux \mathbf{Q} est alors approché par un développement de Taylor au premier ordre.

Dans cette approche, la variance de \mathbf{Q} s'écrit en fonction de la densité spectrale de puissance du champ gaussien \mathbf{G} et d'une famille de fonctions appelées fonctions de variabilité de la réponse (*variability response function*). Ces fonctions sont calculables analytiquement pour le problème d'une barre dont le module d'élasticité longitudinal est modélisé par un processus gaussien (Deodatis, [Deo90a, Deo90b]). Mais le calcul pratique de cette variance reste délicat dans un cas plus général [Sud00].

Malgré cette limite, la MIP a fait l'objet de diverses applications dans le cadre des techniques de discrétisation des champs (fondation au module d'élasticité longitudinal variable et soumise à une sollicitation aléatoire, Deodatis [Deo89a] ; plaque en flexion, Graham et Deodatis [Gra98] ; coque dont les coefficients de Lamé et éventuellement l'épaisseur sont variables, Stéfanou et Papadrakakis [Ste04]).

2.2.4 Approches utilisant un développement de Neumann

Le développement de Neumann a été initialement proposé pour ses propriétés de convergence et ses facilités de programmation, par rapport à la méthode de perturbations classique

⁶Une fonction de performance peut se définir comme une v.a., décrivant respectivement la défaillance ou la non défaillance d'un système mécanique, si ses réalisations sont négatives ou positives. Par exemple, si R et S sont les v.a. modélisant la résistance du système et la sollicitation appliquée, $G = R - S$ constitue une fonction de performance possible.

(Yamasaki *et al.* [Yam88], Shinozuka et Yamasaki [Shi88b]). La v.a. \mathbf{Q} modélisant le vecteur des déplacements nodaux peut être obtenue formellement par inversion du système linéaire :

$$\mathbf{K}\mathbf{Q} = \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{Q} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} \quad (2.45)$$

Décomposons la matrice de rigidité comme la somme d'un terme moyen k_0 et d'un terme aléatoire K^* : $\mathbf{K} = k_0 + K^*$. Le développement en série tronquée de Neumann de l'inverse de la matrice de rigidité \mathbf{K} s'écrit :

$$\mathbf{K}^{-1} = [I - \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 - \mathbf{R}^3 + \dots] k_0^{-1} \quad \mathbf{R} = k_0^{-1}K^* \quad (2.46)$$

Les applications ont par exemple concerné des structures constituées de barres (Shinozuka et Deodatis [Shi88a]), une plaque soumise à une traction répartie sur un côté, dont le module d'élasticité longitudinal est un champ aléatoire bidimensionnel (Yamasaki *et al.* [Yam88]). Le développement de Neumann a été envisagé (mais non retenu) par Ghanem et Spanos [Gha91], dans le cadre de la Méthode des Éléments Finis Stochastiques Spectraux (MEFSS), que nous introduisons ci-dessous.

2.2.5 La Méthode des Éléments Finis Stochastiques Spectraux

Cette méthode est présentée de manière plus détaillée au chapitre suivant : nous nous limitons ici à l'énoncé de son principe (Ghanem et Spanos, [Gha91]).

Considérons un problème mécanique décrit par un modèle EF, qui dépend d'un paramètre aléatoire y . Soit $\mathbf{z} = f(y)$ le vecteur des déplacements nodaux, *i.e.* la réponse de ce modèle. Le paramètre y est modélisé par un champ aléatoire gaussien stationnaire Y . Ce champ fait l'objet d'une discrétisation par la méthode de Karhunen-Loève, introduite au § 1.2.3 (b). La v.a. modélisant la réponse du modèle mécanique, est ensuite projetée sur une famille de polynômes d'Hermite. Les développements du champ d'entrée et de la v.a. de sortie sont alors tronqués pour des raisons pratiques. La minimisation de l'erreur de troncature, par une méthode de Galerkin, conduit à l'écriture d'un système linéaire, dont les coefficients du développement de la v.a. de sortie sont solution.

Voici quelques améliorations successives de la MEFSS apparues ces dernières années :

- développement pour un champ d'entrée lognormal puis plusieurs champs quelconques : Ghanem [Gha99c, Gha99a] ;
- calcul systématique des moments de la réponse sans recours au calcul formel : Sudret et Der Kiureghian [Sud00] puis Baroth *et al.* [Bar03] ;
- recherche d'estimateurs d'erreurs dues à la discrétisation des champs (Ghanem et Pellissetti [Gha02], Baroth *et al.* [Bar03], Field et Grigoriu [Fie03, Fie04]) ;
- propositions d'adaptation au calcul parallèle : Matthies *et al.* [Mat04].

Une tentative de couplage entre la MEFSS et des simulations de Monte-Carlo a été proposée par Ghanem [Gha98a]. Cette idée, retenue dans leur état de l'art par Sudret et Der Kiureghian [Sud00], n'a fait à notre connaissance l'objet d'aucun travail supplémentaire.

Les applications de la MEFSS sont nombreuses, mais restent limitées à des problèmes linéaires.

De premières applications ont considéré des structures simples (poutres et plaques) [Spa89, Gha91, Gha99d], où le paramètre d'entrée incertain est un module d'élasticité longitudinal ou une rigidité flexionnelle, modélisés par un processus ou un champ gaussien ; la matrice de rigidité aléatoire doit être une fonction linéaire de ce paramètre. Les coefficients de variation, ainsi que les fonctions de densité de probabilité des déplacements sont estimés.

Des massifs de sols ont été étudiés : (i) deux couches de sols, soumises à une pression constante sur une partie de la surface, et séparées par une interface située à une profondeur variable ; cette

profondeur est modélisée par un champ gaussien, [Gha96], (ii) un massif de sol dont le module d'élasticité longitudinal est modélisé par un champ lognormal, soumis à une charge ponctuelle. Ce même modèle est exploité par Sudret et Der Kiureghian [Sud00], puis par Sudret *et al.* [Sud04].

Le problème de conduction de la chaleur a intéressé différents auteurs. Ghanem [Gha99b] puis Xiu *et al.* [Xiu02] modélisent une conductivité et une capacité thermique par des v.a. gaussiennes ou lognormales. Les seuls résultats disponibles sont les coefficients du développement sur une base de polynômes d'Hermite, sans calcul de moments. Un problème bidimensionnel est proposé comme une extension du problème précédent [Xiu03]. Récemment, Matthies [Mat04] décrit des moyens d'utiliser le calcul parallèle pour mettre en œuvre la MEFSS et l'adapte au problème précédent où la conductivité est aléatoire.

Un problème d'acoustique (équation de Helmotz) a fait l'objet d'une application de l'approche spectrale [Elm02]. La MEFSS a aussi été appliquée à plusieurs problèmes de dynamique (calcul de fonctions de transfert stochastiques, Dessombz *et al.* [Des01]; interaction sol-structure, Ghiocel et Ghanem [Ghi02]; vibrations aléatoires, Li et Ghanem [Li 97],...).

2.3 Quelques éléments de comparaison des méthodes

Il n'existe pas, à notre connaissance, d'étude comparative (*benchmark*) exhaustive relative aux MEFS. Certains travaux proposent parfois des comparaisons de quelques méthodes sur des exemples précis, mais qui restent relativement limitées. Ainsi, l'exemple simple d'une barre en traction est souvent repris [Eli95b, Cri97, De 99, Brz01, Bar03, Mra03, Kam04] : la simplicité du calcul mécanique permet une explication d'autant plus claire des notions nouvelles introduites par les MEFS. Nous utiliserons nous aussi dans cette thèse cet exemple (cf. chapitres 3 et 4).

Nous retenons dans un premier paragraphe les travaux de Baldeweck [Bal99], Brzakala [Brz01], ainsi que Sudret et Der Kiureghian [Sud00], qui ont comparé plusieurs méthodes. Dans un deuxième paragraphe, nous évoquons quelques critères de classification des MEFS possibles.

2.3.1 Comparaisons disponibles dans la littérature

- Baldeweck [Bal99] choisit une poutre bi-encastée, de raideur variable et soumise à une charge répartie sur sa longueur. La raideur est modélisée par un processus aléatoire de loi uniforme. La moyenne et la covariance de la flèche à mi-travée de la poutre sont calculées analytiquement puis par des simulations de Monte-Carlo (20 000 calculs) et trois des MEFS présentées : la méthode spectrale, celle des perturbations (ordre deux) et celle de quadrature. Les coefficients de disymétrie et d'aplatissement, liés aux quatre premiers moments de la flèche, sont de plus estimés.

Sur cet exemple, si la méthode de perturbation est plus précise en limitant la comparaison à la moyenne, c'est la méthode de quadrature qui est la plus précise dans l'estimation des quatre grandeurs pré-citées.

- Brzakala et Elishakoff [Brz01] présentent une étude comparative de MEFS sur l'exemple de la barre en traction. Le module d'élasticité longitudinal de la barre est modélisé par une v.a. uniforme. La moyenne et la variance du déplacement de l'extrémité libre de la barre sont estimées par différentes voies : les méthodes de perturbations, une approche spectrale en utilisant une projection sur une base de polynômes de Legendre⁷ et une méthode de surface de réponse

⁷Zhang et Ellingwood [Zha98a] sont à notre connaissance les seuls autres auteurs proposant aussi d'utiliser les polynômes de Legendre comme base de projection dans le cadre d'une MEFS, basée de plus sur la discrétisation d'un champ aléatoire bidimensionnel (module d'élasticité longitudinal) par une méthode de point moyen. Les auteurs étudient ainsi le déplacement d'une poutre, dont le comportement est élastique bilinéaire.

utilisant aussi ces polynômes. C'est cette dernière approche qui apparaît la plus précise.

- Sudret et Der Kiureghian [Sud00, Sud02] présentent l'étude du tassement élastique d'un massif de fondation, dont le module d'élasticité est un champ aléatoire lognormal. La moyenne et la variance du tassement sont disponibles analytiquement. La méthode spectrale ainsi que la méthode de perturbations donnent de bonnes estimations de l'écart type, à condition que les développements utilisés par ces méthodes comportent suffisamment de termes. Le temps de calcul requis pour la MEFSS est cependant bien plus élevé.

Après avoir relaté des comparaisons de MEFS menées sur des exemples précis, nous rendons compte d'éléments d'appréciation générale des principales MEFS présentées.

2.3.2 Quelques critères de classification des méthodes

L'étude des différents domaines d'application des MEFS peut conduire à de premiers critères de classification. En effet, chaque domaine d'application peut être évalué d'une part, en fonction d'un degré de non-linéarité du modèle, d'autre part en fonction d'un degré d'analyse probabiliste :

- un degré d'analyse probabiliste peut être évalué en fonction du nombre de v.a. prises en compte ; ces v.a. peuvent être indépendantes dans leur ensemble ou corrélées. Elles peuvent également provenir de la discrétisation d'un champ aléatoire ;
- un degré de non-linéarité mécanique peut être évalué en fonction du type de non-linéarité : la non-linéarité matérielle est généralement plus étudiée que la non-linéarité géométrique, car vraisemblablement plus simple à mettre en œuvre.

Un autre critère de classification pourrait être un indicateur du rapport (précision / temps de calcul), qui varie d'une méthode à l'autre. En particulier, le coût de calcul est directement lié au nombre d'appels au modèle EF. Il semble aussi d'un intérêt pratique de distinguer les méthodes modifiant ou non le modèle. Les premières méthodes exigent une étude préalable éventuellement longue de la modélisation EF.

Remarquons enfin que nous avons distingué dans le chapitre précédent les méthodes de discrétisation du champ d'entrée indépendantes ou non du maillage EF. Cette distinction pourrait être aussi un critère pratique de classification. En effet, un maillage EF important implique une discrétisation du champ qui doit aussi être importante et inversement, alors que cela n'est peut-être pas nécessaire et exige de manière certaine un coût de calcul considérable.

2.4 Conclusion du chapitre

Ce chapitre a présenté une étude bibliographique des principales Méthodes d'Eléments Finis Stochastiques (MEFS). Les MEFS sont une alternative aux simulations de Monte-Carlo, qui peuvent s'avérer en pratique trop coûteuses. Après avoir présenté les méthodes de perturbation, nous avons passé en revue les principales MEFS.

Les critères de classification des MEFS sont variables, selon le problème traité. Il peut être utile de distinguer les MEFS modifiant ou non le modèle EF d'étude : si la modification du modèle représente un certain coût, un avantage est de pouvoir parfois prendre en compte une v.a. vectorielle de grande dimension, cette v.a. vectorielle pouvant être le résultat de la discrétisation d'un champ aléatoire. Un inconvénient est que les MEFS exigeant une modification du modèle ne résolvent en pratique que des problèmes linéaires (MEFSS, MIP) ou faiblement non linéaires (perturbation) ; en revanche, les méthodes utilisant le modèle EF de manière externe peuvent *a priori* être appliquées plus rapidement à des modèles non linéaires (quadrature, FOSM, surfaces de réponse). Une limite semble alors être le nombre de v.a. prises en compte.

Revenons enfin sur les méthodes présentées :

(a) Les méthodes de perturbations sont intéressantes pour des problèmes « faiblement non linéaires », où le coefficient de variation des v.a. ou champs d'entrée n'est pas élevé (15 à 20 % maximum pour certaines applications). Le nombre de v.a. considérées en entrée doit être raisonnable.

La méthode FOSM (§ 2.1.1) s'applique sans modification du modèle EF, mais ne peut en pratique prendre en compte qu'un nombre restreint de v.a. (difficultés numériques). La méthode de perturbation classique (§ 2.1.2) s'applique à des champs aléatoires, discrétisés *a priori* par des méthodes dépendantes du maillage EF (§ 1.2.3 (a)).

(b) La méthode fondée sur une discrétisation par intégrales pondérées s'applique à l'étude de structures élastiques. Les paramètres variables peuvent être modélisés par des champs gaussiens, si la rigidité dépend linéairement de ceux-ci. Cette méthode nécessite la modification du modèle EF et dépend aussi du maillage EF. Sudret et Der Kiureghian [Sud00] soulignent d'une part, les difficultés de l'estimation de la variance de la réponse du modèle EF, eu égard à la complexité de l'expression de sa fonction de variabilité et d'autre part, un temps de calcul prohibitif pour des structures à grand nombre de *ddl*.

(c) La méthode des EFS spectraux (MEFS) est appliquée à des problèmes linéaires où l'aléa peut être modélisé par des v.a. ou par des champs gaussiens ou lognormaux, quelle que soit la covariance associée. L'approche est intéressante pour l'étude de processus gaussiens ou lognormaux, caractérisés par certaines covariances, pour lesquelles la décomposition spectrale des processus est explicite. Un grand nombre de v.a. d'entrée peut être pris en compte. Le chapitre 3 est consacré à l'étude de cette méthode et de certaines de ses possibilités.

(d) Les méthodes utilisant la méthodologie des surface de réponse sont applicables de manière externe au modèle EF ; elles sont théoriquement applicables aux champs aléatoires mais semblent ne l'être, en pratique, qu'à un nombre raisonnable de v.a. Nous étudions dans le chapitre 4 les possibilités d'une approche par surface de réponse, en contexte non linéaire.

(e) La méthode de quadrature est applicable à toute catégorie de problème mécanique. Elle s'applique de manière externe au modèle EF ; elle est simplement limitée à un nombre restreint de v.a. modélisant les paramètres d'entrée du modèle : la méthode n'est donc pas applicable en pratique à des champs aléatoires. Les coefficients de variation des v.a. d'entrée doivent être relativement modérés, suivant la non-linéarité du problème traité. Nous confronterons cette méthode dans le chapitre 4 à l'approche par surface de réponse évoquée ci-dessus.

Chapitre 3

Étude de la MEFS Spectrale

L'approche bibliographique a montré la place de la Méthode des Éléments Finis Stochastiques Spectrale (MEFSS) parmi les autres MEFS : bien qu'elle ne semble pas généralisable à l'étude des problèmes mécaniques non linéaires, cette méthode, due à Ghanem et Spanos [Gha91], reste intéressante et suscite de nombreuses recherches. Par rapport à d'autres MEFS, cette approche permet la résolution de problèmes faisant intervenir une variable aléatoire (v.a) vectorielle de grande dimension, cette v.a. pouvant être le résultat de la discrétisation d'un champ aléatoire.

Nous nous focalisons dans cette partie sur la MEFSS. Nous explicitons sa formulation dans un premier paragraphe, avant de l'appliquer à l'exemple simple d'une barre en traction, dont le module d'élasticité est modélisé par un processus puis une v.a. lognormaux. Nous développons ensuite une formulation applicable à une structure formée de poutres, puis l'appliquons à la modélisation d'un assemblage de poutres en bois par tiges collées.

3.1 La méthode des éléments finis stochastiques spectrale

La formulation originelle de cette méthode [Gha91] concerne le problème mécaniquement linéaire, à m degrés de liberté (*ddl*), défini par (1.1)-(1.2), c'est-à-dire :

$$\mathbf{k}\mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (3.1)$$

avec $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ la matrice de rigidité globale régularisée¹ du modèle, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des efforts nodaux et $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ celui des déplacements nodaux. Ce dernier est lié au champ de déplacement \mathbf{u} par la relation classique :

$$\mathbf{u}(x) = N(x)\mathbf{q} \quad (3.2)$$

où N est une fonction définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{d \times m}$, construite à partir des fonctions de forme des éléments, d désignant la dimension du champ de déplacement $u : \forall x \in \Omega, \mathbf{u}(x) \in \mathbb{R}^d, N(x) \in \mathbb{R}^{d \times m}$.

Ghanem et Spanos ont tout d'abord proposé de résoudre ce problème lorsque l'incertitude affecte uniquement le module d'élasticité longitudinal, dont \mathbf{k} dépend linéairement. Nous nous limiterons à ce cas ici.

Nous sommes donc dans la situation où la matrice de rigidité \mathbf{k} est aléatoire et par conséquent aussi le vecteur des déplacements nodaux solution \mathbf{q} . Nous les noterons désormais \mathbf{K} et \mathbf{Q} , respectivement, pour signifier ce fait. L'équation d'équilibre statique (3.1) prend alors la forme :

$$\mathbf{K} \mathbf{Q} = \mathbf{f} \quad (3.3)$$

¹par prise en compte des conditions aux limites

On notera que \mathbf{Q} est une v.a. m -dimensionnelle, quel que soit le modèle probabiliste (variable, processus ou champ aléatoire) retenu pour le module d'élasticité. Cette v.a. est appelée *vecteur aléatoire des ddl*.

De même, en vertu de (3.2), le champ de déplacement \mathbf{u} est dans tous les cas un champ aléatoire d -dimensionnel indexé sur Ω : $\mathbf{U} = (\mathbf{U}(x), x \in \Omega)$, avec, d'après (3.2), $\forall x \in \Omega$:

$$\mathbf{U}(x) = N(x)\mathbf{Q} \quad (3.4)$$

Il s'agit alors d'obtenir des approximations pour la moyenne $\mu_{\mathbf{U}}(x) = \mathbf{E}[\mathbf{U}(x)]$, la variance matricielle $V_{\mathbf{U}}(x) = \mathbf{E}[(\mathbf{U}(x) - \mu_{\mathbf{U}}(x))(\mathbf{U}(x) - \mu_{\mathbf{U}}(x))^T]$ et la fonction de covariance matricielle $C_{\mathbf{U}}(x, x') = \mathbf{E}[(\mathbf{U}(x) - \mu_{\mathbf{U}}(x))(\mathbf{U}(x') - \mu_{\mathbf{U}}(x'))^T]$ de ce champ, qui n'est *a priori* pas stationnaire (*i.e.* homogène).

3.1.1 Choix de modèles probabilistes pour le module d'élasticité

La matrice de rigidité aléatoire \mathbf{K} résulte en fait de l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires \mathbf{k}^e relatives aux éléments du maillage EF de Ω .

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N_{el}} \mathbf{A} \mathbf{K}^e \quad ; \quad \mathbf{K}^e = \int_{\Omega_e} B_e^T(x) \mathbf{D}(x) B_e(x) dx \quad (3.5)$$

où \mathbf{A} est l'opérateur d'assemblage, Ω_e le sous-ensemble de Ω occupé par l'élément fini $n^{\circ}e$, N_{el} est le nombre total d'éléments du maillage EF, $B_e(x)$ la matrice élémentaire reliant les déformations aux déplacements nodaux et $\mathbf{D}(x)$ la matrice de comportement élastique linéaire du matériau.

Dans tout ce qui suit, on supposera que \mathbf{D} est de la forme :

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} D_0 \quad (3.6)$$

où D_0 est une matrice déterministe et \mathbf{E} est une grandeur aléatoire scalaire modélisant le module d'élasticité longitudinal du matériau constitutif, que nous allons successivement supposer être :

- (i) un processus gaussien stationnaire ;
- (ii) un processus lognormal stationnaire ;
- (iii) un v.a. lognormale.

Mais avant cela, complétons la formulation (3.3) en y introduisant l'expression (3.5) de \mathbf{K} et en tenant compte de (3.6). Nous obtenons :

$$\sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_e} B_e^T(x) \mathbf{E}(x) D_0 B_e(x) dx \mathbf{Q} = \mathbf{f} \quad (3.7)$$

Par ailleurs, sachant que \mathbf{Q} est une v.a. m -dimensionnelle, nous allons commencer par en chercher une approximation appropriée à la résolution du problème probabiliste. Nous ferons ensuite le même travail pour \mathbf{E} en considérant successivement ses trois modélisations.

3.1.2 Approximation de \mathbf{Q} et \mathbf{E}

(a) Approximation de \mathbf{Q}

Ghanem et Spanos [Gha91] préconisent de construire cette approximation en utilisant un développement de \mathbf{Q} sur les chaos de Wiener. C'est ce que nous allons faire ici. Un tel développe-

ment s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} = \hat{q}_0 \Gamma_0 &+ \sum_{i_1=1}^{\infty} \hat{q}_{i_1} \Gamma_1(\overset{\circ}{\xi}_{i_1}) \\
 &+ \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \hat{q}_{i_1 i_2} \Gamma_2(\overset{\circ}{\xi}_{i_1}, \overset{\circ}{\xi}_{i_2}) \\
 &+ \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \hat{q}_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3(\overset{\circ}{\xi}_{i_1}, \overset{\circ}{\xi}_{i_2}, \overset{\circ}{\xi}_{i_3}) \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

où $(\overset{\circ}{\xi}_j)_{1 \leq j < \infty}$ est une famille de v.a. gaussiennes standard réelles, indépendantes dans leur ensemble, $\hat{q}_{i_1}, \hat{q}_{i_1 i_2}, \hat{q}_{i_1 i_2 i_3}, \dots$ sont des vecteurs déterministes m -dimensionnels et les Γ_k ($1 \leq k < \infty$) sont des polynômes s'identifiant à des polynômes d'Hermite sur \mathbb{R}^k . Rappelons qu'un chaos de Wiener d'indice d et d'ordre op est l'espace engendré par les polynômes d'Hermite sur \mathbb{R}^d d'ordre op (i.e. par tous les polynômes d'Hermite sur \mathbb{R}^d de degré de monôme le plus élevé égal à op).

On peut alors obtenir une approximation $\tilde{\mathbf{Q}}$ de \mathbf{Q} en fixant le nombre de v.a. $\overset{\circ}{\xi}_j$ à une valeur finie M , en se donnant un ordre op et en limitant le développement de \mathbf{Q} sur les chaos aux $op+1$ premiers chaos. On obtient ainsi, après réarrangement et réindiciage :

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \sum_{j=0}^{P-1} \mathbf{q}_j \Psi_j(\overset{\circ}{\xi}_j) \quad ; \tag{3.9}$$

où les coefficients \mathbf{q}_j sont à déterminer. P est lié à op et M par la relation :

$$P = P(op, M) = \sum_{k=0}^{op} C_{M-1+k}^k \tag{3.10}$$

$(\mathbf{q}_j)_{0 \leq j \leq P-1}$ est une famille de vecteurs déterministes m -dimensionnels et, $\forall j \in \{0, \dots, P-1\}$, Ψ_j est un polynôme d'Hermite sur \mathbb{R}^d et $\overset{\circ}{\xi}_j$ une v.a. gaussienne standard d -dimensionnelle, avec $1 \leq d \leq M$.

Dans toute la suite, nous poserons :

$$\underline{\Psi}_j = \Psi_j(\overset{\circ}{\xi}_j) \quad , \quad \forall j \in \{0, \dots, P-1\} \tag{3.11}$$

D'où la nouvelle expression de $\tilde{\mathbf{Q}}$:

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \sum_{j=0}^{P-1} \mathbf{q}_j \underline{\Psi}_j \tag{3.12}$$

Revenons à présent aux divers choix de modélisation probabiliste retenus pour le module d'élasticité E et, comme pour \mathbf{Q} , cherchons pour chacun d'eux une approximation appropriée à la résolution du problème.

(b) Approximation de E

• Option 1 : E est un processus gaussien stationnaire

On suppose que $E = (E(x), x \in \Omega)$ est un processus gaussien stationnaire scalaire de moyenne μ_E , d'écart type σ_E et de fonction de covariance C_E . Un tel processus peut alors

s'écrire, $\forall x \in \Omega$:

$$E(x) = \mu_E + \sigma_E \overset{\circ}{G}(x) \quad (3.13)$$

où $\overset{\circ}{G} = \left(\overset{\circ}{G}(x), x \in \Omega \right)$ est un processus gaussien stationnaire à valeurs dans \mathbb{R} , de moyenne nulle, d'écart type unité et de fonction de covariance $C_{\overset{\circ}{G}}$, telle que, $\forall u \in \Omega$:

$$C_{\overset{\circ}{G}}(u) = \frac{C_E(u)}{\sigma_E^2} \quad (3.14)$$

Pour obtenir une approximation de E , nous utilisons cette fois, toujours en suivant l'idée de Ghanem et Spanos [Gha91], un développement de Karhunen-Loève [Loè77] de ce processus.

Commençons par écrire celui du processus $\overset{\circ}{G}$. Il est de la forme :

$$\overset{\circ}{G}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(x) \overset{\circ}{X}_i \quad ; \quad x \in \Omega \quad (3.15)$$

avec $(\overset{\circ}{X}_i)_{1 \leq i < \infty}$ une famille dénombrable de copies indépendantes d'une v.a. gaussienne standard à valeurs dans \mathbb{R} et $(h_i)_{1 \leq i < \infty}$ une suite de fonctions réelles définies sur Ω , telles que, $\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \Omega$:

$$h_i(x) = \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \quad (3.16)$$

où les λ_i et f_i , valeurs et fonctions propres de la fonction de covariance $C_{\overset{\circ}{G}}$, sont solutions du problème spectral relatif à $C_{\overset{\circ}{G}}$:

$$\int_{\Omega} C_{\overset{\circ}{G}}(x_1 - x_2) f(x_2) dx_2 = \lambda f(x_1) \quad (3.17)$$

avec $C_{\overset{\circ}{G}}$ donnée par (3.14). De (3.13) et (3.15), on tire :

$$E(x) = \mu_E + \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) \overset{\circ}{X}_i \quad ; \quad x \in \Omega \quad (3.18)$$

qui est le développement de Karhunen-Loève de E , avec $\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \Omega$:

$$g_i(x) = \sigma_E h_i(x) = \sigma_E \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \quad (3.19)$$

Une M -approximation \tilde{E} de E s'obtient alors en tronquant le développement (3.18) à l'ordre M . D'où :

$$\tilde{E}(x) = \sum_{i=0}^M g_i(x) \overset{\circ}{X}_i \quad ; \quad x \in \Omega \quad (3.20)$$

où nous avons posé :

$$g_0(x) \equiv \mu_G \quad ; \quad \overset{\circ}{X}_0 \equiv 1 \quad p.s. \quad (3.21)$$

• **Option 2 : E est un processus lognormal stationnaire**

On suppose maintenant que $E = \left(E(x), x \in \Omega \right)$ est un processus lognormal stationnaire de moyenne μ_E , d'écart type σ_E et de fonction de covariance C_E . Un tel processus peut alors s'écrire, $\forall x \in \Omega$:

$$E(x) = \exp\left(\mu_G + \sigma_G \overset{\circ}{G}(x)\right) \quad (3.22)$$

avec :

$$\mu_G = \ln\left(\frac{\mu_E}{\sqrt{1 + a_E^2}}\right) \quad ; \quad \sigma_G^2 = \ln(1 + a_E^2) \quad ; \quad a_E = \frac{\sigma_E}{\mu_E} \quad (3.23)$$

et où $\overset{\circ}{G} = \left(\overset{\circ}{G}(x), x \in \Omega \right)$ est un processus gaussien stationnaire, de moyenne nulle, d'écart type unité et de fonction de covariance $C_{\overset{\circ}{G}}$, telle que, $\forall u \in \Omega$:

$$C_{\overset{\circ}{G}}(u) = \frac{\ln\left(1 + \frac{C_E(u)}{\mu_E^2}\right)}{\ln(1 + a_E^2)} \quad (3.24)$$

Le développement de Karhunen-Loève de $\overset{\circ}{G}$ est de la forme (3.15)-(3.16) avec les λ_i et f_i toujours solutions de (3.17) mais avec $C_{\overset{\circ}{G}}$ donnée cette fois par (3.24) et non plus par (3.14).

Une approximation \tilde{E} de E s'obtient alors en portant ce développement dans (3.22), en le tronquant à un ordre M à choisir, et en développant le processus obtenu sur les chaos de Wiener d'indice M , jusqu'à un ordre op , à choisir lui aussi. Il vient, tous calculs faits et après réarrangement :

$$\tilde{E}(x) = \sum_{j=0}^{P-1} e_j^M(x) \underline{\Psi}_j \quad ; \quad x \in \Omega \quad (3.25)$$

avec P donné par (3.10), $(\underline{\Psi}_j)_{0 \leq j \leq P-1}$ la famille de v.a. définie par (3.11) et où les coefficients $e_j^M(x)$ sont donnés par :

$$e_j^M(x) = \tilde{\mu}_E c_j^{-1} \prod_{i=1}^M (g_i(x))^{\alpha_i} \quad ; \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_M) \in \mathbb{N}^M \quad (3.26)$$

où $(\alpha_1, \dots, \alpha_M)$ est le multi-indice correspondant, dans le réindiciage utilisé, au polynôme d'Hermite Ψ_j définissant la v.a. $\underline{\Psi}_j$ (cf. (3.11)), c_j est donné par :

$$c_j = \mathbb{E}[\underline{\Psi}_j^2] = \prod_{i=1}^M \alpha_i! \quad (3.27)$$

$g_i(x)$ par (3.19), avec λ_i et f_i les éléments propres de la fonction de covariance (3.24), et $\tilde{\mu}_E$ par :

$$\tilde{\mu}_E = \exp\left(\mu_G + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M (g_i(x))^2\right) \quad (3.28)$$

• **Option 3 : E est une v.a. lognormale**

On suppose ici que E est une v.a. lognormale de moyenne μ_E et d'écart type σ_E . On peut donc l'écrire sous la forme :

$$E = \exp\left(\mu_G + \sigma_G \overset{\circ}{X}\right) \quad (3.29)$$

avec :

$$\mu_G = \ln\left(\frac{\mu_E^2}{\sqrt{1 + a_E^2}}\right) \quad ; \quad \sigma_G^2 = \ln(1 + a_E^2) \quad ; \quad a_E = \frac{\sigma_E}{\mu_E} \quad (3.30)$$

où $\overset{\circ}{X}$ est une v.a. gaussienne standard à valeurs dans \mathbb{R} .

Considérant le développement sur les chaos de Wiener de $\overset{\circ}{X}$ et introduisant ce développement dans (3.29) il vient, tous calculs faits :

$$E = \sum_{j=0}^{\infty} e_j H_j(\overset{\circ}{\xi}) \quad (3.31)$$

où $\overset{\circ}{\xi}$ est une v.a. gaussienne standard à valeurs dans \mathbb{R} , H_j est le polynôme d'Hermite sur \mathbb{R} d'ordre j et e_j est donné par :

$$e_j = \frac{1}{j!} \mathbb{E}[e^{\mu_G + \sigma_G \overset{\circ}{\xi}} H_j(\overset{\circ}{\xi})] \quad (3.32)$$

soit, après un calcul élémentaire,

$$e_j = \frac{\sigma_G^j}{j!} \exp\left(\mu_G + \frac{1}{2}\sigma_G^2\right) \quad (3.33)$$

Une approximation \tilde{E} de E s'obtient alors en tronquant le développement (3.31) à un ordre op fixé :

$$\tilde{E} = \sum_{j=0}^{P-1} e_j H_j(\overset{\circ}{\xi}) \quad (3.34)$$

avec :

$$P = P(op) = op + 1 \quad (3.35)$$

Posant :

$$\underline{H}_j = \underline{H}_j(\overset{\circ}{\xi}) \quad (3.36)$$

cette approximation prend la forme :

$$\tilde{E} = \sum_{j=0}^{P-1} e_j \underline{H}_j \quad (3.37)$$

On remarquera que c'est un cas particulier de l'approximation (3.25). En effet, pour $M = 1$: $\underline{\Psi}_j = \underline{H}_j$ et $e_j^M(x) = e_j$.

À présent que nous avons construit des approximations pour \mathbf{Q} et les trois modèles probabilistes de E , nous sommes en mesure de formuler le problème.

3.1.3 Formulation du problème

Rappelons les approximations obtenues pour \mathbf{Q} et E :

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \sum_{j=0}^{P-1} \mathbf{q}_j \underline{\Psi}_j$$

$$\tilde{E}(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^M g_i(x) \overset{\circ}{X}_i : & \text{option 1 - E processus gaussien stationnaire} \\ \sum_{j=0}^{P-1} e_j^M(x) \underline{\Psi}_j : & \text{option 2 - E processus lognormal stationnaire} \\ \tilde{E} = \sum_{j=0}^{P-1} e_j \underline{H}_j : & \text{option 3 - E v.a. lognormale} \end{cases}$$

Rappelons par ailleurs l'expression (3.7) exprimant l'équilibre statique du modèle :

$$\mathop{\text{A}}_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_e} B_e^T(x) \mathbf{E}(x) D_0 B_e(x) dx \mathbf{Q} = \mathbf{f}$$

Introduisant les approximations de \mathbf{Q} et \mathbf{E} dans cette équation, il vient :

$$\mathop{\text{A}}_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_e} B_e^T(x) \tilde{\mathbf{E}}(x) D_0 B_e(x) dx \tilde{\mathbf{Q}} \simeq \mathbf{f} \quad (3.38)$$

Considérons le résidu :

$$\varepsilon = \mathop{\text{A}}_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_e} B_e^T(x) \tilde{\mathbf{E}}(x) D_0 B_e(x) dx \tilde{\mathbf{Q}} - \mathbf{f} \quad (3.39)$$

qui s'écrit encore, pour chacune des options :

• Option 1 :

$$\varepsilon = \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^{P-1} \tilde{\mathbf{X}}_j \underline{\Psi}_k \mathbf{K}_j \mathbf{q}_k - \mathbf{f} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{K}_j = \mathop{\text{A}}_{e=1}^{N_{el}} \mathbf{K}_j^e \quad ; \quad \mathbf{K}_j^e = \int_{\Omega_e} B_e^T(x) D_0 g_j(x) B_e(x) dx \quad (3.41)$$

• Option 2 :

$$\varepsilon = \sum_{j=0}^{P-1} \sum_{k=0}^{P-1} \underline{\Psi}_j \underline{\Psi}_k \mathbf{K}_j \mathbf{q}_k - \mathbf{f} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{K}_j = \mathop{\text{A}}_{e=1}^{N_{el}} \mathbf{K}_j^e \quad ; \quad \mathbf{K}_j^e = \int_{\Omega_e} B_e^T(x) D_0 e_j^M(x) B_e(x) dx \quad (3.43)$$

• Option 3 :

$$\varepsilon = \sum_{j=0}^{P-1} \sum_{k=0}^{P-1} \underline{\mathbf{H}}_j \underline{\mathbf{H}}_k \mathbf{K}_j \mathbf{q}_k - \mathbf{f} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{K}_j = \mathop{\text{A}}_{e=1}^{N_{el}} \mathbf{K}_j^e \quad ; \quad \mathbf{K}_j^e = e_j \int_{\Omega_e} B_e^T(x) D_0 B_e(x) dx \quad (3.45)$$

En écrivant que ce résidu est orthogonal aux v.a. $\{\underline{\Psi}_n; n = 0, \dots, P-1\}$ (méthode de Galerkin), c'est-à-dire :

$$\mathbf{E}[\varepsilon \underline{\Psi}_n] = 0 \quad , \quad \forall n \in \{0, \dots, P-1\} \quad (3.46)$$

on obtient pour chacune des options, un système de la forme :

$$\sum_{k=0}^{P-1} \mathbf{K}_{n,k} \mathbf{q}_k = \mathbf{F}_n \quad ; \quad n = 0, \dots, P-1 \quad (3.47)$$

où :

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{E}[\mathbf{f} \underline{\Psi}_n] = \mathbf{f} \mathbf{E}[\underline{\Psi}_n] = \begin{cases} \mathbf{f} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.48)$$

et :

$$\mathbf{K}_{n,k} = \sum_{j=0}^J c_{nkj} \mathbf{K}_j \quad (3.49)$$

avec, $\forall(n, k, j) \in \{0, \dots, P-1\}^3$

$$c_{nkj} = \begin{cases} \mathbf{E}[\underline{\Psi}_n \underline{\Psi}_k \overset{\circ}{X}_j] : & \text{pour l'option 1} \\ \mathbf{E}[\underline{\Psi}_n \underline{\Psi}_k \underline{\Psi}_j] : & \text{pour l'option 2} \\ \mathbf{E}[\underline{H}_n \underline{H}_k \underline{H}_j] : & \text{pour l'option 3} \end{cases} \quad (3.50)$$

$$J = \begin{cases} M & \text{pour l'option 1} \\ P-1 & \text{pour les options 2 et 3} \end{cases} \quad (3.51)$$

et K_j donné par :

- (3.41) pour l'option 1
 - (3.43) pour l'option 2
 - (3.45) pour l'option 3
- (3.52)

Notons que nous avons mis au point une procédure permettant un calcul exact et automatique des espérances figurant dans (3.50) (cf. annexe C), ce qui constitue un progrès par rapport aux procédures précédentes [Gha99a, Sud00], qui nécessitent des calculs formels lourds et délicats à intégrer dans un programme de calcul par éléments finis.

Une fois les systèmes (3.47) résolus, les P vecteurs \mathbf{q}_j sont connus et par suite, l'approximation $\tilde{\mathbf{Q}}$ de \mathbf{Q} , donnée par (3.12) est complètement déterminée. On peut alors passer au calcul des approximations des caractéristiques du second ordre du champ de déplacement aléatoire \mathbf{U} , objectif de l'étude.

3.1.4 Caractéristiques du second ordre du champ de déplacement aléatoire

Une approximation $\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{\mathbf{U}}(x), x \in \Omega)$ du champ de déplacement aléatoire $\mathbf{U} = (\mathbf{U}(x), x \in \Omega)$ à valeurs dans \mathbb{R}^d est obtenue en remplaçant dans (3.4) la v.a. vectorielle \mathbf{Q} par son approximation $\tilde{\mathbf{Q}}$ donnée par (3.12), qui est maintenant connue. Le champ approximant $\tilde{\mathbf{U}}$ s'écrit donc, $\forall x \in \Omega$:

$$\tilde{\mathbf{U}}(x) = N(x)\tilde{\mathbf{Q}} \quad (3.53)$$

avec $\tilde{\mathbf{Q}}$ donné par (3.12). Les approximations cherchées de la moyenne $\mu_{\mathbf{U}}(x)$, de la variance matricielle $V_{\mathbf{U}}(x)$ et de la fonction de covariance matricielle $C_{\mathbf{U}}(x, x')$ du champ \mathbf{U} sont alors obtenues en prenant les caractéristiques correspondantes du champ $\tilde{\mathbf{U}}$:

$$\mu_{\mathbf{U}}(x) \simeq \mu_{\tilde{\mathbf{U}}}(x) \quad ; \quad V_{\mathbf{U}}(x) \simeq V_{\tilde{\mathbf{U}}}(x) \quad ; \quad C_{\mathbf{U}}(x, x') \simeq C_{\tilde{\mathbf{U}}}(x, x') \quad (3.54)$$

Or, d'après (3.53) :

$$\mu_{\tilde{\mathbf{U}}}(x) = \mathbf{E}[\tilde{\mathbf{U}}(x)] = N(x)\mu_{\tilde{\mathbf{Q}}} \quad (3.55)$$

$$V_{\tilde{\mathbf{U}}}(x) = \mathbf{E}[(\tilde{\mathbf{U}}(x) - \mu_{\tilde{\mathbf{U}}}(x))(\tilde{\mathbf{U}}(x) - \mu_{\tilde{\mathbf{U}}}(x))^T] = N(x)C_{\tilde{\mathbf{Q}}}N^T(x) \quad (3.56)$$

$$C_{\tilde{\mathbf{U}}}(x, x') = \mathbf{E}[(\tilde{\mathbf{U}}(x) - \mu_{\tilde{\mathbf{U}}}(x))(\tilde{\mathbf{U}}(x') - \mu_{\tilde{\mathbf{U}}}(x'))^T] = N(x)C_{\tilde{\mathbf{Q}}}N^T(x') \quad (3.57)$$

où $\mu_{\tilde{\mathbf{Q}}}$ et $C_{\tilde{\mathbf{Q}}}$ sont la moyenne et la matrice de covariance de la v.a. vectorielle $\tilde{\mathbf{Q}}$, telles que, d'après (3.12) :

$$\mu_{\tilde{\mathbf{Q}}} = \mathbf{E}[\tilde{\mathbf{Q}}] = \sum_{j=0}^{P-1} \mathbf{q}_j \mathbf{E}[\underline{\Psi}_j] = \mathbf{q}_0 \quad (3.58)$$

$$C_{\tilde{\mathbf{Q}}} = \mathbf{E}[(\tilde{\mathbf{Q}} - \mu_{\tilde{\mathbf{Q}}})(\tilde{\mathbf{Q}} - \mu_{\tilde{\mathbf{Q}}})^T] = \sum_{j=1}^{P-1} c_j \mathbf{q}_j \mathbf{q}_j^T \quad (3.59)$$

avec :

$$c_j = \mathbf{E}[\underline{\Psi}_j^2] \quad (3.60)$$

Les approximations cherchées sont finalement obtenues en portant (3.58) et (3.59) dans (3.55), (3.56) et (3.57).

3.2 Application à une barre en traction

L'objet de ce paragraphe est d'analyser la MEFSS sur l'exemple simple d'une barre en traction. Nous caractérisons la propagation des incertitudes dans le modèle mécanique par différents estimateurs d'erreurs de moyenne et variance. Nous menons alors une analyse de convergence de ces estimateurs d'erreurs en fonction de différents paramètres. Les estimateurs d'erreurs des paramètres sont calculés par rapport à des moyennes et variances analytiques, pour un module d'élasticité longitudinal modélisé par un processus, puis par une v.a., tous deux lognormaux.

3.2.1 Position du problème

Nous nous proposons d'étudier le problème suivant :

- une barre rectiligne homogène de section constante est encastree à son origine, libre à son extrémité et soumise en cette extrémité à une force de traction axiale d'intensité constante F (Fig. 3.1) ;

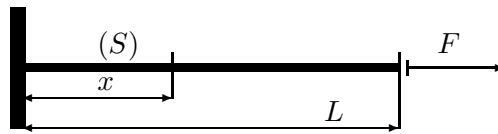


FIG. 3.1 – Barre en traction

- nous nous intéressons au déplacement longitudinal z d'une section courante de la barre, donné par :

$$z = f(x, y) = \int_0^x \frac{F}{Sy(u)} du \quad , \quad x \in [0, L] \quad (3.61)$$

où F est la force axiale de traction, x l'abscisse de la section droite, S l'aire de cette section, L la longueur de la barre et y le module d'élasticité longitudinal du matériau constitutif ; nous supposons que cette caractéristique mécanique est le paramètre incertain du modèle ;

- les paramètres déterministes ont pour valeurs : $S = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, $L = 1 \text{ m}$ et $F = 10^6 \text{ N}$;
- le paramètre incertain y est modélisé par un processus lognormal stationnaire, noté E , indexé sur $[0, L]$, de moyenne $\mu_E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, de fonction d'autocorrélation R_E , de fonction de covariance C_E , telle que $C_E(u) = R_E(u) - \mu_E^2$, et d'écart type σ_E tel que $\sigma_E = a_E \mu_E$, où a_E est le coefficient de variation de E ; alors on sait (cf. § 3.1.2 (b)) que E peut s'écrire :

$$E(x) = \exp(G(x)) \quad (3.62)$$

avec G un processus gaussien stationnaire de moyenne μ_G et d'écart type σ_G , s'écrivant :

$$G(x) = \mu_G + \sigma_G \overset{\circ}{G}(x) \quad (3.63)$$

avec :

$$\mu_G = \ln\left(\frac{\mu_E}{\sqrt{1 + a_E^2}}\right) \quad ; \quad \sigma_G^2 = \ln(1 + a_E^2) \quad (3.64)$$

et où $\overset{\circ}{G}$ est un processus gaussien stationnaire centré, de variance unité et de fonction de covariance $C_{\overset{\circ}{G}}$ donnée par :

$$C_{\overset{\circ}{G}}(u) = \frac{\ln\left(1 + \frac{C_E(u)}{\mu_E^2}\right)}{\ln(1 + a_E^2)} \quad (3.65)$$

• il en résulte que le déplacement longitudinal z est un processus indexé sur $[0, L]$, noté U , dont il est facile de montrer à partir de (3.61) qu'il est non stationnaire et que sa moyenne $\mu_U(x)$ et sa fonction d'autocorrélation $R_U(x, x')$ ont pour expressions :

$$\mu_U(x) = \gamma x \quad ; \quad \gamma = \frac{F(1 + a_E^2)}{S\mu_E} \quad (3.66)$$

$$R_U(x, x') = \gamma^2 \int_0^x \int_0^{x'} \exp\left(\sigma_G^2 C_G^\circ(u - s)\right) du ds \quad ; \quad (x, x') \in [0, L]^2 \quad (3.67)$$

La discrétisation éléments finis de la poutre conduit à écrire le processus U sous la forme :

$$U(x) = N(x)\mathbf{Q} \quad (3.68)$$

où \mathbf{Q} est le vecteur m -dimensionnel des déplacements nodaux, N une fonction définie sur $[0, L]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{1 \times m}$, construite à partir des fonctions de forme des éléments et m est le nombre de *ddl*. Dans toute la suite, le nombre de nœuds est fixé² à 5. L'estimation des moments de U se fait en estimant dans un premier temps ceux de \mathbf{Q} puis en appliquant (3.68). On obtient ainsi les expressions (3.55), (3.56) et (3.57).

3.2.2 Choix des modèles d'autocorrélation

Comme indiqué dans le paragraphe précédent, le paramètre aléatoire de l'étude est le module d'élasticité longitudinal et celui-ci est modélisé par un processus lognormal stationnaire $E = (E(x), x \in [0, L])$ indexé sur $[0, L]$. Un tel processus est donc complètement caractérisé par sa moyenne constante $\mu_E = \mathbb{E}[E(x)]$ et sa fonction d'autocorrélation $R_E(u) = \mathbb{E}[E(x+u)E(x)]$ ou, ce qui revient au même, sa fonction de covariance $C_E(u) = \mathbb{E}[(E(x+u) - \mu_E)(E(x) - \mu_E)] = R_E(u) - \mu_E^2$. La valeur de la moyenne μ_E est fixée une fois pour toutes à $2,110^{11}$ Pa. Pour la fonction d'autocorrélation, trois modèles sont possibles parmi d'autres :

• modèle A :

$$R_E^A(u) = \mu_E^2 \exp\left(\ln(1 + a_E^2) \exp\left(-\frac{|u|}{b}\right)\right) \quad , \quad |u| \in [0, L] \quad (3.69)$$

• modèle B :

$$R_E^B(u) = \begin{cases} \mu_E^2(1 + a_E^2) \exp\left(-\ln(1 + a_E^2)\frac{|u|}{u_0}\right) & \text{si } 0 \leq |u| \leq u_0 \text{ ,} \\ \mu_E^2 & \text{si } |u| \geq u_0 \text{ .} \end{cases} \quad (3.70)$$

• modèle C :

$$R_E^C(u) = \mu_E^2 \exp\left(\ln(1 + a_E^2) \exp\left(-\frac{u^2}{c}\right)\right) \quad , \quad |u| \in [0, L] \quad (3.71)$$

où b, c et u_0 sont des constantes réelles strictement positives. Nous nous limiterons aux deux premiers dans ce travail.

Rappelons qu'au processus E sont associés deux processus gaussiens stationnaires : le processus G de moyenne μ_G et d'écart type σ_G donné par (3.62) et le processus $\overset{\circ}{G}$ de moyenne nulle et d'écart type unité, tels que :

$$E(x) = \exp(G(x)) = \exp(\mu_G + \sigma_G \overset{\circ}{G}(x)) \quad (3.72)$$

²Nous rappelons que le développement de Karhunen-Loève est indépendant du maillage EF (cf. § 1.2.3 (b)) ; le problème du raffinement du maillage est donc indépendant ici ; les déplacements exacts sont de plus obtenus aux nœuds de cet élément.

le lien entre les fonctions de covariance C_E , C_G et C_G° de ces processus étant le suivant :

$$C_G^\circ(u) = \frac{C_G(u)}{\sigma_G^2} = \frac{\ln\left(1 + \frac{C_E(u)}{\mu_E^2}\right)}{\ln(1 + a_E^2)} \quad (3.73)$$

Sachant que les fonctions d'autocorrélation de $\overset{\circ}{G}$, G et E vérifient :

$$R_G^\circ(u) = C_G^\circ(u) \quad ; \quad R_G(u) = C_G(u) + \mu_G^2 \quad ; \quad R_E(u) = C_E(u) + \mu_E^2 \quad (3.74)$$

le lien précédent entre ces caractéristiques devient :

$$R_G^\circ(u) = \frac{R_G(u)}{\sigma_G^2} - a_G^2 = \frac{\ln\left(\frac{R_E(u)}{\mu_E^2}\right)}{\ln(1 + a_E^2)} \quad (3.75)$$

Par conséquent, aux modèles R_E^A , R_E^B , R_E^C de R_E sont associés les modèles suivants de R_G° :

- modèle A :

$$R_G^A(u) = C_G^A(u) = \exp\left(-\frac{|u|}{b}\right) \quad , \quad |u| \in [0, L] \quad (3.76)$$

- modèle B :

$$R_G^B(u) = C_G^B(u) = \begin{cases} 1 - \frac{|u|}{u_0} & \text{si } 0 \leq |u| \leq u_0 \text{ ,} \\ 0 & \text{si } |u| > u_0 \text{ .} \end{cases} \quad (3.77)$$

- modèle C :

$$R_G^C(u) = C_G^C(u) = \exp\left(-\frac{u^2}{c}\right) \quad , \quad |u| \in [0, L] \quad (3.78)$$

L'autocorrélation du modèle A est qualifiée d'*exponentielle*, celle du modèle B de *triangulaire* et celle du modèle C d'*exponentielle carré*³. À titre d'illustration, les trois fonctions d'autocorrélation (3.69),(3.70),(3.71) et leurs homologues (3.76),(3.77),(3.78) sont représentées graphiquement sur la figure 3.2.

3.2.3 Résolution du problème spectral

Pour construire le développement de Karhunen-Loève de $\overset{\circ}{G}$, il est nécessaire de résoudre le problème spectral (3.17) relatif à C_G° , c'est-à-dire l'équation de Fredholm en (λ, f) :

$$\int_0^L C_G^\circ(x_1 - x_2) f(x_2) dx_2 = \lambda f(x_1) \quad ; \quad (x_1, x_2) \in [0, L]^2 \quad (3.79)$$

La solution de ce problème, c'est-à-dire la famille dénombrable $(\lambda_i, f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des valeurs et fonctions propres de C_G° peut être calculée explicitement pour le modèle A et pour le modèle B si $u_0 > L$, ce que nous supposons ici. En revanche, pour le modèle C, elle doit être calculée numériquement. Nous donnons ci-dessous les résultats obtenus pour les modèles A et B (Ghanem et Spanos [Gha91]).

³L'autocorrélation exponentielle carré (*square exponential correlation function*) est utilisée dans plusieurs travaux, dont ceux de Der Kiureghian [Sud00].

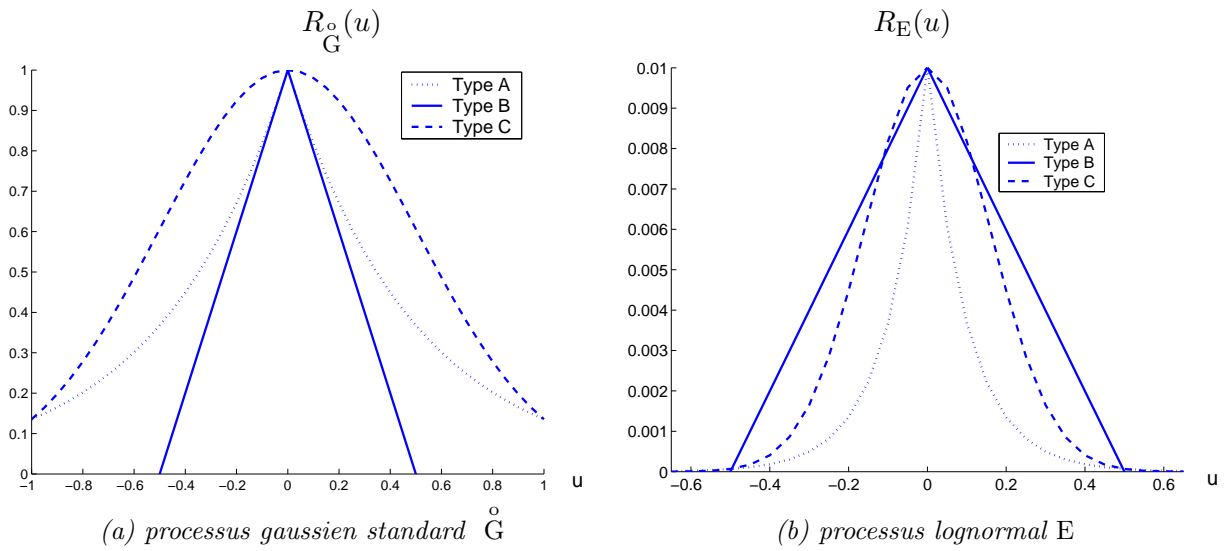


FIG. 3.2 – Fonctions d'autocorrélation du processus E et du processus gaussien standard associé
 $u_0 = b = c = 0,5$; $\mu_E = 1$; $a_E = 0,1$

- modèle A :

$$\lambda_i^A = \frac{2}{b(\frac{1}{b^2} + \omega_i^2)} ; f_i^A(x) = \begin{cases} E_i^A \cos(\omega_i x) & \text{pour } i \text{ est pair ,} \\ O_i^A \sin(\omega_i x) & \text{pour } i \text{ est impair .} \end{cases} \quad (3.80)$$

avec :

$$E_i^A = \left(L + \frac{\sin(2\omega_i L)}{2\omega_i} \right)^{-\frac{1}{2}} ; O_i^A = \left(L - \frac{\sin(2\omega_i L)}{2\omega_i} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.81)$$

les ω_i étant solutions de :

$$\begin{cases} b^{-1} - \omega \tan(\omega L) = 0 & \text{pour } i \text{ impair,} \\ \omega + b^{-1} \tan(\omega L) = 0 & \text{pour } i \text{ pair.} \end{cases}$$

- modèle B :

$$\lambda_i^B = \frac{2}{\omega_i^2 u_0} ; f_i^B(x) = \begin{cases} E_i^B \cos(\omega_i x) & \text{pour } i \text{ pair ,} \\ O_i^B \left(\cos(\omega_i x) + \tan(\frac{\omega_i L}{2}) \sin(\omega_i x) \right) & \text{pour } i \text{ impair .} \end{cases} \quad (3.82)$$

avec :

$$E_i^B = \left(\frac{L}{2} + \frac{\sin(2\omega_i L)}{2\omega_i} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.83)$$

$$O_i^B = \left(L + \left(\tan^2\left(\frac{\omega_i L}{2}\right) - 1 \right) \left(\frac{L}{2} - \frac{\sin(2\omega_i L)}{4\omega_i} + \frac{\sin^2(\omega_i L)}{\omega_i} \tan\left(\frac{\omega_i L}{2}\right) \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.84)$$

les ω_i étant solutions de :

$$\begin{cases} \omega - i\pi/L = 0 & \text{pour } i \text{ impair,} \\ \tan\left(\frac{\omega L}{2}\right) - 2(\omega(2u_0 - L))^{-1} = 0 & \text{pour } i \text{ est pair non nul.} \end{cases}$$

3.2.4 Construction des approximations

• La famille des paramètres spectraux (λ_i, f_i) de C_G° étant construite, le développement de Karhunen-Loève du processus \mathring{G} est complètement déterminé. Il s'écrit :

$$\mathring{G}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \mathring{X}_i \quad ; \quad x \in [0, L] \quad (3.85)$$

où $(\mathring{X}_i)_{1 \leq i < \infty}$ est une famille dénombrable de copies indépendantes d'une v.a. gaussienne scalaire standard.

• On en déduit le développement de Karhunen-Loève du processus gaussien stationnaire $G = \mu_G + \sigma_G \mathring{G}$:

$$G(x) = \mu_G + \sigma_G \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \mathring{X}_i \quad ; \quad x \in [0, L] \quad (3.86)$$

et par suite le processus lognormal stationnaire $E = \exp(G)$ peut s'écrire :

$$E(x) = \exp\left(\mu_G + \sigma_G \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \mathring{X}_i\right) \quad ; \quad x \in [0, L] \quad (3.87)$$

Une M -approximation \tilde{G} de G est obtenue en tronquant le développement de Karhunen-Loève (3.86) à l'ordre M :

$$\tilde{G}(x) = \mu_G + \sigma_G \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \mathring{X}_i \quad ; \quad x \in [0, L] \quad (3.88)$$

• L'approximation correspondante \tilde{E} de E s'en déduit :

$$\tilde{E}(x) = \exp\left(\mu_G + \sigma_G \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \mathring{X}_i\right) \quad ; \quad x \in [0, L] \quad (3.89)$$

expression qui s'écrit, projetée sur les chaos jusqu'à l'ordre op :

$$\tilde{E}(x) = \sum_{j=0}^{P-1} e_j^M(x) \underline{\Psi}_j \quad ; \quad x \in [0, L] \quad (3.90)$$

où les $\underline{\Psi}_j$ sont des v.a. orthogonales définies en (3.11), telles que $\mathbb{E}[\underline{\Psi}_0] = 1$ et $\mathbb{E}[\underline{\Psi}_j] = 0$ pour $j > 1$; les fonctions e_j^M sont données en (3.26) et l'ordre P de l'approximation est lié à M et à l'ordre op du chaos polynomial retenu à travers la relation (3.10).

Observons que l'on pourrait obtenir une autre approximation $\tilde{\tilde{E}}$ de E en construisant directement le développement de Karhunen-Loève de ce processus et en le tronquant à un ordre M choisi. On obtiendrait ainsi :

$$\tilde{\tilde{E}}(x) = \mu_E + \sigma_E \sum_{j=1}^M \sqrt{\beta_j} F_j(x) \mathring{Y}_j \quad (3.91)$$

avec $(\beta_j, F_j)_{1 \leq j \leq M}$ la famille des M premières valeurs et fonctions propres de la fonction de covariance C_E de E et $(\mathring{Y}_j)_{1 \leq j \leq M}$ une M -famille de v.a. centrées et orthogonales. Mais l'inconvénient ici est que l'on ne connaît pas la loi de M -uplet $(\mathring{Y}_j)_{1 \leq j \leq M}$. C'est pourquoi cette solution n'a pas été exploitée.

3.2.5 Formulation et résolution du problème

• L'approximation visée du vecteur aléatoire inconnu \mathbf{Q} des déplacements nodaux est cherchée sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{Q}}(x) = \sum_{j=0}^{P-1} \mathbf{q}_j \underline{\Psi}_j \quad (3.92)$$

où le paramètre P et les v.a. $\underline{\Psi}_j$ sont identiques à ceux figurant dans l'approximation $\tilde{\mathbf{E}}$ de \mathbf{E} , et les \mathbf{q}_j sont des vecteurs déterministes à calculer : ce sont les inconnues du problème.

• Pour calculer les \mathbf{q}_j , on utilise la démarche exposée dans le paragraphe 3.1.3, qui conduit à la résolution du système linéaire (3.47). Une fois ce système résolu, les \mathbf{q}_j sont connus et donc aussi l'approximation $\tilde{\mathbf{Q}}$ de \mathbf{Q} .

• En utilisant la relation (3.68), on en déduit l'approximation correspondante $\tilde{\mathbf{U}}$ du champ de déplacement aléatoire \mathbf{U} , telle que :

$$\tilde{\mathbf{U}}(x) = N(x) \tilde{\mathbf{Q}} \quad (3.93)$$

• Cette relation permet de calculer explicitement la moyenne $\mu_{\tilde{\mathbf{U}}}$ et la fonction de covariance $C_{\tilde{\mathbf{U}}}$ de $\tilde{\mathbf{U}}$. On obtient :

$$\mu_{\tilde{\mathbf{U}}}(x) = N(x) \mu_{\tilde{\mathbf{Q}}} \quad (3.94)$$

$$C_{\tilde{\mathbf{U}}}(x, x') = N(x) C_{\tilde{\mathbf{Q}}} N^T(x') \quad (3.95)$$

où $\mu_{\tilde{\mathbf{Q}}}$ et $C_{\tilde{\mathbf{Q}}}$, moyenne et matrice de covariance de $\tilde{\mathbf{Q}}$, sont calculées à partir de (3.92) en utilisant les propriétés des $\underline{\Psi}_j$:

$$\mu_{\tilde{\mathbf{Q}}} = \mathbf{q}_0 \quad (3.96)$$

$$C_{\tilde{\mathbf{Q}}} = \sum_{j=1}^{P-1} c_j \mathbf{q}_j \mathbf{q}_j^T \quad (3.97)$$

avec c_j donné par (3.60).

3.2.6 Expérimentation numérique

(a) Longueur de corrélation

Pour un processus stationnaire X de moyenne μ_X , d'écart type σ_X et de fonction d'auto-corrélation R_X , on définit la longueur de corrélation⁴ l_c comme la longueur à partir de laquelle la corrélation entre les observations $X(x)$ et $X(x + l_c)$ devient négligeable pour tout x . En pratique, on la calcule comme la solution du problème d'optimisation suivant : trouver la plus petite valeur de u qui réalise l'inégalité $R_X(u) - \mu_X^2 \leq \varepsilon \sigma_X^2$ où, ε est un réel strictement positif petit fixé.

Cette caractéristique dépend bien entendu des paramètres de la fonction d'autocorrélation du processus. Ainsi, pour le processus \mathbf{E} nous concernant, et pour chacun des modèles d'auto-corrélation considérés, son expression est la suivante :

$$l_c^A = -b \ln(\alpha) \quad ; \quad l_c^B = u_0(1 - \alpha) \quad ; \quad l_c^C = \sqrt{-c \ln(\alpha)} \quad (3.98)$$

⁴L'échelle de fluctuation θ , due à Vanmarcke [Van83a], est mal adaptée dans le cas d'un processus lognormal. En effet, les relations entre θ et b (resp. c) ne sont pas analytiques.

avec :

$$\alpha = \frac{\ln(1 + \varepsilon a_E^2)}{\ln(1 + a_E^2)} \quad (3.99)$$

Un intérêt notable de ce paramètre est qu'il permet de rationaliser les comparaisons. Ainsi, si l'on veut comparer les performances ou les propriétés de plusieurs processus aléatoires dans une procédure d'approximation, il sera judicieux de régler préalablement leurs paramètres de telle sorte qu'ils aient tous la même longueur de corrélation. Le fait de rendre commune à tous ces processus la valeur d'une de leurs caractéristiques importantes est une façon de rationaliser la comparaison.

Par exemple, pour obtenir une longueur de corrélation l_c de 0,5 m avec chacun des trois modèles d'autocorrélation considérés pour le processus E, et en prenant pour ε et a_E les valeurs $\varepsilon = 10^{-2}$, $a_E = 0,1$, il faut donner aux paramètres b , u_0 et c les valeurs suivantes : $b = 0,1$ m, $u_0 = 0,5$ m, $c \simeq 0,05$ m.

(b) Erreurs d'expérimentations

En examinant la structuration de la méthode, on peut s'apercevoir qu'elle utilise des approximations à chaque étape clé de sa démarche. Rappelons-les :

1. Approximation de G (ou $\overset{\circ}{G}$, ce qui revient au même car $G = \mu_G + \sigma_G \overset{\circ}{G}$) par le processus \tilde{G} obtenu par troncature à l'ordre M du développement de Karhunen-Loève de G.
2. Approximation de $E = \exp(G)$ par le processus \tilde{E} , résultant de l'introduction de l'approximation \tilde{G} de G dans l'exponentielle précédente et du développement du processus obtenu sur les chaos de Wiener jusqu'à un ordre à choisir.
3. Approximation due au calcul numérique : intégration pour la construction des matrices de rigidité élémentaires, résolution d'un système linéaire pour le calcul des coefficients vectoriels inconnus du développement de \mathbf{Q} sur les chaos de Wiener.
4. Approximation de U (tel que $U = N(x)\mathbf{Q}$) par le champ aléatoire \tilde{U} (tel que $\tilde{U} = N(x)\tilde{\mathbf{Q}}$) résultant de l'approximation de \mathbf{Q} par son développement en chaos tronqué $\tilde{\mathbf{Q}}$.

Rappelons les expressions de ces différentes approximations :

$$\tilde{\overset{\circ}{G}}(x) = \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \overset{\circ}{X}_i \quad ; \quad x \in [0, L] \quad (3.100)$$

$$\tilde{G}(x) = \mu_G + \sigma_G \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \overset{\circ}{X}_i \quad ; \quad x \in [0, L] \quad (3.101)$$

$$\tilde{E}(x) = \sum_{j=0}^{P-1} e_j^M(x) \underline{\Psi}_j \quad ; \quad x \in [0, L] \quad (3.102)$$

$$\tilde{U}(x) = N(x)\tilde{\mathbf{Q}} = N(x) \sum_{j=0}^{P-1} \mathbf{q}_j \underline{\Psi}_j \quad ; \quad x \in [0, L] \quad (3.103)$$

Leurs moyennes et variances respectives s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{Moy}(\overset{\circ}{\tilde{G}}(x)) &= \mathbf{E}[\overset{\circ}{\tilde{G}}(x)] = 0 \\ \text{Var}(\overset{\circ}{\tilde{G}}(x)) &= \mathbf{E}[(\overset{\circ}{\tilde{G}}(x))^2] = \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} f_i^2(x) \\ \text{Moy}(\tilde{G}(x)) &= \mathbf{E}[\tilde{G}(x)] = \mu_G \\ \text{Var}(\tilde{G}(x)) &= \mathbf{E}[(\tilde{G}(x) - \mu_G)^2] = \sigma_G^2 \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} f_i^2(x) = \sigma_G^2 \text{Var}(\overset{\circ}{\tilde{G}}(x)) \\ \text{Moy}(\tilde{E}(x)) &= \mathbf{E}[\tilde{E}(x)] = e_0^M(x) \\ \text{Var}(\tilde{E}(x)) &= \mathbf{E}[(\tilde{E}(x) - e_0^M(x))^2] = \sum_{j=1}^{P-1} (e_j^M(x))^2 \mathbf{E}[\underline{\Psi}_j^2] \\ \text{Moy}(\tilde{U}(x)) &= \mathbf{E}[\tilde{U}(x)] = N(x)\mathbf{q}_0 \\ \text{Var}(\tilde{U}(x)) &= \mathbf{E}[(\tilde{U}(x) - N(x)\mathbf{q}_0)^2] = N(x) \left(\sum_{j=1}^{P-1} \mathbf{q}_j \mathbf{q}_j^T \mathbf{E}[\underline{\Psi}_j^2] \right) N^T(x) \end{aligned}$$

Si X désigne l'un des processus $\overset{\circ}{\tilde{G}}$, G , E , U et \tilde{X} son approximation, c'est-à-dire $\overset{\circ}{\tilde{G}}$, \tilde{G} , \tilde{E} , \tilde{U} , on définit l'erreur de moyenne ε_{MX} et l'erreur de variance ε_{VX} relatives à \tilde{X} par les expressions suivantes :

$$\varepsilon_{MX} = \left| 1 - \frac{\text{Moy}(\tilde{X})}{\text{Moy}(X)} \right| \quad (3.104)$$

$$\varepsilon_{VX} = \left| 1 - \frac{\text{Var}(\tilde{X})}{\text{Var}(X)} \right| \quad (3.105)$$

On a alors :

$$\varepsilon_{M\overset{\circ}{\tilde{G}}} = 0 \quad (3.106)$$

$$\varepsilon_{V\overset{\circ}{\tilde{G}}} = \left| 1 - \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} f_i^2(x) \right| \quad (3.107)$$

$$\varepsilon_{MG} = 0 \quad (3.108)$$

$$\varepsilon_{VG} = \left| 1 - \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} f_i^2(x) \right| = \varepsilon_{V\overset{\circ}{\tilde{G}}} \quad (3.109)$$

$$\varepsilon_{ME} = \left| 1 - \mu_E^{-1} e_0^M(x) \right| \quad (3.110)$$

$$\varepsilon_{VE} = \left| 1 - \sigma_E^{-2} \sum_{j=1}^{P-1} (e_j^M(x))^2 \mathbf{E}[\underline{\Psi}_j^2] \right| \quad (3.111)$$

$$\varepsilon_{MU} = \left| 1 - \mu_U^{-1} N(x)\mathbf{q}_0 \right| \quad (3.112)$$

$$\varepsilon_{VU} = \left| 1 - \sigma_U^{-2} N(x) \left(\sum_{j=1}^{P-1} \mathbf{q}_j \mathbf{q}_j^T \mathbf{E}[\underline{\Psi}_j^2] \right) N^T(x) \right| \quad (3.113)$$

où μ_U est donné par (3.66) et σ_U se déduit de (3.67).

L'objet de cette application est de tester numériquement la qualité des approximations (3.100)-(3.103) en utilisant les indicateurs ci-dessus.

Mais avant cela, observons que chacun de ces indicateurs dépend d'un certain nombre de paramètres variables (rappelons que μ_E est un paramètre fixe ayant pour valeur $2,1 \cdot 10^{11}$ Pa). Ainsi :

- ε_{VG} et ε_{VE} dépendent de a_E , l_c (longueur de corrélation du processus E) et M (nombre de termes du développement tronqué de Karhunen-Loève) ;
- ε_{ME} et ε_{VE} dépendent de a_E , l_c et des paramètres op (ordre du chaos polynomial de troncature) et M (nombre de v.a. gaussiennes standards considérées dans le développement en chaos tronqué), que nous notons désormais op_E et M_E pour spécifier qu'ils sont relatifs à E ;
- ε_{MU} et ε_{VU} dépendent de a_E , l_c , op_E , M_E et des paramètres relatifs au développement en chaos tronqué de U (ordre de troncature du chaos et nombre de v.a. gaussiennes standards considérées dans le développement), notés op_U et M_U .

Tous ces indicateurs dépendent en outre de x , abscisse du point générique du segment $[0, 1]$, et du modèle d'autocorrélation retenu pour E. Les résultats qui suivent montrent comment ils se comportent et évoluent en fonction des paramètres dont ils dépendent. Ils sont synthétisés sur les figures 3.3 à 3.10.

La figure 3.3 illustre le comportement en fonction de M et pour deux valeurs de l_c , de la fonction d'autocorrélation du processus germe approximant $\overset{\circ}{G}$ et compare cette dernière à celle du processus germe cible $\overset{\circ}{G}$. Cette comparaison est effectuée par les deux modèles d'autocorrélation retenus : le modèle exponentiel et le modèle B triangulaire.

La figure 3.4 montre l'évolution de ε_{VG} en fonction de x pour plusieurs valeurs de M et pour le modèle exponentiel, avec $l_c = 0,1$ m et $a_E = 0,1$.

La figure 3.5 présente le même type de résultat mais en y ajoutant ceux relatifs au modèle triangulaire et en considérant d'autres valeurs de M et l_c .

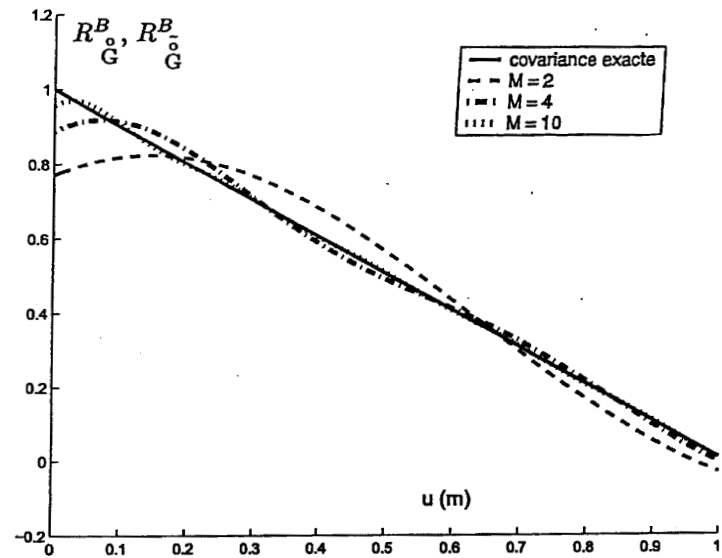
La figure 3.6 illustre à nouveau le comportement de ε_{VG} , en fonction cette fois de l_c et au point $x = L$, et ce pour les modèles A (exponentiel) et B (triangulaire) d'autocorrélation, ainsi que pour plusieurs de a_E .

La figure 3.7 montre l'évolution de ε_{VE} en fonction de x dans le cas du modèle A (exponentiel) et pour plusieurs de M_E et op_E (*i.e.* choisis égaux), avec $l_c = 1$ m et $a_E = 0,1$.

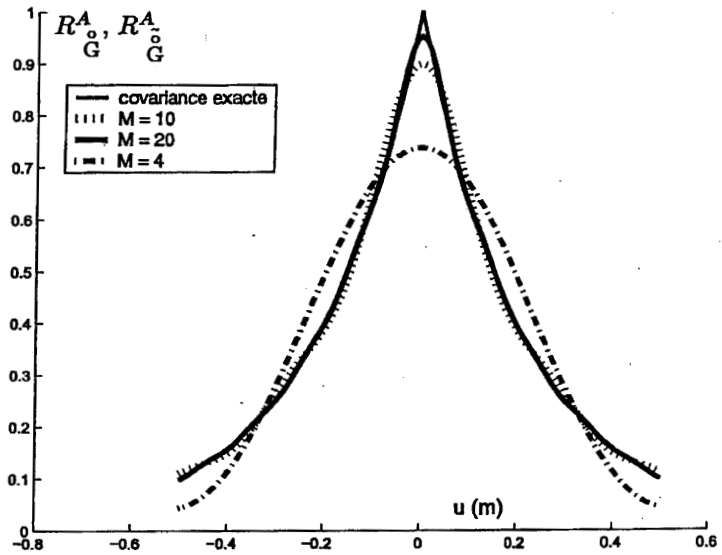
La figure 3.8 présente l'évolution, au point $x = L$, du même indicateur en fonction de op_E , pour le modèle B (triangulaire) et pour plusieurs valeurs de l_c et a_E , $M_E = 5$.

La figure 3.9 illustre l'évolution, en fonction de x , pour le modèle d'autocorrélation exponentiel, et pour plusieurs valeurs de $M_U = op_U$, de l'erreur d'écart type $\varepsilon_{\sigma U}$ relative à U, avec $l_c = 0,1$ m et $op_E = 2$, $a_E = 0,1$.

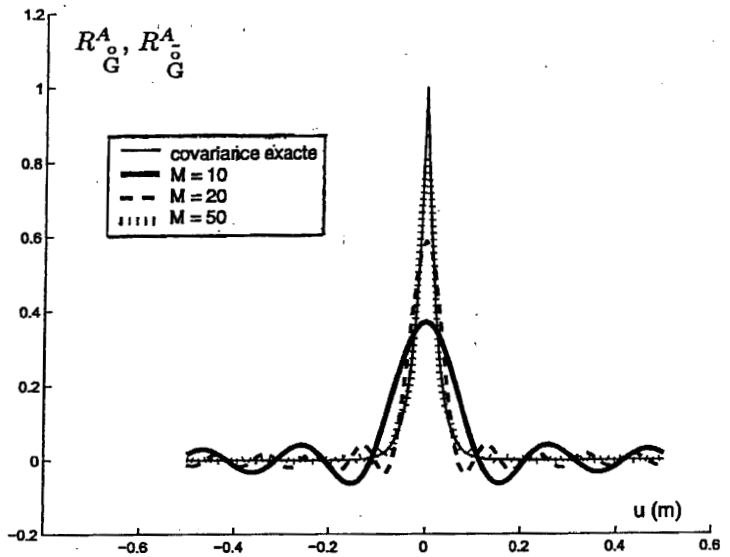
Enfin, la figure 3.10 montre l'évolution de l'écart type $\sigma_{\tilde{U}}$ de l'approximation \tilde{U} de U, en fonction de x , pour le modèle A et pour plusieurs valeurs de $M_U = M_E = op_U$, avec $l_c = 0,1$ et $op_E = 2$.



(a) fonction d'autocorrélation triangulaire (modèle B); $l_c = 1m$



(b) fonction d'autocorrélation exponentielle (modèle A); $l_c = 1m$



(c) fonction d'autocorrélation exponentielle (modèle A); $l_c = 0,1m$

FIG. 3.3 – Comportement en fonction de M de la fonction d'autocorrélation du processus approximant \hat{G} et comparaison avec celle du processus cible \check{G} , pour les modèles A et B; $a_E = 0,1$

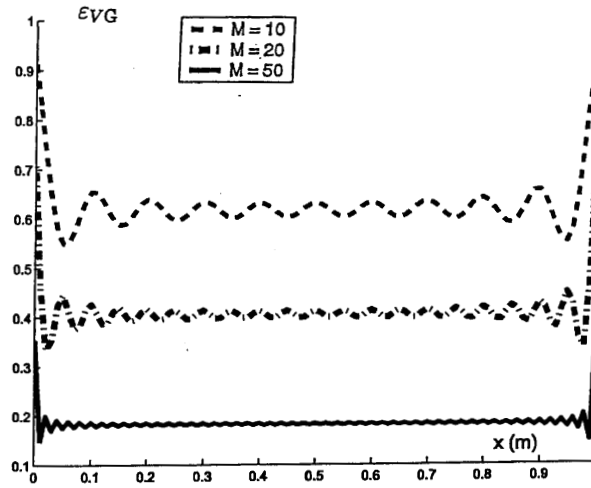


FIG. 3.4 – Évolution en fonction de x , pour plusieurs valeurs de M et pour le modèle A (exponentiel), de l'erreur de variance relative à l'approximation \tilde{G} de G ; $l_c = 0,1$ m, $a_E = 0,1$

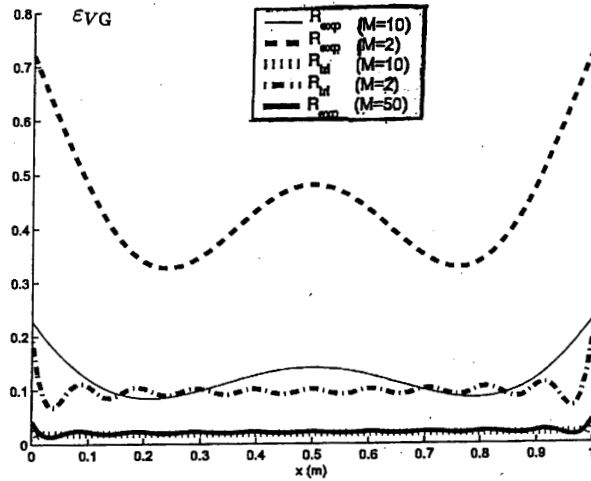


FIG. 3.5 – Évolution en fonction de x , pour plusieurs valeurs de M et pour les modèles A (exponentiel) et B (triangulaire), de l'erreur de variance relative à l'approximation \tilde{G} de G ; $l_c = 1$ m, $a_E = 0,1$

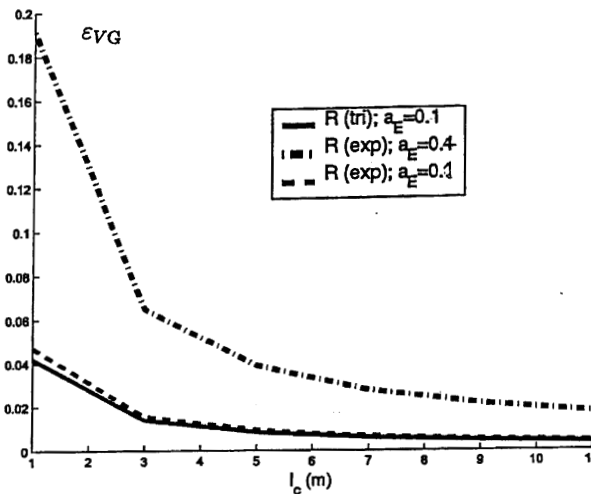


FIG. 3.6 – Évolution en fonction de l_c , pour les modèles A (exponentiel) et B (triangulaire) et pour plusieurs valeurs de a_E , de l'erreur de variance relative à l'approximation \tilde{G} de G , au point $x = L$

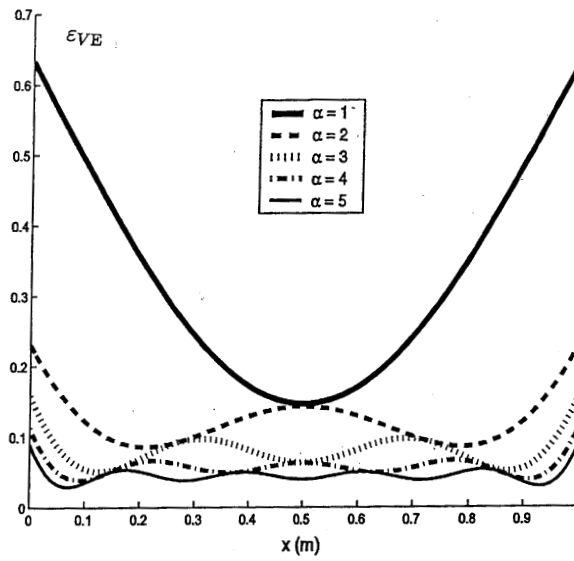


FIG. 3.7 – Évolution en fonction de x , pour le modèle A (exponentiel) et pour plusieurs valeurs de $M_E = op_E = \alpha$, de l'erreur de variance relative à l'approximation \tilde{E} de E ; $l_c = 1$ m, $a_E = 0,1$

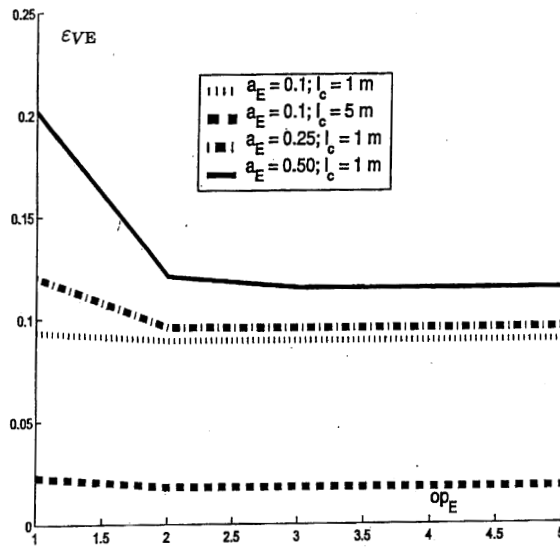


FIG. 3.8 – Évolution en fonction de op_E , pour le modèle B (triangulaire) et pour plusieurs valeurs de a_E et l_c , de l'erreur de variance relative à l'approximation \tilde{E} de E , au point $x = L$; $M_E = 5$

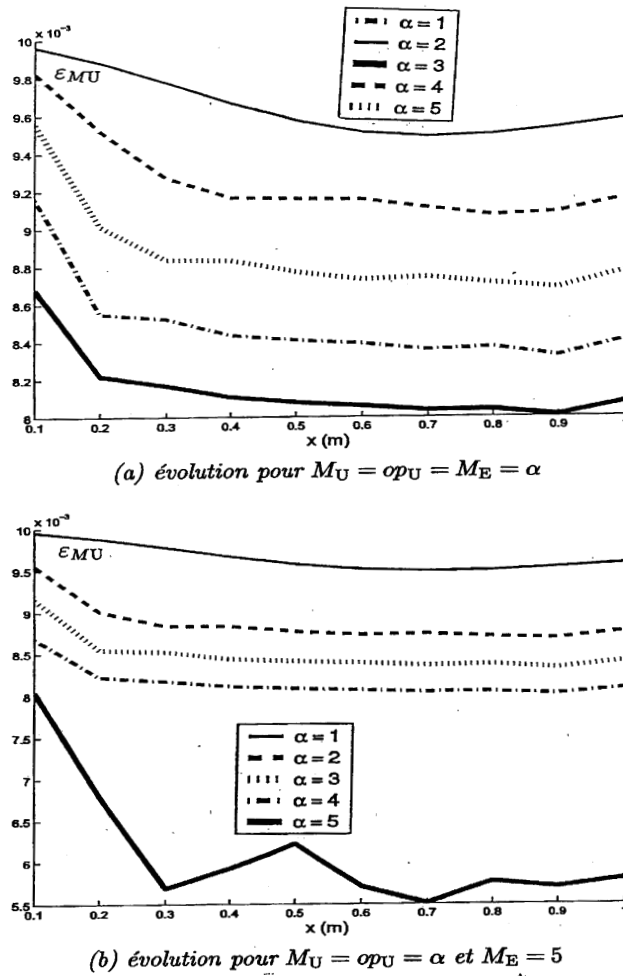


FIG. 3.9 – Évolution en fonction de x , pour le modèle A (exponentiel) et pour plusieurs valeurs de $M_U = op_U = \alpha$, de l'erreur de moyenne relative à l'approximation \tilde{U} de U ; $l_c = 0,1$ m, $op_E = 2$, $a_E = 0,1$

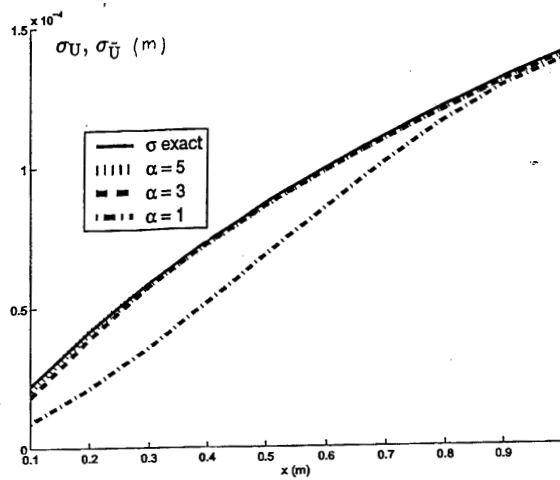


FIG. 3.10 – Évolution en fonction de x , pour le modèle A (exponentiel) et pour plusieurs valeurs de $M_U = op_U = \alpha$, de l'écart type de l'approximation \tilde{U} de U ; $l_c = 0,1$ m, $op_E = 2$, $M_E = 2$

Nous nous sommes aussi intéressés au cas où E est une variable aléatoire lognormale de moyenne $\mu_E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Pa et de coefficient de variation $a_E = \sigma_E/\mu_E$ variable (cf. § 3.1.2 (b)). Les erreurs de moyenne sur E et U engendrées par ce choix sont notées respectivement ε_{ME}^{va} et ε_{MU}^{va} . Les erreurs correspondantes de variance (sur E) et d'écart type (sur U) sont alors notées ε_{VE}^{va} et $\varepsilon_{\sigma U}^{va}$. Ces erreurs dépendent elles aussi de tous les paramètres précédents (avec M_E et M_U valant 1 cette fois). Comme dans le cas de la modélisation de E par un processus, nous nous sommes intéressés à l'évolution et au comportement des indicateurs ε_{ME}^{va} , ε_{MU}^{va} , ε_{VE}^{va} et $\varepsilon_{\sigma U}^{va}$ en fonction de ces paramètres. Les résultats obtenus sont résumés sur les figures 3.11 et 3.16.

La figure 3.11 montre l'évolution de ε_{VE}^{va} en fonction de op_E pour le modèle A (exponentiel) et pour plusieurs de a_E .

La figure 3.12 donne l'évolution de ε_{ME} et ε_{ME}^{va} en fonction de op_E , au point $x = L$, pour le modèle exponentiel avec $a_E = 0,5$. Pour ε_{ME} , plusieurs valeurs de l_c sont considérées et M_E est pris égal à 5.

Les figures 3.13 et 3.14 illustrent l'évolution de ε_{MU}^{va} et $\varepsilon_{\sigma U}^{va}$ en fonction de op_U , pour le modèle exponentiel, $x = L$ et pour plusieurs valeurs de a_E avec $op_E = 5$.

La figure 3.15 montre l'évolution de ε_{ME} et ε_{ME}^{va} en fonction de op_E , au point $x = L$, pour le modèle exponentiel avec $a_E = 0,5$. Pour ε_{ME} , plusieurs valeurs de l_c sont considérées et M_E est pris égal à 5.

Enfin, la figure 3.16 illustre l'évolution en fonction de x , pour le modèle exponentiel et $a_E = 0,1$, de l'écart type de l'approximation \tilde{U} de U lorsque E est successivement une v.a. ($M_E = M_U = 1$) puis un processus ($M_E = M_U = 5$), avec prise en compte dans ce cas de plusieurs de l_c .

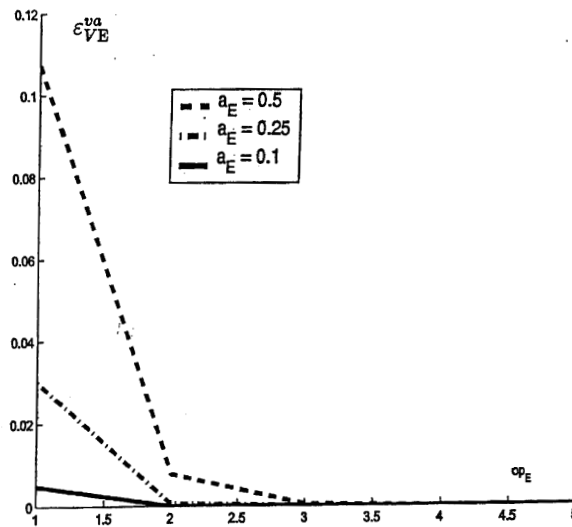


FIG. 3.11 – Évolution en fonction de op_E , pour le modèle A et pour plusieurs valeurs de a_E , de l'erreur de variance relative à l'approximation \tilde{E} de la v.a. E ; $M_E = 1$

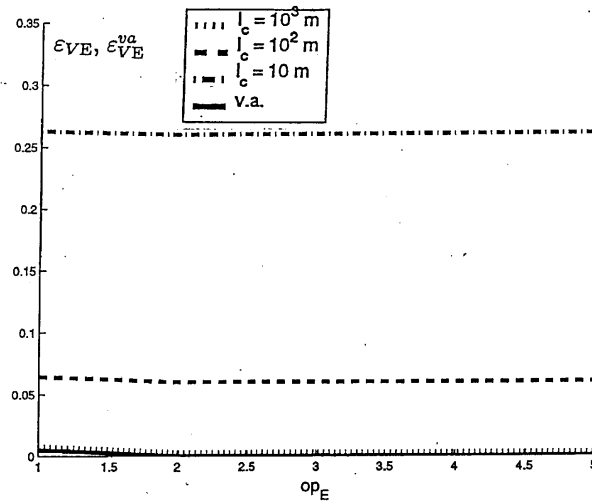


FIG. 3.12 – Évolution en fonction de op_E , pour le modèle A (exponentiel) de l'erreur de moyenne relative à l'approximation \tilde{E} de E lorsque E est successivement une v.a. ($M_E = 1$) puis un processus ($M_E = 5$, $x=L$), avec prise en compte dans ce cas de plusieurs valeurs de l_c ; $a_E = 0,1$

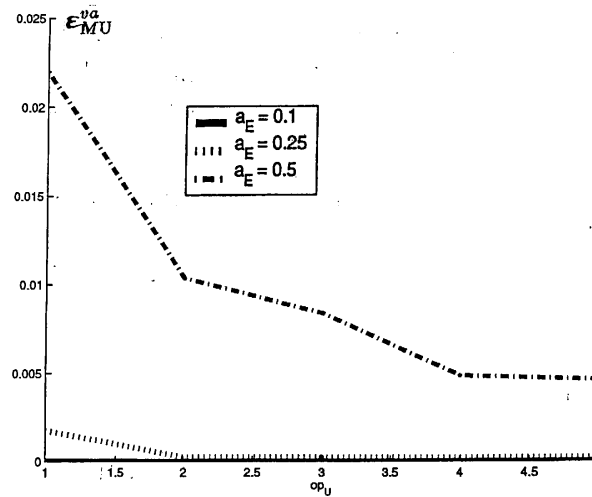


FIG. 3.13 – Évolution en fonction de op_U , pour le modèle A (exponentiel, pour $x = L$), et pour plusieurs valeurs de a_E , de l'erreur de moyenne relative à l'approximation \tilde{U} de U lorsque E est une v.a.; $M_U = M_E = 1$, $op_E = 2$

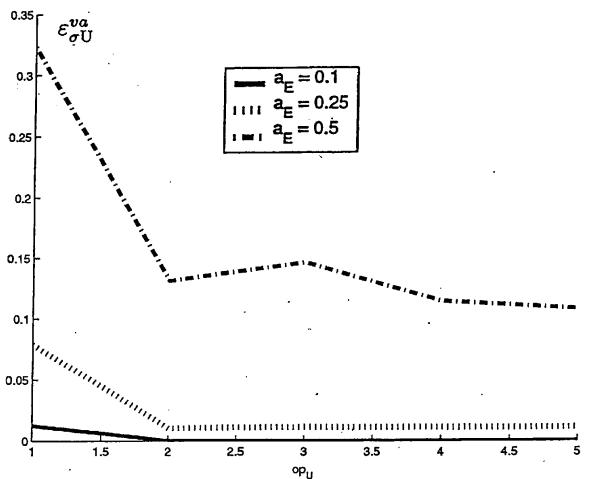


FIG. 3.14 – Évolution en fonction de op_U , pour le modèle A (exponentiel), pour $x = L$ et pour plusieurs valeurs de a_E , de l'erreur d'écart type relative à l'approximation \tilde{U} de U lorsque E est une v.a.; $M_U = M_E = 1$, $op_E = 2$

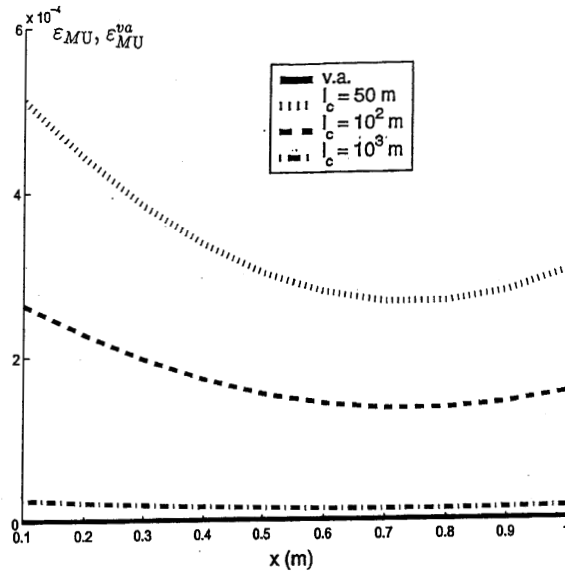


FIG. 3.15 – Évolution en fonction de x , pour le modèle A (exponentiel), de l'erreur de moyenne relative à l'approximation \tilde{U} de U lorsque E est successivement une v.a. ($M_U = M_E = 1$) puis un processus ($M_U = M_E = 5$), avec prise en compte dans ce cas de plusieurs valeurs de l_c ; $a_E = 0, 1$, $op_E = op_U = 2$

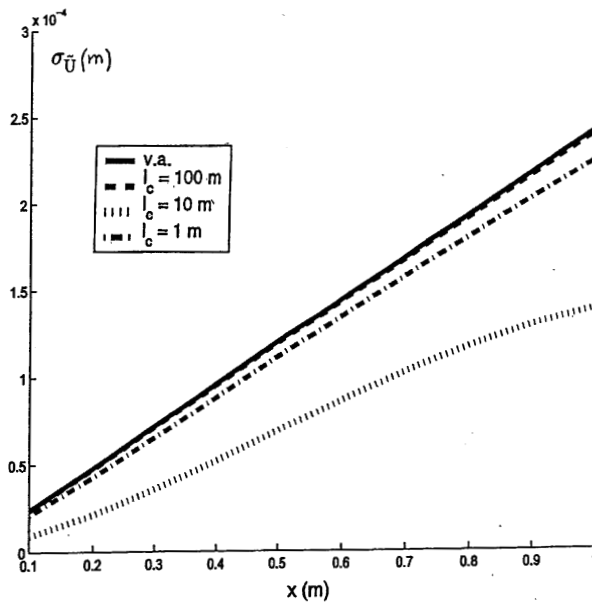


FIG. 3.16 – Évolution en fonction de x , pour le modèle A (exponentiel), de l'écart type de l'approximation \tilde{U} de U lorsque E est successivement une v.a. ($M_E = M_U = 1$) puis un processus ($M_E = M_U = 5$), avec prise en compte dans ce cas de plusieurs valeurs de l_c ; $a_E = 0, 1$, $op_E = op_U = 2$

(c) Commentaire des résultats

Les résultats obtenus appellent quelques remarques :

1. La fonction d'autocorrélation $R_{\tilde{G}}$ du processus approximant \tilde{G} converge numériquement vers la cible R_G , en fonction du nombre M de termes du développement de Karhunen-Loève, pour les modèles A et B (cf. Fig. 3.3).

Le nombre de termes nécessaire à une bonne approximation $R_{\tilde{G}}$ de R_G augmente si la longueur de corrélation l_c diminue. Nous constatons par ailleurs figures 3.6 et 3.8 que les erreurs de variance ε_{VG} et ε_{VE} augmentent si l_c diminue, pour M fixé.

Représenter un processus est donc d'autant plus coûteux qu'il est décorrélé.

2. Les figures 3.4, 3.5 et 3.7 montrent que les erreurs de variance ε_{VG} et ε_{VE} tendent vers zéro et varient moins en fonction du paramètre d'indexation x des processus G et E. Ceci est logique, car ces processus sont stationnaires et leurs variances sont donc indépendantes de x .

3. Pour une même valeur de l'erreur de variance $\varepsilon_{VG} = 0,02$, un nombre M cinq fois plus élevé de termes est nécessaire pour le modèle A (exponentiel, $M = 50$) plutôt que pour le modèle B (triangulaire, $M = 10$).

4. À la lueur de la figure 3.6, nous constatons que l'erreur ε_{VG} est plus sensible à la variation du coefficient de variation a_E du processus E qu'au modèle d'autocorrélation. L'augmentation de a_E entraîne une augmentation significative de ε_{VG} , ainsi que ε_{VE} (Fig. 3.8).

5. L'ordre $op_E = 2$ est suffisant pour décrire le processus un nombre E (Fig. 3.8). Des ordres op_E et op_U plus élevés seront *a priori* nécessaires afin d'atteindre des moments d'ordres supérieurs à 2.

6. Nous observons figure 3.9 qu'en fixant $M_E = 5$, une réduction du système (3.48) à résoudre est possible en choisissant $M_U < M_E$, sans augmenter de manière significative l'erreur ε_{MU} . Ce découplage de M_E et M_U permet donc une diminution du coût de calcul de la méthode, pour l'approximation de la moyenne μ_U .

7. L'écart type $\sigma_{\tilde{U}}$ converge numériquement vers la cible σ_U en fonction de $\alpha = M_E = M_U = op_U$, pour une longueur de corrélation l_c fixée.

8. Nous observons que le comportement du processus U est sensiblement le même si le module d'élasticité est successivement modélisé par une v.a. et un processus très corrélé. En effet, lorsque l_c augmente, les erreurs ε_{VE} , ε_{MU} et l'écart type $\sigma_{\tilde{U}}$ tendent respectivement sur les figures 3.12, 3.15 et 3.16 vers ε_{VE}^{va} , ε_{MU}^{va} et l'écart type calculé si le module d'élasticité est modélisé par une v.a.

9. Dans le cas où le module d'élasticité est modélisé par une v.a., les figures 3.12, 3.13 et 3.14 montrent respectivement les convergences numériques des erreurs ε_{VE}^{va} , ε_{MU}^{va} et $\varepsilon_{\sigma_U}^{va}$ vers zéro. Ces convergences sont plus lentes si le coefficient de variation augmente.

10. Une analyse paramétrique fine de la méthode n'est pas l'objectif de ce travail ; ces dernières remarques permettent cependant déjà de mieux comprendre la méthode et de contrôler en partie le coût de sa mise en œuvre.

3.3 Application à une structure formée de poutres

Nous traitons le problème d'une structure formée de poutres et détaillons une formulation adaptée par éléments finis spectraux, dans laquelle les paramètres aléatoires sont les modules d'élasticité longitudinaux des poutres, modélisés par des v.a. Cette formulation de la MEFSS est ensuite appliquée à l'étude d'une structure réelle : l'assemblage de poutres en bois par tiges collées.

3.3.1 Position du problème

Nous nous proposons d'étudier le problème suivant :

- la structure est constituée de M poutres droites à plan moyen chargées dans leur plan ; le cas de structures constituées de poutres et de barres pourra être traité en bloquant les *ddl* adéquats ;
- les M poutres peuvent avoir une orientation quelconque dans le plan (cf. Fig. 3.17) ; nous notons (O, \vec{X}, \vec{Y}) le repère global et $(A_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i)$ le repère local de la poutre i ;
- le chargement appliqué et la géométrie (longueurs L_i , sections S_i et moments d'inertie I_i des poutres) sont déterministes ;
- le module d'élasticité longitudinal E_i de chaque poutre i est modélisé par une v.a. lognormale d'espérance μ_{E_i} et de variance $\sigma_{E_i}^2$: $E_i \sim \mathcal{LN}(\mu_{E_i}, \sigma_{E_i}^2)$;
- nous supposons que les M v.a. E_i sont indépendantes dans leur ensemble.

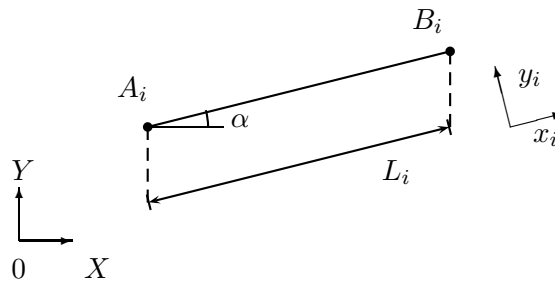


FIG. 3.17 – Poutre i : repère local et repère global

3.3.2 Formulation de la MEFSS pour un vecteur de v.a. lognormales

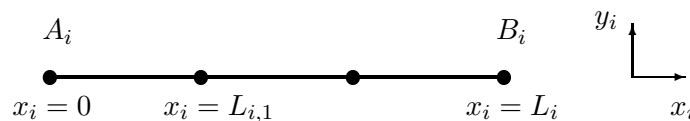


FIG. 3.18 – Discrétisation par EF de la poutre i

Chaque poutre i est discrétisée en n_i éléments finis de poutre de Bernoulli à 2 nœuds et 6 *ddl* et de longueur $L_{i,j}$ (cf. figure 3.18). La longueur L_i de la poutre i est donc égale à : $L_i = L_{i,1} + \dots + L_{i,n_i}$. Pour chaque élément de la poutre, la matrice de rigidité élémentaire dans le repère local est de la forme suivante :

$$\mathbf{k}_{i,j} = \mathbf{E}_i \tilde{\mathbf{k}}_{i,j} = \mathbf{E}_i \begin{bmatrix} \frac{S_i}{L_{i,j}} & 0 & 0 & -\frac{S_i}{L_{i,j}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I_i}{L_{i,j}^3} & \frac{6I_i}{L_{i,j}^2} & 0 & -\frac{12I_i}{L_{i,j}^3} & \frac{6I_i}{L_{i,j}^2} \\ 0 & \frac{6I_i}{L_{i,j}^2} & \frac{4I_i}{L_{i,j}} & 0 & -\frac{6I_i}{L_{i,j}^2} & \frac{2I_i}{L_{i,j}} \\ -\frac{S_i}{L_{i,j}} & 0 & 0 & \frac{S_i}{L_{i,j}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I_i}{L_{i,j}^3} & -\frac{6I_i}{L_{i,j}^2} & 0 & \frac{12I_i}{L_{i,j}^3} & -\frac{6I_i}{L_{i,j}^2} \\ 0 & \frac{6I_i}{L_{i,j}^2} & \frac{2I_i}{L_{i,j}} & 0 & -\frac{6I_i}{L_{i,j}^2} & \frac{4I_i}{L_{i,j}} \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

$\tilde{\mathbf{k}}_{i,j}$ une matrice 6×6 déterministe. La matrice de rigidité $\mathbf{K}_{i,l}$ de la poutre i dans son repère local est obtenue par assemblage des matrices de rigidité élémentaires des n_i EF de poutre à 2 nœuds qui la composent :

$$\mathbf{K}_{i,l} = \mathbf{E}_i \mathbf{A} \tilde{\mathbf{k}}_{i,j} = \mathbf{E}_i \mathcal{K}_{i,l} \quad (3.115)$$

où \mathbf{A} est l'opérateur d'assemblage et $\mathcal{K}_{i,l}$ étant une matrice $(3n_i + 1) \times (3n_i + 1)$ déterministe.

La v.a. lognormale \mathbf{E}_i est approchée par un développement sur une base de polynômes d'Hermitte définis de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , tronqué à N_i termes (cf. § 3.1.2.) :

$$\mathbf{E}_i \simeq \tilde{\mathbf{E}}_i = \sum_{j=0}^{N_i-1} e_{i,j} \mathbf{H}_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}}_i) \quad (3.116)$$

avec :

$$e_{i,j} = \exp\left(\mu_{G_i} + \frac{\sigma_{G_i}^2}{2}\right) \frac{\sigma_{G_i}^j}{j!} = \mu_{E_i} \frac{\sigma_{G_i}^j}{j!} \quad (3.117)$$

La matrice de rigidité $\mathbf{K}_{i,l}$ de la poutre i dans son repère local, définie par (3.115), est alors approchée par :

$$\mathbf{K}_{i,l} \simeq \tilde{\mathbf{K}}_{i,l} = \tilde{\mathbf{E}}_i \mathbf{A} \tilde{\mathbf{k}}_{i,j} = \tilde{\mathbf{E}}_i \mathcal{K}_{i,l} \quad (3.118)$$

Nous en déduisons l'expression de la matrice de rigidité (approchée) $\bar{\mathbf{k}}_i$ de la poutre i dans le repère global :

$$\bar{\mathbf{K}}_i = \tilde{\mathbf{E}}_i \bar{\mathcal{K}}_i = T_i^T \tilde{\mathbf{k}}_{i,l} T_i \quad (3.119)$$

où T_i est la matrice de passage $(3(n_i + 1)) \times (3(n_i + 1))$ du vecteur aléatoire des ddl de la poutre i du repère local au repère global.

La matrice de rigidité globale de la structure \mathbf{K} , exprimée dans le repère global, est ensuite obtenue par assemblage des M matrices $\bar{\mathbf{k}}_i$:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{K}}_i = \sum_{i=1}^M \bar{\mathbf{K}}_i = \sum_{i=1}^M \tilde{\mathbf{E}}_i \bar{\mathcal{K}}_i \quad (3.120)$$

où $\bar{\bar{K}}_i$ (resp. $\bar{\bar{K}}_i$) est la matrice obtenue par localisation de la matrice \bar{K}_i (resp. \bar{K}_i) :

$$\bar{\bar{K}}_i = L_i^T \bar{K}_i L_i \quad ; \quad \bar{\bar{K}}_i = L_i^T \bar{K}_i L_i$$

avec L_i la matrice de localisation des *ddl* de la poutre i .

Exprimons maintenant toutes les v.a. E_i à l'aide d'un développement tronqué sur une même base de polynômes d'Hermite définis de \mathbb{R}^M dans \mathbb{R} . Pour cela, nous supposons par simplicité que $N_i = N \forall i = 1, \dots, M$ (*i.e.* choix du même ordre de développement pour les M v.a. E_i). Pour chacune des M v.a. E_i , l'équation (3.116) devient donc :

$$E_i \simeq \tilde{E}_i = \sum_{j=0}^{N-1} e_{i,j} H_j(\overset{\circ}{X}_i) \quad (3.121)$$

où H_j est le polynôme d'Hermite sur \mathbb{R} d'ordre j . Notons $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)$ le multi-indice de \mathbb{N}^M et $\overset{\circ}{\mathbf{X}} = (\overset{\circ}{X}_1, \dots, \overset{\circ}{X}_M)$ le vecteur aléatoire formé des M v.a. $\overset{\circ}{X}_i$ gaussiennes standards, indépendantes dans leur ensemble. Notons également $\Psi_\alpha(\overset{\circ}{\mathbf{X}})$ le polynôme d'Hermite sur \mathbb{R}^M d'ordre α , tel que :

$$\Psi_\alpha(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) = \Psi_{(\alpha_1, \dots, \alpha_M)}(\overset{\circ}{X}_1, \dots, \overset{\circ}{X}_M) = \prod_{i=1}^M H_{\alpha_i}(\overset{\circ}{X}_i) \quad (3.122)$$

Observons qu'en adoptant la règle suivante :

$$\forall k, i, j \in \{1, M\} \quad ; \quad \begin{cases} \alpha_k = 0 & \text{si } k \neq i \\ \alpha_k = j & \text{si } k = i \end{cases} \quad (3.123)$$

on a l'égalité :

$$H_j(\overset{\circ}{X}_i) = \Psi_\alpha(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \quad (3.124)$$

Ainsi, nous pouvons associer aux N polynômes d'Hermite sur \mathbb{R} utilisés pour discrétiser la v.a. E_i , N polynômes d'Hermite sur \mathbb{R}^M . En remarquant que les polynômes de degré 0 sont les mêmes pour les M v.a. E_i ($H_0(\overset{\circ}{X}_i) \equiv 1, \forall i \in \{1, M\}$), on est donc conduit à considérer $P = ((N-1) \times M) + 1$ polynômes d'Hermite sur \mathbb{R}^M . Nous rappelons que, par commodité, nous choisissons d'indicer ces P polynômes par un entier plutôt que par un multi-indice de \mathbb{N}^M . Nous notons donc Ψ_k les polynômes considérés avec $k = 0, \dots, P-1$. La règle de correspondance choisie ici entre l'indice entier k et le multi-indice α qui définit le polynôme, est illustrée par le tableau 3.1. Nous avons donc la règle suivante :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pour } j = 0 \quad H_0(\overset{\circ}{X}_i) = \Psi_0(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \\ \text{Pour } j = 1, \dots, N-1 \quad H_j(\overset{\circ}{X}_i) = \Psi_k(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \text{ avec } k = (j-1) \times M + i \end{array} \right\}, \forall i \in \{1, M\} \quad (3.125)$$

Il est donc possible d'approcher les M v.a. E_i par des développements effectués avec la même famille $(\Psi_k)_{1 \leq k \leq P-1}$ de polynômes d'Hermite sur \mathbb{R}^M :

$$E_i \simeq \tilde{E}_i = \sum_{j=0}^{N-1} e_{i,j} H_j(\overset{\circ}{X}_i) = \sum_{k=0}^{P-1} y_{i,k} \Psi_k(\overset{\circ}{X}_1, \overset{\circ}{X}_2, \dots, \overset{\circ}{X}_M) \quad (3.126)$$

où les coefficients $y_{i,k}$ du nouveau développement sont définis, pour i fixé, par :

$i \backslash j$	0	1	2	...	$N-1$
1	$H_0(\overset{\circ}{X}_1) = 1 = \Psi_0(\overset{\circ}{X})$	$H_1(\overset{\circ}{X}_1) = \Psi_1(\overset{\circ}{X})$	$H_2(\overset{\circ}{X}_1) = \Psi_{M+1}(\overset{\circ}{X})$...	$H_{N-1}(\overset{\circ}{X}_1) = \Psi_{(N-2)M+1}(\overset{\circ}{X})$
2	$H_0(\overset{\circ}{X}_2) = 1 = \Psi_0(\overset{\circ}{X})$	$H_1(\overset{\circ}{X}_2) = \Psi_2(\overset{\circ}{X})$	$H_2(\overset{\circ}{X}_2) = \Psi_{M+2}(\overset{\circ}{X})$...	$H_{N-1}(\overset{\circ}{X}_2) = \Psi_{(N-2)M+2}(\overset{\circ}{X})$
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮
m	$H_0(\overset{\circ}{X}_M) = 1 = \Psi_0(\overset{\circ}{X})$	$H_1(\overset{\circ}{X}_M) = \Psi_M(\overset{\circ}{X})$	$H_2(\overset{\circ}{X}_M) = \Psi_{2m}(\overset{\circ}{X})$...	$H_{N-1}(\overset{\circ}{X}_M) = \Psi_{(N-1)M}(\overset{\circ}{X})$

TAB. 3.1 – Règle d'indexage par un entier des P polynômes d'Hermite définis de \mathbb{R}^M dans \mathbb{R} ($i =$ numéro de la poutre, $j =$ degré du polynôme)

$$\begin{aligned}
 y_{i,0} &= e_{i,0} \quad \text{si } k = 0 \\
 y_{i,k} &= e_{i,j} \quad \text{si } k = (j-1) \times M + i \text{ et } \forall 1 \leq j \leq N-1 \\
 y_{i,k} &= 0 \quad \text{sinon}
 \end{aligned} \tag{3.127}$$

D'après (3.120) et (3.126), la matrice de rigidité s'écrit alors :

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^M \sum_{k=0}^{P-1} y_{i,k} \Psi_k(\overset{\circ}{X}_1, \dots, \overset{\circ}{X}_M) \bar{\mathbf{K}}_i = \sum_{k=0}^{P-1} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^M y_{i,k} \bar{\mathbf{K}}_i \right)}_{=\mathbf{K}_k} \Psi_k(\overset{\circ}{X}_1, \dots, \overset{\circ}{X}_M) \tag{3.128}$$

d'où :

$$\mathbf{K} = \sum_{k=0}^{P-1} \mathbf{K}_k \Psi_k(\overset{\circ}{X}_1, \dots, \overset{\circ}{X}_M) \tag{3.129}$$

En développant le vecteur aléatoire des dll \mathbf{Q} sur la même base polynomiale :

$$\mathbf{Q} \simeq \sum_{l=0}^{P-1} \mathbf{q}_l \Psi_l(\overset{\circ}{X}_1, \dots, \overset{\circ}{X}_M) \tag{3.130}$$

L'équation d'équilibre discrétisée par EF s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{KQ} = \mathbf{F} &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{P-1} \mathbf{H}_k \Psi_k(\overset{\circ}{X}_1, \dots, \overset{\circ}{X}_M) \sum_{l=0}^{P-1} \mathbf{q}_l \Psi_l(\overset{\circ}{X}_1, \dots, \overset{\circ}{X}_M) = \mathbf{F} \\
 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{P-1} \sum_{l=0}^{P-1} \mathbf{H}_k \mathbf{q}_l \Psi_k(\overset{\circ}{X}) \Psi_l(\overset{\circ}{X}) = \mathbf{F}
 \end{aligned} \tag{3.131}$$

En écrivant que le résidu du système (3.131) doit être orthogonal à toutes les fonctions $(\Psi_k)_{0 < k < P-1}$ de la base de l'espace vectoriel de dimension P à l'intérieur duquel la solution \mathbf{q} est recherchée (méthode de Galerkin), nous obtenons les P relations suivantes :

$$\sum_{k=0}^{P-1} \sum_{l=0}^{P-1} d_{klr} \mathbf{H}_k \mathbf{q}_l = \mathbf{F}_r \quad \text{pour } r = 0, \dots, P-1 \tag{3.132}$$

où les espérances $d_{klr} = \mathbf{E}[\Psi_k(\overset{\circ}{\mathbf{X}})\Psi_l(\overset{\circ}{\mathbf{X}})\Psi_r(\overset{\circ}{\mathbf{X}})]$ sont définies en (3.51) p. 40 et :

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{E}[\mathbf{F}\Psi_r] = \mathbf{F} \mathbf{E}[\Psi_r] = \begin{cases} 0 & \text{si } r > 0 \\ \mathbf{F} & \text{si } r = 0 \end{cases} \quad (3.133)$$

où Ψ_k , Ψ_l et Ψ_r sont des polynômes d'Hermite définis de \mathbb{R}^M dans \mathbb{R} particuliers car il existe des couples (j_k, i_k) , (j_l, i_l) , $(j_r, i_r) \in \mathbb{N}^2$, avec $0 \leq j_k, j_l, j_r \leq N-1$ et $1 \leq i_k, i_l, i_r \leq M$ (cf. (3.125) p. 61), tels que :

$$\Psi_k(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) = H_{j_k}(\overset{\circ}{X}_{i_k}) \quad ; \quad \Psi_l(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) = H_{j_l}(\overset{\circ}{X}_{i_l}) \quad ; \quad \Psi_r(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) = H_{j_r}(\overset{\circ}{X}_{i_r})$$

Plusieurs expressions simplifiées de ces espérances sont disponibles, cf. (3.125) p. 61.

3.3.3 Calcul des moyennes et variances des *ddl* aléatoires

Les *ddl* du calcul par EF de la structure constituée de M poutres sont représentées par des v.a., formant le vecteur \mathbf{Q} ; plus exactement, puisque nous considérons que les conditions aux limites cinématiques sont toutes des conditions de type « blocage », le vecteur aléatoire \mathbf{Q} contient les v.a. des *ddl* inconnus du problème (*i.e.* non bloqués). En un nœud ne subissant aucun blocage, nous avons 3 *ddl* qui sont les déplacements selon les directions $O\vec{X}$ et $O\vec{Y}$ du repère global du plan et la rotation autour de la direction $O\vec{Z}$ ⁵. Le nombre de composantes du vecteur aléatoire des *ddl* \mathbf{Q} que nous notons m est donc égal à 3 fois le nombre total de nœuds du maillage diminué du nombre de *ddl* bloqués. Le vecteur \mathbf{Q} a été discrétisé sur la base des P polynômes d'Hermite $(\Psi_l)_{0 \leq l \leq P-1}$ (cf. (3.130)). Les P coefficients $(\mathbf{q}_l)_{0 \leq l \leq P-1}$ ont été déterminés en résolvant (3.132). Ces P coefficients \mathbf{q}_l sont des vecteurs à n_{ddl} composantes $q_{l,j}$. Ces composantes sont aussi les coefficients des développements de chaque v.a. nodale. Soit Q_j le j -ième *ddl* (non bloqué) du maillage par EF. D'après (3.130), nous avons :

$$Q_j \simeq \sum_{l=0}^{P-1} q_{l,j} \Psi_l(\overset{\circ}{X}_1, \dots, \overset{\circ}{X}_M) \quad j = 1, \dots, m \quad (3.134)$$

Nous calculons successivement les moments de la j^e v.a. nodale Q_j (espérance, variance et covariance) puis les moments des efforts internes.

(a) Moments de la j^e v.a. nodale Q_j

- La moyenne de la j^e v.a. nodale Q_j , notée $\mathbf{E}[Q_j]$ est donnée par :

$$\mathbf{E}[Q_j] = q_{0,j} \quad j = 1, \dots, m \quad (3.135)$$

- La variance de la j^e v.a. nodale Q_j est définie par :

$$\text{Var}(Q_j) = \mathbf{E}[Q_j Q_j] - (\mathbf{E}[Q_j])^2$$

D'après (3.135), il vient donc que :

$$\text{Var}(Q_j) = \mathbf{E}[Q_j Q_j] - (q_{0,j})^2 \quad (3.136)$$

De plus :

$$\mathbf{E}[Q_j Q_j] = \sum_{l=0}^{P-1} (q_{l,j})^2 \mathbf{E}[\Psi_l^2(\overset{\circ}{\mathbf{X}})] = (q_{0,j})^2 + \sum_{l=1}^{P-1} (q_{l,j})^2 \mathbf{E}[\Psi_l^2(\overset{\circ}{\mathbf{X}})] \quad (3.137)$$

⁵La direction $O\vec{Z}$ est choisie telle que $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ soit une repère Orthogonal, Normé, Direct (OND).

En injectant (3.137) dans (3.136), nous avons :

$$\text{Var}(Q_j) = \sum_{l=1}^{P-1} (q_{l,j})^2 \mathbf{E}[\Psi_l^2(\overset{\circ}{\mathbf{X}})] \quad \forall j = 1, \dots, m \quad (3.138)$$

Ici, nous avons d'après (3.125)

$$\Psi_l(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) = H_k(\overset{\circ}{X}_i) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = (l \text{ DIV } M) + 1 \\ i = l \text{ MOD } M \end{cases} \quad (3.139)$$

où DIV est l'opérateur de division entière et MOD est le reste de la division entière. Par ailleurs, nous avons $\mathbf{E}[\Psi_l^2] = \mathbf{E}[H_k^2] = k!$. Finalement :

$$\text{Var}(Q_j) = \sum_{l=1}^{P-1} (q_{l,j})^2 k! \quad \begin{cases} \forall j = 1, \dots, m \\ \text{avec } k = (l \text{ DIV } M) + 1 \end{cases} \quad (3.140)$$

• **La covariance des v.a. des ddl Q_j et Q_i est définie par :**

$$\text{Cov}(Q_j, Q_i) = \mathbf{E}[Q_j Q_i] - (\mathbf{E}[Q_j] \mathbf{E}[Q_i])$$

D'après (3.135), il vient donc que :

$$\text{Cov}(Q_j, Q_i) = \mathbf{E}[Q_j Q_i] - (q_{0,j} \times q_{0,i}) \quad (3.141)$$

De plus, nous avons :

$$\mathbf{E}[Q_j Q_i] = \sum_{l=0}^{P-1} q_{l,j} q_{l,i} \mathbf{E}[\Psi_l^2(\overset{\circ}{\mathbf{X}})] = q_{0,j} q_{0,i} + \sum_{l=1}^{P-1} (q_{l,j})^2 \mathbf{E}[\Psi_l^2(\overset{\circ}{\mathbf{X}})] \quad (3.142)$$

En injectant (3.142) dans (3.141), nous avons :

$$\text{Cov}(Q_j, Q_i) = \sum_{l=1}^{P-1} q_{l,j} q_{l,i} \mathbf{E}[\Psi_l^2(\overset{\circ}{\mathbf{X}})] \quad \forall j = 1, \dots, m \quad (3.143)$$

Il vient finalement :

$$\text{Cov}(Q_j, Q_i) = \sum_{l=1}^{P-1} q_{l,j} q_{l,i} k! \quad \begin{cases} \forall j = 1, \dots, m \\ \text{avec } k = (l \text{ DIV } M) + 1 \end{cases} \quad (3.144)$$

(b) Calcul des moments d'ordre 1 et 2 des efforts de la RdM des poutres

Considérons l'EF n^oe de la poutre k , de longueur L_e , de nœuds i et j (numérotation globale), de module d'élasticité longitudinal E_k , de section S_k et de moment d'inertie I_k .

• **Calcul des espérances $\mathbf{E}[E_k Q_j]$**

D'après (3.126) et (3.134), nous avons respectivement :

$$E_k \simeq \sum_{l=0}^{P-1} y_{k,l} \Psi_l(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \quad ; \quad Q_j \simeq \sum_{r=0}^{P-1} q_{r,j} \Psi_r(\overset{\circ}{\mathbf{X}})$$

Il vient donc que :

$$\mathbf{E}[E_k Q_j] = \mathbf{E}\left[\sum_{l=0}^{P-1} \sum_{r=0}^{P-1} y_{k,l} q_{r,j} \Psi_l \Psi_r\right] = \sum_{l=0}^{P-1} \sum_{r=0}^{P-1} y_{k,l} q_{r,j} \mathbf{E}[\Psi_l \Psi_r]$$

Or, nous savons que :

$$\mathbf{E}[\Psi_l(\dot{\mathbf{X}})\Psi_r(\dot{\mathbf{X}})] = \begin{cases} \mathbf{E}[\Psi_l^2(\dot{\mathbf{X}})] & \text{si } l = r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

nous obtenons finalement que :

$$\mathbf{E}[E_k Q_j] = \sum_{l=0}^{P-1} y_{k,l} q_{l,j} \mathbf{E}[\Psi_l^2(\dot{\mathbf{X}})] \quad (3.145)$$

• Calcul de l'espérance de l'effort normal dans un EF de poutre

Rappelons que Q_j désigne la j -ième v.a. du vecteur aléatoire des dll de la discrétisation EF de la structure. Q_j peut donc être la v.a. modélisant un déplacement (transversal ou horizontal) ou une rotation. Soit N^e l'effort normal de l'EF $n^o e$. Nous avons :

$$N^e = \sigma_x^e S_k = E_k S_k \varepsilon_x^e = E_k S_k \frac{d}{dx} [N_1 \ N_2] \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}$$

avec $N_1(x) = 1 - x/L_e$ et $N_2(x) = x/L_e$ et U_i, U_j les v.a. des déplacements axiaux des nœuds de l'EF dans le repère local de l'EF. Nous obtenons finalement :

$$N^e = \frac{E_k S_k}{L_e} (U_j - U_i) \quad (3.146)$$

d'où :

$$\mathbf{E}[N^e] = \frac{S_k}{L_e} [\mathbf{E}[E_k U_j] - \mathbf{E}[E_k U_i]] \quad (3.147)$$

où les espérances $\mathbf{E}[E_k U_j]$ et $\mathbf{E}[E_k U_i]$ sont calculées en utilisant (3.145).

• Calcul de l'espérance du moment fléchissant dans un EF de poutre

Soit M_z^e le moment fléchissant de l'EF $n^o e$. Nous avons :

$$M_z^e = -E_k I_k \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \Big|_e$$

avec :

$$V(x) \Big|_e = N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \begin{Bmatrix} V_i \\ \theta_i \\ V_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

où $V(x) \Big|_e$ désigne le processus de déplacements nodaux de l'EF $n^o e$, V_i, V_j sont les déplacements transversaux (flèches) et θ_i, θ_j les rotations des nœuds de l'EF dans le repère local de l'EF et :

$$N_3(x) = 1 - \frac{3x^2}{L_e^2} + \frac{2x^3}{L_e^3} \quad N_4(x) = x - \frac{2x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2}$$

$$N_5(x) = \frac{3x^2}{L_e^2} - \frac{2x^3}{L_e^3} \quad N_6(x) = -\frac{x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2}$$

Posant :

$$\alpha_3 = \frac{d^2 N_3}{dx^2} \quad ; \quad \alpha_4 = \frac{d^2 N_4}{dx^2} \quad ; \quad \alpha_5 = \frac{d^2 N_5}{dx^2} \quad ; \quad \alpha_6 = \frac{d^2 N_6}{dx^2}$$

nous avons :

$$\begin{aligned}\alpha_3(x) &= -\frac{6}{L_e^2} + \frac{12x}{L_e^3} & \alpha_4(x) &= -\frac{4}{L_e} + \frac{6x}{L_e^2} \\ \alpha_5(x) &= \frac{6}{L_e^2} - \frac{12x}{L_e^3} & \alpha_6(x) &= -\frac{2}{L_e} + \frac{6x}{L_e^2}\end{aligned}$$

Par suite :

$$\mathbf{E}[M_Z^e](x) = -I_k \left[\alpha_3(x) \mathbf{E}[E_k V_i] + \alpha_4(x) \mathbf{E}[E_k \theta_i] + \alpha_5(x) \mathbf{E}[E_k V_j] + \alpha_6(x) \mathbf{E}[E_k \theta_j] \right] \quad (3.148)$$

où les espérances $\mathbf{E}[E_k V_i]$, $\mathbf{E}[E_k \theta_i]$, $\mathbf{E}[E_k V_j]$ et $\mathbf{E}[E_k \theta_j]$ sont calculées en utilisant (3.145).

• Calcul des variances de l'effort normal ou du moment fléchissant

Ces calculs demandent d'exprimer les quantités du type $\mathbf{E}[E_k^2 Q_j^2]$ où $\mathbf{E}[E_k^2 Q_j Q_i]$, ce qui nécessite de savoir calculer numériquement les espérances $e_{ijkl} = \mathbf{E}[\Psi_i(\dot{\mathbf{X}}) \Psi_j(\dot{\mathbf{X}}) \Psi_k(\dot{\mathbf{X}}) \Psi_l(\dot{\mathbf{X}})]$ (annexe C).

La forme générale des espérances cherchées s'écrit :

$$\mathbf{E}[E_k^2 Q_j^2] = \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{J=0}^{P-1} \sum_{k=0}^{P-1} \sum_{l=0}^{P-1} y_{k,l}^2 q_{l,j}^2 e_{ijkl} \quad (3.149)$$

$$\mathbf{E}[E_k^2 Q_j Q_i] = \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{P-1} \sum_{k=0}^{P-1} \sum_{l=0}^{P-1} y_{k,l}^2 q_{l,j}^2 e_{iikl} \quad (3.150)$$

La variance de l'effort normal N^e s'écrit : $\sigma_{N^e}^2 = \mathbf{E}[(N^e)^2] - \mathbf{E}[N^e]^2$, avec :

$$\mathbf{E}[N^e]^2 = \frac{S_k^2}{L_e^2} \left(\mathbf{E}[E_k U_j]^2 + \mathbf{E}[E_k U_i]^2 - 2\mathbf{E}[E_k U_j] \mathbf{E}[E_k U_i] \right)$$

$$\mathbf{E}[(N^e)^2] = \frac{S_k^2}{L_e^2} \left(\mathbf{E}[E_k^2 U_j^2] + \mathbf{E}[E_k^2 U_i^2] - 2\mathbf{E}[E_k^2 U_j U_i] \right)$$

En utilisant les équations (3.149)-(3.150) et le résultat (d) de l'annexe C.2, une expression explicite de la variance est possible.

La variance du moment fléchissant M_Z^e s'écrit de la même manière : $\sigma_{M_Z^e}^2 = (\mathbf{E}[M_Z^e])^2 - \mathbf{E}[(M_Z^e)^2]$, en développant ces deux termes à partir des équations (3.148), (3.149)-(3.150).

3.3.4 Application à l'assemblage d'une poutre en bois par tiges collées

(a) Position du problème

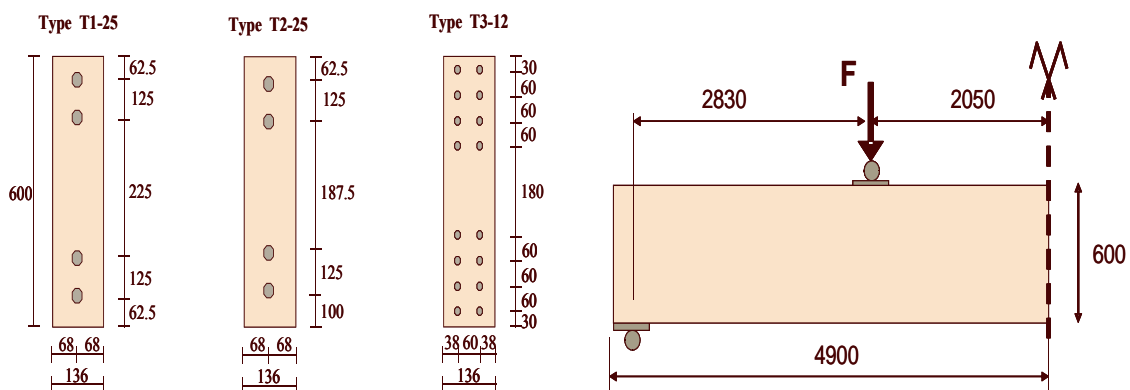
Dans le domaine de la construction bois, les tiges collées offrent une nouvelle solution d'assemblage intéressante sur des plans autant esthétique qu'économique. Récemment, un projet européen, GIROD (*Glued-In RODs for timber structures*) a été mené afin d'estimer la résistance des tiges collées en traction ou en cisaillement. Parmi les conclusions du projet, nous retenons que l'efficacité des assemblages dépend des propriétés d'interaction associées à l'essence du bois, à la couche de colle et à la tige d'acier. Afin de préciser des règles conduisant à des assemblages ductiles et fiables, des approches expérimentales et numériques sont développées. Nous rappelons quelques résultats issus d'essais sur des assemblages de poutres et en présentons une analyse préliminaire par éléments finis stochastiques. Cette analyse veut montrer la faisabilité de l'utilisation de la MEFS par une telle application pratique.

Les essais expérimentaux (Battello, [Bat02]), mettent en valeur l'effet du type des tiges sur :

- la résistance de la poutre assemblée (échelle globale) ;
- la distribution de la rigidité le long de la section de la poutre étudiée (échelle locale) ;
- le mode du type de ruine (échelle locale).

Des essais ont été menés afin de définir la capacité des assemblages par tiges collées pour conserver les caractéristiques d'une poutre continue. Considérant des sections de $136 \times 600 \text{ mm}^2$ et une classe de bois GL28h, les valeurs moyennes de la rigidité flexionnelle et du moment ultime sont respectivement : $EI = 28,4 \text{ MN.m}^2$ et $M_U = 250 \text{ MN.m}$.

Trois configurations (fig. 3.19(a)) ont été testées. Les tiges d'acier sont indentées, de diamètres 12 et 25 mm et d'une résistance S500 ($f_y = 500 \text{ MPa}$). Une colle époxy a été utilisée. Pour atteindre la ruine de l'acier, la longueur de la couche de colle sur les tiges est environ 40 fois le diamètre près des fibres externes de la poutre. Cette longueur de colle diminue linéairement de la fibre externe jusqu'à la fibre moyenne. De plus, les perçages ont un diamètre de 16 et 30 mm. La figure 3.19(b) définit le dispositif expérimental mis en œuvre pour ces essais.



(a) Sections des poutres assemblées

(b) Dispositif expérimental

FIG. 3.19 – Étude d'un assemblage de poutres en bois par tiges collées

Les résultats des essais de flexion quatre points pour les trois configurations montrent que la perte de rigidité globale de la poutre, due à la couche de colle, est limitée à 15% sans effet significatif sur la résistance de l'assemblage. À une échelle locale, la variation de profondeur des indentations des tiges induit des types de ruine par perte d'adhérence de l'acier pour les tiges de 12 mm et rupture en cisaillement du bois pour les tiges de 25 mm. À l'échelle de l'assem-

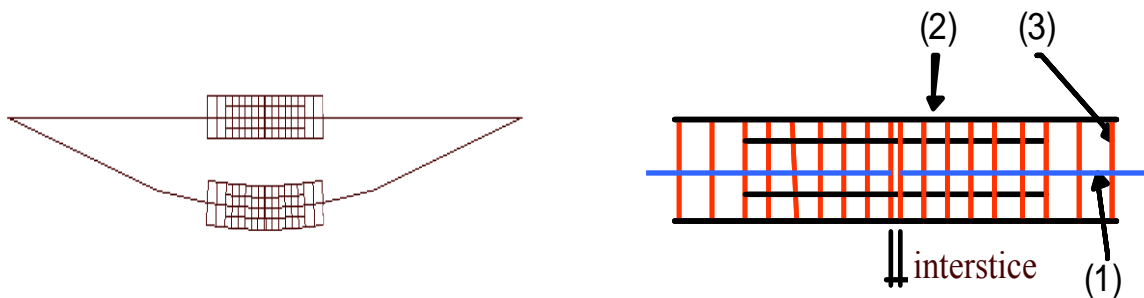
blage, les ruptures sont tout d'abord causées par l'éclatement du bois dû à la combinaison de la traction et du cisaillement. Les résultats montrent clairement qu'utiliser davantage de petites tiges (configuration T3) réduit la concentration de contrainte dans le bois [Geh01a]. En effet, la capacité de flexion de l'assemblage T3, proche de celle de la poutre en bois, est augmentée de 20% par rapport aux autres. Les contraintes transversales réduites, la capacité de déformation s'est aussi améliorée de 40% en comparaison aux assemblages comportant des tiges de 25 mm. Afin de confirmer puis compléter ces résultats, nous souhaitons construire un modèle numérique des assemblages et effectuer une étude de sensibilité par la MEFSS des efforts résistants des poutres à différents paramètres (rigidité des éléments de l'assemblage, nombre et diamètre des tiges, etc.). Dans cette optique, nous nous focalisons tout d'abord sur la configuration T1, plus simple à modéliser que la configuration T3.

(b) Le modèle EF de l'assemblage

Par simplicité autant que par réalisme, nous proposons un modèle bidimensionnel constitué d'éléments finis de poutres de Navier-Bernoulli. La définition de ces éléments permet de représenter les poutres par leur seule fibre moyenne. Trois familles d'éléments de poutre sont utilisés pour modéliser les éléments structuraux ainsi que la zone d'assemblage (fig. 3.20) :

- les éléments (1) représentent les deux parties de la poutre en lamellés collés, tenant compte de la section et de l'inertie réelles ; le module d'élasticité parallèle au fil du bois est égal à $E_1 = E_0 = 11600$ MPa ;
- le second groupe d'éléments (2) représente les tiges d'acier, de caractéristiques réelles (section, inertie et module d'élasticité longitudinal $E_2 = 2,1 \cdot 10^5$ MPa) ;
- les derniers éléments (3) relient le bois et les tiges d'acier ; le module d'élasticité longitudinal de ces éléments verticaux est pris égal à $E_3 = E_0/20$. Cette valeur correspond à un module d'élasticité transversale de la poutre en bois tenant compte de la rigidité de la couche de colle. Nous imposons une valeur relativement grande à l'inertie afin de tenir compte de l'hypothèse de Navier (même inertie que les éléments (1)).

Le maillage global (90 nœuds, 148 éléments) correspond à une poutre de type T1-25 (quatre



(a) configurations initiale et déformée

(b) agrandissement de la zone d'assemblage

FIG. 3.20 – Modélisation EF de l'assemblage

tiges modélisées par les EF de poutre (2), fig. 3.20(b)), dans sa position déformée. Les calculs numériques effectués conduisent à des résultats du même ordre de grandeur que les résultats expérimentaux. En particulier, une bonne concordance est observée entre les déflexions expérimentale et numérique à mi-travée [Bar04]. L'évolution des efforts dans les éléments verticaux (3) sont

reliés à la traction transversale causée par les tiges. Nous vérifions alors qu'un jeu de tiges de faible diamètre réduit de manière significative la traction transversale, conformément aux essais. Le modèle numérique et les essais conduisent donc à un même bilan :

- la rigidité flexionnelle des tiges de 25 mm induit une traction transversale responsable d'un éclatement du bois prématuré par rapport aux tiges de 12 mm ;
- la profondeur des indentations des tiges de 25 mm conduit à une meilleure adhérence et donc à une meilleure résistance en traction parallèle au fil du bois, par rapport aux tiges de 12 mm ;
- les tiges utilisées en groupe offrent une rigidité mieux répartie dans la poutre et plus importante dans l'ensemble.

L'analyse par EFS va désormais préciser la sensibilité de la réponse structurale de la poutre par rapport aux rigidités de ses différents composants. Nous renvoyons au paragraphe précédent pour la formulation de la méthode.

(c) Résultats de l'analyse par EFSS

Les v.a. des *ddl* Q_j , modélisant chaque *ddl* du maillage EF (déplacements et rotations aux nœuds) sont des v.a. de lois de probabilité inconnues. Ces v.a. sont approchées par des développements de polynômes d'Hermite. Les moyennes et matrice de covariance de ces v.a. peuvent être facilement approchées. Nous rappelons les expressions de la moyenne et la covariance de la v.a. du j -ième *ddl* (cf. (3.135) et (3.143)) :

$$\mathbf{E}[Q_j] = q_{0,j} \quad \text{et} \quad \text{Cov}(Q_j, Q_i) = \sum_{l=1}^{P-1} q_{l,j} q_{l,i} \mathbf{E}[\Psi_l^2]$$

Nous présentons des résultats uniquement pour la configuration T1-25 à un niveau de chargement maximal : nous comptons 6 v.a. ($m = 6$), modélisant le module d'élasticité longitudinal dans les poutres en bois et dans chacune des tiges. Pour ces calculs, la moyenne des valeurs est celle donnée dans la présentation des essais.

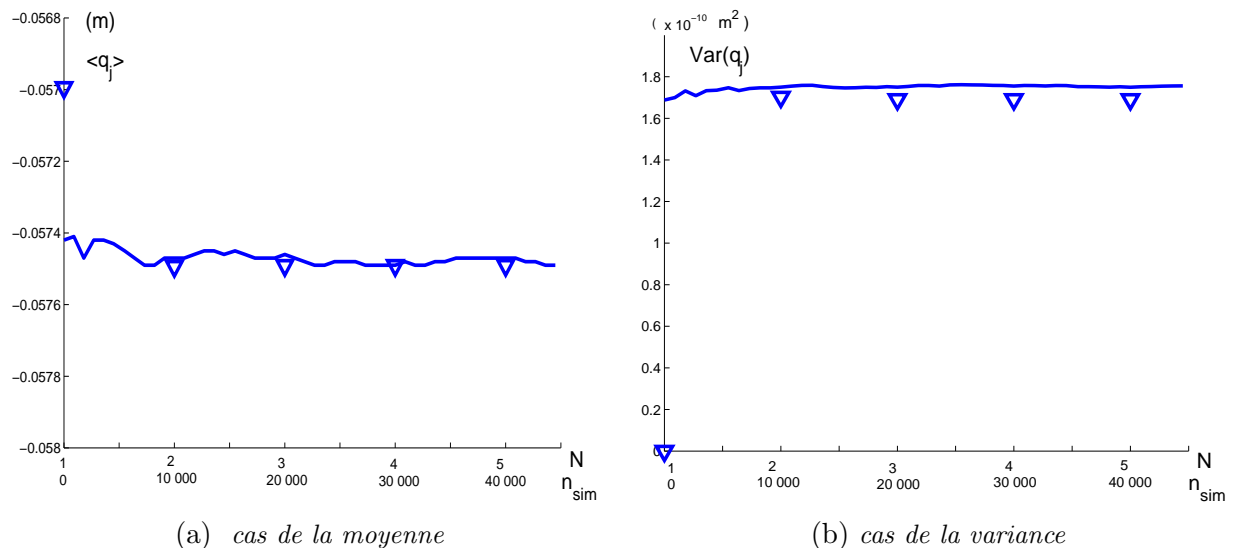


FIG. 3.21 – Convergence numérique des premiers moments en fonction de l'ordre du nombre de termes du développement d'un *ddl* (cible issue de n_{sim} simulations en trait continu)

La figure 3.21 (a) montre l'évolution de la moyenne du déplacement vertical au point d'application de la charge de gauche (cf. figure 3.19) pour différents ordres de troncature (nombre de

termes $N = 1, \dots, 5$) du développement d'un *ddl*. Le coefficient de variation est fixé à 10%. Les valeurs correspondantes (triangles sur les figures 3.21) sont comparées à la moyenne issue des simulations de Monte-Carlo, en ligne noire continue. Les résultats de la MEFSS concordent donc bien avec ceux de la simulation, l'ordre 1 mis à part (car il conduit à un calcul déterministe), mais pour un coût de calcul bien inférieur ; en utilisant la même machine, 50000 résolutions de systèmes de taille⁶ m sont nécessaires, soit environ 240 h, dans le cas des simulations, tandis que la MEFSS met en jeu une seule résolution d'un système de taille $P \times n$, P étant défini par $P = ((N - 1) \times m) + 1$, en 8 mn 30 si $P=7$ et en 10 h 15 mn si $P = 25$. Les mêmes conclusions sont valables concernant l'évolution de la variance (fig. 3.21).

La figure 3.22 décrit les évolutions de la moyenne de l'effort normal f_x^e dans un élément vertical

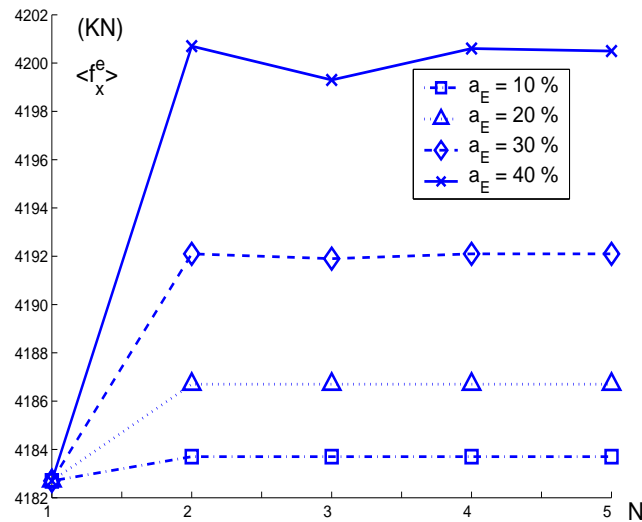


FIG. 3.22 – Influence du coefficient de variation sur la moyenne de l'effort normal

au centre de la structure, pour différentes valeurs à l'ordre N et du coefficient de variation. Cette moyenne s'exprime par la relation 3.147 que nous rappelons :

$$\mathbf{E}[f_x^e] = \frac{S_k}{L_e} \left(\mathbf{E}[\mathbf{E}_k \mathbf{U}_j] - \mathbf{E}[\mathbf{E}_k \mathbf{U}_i] \right)$$

où U_i et U_j sont les v.a. modélisant les déplacements axiaux des nœuds i et j de l'EF où la force est calculée. E_k est le module d'élasticité longitudinal et S_k la section de la poutre qui contient l'EF e et L_e la longueur de cet élément. Comme nous l'avons déjà constaté pour l'exemple de la barre en traction, nous observons que plus petit est le coefficient de variation, plus rapide est la convergence numérique. Cependant, même pour un coefficient de variation de 40%, lequel correspond à une importante dispersion, nous pouvons considérer que la convergence numérique est atteinte pour $N = 4$.

Conclusions de l'application

L'approche spectrale est mise en œuvre dans ce chapitre pour un vecteur aléatoire de v.a. lognormales indépendantes. La MEFSS est exploitée dans le cadre de l'étude de l'assemblage de poutres en bois par tiges collées. Le modèle EF de base est simple mais représente *a priori* de manière réaliste les éléments structuraux de l'assemblage, les résultats numériques (évolution moment résistant - déplacement) concordant aux essais expérimentaux [Bar04]. La MEFSS a

⁶ m est approximativement le nombre de *ddl* du maillage.

ensuite permis d'atteindre les moments statistiques du second ordre et fournit des résultats en accord avec les simulations de Monte-Carlo. La MEFSS présente des propriétés de convergence numérique satisfaisantes et l'avantage d'être bien moins coûteuse en temps de calcul. La sensibilité d'un type d'assemblage particulier aux variations mêmes larges du module d'élasticité longitudinal s'est révélée limitée, ce qui est encourageant dans ces premières recherches sur la pertinence des tiges collées. Seuls des résultats concernant un type de poutre sont présentés. Mais cette approche peut désormais être développée (cf. travaux récents de Taleb [Tal05]) et exploitée pour étudier la sensibilité de ce type de structure à des imperfections ou aux variations de caractéristiques de ses composants. Cette étude pourrait conduire à une meilleure estimation de la fiabilité des structures bois comportant des tiges collées.

3.4 Conclusion du chapitre

Nous avons détaillé la formulation de la méthode des éléments finis stochastiques spectrale (MEFSS) proposée par Ghanem et Spanos [Gha91]. La méthode est présentée puis mise en œuvre sur deux applications.

Tout d'abord, nous présentons le problème d'une barre en traction, rencontré très souvent dans la bibliographie [Eli95b, De 99, Brz01, Bar03, Mra03, Kam04]. Nous avons ainsi été capables de décrire la propagation d'incertitudes à chaque étape de la méthode, grâce à des indicateurs d'erreur successifs. Grâce à une procédure de génération automatique des espérances de produits de polynômes d'Hermite (cf. annexe C), nous avons facilement mené des études paramétriques, qui permettent de mieux comprendre la méthode et de réduire son coût de calcul.

Nous avons ensuite étendu une version de la MEFSS adaptée aux structures formées de poutres. Cette formulation a été mise en œuvre sur un assemblage de poutres en bois, dans le cadre d'un projet de recherche impliquant des essais expérimentaux.

Nous retenons que la MEFSS est applicable à une structure réelle du génie civil, modélisable par un modèle mécanique élastique linéaire ; son coût est minime par rapport aux simulations de Monte-Carlo et elle permet une étude de sensibilité utile dans le cadre d'un projet de recherche. Un point fort de cette méthode est son aptitude à représenter un champ aléatoire par plusieurs dizaines de v.a. corrélées, indépendamment de la discrétisation EF du modèle.

Cependant, la MEFSS nécessite la reformulation du modèle EF d'étude et ne reste *a priori* applicable que dans un cadre mécanique linéaire restrictif : la relation entre le vecteur des paramètres incertains du modèle et la réponse de ce dernier doit en effet être linéaire. Enfin, dans le cadre de la résolution itérative et incrémentale d'un problème mécaniquement non linéaire, il nous semble impraticable à chaque itération de reformuler le problème EF. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés dans le dernier chapitre à l'élaboration d'une MEFSS capable de traiter le problème de propagation d'incertitudes lorsque cette relation est non linéaire.

Chapitre 4

Développement d'une MEFS pour des problèmes non linéaires

L'objet de ce chapitre est de développer une MEFS, qui puisse permettre de résoudre une large classe de problèmes mécaniquement non linéaires.

Dans un premier paragraphe, nous posons les principales hypothèses puis décrivons les différentes approximations apparaissant dans la méthode. Dans un deuxième paragraphe, nous présentons et discutons différentes alternatives – déjà connues ou originales – à l'approche proposée. Enfin, le dernier paragraphe confronte plusieurs de ces méthodes sur les exemples de la barre en traction puis des problèmes mécaniquement non linéaires d'un treillis élasto-plastique, d'une sphère sous pression interne, puis d'un cylindre en contact sur un plan.

4.1 Formulation d'une MEFS pour des problèmes non linéaires

L'approche proposée utilise deux techniques connues, mais qui n'ont pas été combinées à notre connaissance dans ce contexte :

- la projection de la réponse sur une base de polynômes d'Hermite (cf. § 4.1.2) ; nous obtenons alors un développement en série exact de la réponse du problème mécanique étudié. Le développement de la réponse subit alors deux approximations : il s'agit de tronquer la série d'une part, puis d'approcher les coefficients du développement d'autre part ; l'approche proposée s'apparente dès lors à une surface de réponse ;
 - l'interpolation par B-splines cubiques de la réponse (cf. § 4.1.3), afin d'approcher les coefficients du développement par un nombre raisonnable d'appels au modèle mécanique.
- Enfin, nous obtenons des estimations des moments statistiques de la réponse mécanique étudiée (cf. § 4.1.4).

4.1.1 Contexte de l'étude et principe de la méthode

(a) Position du problème

Nous considérons un système, mécaniquement non linéaire, décrit par un modèle EF, dont certains paramètres scalaires du modèle y_1, \dots, y_M , regroupés dans un vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$, $M \in \mathbb{N}^*$, sont entachés d'incertitudes ; nous nous intéressons à une observation scalaire z (déplacement, déformation, contrainte, effort de liaison, ...) de la réponse du système, liée à \mathbf{y} par une relation de la forme :

$$z = f(\mathbf{y}) \quad (4.1)$$

où f est une fonction mesurable donnée définie sur \mathbb{R}^M , à valeurs dans \mathbb{R} , entièrement déterminée par le modèle éléments finis considéré ; on veut alors quantifier l'effet sur z de l'incertitude affectant \mathbf{y} .

Pour ce faire, nous supposons que \mathbf{y} peut être convenablement modélisée par une variable aléatoire $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_M)$ à valeurs dans \mathbb{R}^M , de loi absolument continue $\mathbf{P}_{\mathbf{Y}}$ connue et telle que $\text{Supp}(\mathbf{P}_{\mathbf{Y}}) \subseteq \text{def}(f)$, où $\text{Supp}(\mathbf{P}_{\mathbf{Y}})$ est le support de $\mathbf{P}_{\mathbf{Y}}$ et $\text{def}(f)$ le domaine de définition de f .

Dans ces conditions, f étant mesurable et à valeurs dans \mathbb{R} , Z est une v.a. scalaire, telle que :

$$Z = f(\mathbf{Y}) \quad (4.2)$$

Il s'agit alors de caractériser la v.a. Z connaissant le couple (f, \mathbf{Y}) , avec \mathbf{Y} définie par sa loi $\mathbf{P}_{\mathbf{Y}}$ et f par le modèle éléments finis considéré.

La caractérisation maximale de Z est sa loi. Or, il est clair, compte tenu de la spécificité du problème (f non linéaire et non définie par une expression analytique explicite, M non nécessairement petit et \mathbf{Y} de loi quelconque *a priori*), que cette grandeur ne peut être atteinte. L'approche proposée ici consiste à construire une approximation par projection sur une base de polynômes d'Hermite de f qui permette, à moindre coût (*i.e.* pour un nombre limité d'appels à f), d'obtenir des approximations convenables des premiers moments de z , afin de quantifier la dispersion de z induite par la variabilité de \mathbf{Y} .

L'emploi de polynômes d'Hermite présente plusieurs avantages. L'orthogonalité de la base évite la résolution d'un système linéaire mal conditionné (cf. compléments au §4.2.1); la base des polynômes Hermite est ensuite préférée à une autre base orthogonale, grâce aux formules combinatoires explicites disponibles pour le calcul d'espérances de produits de ces polynômes, fonction de v.a. gaussiennes (cf. annexe C).

Une étape préliminaire à la MEFS exposée – largement pratiquée en fiabilité (Lemaire [Lem97]) – consiste à réécrire le problème en termes de v.a. gaussiennes standards.

(b) Normalisation gaussienne

Rappelons que \mathbf{Y} est la v.a. de loi connue, introduite ci-dessus.

Nous résumons les relations introduisant la procédure de normalisation gaussienne. Rosenblatt [Ros52] montre qu'il existe une transformation mesurable T de \mathbb{R}^M dans \mathbb{R}^M telle que l'on puisse écrire en loi :

$$\mathbf{Y} = T(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \quad (4.3)$$

où $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$ est une v.a. gaussienne standard à valeurs dans \mathbb{R}^M , c'est-à-dire une v.a. gaussienne M -dimensionnelle de moyenne nulle et de matrice de covariance unité. Dans le cadre du problème qui nous intéresse ici, en portant (4.3) dans (4.2), nous obtenons alors :

$$Z = g(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \quad \text{avec} \quad g = f \circ T \quad (4.4)$$

où g est une fonction mesurable dans \mathbb{R}^M .

On obtient ainsi une nouvelle formulation de la réponse Z en termes de v.a. gaussiennes normalisées. La procédure de normalisation gaussienne d'une v.a. lognormale vectorielle est rappelée en annexe B. L'expression générale de T est donnée dans la référence [Ros52].

(c) Hypothèse sur g

Nous notons ν_M la loi gaussienne standard sur \mathbb{R}^M et φ_M sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue $d\mathbf{x} = dx_1 \cdots dx_M$ sur \mathbb{R}^M , telles que, $\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M) \in \mathbb{R}^M$:

$$\nu_M(d\mathbf{x}) = \varphi_M(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad ; \quad \varphi_M(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{M}{2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2}\right) \quad (4.5)$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique de \mathbb{R}^M . Nous supposons désormais que g est de carré intégrable par rapport à ν_M , autrement dit, nous supposons que l'hypothèse :

$$\int_{\mathbb{R}^M} g^2(\mathbf{x}) \nu_M(d\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^M} g^2(\mathbf{x}) \varphi_M(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < +\infty \quad (4.6)$$

est satisfaite. Cette hypothèse semble rarement effectuée et donc implicitement admise dans les études de problèmes physiques.

4.1.2 Développement hilbertien de la fonction étudiée

Soit $L^2(\mathbb{R}^M, \nu_M)$ l'espace de Hilbert des classes de fonctions de \mathbb{R}^M dans \mathbb{R} , presque partout égales, de carré intégrable par rapport à la mesure gaussienne canonique ν_M , muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$, tels que, $\forall f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}^M, \nu_M)$:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^M} f_1(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{x}) \nu_M(d\mathbf{x}) \quad (4.7)$$

D'après (4.5), il vient :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^M} f_1(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{x}) \varphi_M(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.8)$$

$$\|f_1\| = \langle f_1, f_1 \rangle^{\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

Soient $(\Psi_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^M)$ la famille des polynômes d'Hermite sur \mathbb{R}^M et $(\psi_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^M)$ la famille normalisée associée (cf. annexe C), telle que, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^M$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^M$, $\Psi_\alpha(\mathbf{x}) = (\alpha!)^{\frac{1}{2}} \psi_\alpha(\mathbf{x})$, où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M) \in \mathbb{N}^M$, ($M \in \mathbb{N}^*$) est un multi-indice d'ordre M de longueur $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_M$. $op = max(|\alpha|)$ est le plus haut degré des monômes de la base polynomiale, aussi nommé ordre des polynômes.

La famille des polynômes d'Hermite normalisée $(\psi_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^M)$ formant une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}^M, \nu_M)$ et en considérant que, d'après (4.6), la fonction g appartient à cet espace, nous pouvons écrire explicitement :

$$g(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) = \sum_{|\alpha|=0}^{+\infty} G_\alpha \psi_\alpha(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \quad (4.10)$$

où :

$$G_\alpha = \langle g, \psi_\alpha \rangle = \int_{\mathbb{R}^M} g(\mathbf{x}) \psi_\alpha(\mathbf{x}) \varphi_M(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.11)$$

En tenant compte du lien entre Ψ_α et ψ_α , l'équation (4.10) peut être réécrite :

$$g(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) = \sum_{|\alpha|=0}^{+\infty} g_\alpha \Psi_\alpha(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \quad (4.12)$$

avec :

$$g_\alpha = \frac{\langle g, \Psi_\alpha \rangle}{\mathbf{E}[(\Psi_\alpha(\overset{\circ}{\mathbf{X}}))^2]} = \frac{1}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^M} g(\mathbf{x}) \Psi_\alpha(\mathbf{x}) \varphi_M(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.13)$$

où $\mathbf{E}[(\Psi_\alpha(\overset{\circ}{\mathbf{X}}))^2] = \alpha! = \alpha_1 \cdots \alpha_M$ est l'espérance mathématique du produit de deux polynômes (cf. annexe C).

Une P -approximation g_P de g est alors obtenue en tronquant le développement (4.12), qui peut être réindiqué, par commodité algorithmique, par un entier j tel que :

$$g(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \simeq \sum_{|\alpha|=0}^{op} g_\alpha \Psi_\alpha(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) = \sum_{j=0}^{P-1} g_j \Psi_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) = g_P(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \quad ; \quad P = \sum_{q=0}^{op} C_{M-1+q}^q \quad (4.14)$$

On a donc $(\Psi_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq op} \equiv (\Psi_j)_{0 \leq j \leq P-1}$, où le polynôme d'Hermite, sur \mathbb{R}^M , s'écrit :

$$\Psi_\alpha(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) = \prod_{l=1}^M H_{\alpha_l}(\overset{\circ}{X}_l) = \Psi_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \quad (4.15)$$

avec $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M) \in \mathbb{R}^M$ et, $\forall i \in \{1, \dots, M\}$, H_{α_i} le polynôme d'Hermite d'ordre α_i sur \mathbb{R} (cf. annexe C). Pour M fixé, la recherche d'une P -approximation de g se ramène donc au calcul des P coefficients $(g_j)_{0 \leq j \leq P-1}$ donnés par (4.13), que nous pouvons encore écrire :

$$g_j = c_j^{-1} \mathbf{E}[g(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \Psi_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}})] \quad (4.16)$$

où nous préférons désormais noter l'espérance du produit de deux polynômes d'Hermite $c_j = \mathbf{E}[(\Psi_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}}))^2]$ (cf. annexe C).

4.1.3 Interpolation par B-splines cubiques pour l'approximation des coefficients du développement

(a) Stratégies d'approximation des coefficients

Afin de calculer les coefficients du développement polynomial (cf. équation (4.16)), diverses techniques peuvent être employées : les méthodes numériques d'intégration sont nombreuses et permettent des approximations précises. Citons la méthode élémentaire des trapèzes composés ou les méthodes de Monte-Carlo (Au et Beck [Au 99], Bernard et Fogli [Ber87], Shreider [Shr66]). Ces stratégies conduisent cependant à un grand nombre d'appels à la fonction g . Quelques ouvrages présentent le cadre plus général de l'approximation d'intégrales (Breitung [Bre84], Wong [Won01], Kordiouk [Kor83]). Cette approximation suppose le développement en série de la fonction à intégrer. Toutes ces démarches semblent cependant très coûteuses.

Citons aussi les approches exploitant la *quadrature de Gauss*, déjà exploitée pour le calcul de moments statistiques (Liu *et al.* [Liu86c], Baldeweck [Bal99]) ou en particulier pour le calcul des coefficients d'un développement sur une base de polynômes d'Hermite (cadre de la MEFS, Ghanem, [Gha99a]). Un inconvénient majeur de cette méthode est un accroissement exponentiel du coût de calcul en fonction du nombre de paramètres dont dépend g .

L'idée retenue ici, non encore exploitée à notre connaissance dans le cadre des MEFS, consiste à remplacer dans les coefficients g_j la fonction g par une approximation polynomiale de « bonne qualité » construite à partir d'une interpolation par fonctions B-splines cubiques.

(b) Interpolation par fonctions B-splines cubiques

Les fonctions B-splines forment une famille particulière de fonctions polynomiales par morceaux. Soit une fonction à interpoler, notée g , définie de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} . Nous considérons une partition de $[a, b]$, où $x_0 = a$ et $x_{n+1} = b$. Nous supposons que les valeurs de g aux $(n+2)$ abscisses $(x_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ de cette partition sont connues (résultats de calculs EF). La fonction g est interpolée par la fonction S vérifiant $(n+2)$ conditions d'interpolation :

$$S(x_i) = g(x_i) \quad i \in \{0, \dots, n+1\} \quad (4.17)$$

D'après la technique d'interpolation par B-splines cubiques, l'approximation S s'écrit (Demengel [Dem98]) :

$$S(x) = \sum_{l=0}^{n+3} P_l N_3^l(x) \quad x \in [a, b] \quad (4.18)$$

où les $(n + 4)$ fonctions réelles N_3^l sont des fonctions B-splines cubiques de base associées au vecteur nodal $(t_0, t_1, \dots, t_{n+7})$, avec $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = x_0$, $t_4 = x_1, \dots, t_{n+3} = x_n$, et $t_{n+4} = t_{n+5} = t_{n+6} = t_{n+7} = x_{n+1}$. Pour ce vecteur nodal, les $n + 7$ fonctions B-splines cubiques de base de degré 0 s'écrivent :

$$\begin{cases} N_0^0(x) = N_0^1(x) = N_0^2(x) \equiv 0 \\ N_0^l(x) = \mathbb{I}_{[t_l, t_{l+1}[}(x) = \mathbb{I}_{[x_{l-3}, x_{l-2}[}(x), \quad \text{pour } l = 3 \dots, n+3 \\ N_0^{n+4}(x) = N_0^{n+5}(x) = N_0^{n+6}(x) \equiv 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

et, pour $0 \leq l \leq n + 6 - M$, les fonctions de base N_M^l de degré M sont obtenues en utilisant la formule de récurrence :

$$N_M^l(x) = \frac{x - t_l}{t_{l+M} - t_l} N_{M-1}^l(x) + \frac{t_{l+M+1} - x}{t_{l+M+1} - t_{l+1}} N_{M-1}^{l+1}(x) \quad (4.20)$$

Les nœuds extrêmes étant de multiplicité 4, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

$$P_0 = g(x_0) \quad ; \quad P_{n+3} = g(x_{n+1}) \quad ; \quad 3 \times \frac{P_1 - P_0}{x_1 - x_0} = \frac{dg}{dx}(x_0) \quad ; \quad 3 \times \frac{P_{n+3} - P_{n+2}}{x_{n+1} - x_n} = \frac{dg}{dx}(x_{n+1}) \quad (4.21)$$

En pratique, les dérivées $\frac{dg}{dx}(x_0)$ et $\frac{dg}{dx}(x_n)$ sont en général inconnues mais peuvent être approchées par des schémas numériques de différence finie. Finalement, les n coefficients inconnus P_2, P_3, \dots, P_{n+1} sont obtenus après résolution d'un système linéaire tridiagonal (annexe D). Dans le cas d'une fonction réelle définie sur un compact de \mathbb{R}^M ($M > 1$), le problème d'interpolation multidimensionnelle peut se ramener à plusieurs problèmes unidimensionnels. Des conditions aux limites supplémentaires, qui font intervenir des dérivées d'ordres supérieurs sont alors nécessaires (annexe D). Nous montrerons cependant plus loin que ces conditions aux limites peuvent être éventuellement simplifiées.

Le graphe d'une spline interpolante, définie de \mathbb{R}^M dans \mathbb{R} , est formé de n^M « hyperarcs », c'est-à-dire de n^M hypersurfaces cubiques restreintes à des pavés de \mathbb{R}^M , où n est le nombre d'arcs d'interpolation dans chaque direction d'espace. La détermination de S nécessite donc de définir $N_I = (n + 1)^M$ points d'interpolation et donc de faire N_I appels à la fonction g .

(c) Intérêt de l'interpolation pour l'approximation des coefficients du développement

On propose ici de calculer les P coefficients g_j du développement (4.14) en effectuant l'approximation suivante :

$$g_j = \frac{\mathbf{E}[g(\overset{\circ}{\mathbf{X}})\Psi_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}})]}{\mathbf{E}[\Psi_j^2]} \simeq \tilde{g}_j = c_j^{-1} \mathbf{E}[S(\overset{\circ}{\mathbf{X}})\Psi_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}})] = c_j^{-1} \int_{\mathbb{R}^M} S(\mathbf{x})\Psi_j(\mathbf{x})\varphi_M(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (4.22)$$

et par suite la P -approximation (4.14) est approchée par :

$$g_P(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \simeq \tilde{g}_P(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) = \sum_{j=0}^{P-1} \tilde{g}_j \Psi_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \quad (4.23)$$

Un premier intérêt évident de cette approche est qu'une fois l'approximation S construite, il n'est plus besoin de faire appel à la fonction g pour calculer les coefficients du développement. Par conséquent, n'importe quelle méthode numérique (Monte-Carlo, quadrature, ...) peut être utilisée. En petite dimension, nous pouvons, par exemple, avoir recours à un schéma numérique

d'intégration de Gauss dont nous aurons prédéterminé l'ordre pour que l'intégrale soit de bonne qualité. Le coût de cette stratégie réside essentiellement dans la détermination de la B-spline interpolante S .

Ainsi, cette même B-spline est utilisée, sans surcoût significatif, pour le calcul des P coefficients, quels que soient les ordres des polynômes d'Hermite Ψ_j dans (4.23).

L'usage de l'interpolation par spline présente d'autres avantages, du fait qu'une spline est par définition une fonction interpolante polynomiale par morceaux :

- son intégration numérique peut être exacte : la fonction $S\Psi_j\varphi_M$ étant le produit d'une hypersurface polynomiale et d'une DP gaussienne standard, on peut alors utiliser un schéma de Gauss-Hermite, où en chaque point d'intégration \mathbf{x}_i , le produit $S(\mathbf{x}_i)\Psi_j(\mathbf{x}_i)$ est pondéré par la valeur de la DP gaussienne standard en ce point ;
- la technique d'interpolation par B-splines est réputée de bien meilleure qualité que l'interpolation polynomiale.

4.1.4 Approximation des moments de la réponse

Notons \tilde{Z}_P la v.a. définie en (4.23), approchant la v.a. Z définie en (4.14). Pour tout λ dans \mathbb{N}^* , le moment non centré d'ordre λ de la v.a. Z définie par (4.4), noté μ_Z^λ , peut être approché par $\tilde{\mu}_Z^{\lambda,P}$, défini par :

$$\tilde{\mu}_Z^\lambda = \mathbb{E}[(\tilde{Z}_P)^\lambda] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{P-1} \tilde{g}_j \Psi_j(\mathring{\mathbf{X}})\right)^\lambda\right] \quad (4.24)$$

Afin d'éviter le calcul formel de ces espérances, nous souhaitons exploiter les propriétés combinatoires des polynômes d'Hermite (annexe C). Le moment d'ordre λ , pour tout λ dans \mathbb{N}^* , s'écrit alors :

$$\tilde{\mu}_Z^\lambda = \sum_{\alpha_1=0}^{\lambda} \sum_{\alpha_2=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\alpha_{P-1}=0}^{\alpha_{P-2}} A_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{P-1},\lambda} \mathbb{E}\left[(\Psi_{\alpha_1}(\mathring{\mathbf{X}}))^{\lambda-\alpha_1} \times (\Psi_{P-1}(\mathring{\mathbf{X}}))^{\alpha_{P-1}} \prod_{j=1}^{P-2} (\Psi_{\alpha_j}(\mathring{\mathbf{X}}))^{\alpha_j-\alpha_{j+1}}\right] \quad (4.25)$$

avec :

$$A_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{P-1},\lambda} = C_{\lambda}^{\alpha_1} C_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cdots C_{\alpha_{P-2}}^{\alpha_{P-1}} \times \tilde{g}_0^{(\lambda-\alpha_1)} \tilde{g}_1^{(\alpha_1-\alpha_2)} \cdots \tilde{g}_{P-2}^{(\alpha_{P-2}-\alpha_{P-1})} \tilde{g}_{P-1}^{(\alpha_{P-1})} \quad (4.26)$$

L'espérance apparaissant dans (4.25) est calculée analytiquement (cf. annexe C). Par exemple, dans le cas simple où $\lambda = 1$, nous avons :

$$\mu_Z^1 = \mathbb{E}[Z] \simeq \tilde{\mu}_Z^1 = \sum_{j=0}^{P-1} \tilde{g}_j \delta_{j,0} = \tilde{g}_0 \quad (4.27)$$

Nous obtenons ainsi des approximations numériques des moments statistiques de la réponse et notamment des deux premiers, qui sont d'un intérêt pratique certain.

Pour terminer, considérons la v.a. :

$$Z_P = g_P(\mathring{\mathbf{X}}) = \sum_{j=0}^{P-1} g_j \Psi_j(\mathring{\mathbf{X}}) \quad (4.28)$$

qui se distingue de la v.a. \tilde{Z}_P définie en (4.23) par les coefficients de son développement (ceux de (4.23) sont des approximations de ceux de (4.28) au sens de l'approximation (4.22)). On montre que, pour P fixé, la v.a. Z_P , avec g_j donné par les équations (4.13)-(4.16), pour tout j tel que $0 \leq j \leq P-1$, est la meilleure approximation en moyenne quadratique de la v.a. Z définie par

(4.4). Par conséquent, si les coefficients \tilde{g}_j sont de bonnes approximations des coefficients g_j , nous sommes assurés que les approximations des moments μ_Z^λ de Z par les moments $\tilde{\mu}_Z^\lambda$ de Z_M seront correctes au moins jusqu'à l'ordre deux (*i.e.* pour $N = 1$ et $N = 2$).

Il importe enfin de noter que le nombre effectif P de termes figurant dans (4.23), appelé ordre de troncature et qui est toujours plus grand que l'ordre op , croît très rapidement avec le nombre M des paramètres aléatoires de base. Par exemple, pour $M = 1$, $P = op + 1$ et pour $M = 2$, $P = \frac{(op + 1)(op + 2)}{2}$. Cette dernière relation est illustrée numériquement dans le tableau 4.1.

op	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66

TAB. 4.1 – Évolution de l'ordre de troncature P en fonction de l'ordre d'approximation op , pour $M = 2$.

4.1.5 Conclusion

Ce paragraphe introduit une Méthode d'Éléments Finis Stochastique (MEFS), basée sur l'utilisation de deux techniques : une projection de la réponse mécanique non linéaire sur une base de polynômes d'Hermite, ainsi que l'interpolation par B-splines cubiques.

L'approche proposée consiste, à partir d'un nombre limité de calculs éléments finis non linéaires – donc coûteux –, à obtenir une approximation de la réponse mécanique, sous la forme d'un développement hilbertien. Les coefficients du développement sont alors calculés à faible coût à partir de cette représentation et permettent d'estimer les moments statistiques de la réponse. Ainsi, la sensibilité du modèle à des variations des paramètres d'entrée peut être évaluée. Remarquons qu'une estimation de la DP de la réponse semble possible à moindre coût, en effectuant une simulation de Monte-Carlo du développement hilbertien.

Si le nombre de variables aléatoires modélisant des paramètres incertains augmente, le nombre, et donc le coût, des calculs éléments finis croît de manière importante. Par conséquent, l'approche n'est pas adaptée aux problèmes faisant intervenir une description de l'aléa à l'aide de champs dont la discrétisation engendre des v.a. de grande dimension. Ce type de méthode n'en reste pas moins intéressant pour une grande classe de problèmes. Nous confrontons alors dans les prochains paragraphes l'approche que nous avons retenue à d'autres alternatives.

4.2 Approches alternatives et discussions

L'objet de ce paragraphe est d'exposer quelques approches alternatives à la méthode proposée dans le paragraphe précédent.

Nous soulignons tout d'abord que l'approche proposée peut être considérée comme une méthode de surface de réponse (cf. § 2.2.2, [Mye95]), qui est ici en effet définie par le développement hilbertien tronqué (4.23). Nous discutons alors dans un premier paragraphe cette approche par rapport à d'autres surfaces de réponse.

Les B-splines cubiques sont utilisées, dans l'approche proposée, afin d'approcher les coefficients du développement définis en (4.13). Nous pourrions toutefois envisager d'autres usages de l'interpolation par B-splines. Nous discutons dans un deuxième paragraphe quelques stratégies possibles : on pourrait en effet penser à utiliser une fonction interpolante par B-splines cubiques comme surface de réponse, ou comme un moyen d'approcher directement un moment statistique de la fonction interpolée.

4.2.1 Justification d'une surface de réponse stochastique

Considérons un problème mécanique non linéaire, fonction de M paramètres incertains. Ces paramètres sont modélisés par une v.a. vectorielle $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_M)$ et la réponse mécanique par une v.a. Z , supposée scalaire.

Grâce à une procédure de normalisation gaussienne (cf. équations (4.3)-(4.4), page 73), nous exprimons cette réponse Z en termes de v.a. gaussiennes standards, regroupées dans un vecteur $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$, ce que nous avons noté $Z = g(\overset{\circ}{\mathbf{X}})$, où g est une fonction de \mathbb{R}^M dans \mathbb{R} .

Afin de caractériser la v.a. Z , on cherche à approcher g par une fonction approximante g_P , qui permette d'estimer les moments de Z à l'aide de calculs simples. On peut alors définir une surface de réponse $\tilde{Z} = g_P(\overset{\circ}{\mathbf{X}})$, telle que :

$$g_P(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{P-1} g_j \Phi_j(\mathbf{x}) \quad ; \quad g_j \in \mathbb{R} \quad ; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^M \quad (4.29)$$

où la base fonctionnelle $(\Phi_j)_{0 \leq j \leq P-1}$ est souvent la base canonique des polynômes mais peut aussi être une base différente.

Les coefficients $(g_j)_{0 \leq j \leq P-1}$ peuvent être déterminés par une méthode de moindres carrés. Cette approximation s'appuie sur un plan d'expérience. Ce plan est composé de n observations (aussi appelées points d'expérience). Il s'agit ici d'observations d'une v.a. gaussienne standard $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$, notées $\left(\overset{\circ}{\mathbf{x}}^{(i)}\right)_{1 \leq i \leq n}$. On note ainsi respectivement $(z^{(i)})_{1 \leq i \leq n}$ et $(\tilde{z}^{(i)})_{1 \leq i \leq n}$ les observations de la réponse Z et de la surface de réponse approximante \tilde{Z} , auxquelles l'on associe l'erreur $\varepsilon^{(i)}$, liée à l'approximation \tilde{Z} , s'écrit :

$$\varepsilon^{(i)} = z^{(i)} - \tilde{z}^{(i)}, \quad \varepsilon = (\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)}) \in \mathbb{R}^n \quad i = 1, \dots, n \quad (4.30)$$

La méthode des moindres carrés (cf. § 2.2.2, [Mye95]) consiste à minimiser une norme quadratique Δ de l'erreur d'approximation ε , définie en (4.30). La norme Δ peut être définie de différentes façons et conduire à des approximations \tilde{Z} différentes. Quelle que soit la définition de la norme Δ , sa minimisation se traduit par l'écriture de conditions normales (i.e. des conditions de nullité des dérivées partielles $\partial\Delta/\partial g_j$).

Une difficulté de l'approximation par moindres carrés sur une base non orthogonale, comme la base canonique des polynômes, est qu'elle conduit à la résolution d'un système linéaire souvent mal conditionné. Les méthodes de résolution de système linéaire peuvent alors être mises en

défaut.

Il semble alors plus intéressant de définir une approximation sur une base orthogonale. La base des polynômes d'Hermite a retenu l'attention de Isukappali [Isu98], qui introduit une « Méthode de Surface de Réponse Stochastique (MSRS) » (*stochastic surface response method*). Cette méthode est reprise par différents auteurs [Mah03, Ber04, Sud04].

Cette méthode consiste à définir les coefficients g_j par une méthode de moindres carrés, où la norme à minimiser se déduit de la connaissance de n points d'expérience $(\mathbf{x}^{(i)})_{1 \leq i \leq n}$, sous la forme :

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \left(g(\mathbf{x}^{(i)}) - \sum_{j=0}^{P-1} g_j \Psi_j(\mathbf{x}^{(i)}) \right)^2 \quad (4.31)$$

où n est donc le nombre d'appels à la fonction g , approchée par g_P et $\mathbf{x}^{(i)}$ est le i -ème point d'expérience, observation de la v.a. gaussienne standard \mathbf{X} .

La minimisation de cette norme se traduit par les conditions normales, qui conduisent après quelques calculs au système suivant, dont les coefficients g_j sont solution (Berveiller *et al.* [Ber04]) :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \Psi_0(\mathbf{x}^{(i)}) \Psi_0(\mathbf{x}^{(i)}) & \dots & \sum_{i=1}^n \Psi_{P-1}(\mathbf{x}^{(i)}) \Psi_0(\mathbf{x}^{(i)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \Psi_{P-1}(\mathbf{x}^{(i)}) \Psi_0(\mathbf{x}^{(i)}) & \dots & \sum_{i=1}^n \Psi_{P-1}(\mathbf{x}^{(i)}) \Psi_{P-1}(\mathbf{x}^{(i)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{P-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \Psi_0(\mathbf{x}^{(i)}) g(\mathbf{x}^{(i)}) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \Psi_{P-1}(\mathbf{x}^{(i)}) g(\mathbf{x}^{(i)}) \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Les n points d'expérience requis pour cette approche sont choisis comme étant des racines de certains polynômes d'Hermite. Le nombre n est égal à $(2P + 3)^M$ dans [Isu98, Ber04].

Cette détermination des points d'expérience est nommée *collocation method* par Isukappali [Isu98], traduit par *méthode de collocation* (Sudret *et al.* [Sud04]).

Nous ne nous sommes pas intéressés à cette méthode dans la mesure où l'on est contraint d'écrire un système d'équations de la forme (4.32), qui risque *a priori* d'être mal conditionné et renvoyons à la thèse en cours de Berveiller pour tout complément.

Une autre approximation par moindres carrés envisageable est basée sur l'utilisation d'une norme continue, définie telle que :

$$\Delta = \int_{\mathbb{R}^M} \left(g(\mathbf{x}) - g_P(\mathbf{x}) \right)^2 \varphi_M(\mathbf{x}) \mathbf{d}\mathbf{x} \quad (4.33)$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M$ et φ_M est ici la densité de probabilité de la v.a. gaussienne standard \mathbf{X} .

L'approximation g_P de la fonction g est de plus obtenue par projection sur une base de polynômes d'Hermite $(\Psi_j)_{0 \leq j \leq P-1}$. Le problème des moindres carrés revient à minimiser la norme Δ par l'écriture des conditions normales :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial g_j} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \int_{\mathbb{R}^M} \left(g(\mathbf{x}) - g_P(\mathbf{x}) \right) \Psi_j(\mathbf{x}) \varphi_M(\mathbf{x}) \mathbf{d}\mathbf{x} = 0 \quad j = 0, \dots, P-1 \quad (4.34)$$

où φ_M est la Densité de Probabilité (DP) gaussienne standard. En tenant compte de la forme générale (4.29) de la fonction approximante g_P , (4.34) peut se réécrire :

$$\sum_{k=0}^{P-1} g_k \int_{\mathbb{R}^M} \Psi_k(\mathbf{x}) \Psi_j(\mathbf{x}) \varphi_M(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^M} g(\mathbf{x}) \Psi_j(\mathbf{x}) \varphi_M(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad j = 0, \dots, P-1 \quad (4.35)$$

ou encore :

$$\sum_{k=0}^{P-1} g_k \mathbf{E}[\Psi_k(\dot{\mathbf{X}}) \Psi_j(\dot{\mathbf{X}})] = \mathbf{E}[g(\dot{\mathbf{X}}) \Psi_j(\dot{\mathbf{X}})] \quad j = 0, \dots, P-1 \quad (4.36)$$

Une base de polynômes orthogonaux, telle qu'une base de polynômes d'Hermite, simplifie les calculs des espérances dans le système (4.36). En effet, la propriété d'orthogonalité des polynômes d'Hermite se traduit par :

$$\mathbf{E}[\Psi_j(\dot{\mathbf{X}}) \Psi_k(\dot{\mathbf{X}})] = \int_{\mathbb{R}^M} \Psi_j(\mathbf{x}) \Psi_k(\mathbf{x}) \varphi_M(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ \mathbf{E}[(\Psi_j(\dot{\mathbf{X}}))^2] & \text{si } j = k \end{cases} \quad (4.37)$$

Le système (4.36) se réduit alors à un système diagonal. Ainsi, nous avons :

$$g_j \mathbf{E}[\Psi_j^2(\dot{\mathbf{X}})] = \mathbf{E}[g(\dot{\mathbf{X}}) \Psi_j(\dot{\mathbf{X}})] \quad j = 0, \dots, P-1 \quad (4.38)$$

Nous retrouvons finalement la définition du développement hilbertien introduit au § 4.1. :

$$g_P(\dot{\mathbf{X}}) = \sum_{j=0}^{P-1} g_j \Psi_j(\dot{\mathbf{X}}) \quad ; \quad g_j = \frac{\mathbf{E}[g(\dot{\mathbf{X}}) \Psi_j(\dot{\mathbf{X}})]}{\mathbf{E}[\Psi_j^2(\dot{\mathbf{X}})]} \quad (4.39)$$

L'approche retenue peut donc être classée parmi les méthodes de surface de réponse, obtenues par approximations par moindres carrés. Afin de ne pas être confrontés à un système d'équations risquant *a priori* d'être mal conditionné, nous préférons les surfaces de réponse définies par projection sur une base de fonctions orthogonales, après une approximation par moindres carrés basée sur une norme continue. L'emploi de la base des polynômes d'Hermite permet de surcroît de profiter de leurs propriétés combinatoires, pour le calcul des moments de la réponse approchée \tilde{Z} (cf. (4.25) p. 77 et annexe C).

Le problème du calcul des coefficients g_j subsiste cependant. Nous justifions dans le prochain paragraphe notre choix d'utiliser l'interpolation par spline dans l'approche proposée au paragraphe précédent.

4.2.2 Usage de splines interpolantes pour l'approximation des coefficients g_j

Dans l'approche proposée, la technique de l'interpolation par fonctions B-splines a été utilisée pour effectuer le calcul approché des coefficients de la SR sur la base des polynômes d'Hermite. Nous rappelons la forme générale d'un tel coefficient g_j , défini en (4.14) :

$$g_j = c_j^{-1} \int_{\mathbb{R}^M} g(\mathbf{x}) \Psi_j(\mathbf{x}) \varphi_M(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

où Ψ_j est un polynôme d'Hermite sur \mathbb{R}^M , d'ordre $\leq op$, φ_M la densité de probabilité gaussienne standard et c_j l'espérance du carré de $\Psi_j(\dot{\mathbf{X}})$, avec $c_j = \prod_{i=1}^M \alpha_i!$ (cf. annexe C), où $(\alpha_1, \dots, \alpha_M) \in$

\mathbb{N}^M est un multi-indice tel que $\sum_{i=1}^M \alpha_i \leq op$.

Nous faisons donc le choix arbitraire de l'interpolation pas spline, en vue d'approcher l'intégrale

g_j ; nous ne reviendrons pas sur ce choix dans ce chapitre. Néanmoins, nous souhaitons discuter celui de la fonction à interpoler. Plusieurs cas de fonctions à interpoler sont envisageables :

- premier cas (retenu dans l'approche proposée) : la fonction interpolée est g ; notons S_0 , la spline définie sur un domaine d'interpolation $\Omega \subset \mathbb{R}^M$, interpolante, telle que, aux N_I points d'interpolation :

$$S_0(\mathbf{x}_i) = g(\mathbf{x}_i), \quad \mathbf{x}_i \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N_I \quad (4.40)$$

Le coefficient g_j est alors approché par :

$$g_j \simeq \tilde{g}_j^0 = c_j^{-1} \int_{\Omega} S_0(\mathbf{x}) \Psi_j(\mathbf{x}) \varphi_M(\mathbf{x}) \mathbf{d}\mathbf{x} = c_j^{-1} \mathbf{E}[S_0(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \Psi_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \varphi_M(\overset{\circ}{\mathbf{X}})] \quad (4.41)$$

- deuxième cas : la fonction interpolée est $g\varphi_M$; notons S_1 , la spline interpolante, telle que, aux N_I points d'interpolation :

$$S_1(\mathbf{x}_i) = g(\mathbf{x}_i) \varphi_M(\mathbf{x}_i) \quad \mathbf{x}_i \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N_I \quad (4.42)$$

Le coefficient approché \tilde{g}_j^1 s'écrit :

$$\tilde{g}_j^1 = c_j^{-1} \int_{\Omega} S_1(\mathbf{x}) \Psi_j(\mathbf{x}) \mathbf{d}\mathbf{x} = c_j^{-1} \mathbf{E}[S_1(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \Psi_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}})] \quad (4.43)$$

- troisième cas : la fonction interpolée est $g\Psi_j\varphi_M$; notons S_2^j la spline interpolante, telle que, aux N_I points d'interpolation,

$$S_2^j(\mathbf{x}_i) = g(\mathbf{x}_i) \Psi_j(\mathbf{x}_i) \varphi_M(\mathbf{x}_i), \quad \mathbf{x}_i \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N_I \quad (4.44)$$

Le coefficient approché \tilde{g}_j^2 s'écrit :

$$\tilde{g}_j^2 = c_j^{-1} \int_{\Omega} S_2^j(\mathbf{x}) \mathbf{d}\mathbf{x} = c_j^{-1} \mathbf{E}[S_2^j(\overset{\circ}{\mathbf{X}})] \quad (4.45)$$

Les splines S_1 et S_2^j semblent de prime abord présenter un avantage intéressant : les éventuelles approximations dues à l'interpolation aux frontières du domaine Ω sont fortement atténuées, voire négligeables grâce au facteur φ_M : en effet, aux points d'expérience \mathbf{x}_i , proches des frontières du domaine Ω de définition de g , la DP gaussienne standard φ_M , prend des valeurs très faibles. L'écriture des conditions aux limites (cf. annexe D) peut alors être simplifiée et n'exige plus nécessairement le calcul numérique de dérivées : dans le cas d'une spline S_1 , une condition de dérivées nulles semble même envisageable.

Dans le cas d'une spline interpolante S_1 , nous montrons cependant dans l'exemple suivant que les erreurs d'interpolation aux frontières du domaine Ω peuvent être amplifiées par les valeurs élevées qui y sont prises par les polynômes d'Hermite.

Pour illustration, considérons ici l'exemple des fonctions suivantes :

- $g_1 : (x_1, x_2) \longrightarrow g_1(x_1, x_2) = (x_2^3 - x_2 + 5) \times g^*(x_1)$

$$\text{où : } g^*(x_1) = \begin{cases} x_1^3 - 5x_1 & \text{si } x_1 < 0 ; \\ 7x_1^2 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.46)$$

- $g_2 : (x_1, x_2) \longrightarrow g_2(x_1, x_2) = g_1(x_1, x_2) \times \frac{e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}}{2\pi}$

Nous choisissons d'interpoler la fonction $g_2 = g_1\varphi_M$, où φ_M est la densité de probabilité gaussienne standard et de représenter la fonction g_2 sur $[-4, 4] \times [-4, 4]$, car les valeurs de la fonction

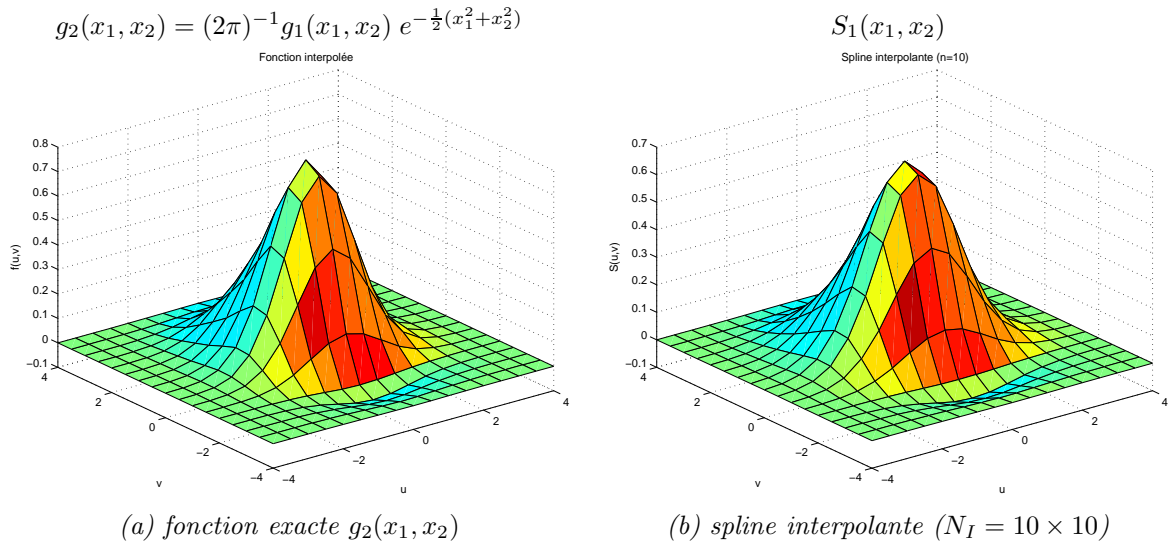


FIG. 4.1 – Interpolation de la fonction g_2

interpolée pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus [-4, 4] \times [-4, 4]$ apparaissent négligeables.

La figure 4.1 (a) montre la fonction à interpoler, qui est ici non linéaire et non différentiable en $x_1 = 0$. La figure 4.1 (b) montre l'exemple d'une spline interpolante, pour une qualité d'interpolation fixée ($N_I = 10 \times 10$), relativement fidèle à la fonction exacte (Fig. 4.1 (a)). Cette figure illustre un avantage de la stratégie d'une spline S_1 , présentée en (4.42) : les éventuelles approximations aux frontières de Ω , dues à une interpolation insuffisante, sont atténuées par le facteur φ_M .

On considère maintenant un calcul d'intégrale du type $\int g_1 \Psi_j \varphi_M$ (cf. (4.14)), en choisissant¹ ici : $\int g_1 \Psi_{61} \varphi_M$. Nous avons par ailleurs : $\Psi_{61} = H_4 \times H_6$.

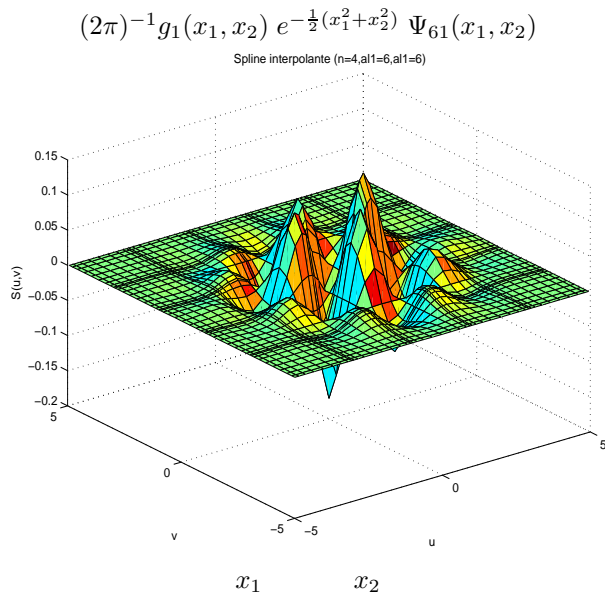
Les figures 4.2 (a,b) présentent respectivement les évolutions de la fonction à intégrer exacte $g_1 \Psi_{61} \varphi_M$ et de la fonction H_4 en fonction des abscisses x_1 et x_2 , telles que $(x_1, x_2) \in \Omega = [-5, 5]^2$. La fonction H_6 a une courbe représentative similaire à celle de H_4 ; les valeurs prises aux frontières de Ω sont de l'ordre de 10^2 (pour H_4 , cf. Fig. 4.2 (b)), voire 10^3 (pour H_6). Le produit $H_4 \times H_6$ prend alors des valeurs de l'ordre 10^5 . Une erreur d'interpolation de g_2 de quelques % aux frontières de Ω , qui paraissait négligeable grâce au facteur φ_M , sera donc amplifiée en conséquence (cf. Fig. 4.2 (c)). Il en résulte sur cette figure un graphe du produit $S_1 \times \Psi_{61}$ tout à fait distinct du graphe de la fonction exacte $g_1 \times \Psi_{61}$, figure 4.2 (a), pour une qualité d'interpolation insuffisante ($N_I = 5 \times 5$). On réussit néanmoins, en choisissant une qualité d'interpolation suffisante, à obtenir un graphe représentant le produit $S_1 \times \Psi_{61}$, figure 4.2 (d), pour $N_I = 9 \times 9$, fidèle au graphe de $g_2 \times \Psi_{61}$, figure 4.2 (a).

La spline notée S_2^j , introduite en 4.44 p. 82 résout le dernier problème cité : en interpolant le produit $g \Psi_j \varphi_M$, le phénomène d'amplification d'erreur d'interpolation disparaît. En revanche, deux autres difficultés surviennent.

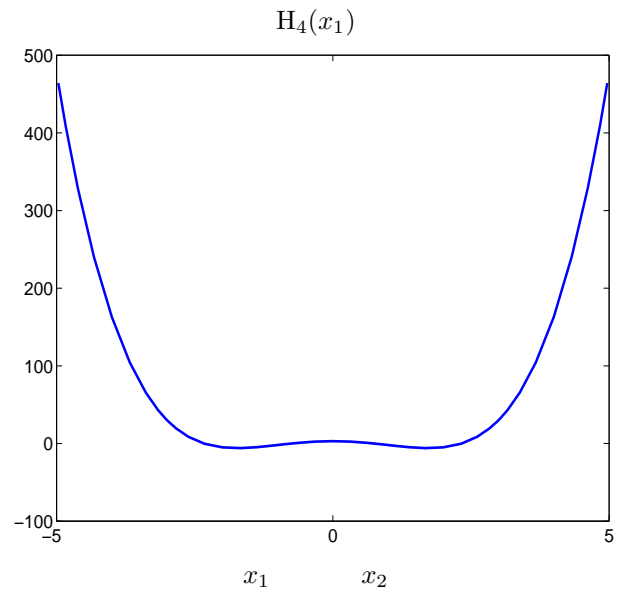
D'une part, l'ordre des polynômes Ψ_j pouvant être relativement élevé, l'interpolation S_2^j devra être d'une qualité conséquente, i.e. exiger sans aucun doute davantage de points d'interpolations et donc d'appels à la fonction g .

D'autre part, il est nécessaire de recourir à autant d'interpolations que de polynômes d'Hermite à estimer. Ce dernier inconvénient devient cependant mineur, si toutes ces interpolations peuvent être effectuées avec le même plan d'expérience, i.e. sans avoir à recalculer de nouveaux

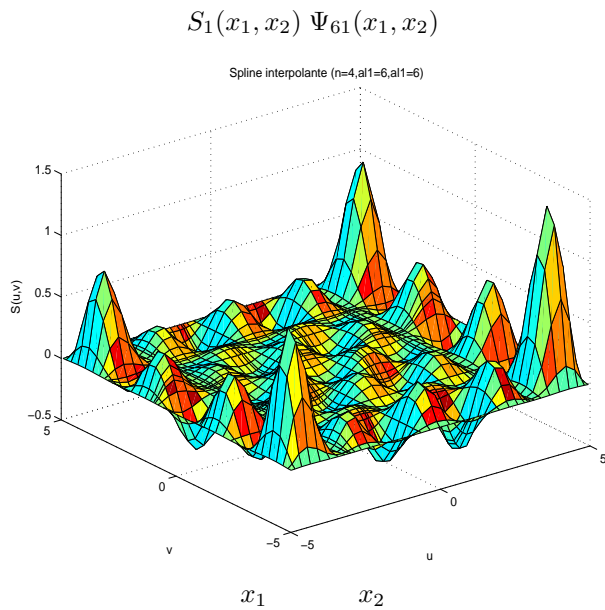
¹Cette quantité correspond en fait au développement de la fonction g_1 sur une base de polynômes d'Hermite, de plus haut degré $op = 10$ et de dimension $M = 2$.



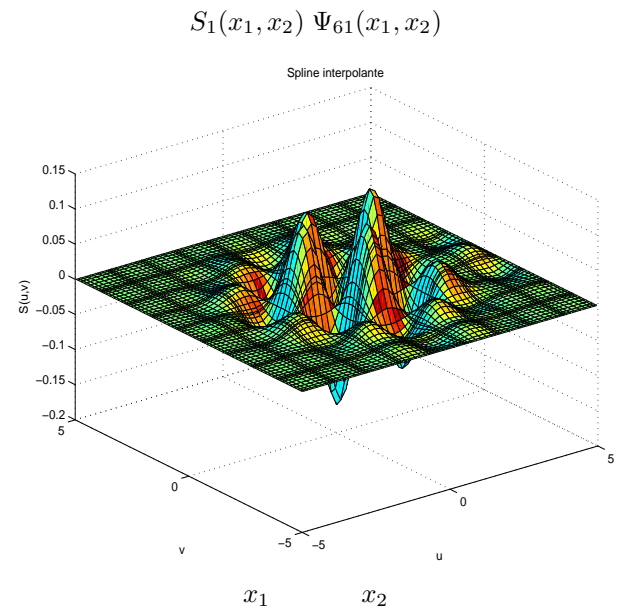
(a) fonction à intégrer exacte



(b) $H_4(x_1)$



(c) fonction à intégrer approchée ($N_I = 5 \times 5$)



(d) fonction à intégrer approchée ($N_I = 9 \times 9$)

FIG. 4.2 – Mise en valeur de l'amplification de défauts d'interpolation par des polynômes d'Hermite. Stratégie d'interpolation par des B-splines S_1 , avec $\Psi_{61}(x_1, x_2) = H_6(x_1) H_4(x_2)$

points $g(\mathbf{x}_i)$ de la fonction mécanique.

Suite à ces constats, la spline S_0 semble retenir notre attention.

Remarquons que les intégrales (4.41), (4.43) et (4.45) peuvent être calculées de manière exacte en utilisant un schéma de Gauss adapté. Dans (4.41) et (4.43), les fonction à intégrer ($g\varphi_M$ ou $g\Psi_j\varphi_M$) sont des hypersurfaces polynomiales. Celles-ci peuvent donc être intégrées exactement par un schéma de Gauss-Legendre. Dans (4.45), la fonction à intégrer $S_0\Psi_j\varphi_M$ est le produit d'une hypersurface polynomiale et d'une FDP gaussienne standard qui peut être intégré exactement par un schéma de Gauss-Hermite.

Il paraît alors utile de vérifier qu'une intégration de Gauss-Hermite de la fonction $g\Psi_j\varphi_M$ ne requière pas un nombre de points $g(\mathbf{x}_i)$ inférieur à celui demandé pour le calcul de la spline interpolante S_0 . Il ne semble cependant pas possible *a priori* de le démontrer dans le cas général. Nous testerons alors cette alternative dans le cadre d'applications au § 4.3.

4.2.3 Bilan, discussion

Ce paragraphe a présenté quelques variantes à l'approche proposée dans le paragraphe précédent, qui repose sur deux approximations : la réponse mécanique $Z = g(\overset{\circ}{\mathbf{X}})$, où $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$ est une v.a. gaussienne standard, est approchée par un développement tronqué sur une base de polynômes d'Hermite aléatoires. Le calcul approché des coefficients de ce développement fait appel à une interpolation par B-splines cubiques de g .

Ces coefficients s'écrivent sous la forme $g_j = \beta \int_{\mathbb{R}^M} g(\mathbf{x})\Psi_j(\mathbf{x})\varphi_M(\mathbf{x})d\mathbf{x}$, où $\beta \in \mathbb{R}$ et φ_M est la FDP gaussienne standard.

Nous avons souligné que cette approche utilise une surface de réponse, résultant d'une approximation par moindres carrés, définie sur une base de polynômes d'Hermite, par rapport à une norme continue. Deux approches alternatives sont alors envisageables :

1. une base non orthogonale (par exemple la base canonique des polynômes) est clairement moins intéressante ; en effet l'usage d'une base non orthogonale conduit à la résolution d'un système mal conditionné, alors qu'une base orthogonale comme celle des polynômes d'Hermite permet de s'en passer ;
2. une approximation par moindres carrés par rapport à une norme discrète est aussi possible (Isukappali [Isu98]), mais conduit aussi à la résolution d'un système *a priori* mal conditionné. L'alternative 2 n'a pas été développée ; sur ce point la thèse en cours de Berveiller sera éclairante.

L'interpolation par B-splines cubiques offre aussi le choix entre différentes alternatives, en vue d'approcher l'intégrale g_j . Nous avons envisagé plusieurs fonctions à interpoler : la fonction g (par la spline notée S_0), la fonction $g\varphi_M$ (par la spline notée S_1) et la fonction $g\Psi_j\varphi_M$ (par la spline notée S_2^j). Après discussion, nous avons retenu la spline S_0 , pour laquelle nous n'avons pas constaté *a priori* de problème numérique. De surcroît, une seule interpolation permet ensuite d'engendrer tous les coefficients de la surface de réponse, puis tous les moments statistiques de celle-ci.

Nous allons désormais tester cette approche sur des exemples d'application dans le paragraphe suivant.

4.3 Applications et comparaisons

Afin d'illustrer les possibilités de l'approche proposée, nous présentons quatre applications pour lesquelles les premiers moments de la réponse du système sont estimés. Nous voulons quantifier l'influence de la variabilité des paramètres aléatoires du modèle sur la réponse du système. Nous nous sommes placés en contexte lognormal et nous avons caractérisé les variabilités des paramètres par leurs coefficients de variation et de corrélation. Nous choisissons les deux premiers moments de la réponse (moyenne et écart type) comme indicateurs de cette influence. Les moments d'ordre trois et quatre puis une densité de probabilité approchée sont aussi présentés, mais aucune étude fiabiliste n'est cependant réalisée dans le cadre de cette thèse.

Les moments dépendent bien sûr des paramètres pilotant la méthode, à savoir l'ordre op de la base polynomiale sur laquelle est projetée la réponse mécanique et le nombre N_I de points d'interpolation par B-splines. Nous illustrons donc aussi, dans ces applications, l'influence de ces paramètres sur la qualité des résultats.

Les quatre exemples tests considérés sont des « cas d'école », un premier mécaniquement linéaire, les autres non linéaires. Le calcul des moments de référence, estimés analytiquement ou par simulations de Monte-Carlo, permet d'évaluer la qualité et la précision de notre méthode, en la confrontant à plusieurs des alternatives présentées dans le paragraphe précédent, que nous rappelons ci-dessous.

4.3.1 Mise en œuvre de l'approche proposée et alternatives testées

(a) Mise en œuvre de l'approche proposée

L'approche proposée consiste à écrire une réponse mécanique, modélisée par une v.a. Z , en fonction d'une v.a. gaussienne standard vectorielle $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$, ensuite à approcher $Z = g(\overset{\circ}{\mathbf{X}})$ par sa projection sur une base de polynômes d'Hermite, puis à tronquer celle-ci. Nous notons respectivement μ_Z , σ_Z , $(\beta_1)_Z$ et $(\beta_2)_Z$ la moyenne, l'écart type, les coefficients d'asymétrie (*skewness*) et d'aplatissement (*kurtosis*) de Z , tels que :

$$\mu_Z = \mu_Z^1 \quad ; \quad \sigma_Z^2 = \mu_Z^2 - (\mu_Z)^2 \quad ; \quad (\beta_1)_Z = \frac{|\mu_Z^3|}{(\sigma_Z)^3} \quad ; \quad (\beta_2)_Z = \frac{\mu_Z^4}{(\sigma_Z)^4} \quad (4.47)$$

où μ_Z^i est le moment d'ordre i , tel que $\mu_Z^i = \mathbf{E}[Z^i]$.

Nous rappelons enfin la définition du coefficient de variation : $a_Z = \sigma_Z/\mu_Z$.

Considérons la fonction g_P , approximation de g , avec $P \in \mathbb{N}$ fixé :

$$Z = g(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \simeq \tilde{Z} = g_P(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) = \sum_{j=0}^{P-1} g_j \Psi_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \quad ; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R} \quad (4.48)$$

Cette approximation, caractérisée par l'ordre P et l'ordre op de la base polynomiale $(\Psi)_{0 \leq j \leq P-1}$, peut alors être utilisée pour calculer les moments d'ordre λ de la v.a. Z :

$$\mu_Z^\lambda = \mathbf{E}[(g(\overset{\circ}{\mathbf{X}}))^\lambda] \simeq \mathbf{E}[(g_P(\overset{\circ}{\mathbf{X}}))^\lambda] = \tilde{\mu}_Z^\lambda \quad (4.49)$$

Grâce aux propriétés combinatoires des polynômes d'Hermite (cf. annexe C), la somme (4.48) élevée à une puissance $\lambda \in \mathbb{N}$ peut être développée explicitement (cf. (4.25) p. 77 et annexe C). La difficulté de cette approche réside alors essentiellement dans le *calcul des coefficients* g_j du développement tronqué (4.48), qui sont alors approchés par les coefficients \tilde{g}_j donnés par :

$$\tilde{g}_j = c_j^{-1} \int_{\mathbb{R}^M} S(\mathbf{x}) \Psi_j(\mathbf{x}) \varphi_M(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (4.50)$$

où φ_M est la densité de probabilité gaussienne standard et c_j défini dans l'annexe C. Nous choisissons d'évaluer les intégrales (4.50) en utilisant un *schéma d'intégration de Gauss-Hermite*. Rappelons que le coût des calculs, pour l'approche proposée, provient essentiellement du calcul des points d'interpolation² de la B-spline S , la détermination de chaque point demandant en effet un calcul EF déterministe. En revanche, le recours à des schémas d'intégration, même d'ordre élevé pour des degrés élevés des polynômes Ψ_j , n'engendre pas un coût très important puisque les valeurs aux points d'intégration sont fournis par la spline S , déterminée une fois pour toutes.

(b) Première illustration : la barre en traction

Nous considérons une barre rectiligne homogène de section constante, encastrée à son extrémité libre et soumise à son autre extrémité à une force de traction F . Nous nous intéressons au déplacement longitudinal z de la section finale, donné par :

$$z = \frac{FL}{ES} \quad (4.51)$$

où F est la force axiale de traction, S l'aire de la section droite, L la longueur de la barre et E le module d'élasticité longitudinal du matériau constitutif. On suppose que les paramètres incertains du modèle sont L et S , notés respectivement y_1 et y_2 . D'où, d'après (4.51) :

$$z = \gamma y_1 y_2^{-1} \quad ; \quad \gamma = E^{-1}F \quad (4.52)$$

Les paramètres déterministes E et F ont pour valeurs $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ MPa et $F = 10^6$ N.

Le paramètre incertain bidimensionnel $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ est modélisé par une v.a. lognormale bidimensionnelle $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ de caractéristiques suivantes :

Moyenne de Y_1 : $\mu_{Y_1} = \mathbf{E}[Y_1] = 1 \text{ m}$; Variance de Y_1 : $\sigma_{Y_1}^2 = \mathbf{E}[(Y_1 - \mu_{Y_1})^2] = \mu_{Y_1}^2 a_{Y_1}^2$
Moyenne de Y_2 : $\mu_{Y_2} = \mathbf{E}[Y_2] = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$; Variance de Y_2 : $\sigma_{Y_2}^2 = \mathbf{E}[(Y_2 - \mu_{Y_2})^2] = \mu_{Y_2}^2 a_{Y_2}^2$
Covariance de Y_1 et Y_2 : $C_{Y_1 Y_2} = \mathbf{E}[(Y_1 - \mu_{Y_1})(Y_2 - \mu_{Y_2})] = \mu_{Y_1} \mu_{Y_2} a_{Y_1} a_{Y_2} \rho_{Y_1 Y_2}$,

avec a_{Y_1} (resp. a_{Y_2}) le coefficient de variation de Y_1 (resp. Y_2) et $\rho_{Y_1 Y_2}$ le coefficient de corrélation du couple (Y_1, Y_2) . Dans ces conditions, z est une v.a. scalaire Z telle que :

$$Z = \gamma Y_1 Y_2^{-1} \quad (4.53)$$

dont on montre aisément qu'elle est lognormale, de moyenne μ_Z et de coefficient de variation a_Z donnés par :

$$\mu_Z = \gamma \mu_{Y_1} \mu_{Y_2}^{-1} (1 + a_{Y_2}^2) (1 + a_{Y_1} a_{Y_2} \rho_{Y_1 Y_2})^{-1} \quad (4.54)$$

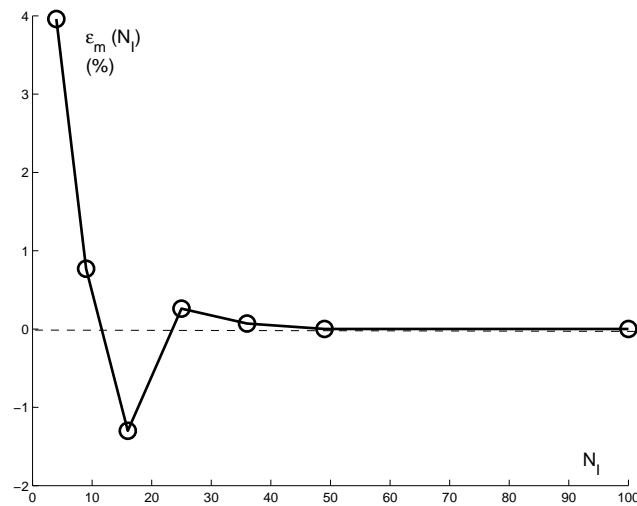
$$a_Z^2 = (1 + a_{Y_1}^2) (1 + a_{Y_2}^2) (1 + a_{Y_1} a_{Y_2} \rho_{Y_1 Y_2})^{-2} - 1 \quad (4.55)$$

La dispersion de la réponse (déplacement axial de la barre) due à la variabilité des paramètres aléatoires Y_1 (la longueur) et Y_2 (l'aire de la section droite) est caractérisée par le coefficient de variation a_Z dont on peut voir avec (4.55) qu'il est indépendant de γ , (i.e. des paramètres déterministes E et F), mais dépend des grandeurs a_{Y_1} , a_{Y_2} et $\rho_{Y_1 Y_2}$, (i.e. des caractéristiques de dispersion et de corrélation de Y_1 et Y_2).

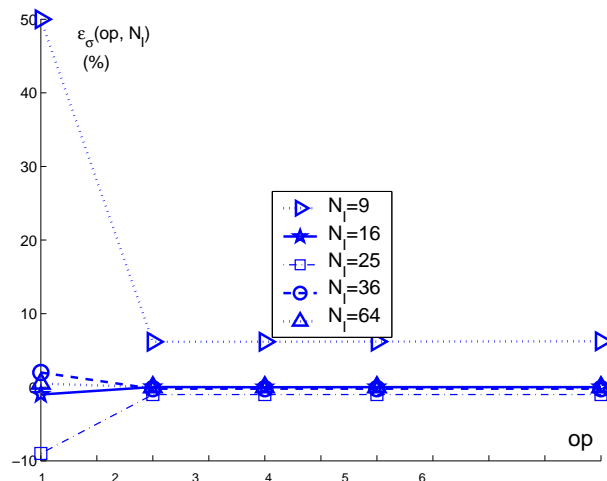
Les approximations des deux premiers moments de Z fournies par la méthode proposée dépendent bien évidemment des deux paramètres pilotant cette dernière, à savoir l'ordre op de la base polynomiale et le nombre N_I de points d'interpolation par B-splines. Pour M fixé à 2, on note respectivement $\tilde{\mu}_Z(op, N_I)$ et $\tilde{\sigma}_Z(op, N_I)$ les approximations obtenues pour la moyenne et l'écart type. Nous définissons ainsi les erreurs relatives d'approximation sur la moyenne et l'écart type.

$$\varepsilon_\mu(op, N_I) = \frac{100 [\mu_Z - \tilde{\mu}_Z(op, N_I)]}{\mu_Z} \quad ; \quad \varepsilon_\sigma(op, N_I) = \frac{100 [\sigma_Z - \tilde{\sigma}_Z(op, N_I)]}{\sigma_Z} \quad (4.56)$$

²Nous choisissons une répartition homogène des points d'interpolation ($[\mu_{\circ} \pm 5\sigma_{\circ}] = [-5, 5]$), une étude précise reste cependant à être conduite, afin de définir une répartition optimale.



(a) Évolution de l'erreur sur la moyenne $\varepsilon_\mu(N_I)$ en fonction du nombre N_I de points d'interpolation



(b) Évolution de l'erreur sur l'écart type de Z en fonction de l'ordre op de la base polynomiale, pour différentes valeurs de N_I

FIG. 4.3 – Évolution des erreurs sur la moyenne et l'écart type ($a_{Y_1} = a_{Y_2} = 0, 1$, $\rho_{Y_1 Y_2} = 0, 8$)

où μ_Z et σ_Z sont les valeurs exactes de ces grandeurs, données par les relations (4.54)-(4.55), avec $\sigma_Z = \mu_Z a_Z$.

Remarquons ici que $\tilde{\mu}_Z(op, N_I)$ ne dépend pas de op (cf. (4.27)), donc l'erreur $\varepsilon_\mu(op, N_I)$ n'en dépendra pas. L'évolution de $\varepsilon_\mu(N_I)$ en fonction de N_I est représentée sur la figure 4.3 (a), pour $a_{Y_1} = a_{Y_2} = 0, 1$ et $\rho_{Y_1 Y_2} = 0, 8$.

Le figure 4.3 (b) illustre, quant à elle, et pour les mêmes valeurs de a_{Y_1} , a_{Y_2} et $\rho_{Y_1 Y_2}$, l'évolution de $\varepsilon_\sigma(op, N_I)$ en fonction de M , pour plusieurs valeurs de N_I .

Nous pouvons constater que l'approximation de la moyenne est de bonne qualité même pour de faibles valeurs de N_I . De plus, nous constatons bien la convergence numérique attendue vers la valeur exacte. En revanche, on observe que l'écart type approché ne converge vers l'écart type exact que si N_I est suffisant pour fournir une qualité d'interpolation satisfaisante. Néanmoins, cette condition est vite vérifiée ($N_I = 4 \times 4$). Pour de telles valeurs de N_I , la convergence numérique est ensuite rapide.

Pour M et N_I fixés, on note $\tilde{a}_Z(op, N_I)$ l'approximation, fournie par la méthode proposée, du

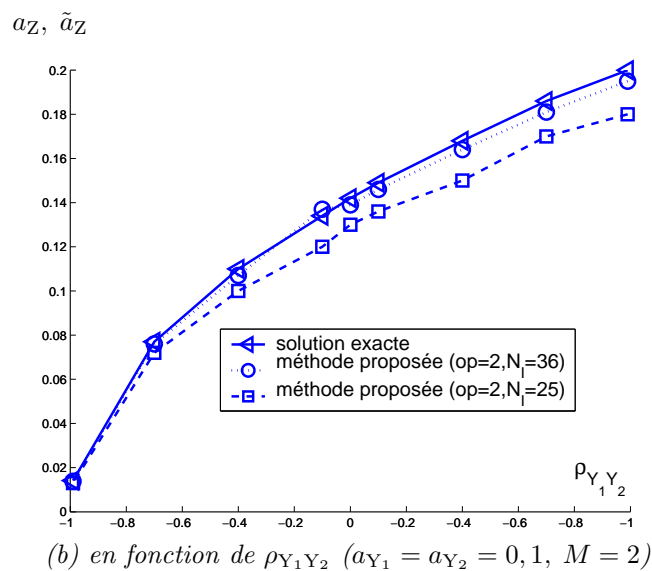
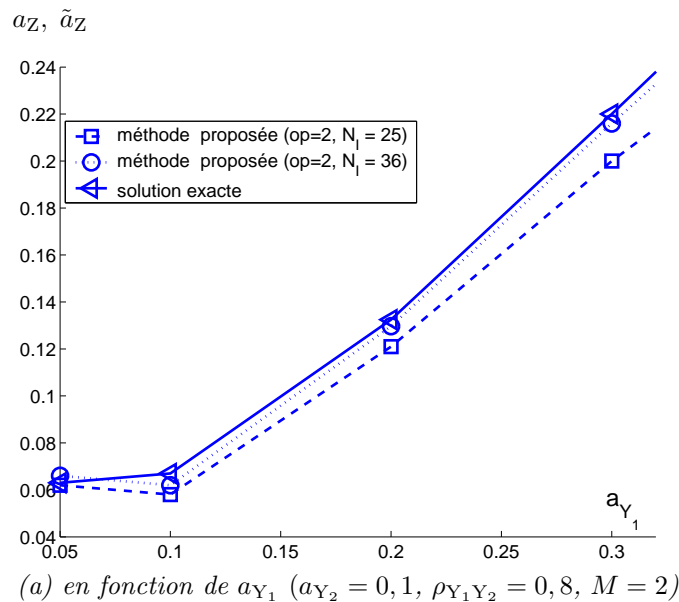


FIG. 4.4 – Évolution du coefficient de variation de Z

coefficient de variation a_Z de Z. Les figures 4.4 (a) et 4.4 (b) représentent l'évolution de $\tilde{a}_Z(op, N_I)$ en fonction de, respectivement :

- (a) a_{Y_1} , pour $a_{Y_2} = 0, 1$ et $\rho_{Y_1 Y_2} = 0, 8$ (figure 4.4 (a)),
- (b) $\rho_{Y_1 Y_2}$ pour $a_{Y_1} = a_{Y_2} = 0, 1$ (figure 4.4 (b)),

et ce pour $op = 2$ et pour deux valeurs de N_I : 25 et 36, correspondant respectivement à 4 et 5 arcs d'interpolation dans chaque direction d'espace. Sur ces figures sont également tracées les évolutions correspondantes du coefficient de variation exact a_Z , donné par (4.55). La comparaison de ces divers graphes montre une bonne adéquation entre les résultats exacts et ceux fournis par notre approche, qui croît logiquement avec N_I .

(c) Alternatives testées

- **Surface de réponse par interpolation B-splines** : il s'agit dans ce cas de remplacer directement la fonction g par son interpolée B-spline S . L'interpolation est faite aussi ici une seule fois et les moments statistiques non centrés de la v.a. Z, à l'ordre λ sont alors approchés

comme suit :

$$\mathbf{E}[(g(\overset{\circ}{\mathbf{X}}))^\lambda] \simeq \mathbf{E}[(S(\overset{\circ}{\mathbf{X}}))^\lambda] \quad (4.57)$$

Nous n'effectuons donc plus de développement hilbertien. La fonction B-spline S peut être vue comme une surface de réponse, au sens de surface approximante, de la cible Z , obtenue non par approximation au sens des moindres carrés, comme c'est couramment le cas pour les surfaces de réponse, mais par interpolation.

• **Calcul des coefficients g_j sans interpolation B-spline :** dans cette variante, les points d'intégration pour le calcul des intégrales dans (4.14) sont fournis par la fonction mécanique g et non par une interpolation S de cette fonction. Le coût de cette variante augmentera donc avec le degré des schémas d'intégration. La méthode d'intégration numérique utilisée est ici la méthode de Gauss-Hermite.

• **Méthode de quadrature :** partant du constat que le calcul des moments statistiques d'une v.a. Z , fonction d'une v.a. gaussienne G (*i.e.* $\mathbf{E}[(g(\overset{\circ}{\mathbf{X}}))^\lambda]$) se traduit par des calculs d'intégrales pondérées par la densité de probabilité gaussienne standard, Baldeweck dans [Bal99] utilise les schémas de Gauss-Hermite pour le calcul de moments statistiques. L'appel à des schémas d'intégration d'ordres différents lorsque l'ordre des moments augmentera, peut nécessiter des calculs de points différents et donc un nombre d'appels plus élevé de la réponse Z . Nous avons ici arbitrairement choisi de prendre le même nombre de points d'intégration, quel que soit l'ordre du moment estimé.

Nous comparons les performances des quatre méthodes ou variantes présentées ci-dessus sur deux problèmes mécaniques présentant des non-linéarités matérielles. Pour chacun d'eux, les évolutions des moments d'un degré de liberté de la structure sont tracées en fonction du nombre d'appels $N = n^M$ au modèle EF (avec M le nombre de paramètres incertains et n le nombre de points d'intégration) et sont comparées à une solution de référence obtenue par simulations de Monte-Carlo.

Nous notons respectivement $\tilde{\mu}_Z$, $\tilde{\sigma}_Z$, \tilde{a}_Z , $(\tilde{\beta}_1)_Z$ et $(\tilde{\beta}_2)_Z$ les estimations par les approches ci-dessus de la moyenne, de l'écart type, du coefficient de variation, des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement de Z . Les estimations de ces caractéristiques par simulations de Monte-Carlo (10^5 tirages) sont notées distinctement : $\hat{\mu}_Z$, $\hat{\sigma}_Z$, \hat{a}_Z , $(\hat{\beta}_1)_Z$ et $(\hat{\beta}_2)_Z$. Les simulations constituent alors les résultats de référence ; nous définissons enfin quelques erreurs relatives, exprimées en %, en complément des erreurs (4.56) :

$$\varepsilon_{a_Z} = \frac{100 \times |\tilde{a}_Z - \hat{a}_Z|}{\hat{a}_Z} \quad ; \quad \varepsilon_{(\beta_1)_Z} = \frac{100 \times |(\tilde{\beta}_1)_Z - (\hat{\beta}_1)_Z|}{(\hat{\beta}_1)_Z} \quad ; \quad \varepsilon_{(\beta_2)_Z} = \frac{100 \times |(\tilde{\beta}_2)_Z - (\hat{\beta}_2)_Z|}{(\hat{\beta}_2)_Z} \quad (4.58)$$

4.3.2 Treillis élasto-plastique

(a) Position du problème

Nous considérons un treillis formé de trois barres (figure 4.5) soumis sur son articulation inférieure à une force de traction F , monotone croissante. Les deux barres latérales ont la même longueur $L/\cos\alpha$ et le même module d'élasticité longitudinal E_1 . La barre centrale a une longueur L et un module d'élasticité longitudinal E_2 . Les trois barres ont la même section droite, d'aire S . Nous nous intéressons au déplacement vertical z du nœud inférieur, calculé sous l'hypothèse d'un comportement élasto-plastique écrouissable des matériaux constitutifs des barres. Les paramètres aléatoires du problème sont les modules d'élasticité longitudinal E_1 et E_2 , notés y_1 et y_2 .

Le couple $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ est modélisé par une v.a. lognormale bidimensionnelle $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ de

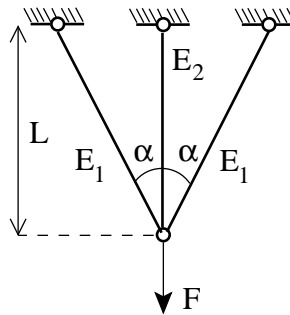


FIG. 4.5 – Treillis élémentaire

caractéristiques suivantes :

Moyenne de Y_1 : $\mu_{Y_1} = 2 \cdot 10^{10}$ Pa ; écart type de Y_1 : $\sigma_{Y_1} = \mu_{Y_1} a_{Y_1}$

Moyenne de Y_2 : $\mu_{Y_2} = 2 \cdot 10^{10}$ Pa ; écart type de Y_2 : $\sigma_{Y_2} = \mu_{Y_2} a_{Y_2}$

Covariance de Y_1 et Y_2 : $C_{Y_1 Y_2} = \mu_{Y_1} \mu_{Y_2} a_{Y_1} a_{Y_2} \rho_{Y_1 Y_2}$

avec a_{Y_1} (resp. a_{Y_2}) le coefficient de variation de Y_1 (resp. Y_2) et $\rho_{Y_1 Y_2}$ le coefficient de corrélation du couple (Y_1, Y_2) .

Les autres paramètres du modèle : L, S, α, F, f_y (seuil de plasticité), et E_p (module d'écrouissage), sont supposés déterministes et ont pour valeurs :

$$L = 1 \text{ m} ; S = 20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 ; \alpha = \pi/4$$

$$F = 25 \cdot 10^4 \text{ N} ; f_y = 6 \cdot 10^7 \text{ Pa} ; E_p = 0.7 \mu_{Y_1}$$

Dans ces conditions, le déplacement z est une v.a. scalaire, notée Z , telle que $Z = f(\mathbf{Y})$, où f est une application non linéaire de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans \mathbb{R} qui peut être explicitée pour cet exemple simple. En revanche, les moments statistiques, ne pouvant être estimés analytiquement, sont tout d'abord estimés par simulations de Monte-Carlo.

Afin d'évaluer la sensibilité du déplacement z aux modules d'élasticité, nous présentons sur les figures 4.6 l'évolution des premiers moments simulés de la réponse Z , en fonction du coefficient de variation $a_E = a_{Y_1} = a_{Y_2}$, variant de 0,05 à 0,5.

Les figures 4.6 (a) et (b) montrent des évolutions quasi-linéaires du coefficient de variation \hat{a}_Z et

du coefficient d'asymétrie $(\hat{\beta}_1)_Z$ en fonction de a_E . Bien que la figure 4.6 (c) décrive une relation non linéaire $(\hat{\beta}_2)_Z(a_E)$, l'influence de ces modules sur le déplacement z semble quasi-linéaire ; il apparaît que z est plutôt sensible aux modules d'élasticité : nous avons $\hat{a}_Z(a_E = 0,5) \simeq 0,3$ et $(\hat{\beta}_1)_Z(a_E = 0,5) \simeq 1$.

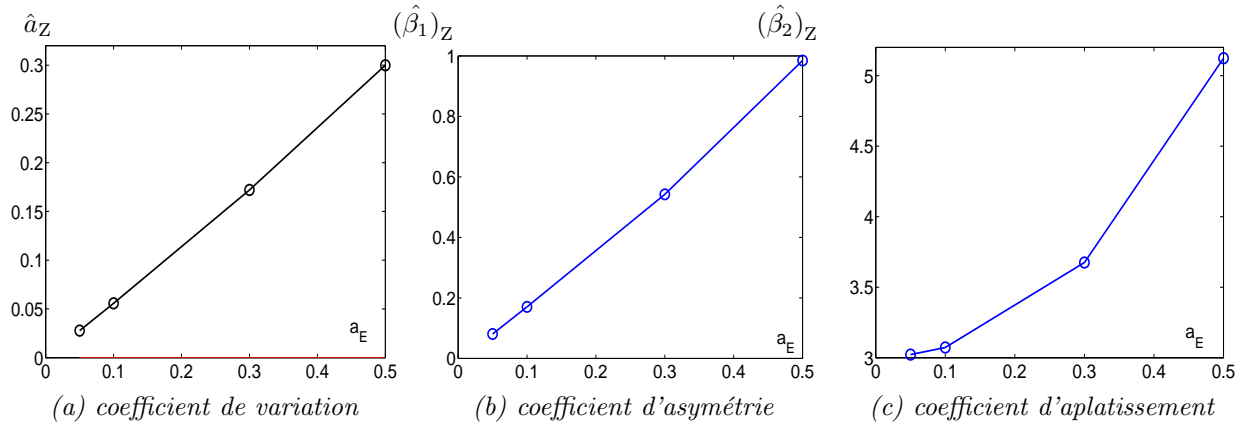


FIG. 4.6 – Évolution des premiers moments de Z obtenus par simulation en fonction du coefficient de variation de E ($a_{Y_1} = a_{Y_2} = a_E$; $op = 5$; $\rho_{Y_1 Y_2} = 1$)

Les estimateurs simulés par la méthode de Monte-Carlo sont obtenus à partir de 10^5 calculs.

(b) Analyse de l'approche proposée

Analyse de convergence numérique

Le tableau 4.2 montre l'évolution de l'erreur sur la moyenne $\varepsilon_{\mu_Z}(N_I)$, définie en (4.56), en fonction du nombre N_I de points d'interpolation, pour des coefficients de variation de valeurs $a_E = 0,3$ et un coefficient de corrélation $\rho_{Y_1 Y_2} = 0$. Nous observons la convergence numérique de $\varepsilon_{\mu_Z}(N_I)$ vers zéro ; l'erreur est déjà faible pour un nombre réduit d'appels (0,47% pour $N_I = 3 \times 3$ appels) ; elle devient négligeable pour $N_I = 9 \times 9$ appels (0,06%).

N_I	3×3	4×4	5×5	7×7	9×9
Valeur « cible » (simulation de Monte-Carlo) : $\hat{\mu}_Z (\times 10^{-3} \text{ m})$	4,09				
Approche proposée (erreur $\varepsilon_{\mu_Z}(N_I)$ en %) :	0,47	0,98	0,38	0,37	0,06

TAB. 4.2 – Évolution de l'erreur sur la moyenne de Z en fonction du nombre N_I de points d'interpolation B-spline ($a_E = 0,3$, $\rho_{Y_1 Y_2} = 0$)

L'évolution de l'écart type de Z en fonction de l'ordre op (ordre de la base polynomiale) est représentée sur la figure 4.7 (a).

La figure 4.7 (b) illustre quant à elle, et pour les valeurs $a_{Y_1} = a_{Y_2} = 0,3$ et $\rho_{Y_1 Y_2} = 0$, l'évolution du coefficient de variation de Z en fonction des coefficients de variation des modules d'élasticité longitudinaux des barres, pour des valeurs de a_E , allant de $a_E = 0,05$ à $a_E = 0,5$.

Dans chaque cas, $\tilde{\sigma}_Z(op, N_I)$ et $\tilde{a}_Z(N_I)$ sont comparés avec leurs cibles respectives $\hat{\mu}_Z$ et $\hat{\sigma}_Z$ obtenues par simulation de Monte-Carlo. Nous pouvons constater que l'approximation de l'écart type peut ne pas converger vers la valeur de référence si N_I est trop faible ($N_I = 3 \times 3$). Mais pour les valeurs du nombre de points d'interpolation N_I rendant possible la convergence numérique

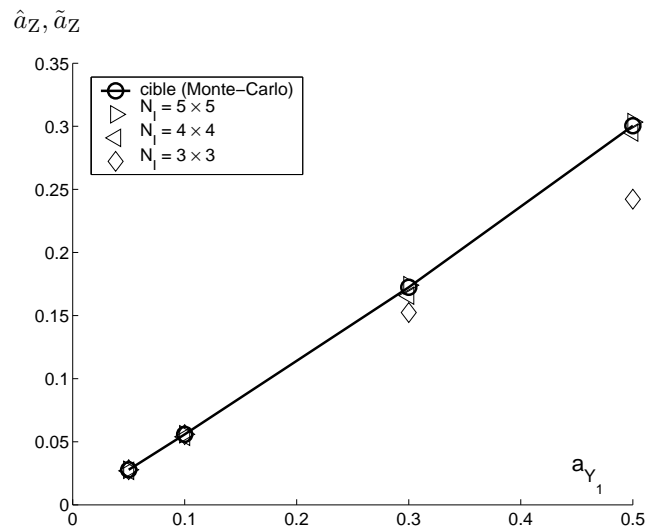
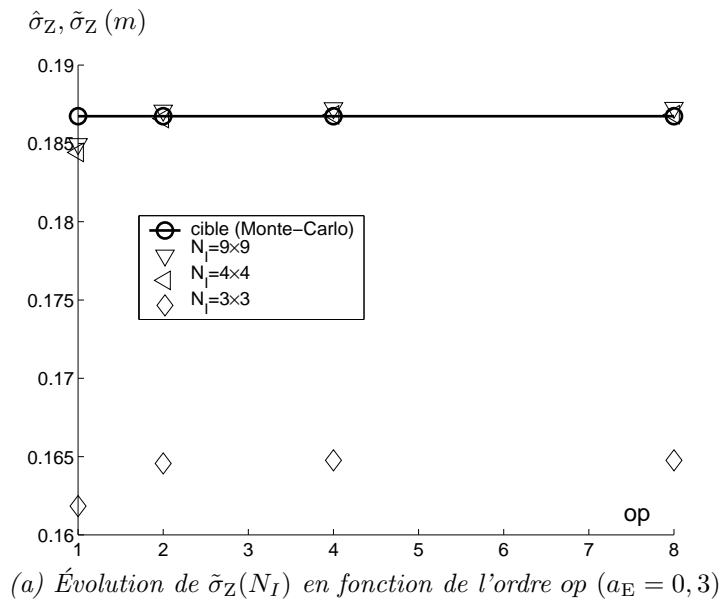


FIG. 4.7 – Évolution de l'écart type et d'un coefficient de variation de Z estimés par l'approche proposée ($a_{Y_1} = a_{Y_2} = 0,3$; $\rho_{Y_1 Y_2} = 0$)

($N_I \geq 4 \times 4$), celle-ci est rapide et conduit à de bonnes approximations.

Influence du mode d'estimation des dérivées numériques

Les figures 4.8 décrivent l'évolution de la moyenne (Fig. 4.8 (a)) et de l'écart type (Fig.4.8(b)), estimés par l'approche proposée, en considérant successivement des conditions de dérivées nulles, calculées par différences centrées, puis décentrées, sur les contours du domaine définition de la spline interpolante (cf. annexe D). L'utilisation d'un schéma de différences décentrées présente l'avantage de ne pas avoir à calculer de nouveaux points de la fonction g , ce schéma de dérivation numérique n'utilisant ici que des points issus de la grille d'interpolation. En revanche, les différences centrées exigent le calcul d'autres points de la réponse mécanique, en dehors de la grille d'interpolation.

Nous notons successivement $(\hat{\mu}_Z, \hat{\sigma}_Z)$ et $(\tilde{\mu}_Z, \tilde{\sigma}_Z)$ les moyennes et écart types obtenus respectivement par simulation et par l'approche proposée.

En considérant des dérivées nulles – ce qui est une approximation grossière –, nous observons une convergence numérique rapide de la moyenne approchée $\tilde{\mu}_Z$ vers la moyenne simulée $\hat{\mu}_Z$. À partir de $N = 4 \times 4$ calculs (soit 3 arcs d'interpolation dans chaque direction d'espace), les erreurs par rapport aux valeurs cibles (simulations de Monte-Carlo) sont inférieures à 1% pour les calculs de dérivées par différences finies. Nous constatons de plus que considérer des dérivées nulles, permet aussi des résultats précis ($< 1\%$ si $N > 5 \times 5$), bien que l'interpolation de g devienne grossière aux frontières du domaine de définition de la spline interpolante (cf. annexe D). En effet, les valeurs du produit de la spline interpolante et de la DP gaussienne standard restent très proches de zéro aux frontières du domaine d'interpolation.

L'écart type approché $\tilde{\sigma}_Z$ converge plus lentement que la moyenne $\tilde{\mu}_Z$ vers la cible $\hat{\sigma}_Z$, quelle que soit la stratégie de dérivation. Les différences, centrées ou non, conduisent globalement à une même précision ($< 0,3\%$ pour $N > 5 \times 5$ calculs), meilleure qu'en considérant des dérivées nulles ($\sim 0,5\%$ pour $N > 5 \times 5$ calculs).

Nous retenons les différences décentrées, qui coûtent moins chères que les différences centrées, après vérification sur d'autres tests similaires.

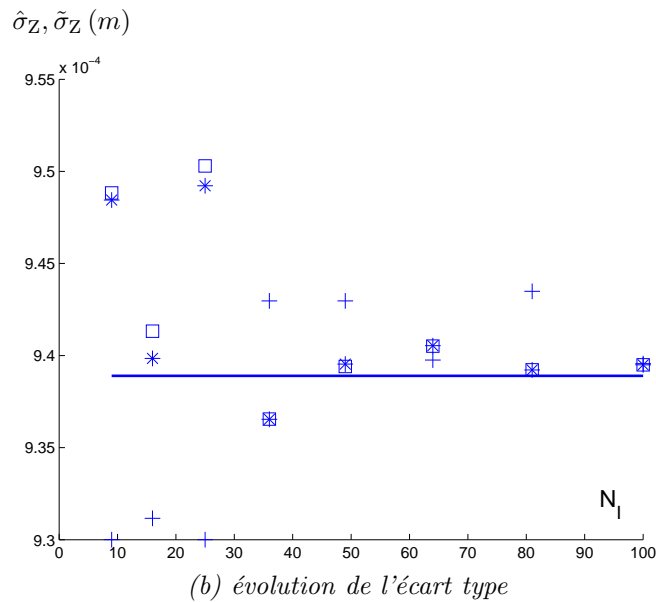
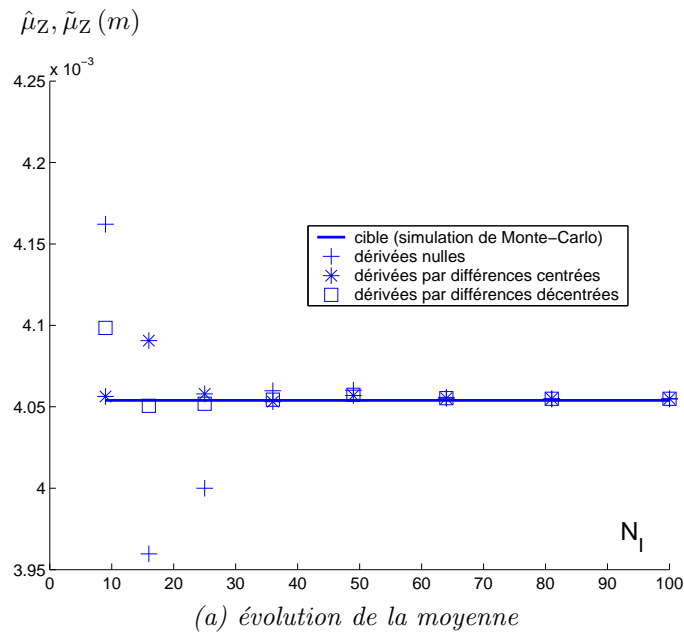


FIG. 4.8 – Évolution des premiers moments de Z en fonction du nombre d'appels à la fonction mécanique ($op = 5$; $a_{Y_1} = a_{Y_2} = 0,3$; $\rho_{Y_1 Y_2} = 0$), pour différentes stratégies de calcul de dérivées

(c) Comparaison avec les alternatives testées

Les figures 4.9 montrent les valeurs de la moyenne $\hat{\mu}_Z$ et de l'écart type $\hat{\sigma}_Z$ du déplacement Z , obtenues par simulations de Monte-Carlo. Les valeurs issues de la simulation ont été obtenues à partir de 100 000 tirages. Nous considérons ici que les v.a. Y_1 et Y_2 ont un coefficient de variation $a_{Y_1} = a_{Y_2} = 0,3$ et un coefficient de corrélation $\rho_{Y_1 Y_2} = 0$.

Ces mêmes figures 4.9 décrivent aussi respectivement les évolutions de la moyenne $\tilde{\mu}_Z$ et de l'écart type $\tilde{\sigma}_Z$ du déplacement Z , obtenues par les méthodes présentées au paragraphe précédent, en fonction du nombre d'appels N à la fonction mécanique.

Ce nombre N d'appels à la fonction mécanique est égal au nombre N_I de points d'interpolation dans le cas d'une approche par spline et au nombre de points d'intégration dans le cas d'une

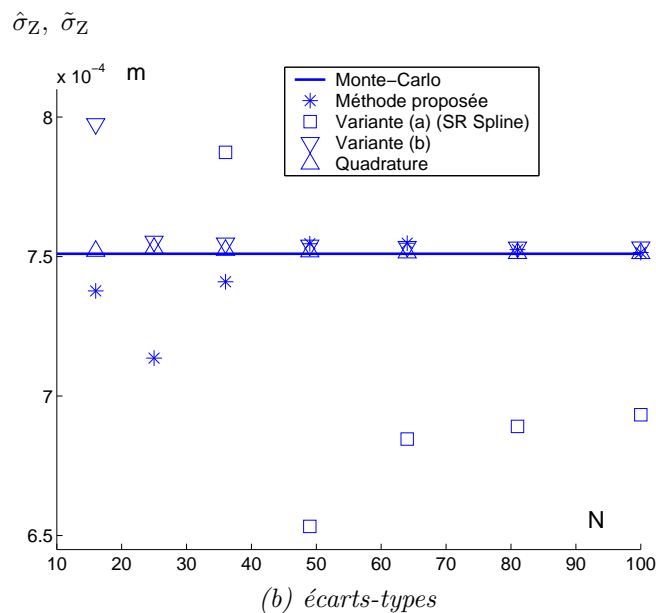
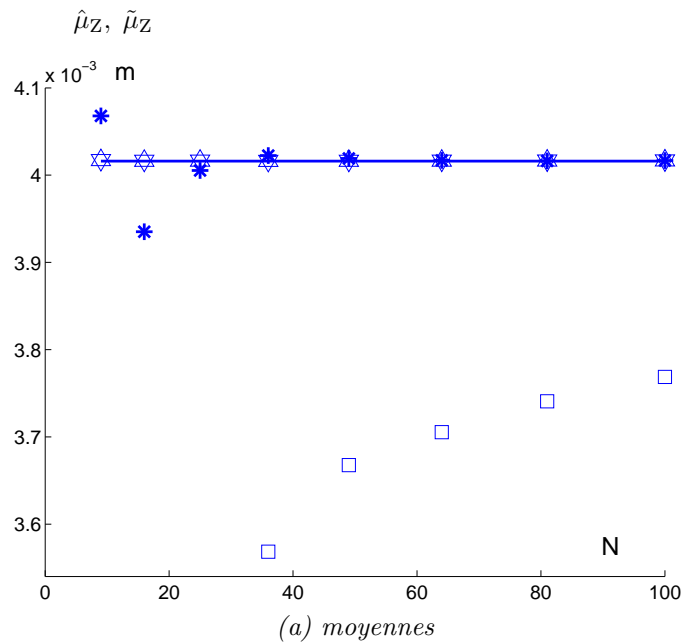


FIG. 4.9 – Évolution des moyennes et écarts-types en fonction du nombre d'appels à la fonction mécanique ($op = 5$; $a_{Y_1} = a_{Y_2} = 0, 3$; $\rho_{Y_1 Y_2} = 0$),

approche par quadrature. Dans le premier cas, nous avons arbitrairement choisi un ordre $op = 8$, i.e. un ordre pour lequel nous sommes sûrs de la convergence numérique.

Nous observons, quelle que soit l'approche considérée, une convergence numérique des valeurs approchées des moyennes (cf. figure 4.9 (a)) et des écarts-types (cf. figure 4.9 (b)) de la réponse mécanique considérée vers les valeurs cibles obtenues par simulations de Monte-Carlo.

À l'exception notable de la variante a (surface de réponse par B-spline (cf. § 4.3.1 (a))), les convergences numériques sont rapides puisque les trois autres approches conduisent à des erreurs inférieures à 1 % à partir de 5×5 appels à la fonction mécanique. La mauvaise performance de la variante a n'est pas surprenante : il a en effet déjà été observé que la construction d'une surface de réponse par interpolation et non par approximation, était susceptible de fournir de mauvais résultats.

Remarquons que les points de la variante a, pour un nombre de calculs inférieur à 6×6 , ne sont pas reportés sur les graphes pour des questions d'échelle, les erreurs étant dans ce cas comprises entre 44 % et 137 %.

Enfin, nous notons une convergence numérique plus rapide pour les approches utilisant uniquement la fonction mécanique (variante b (cf. § 4.3.1 (b)) et la méthode de quadrature (cf. § 4.3.1 (c)) que lorsque nous utilisons une interpolation de cette fonction (approche proposée (cf. § 4.3.1)). Toutefois, dès lors qu'une qualité suffisante de l'interpolation B-spline a été obtenue (6×6 à 7×7 points), les résultats fournis par la méthode proposée sont d'aussi bonne qualité que ceux des deux autres approches (voire meilleurs que ceux de la variante b).

À l'issue de ces premières comparaisons, la méthode de quadrature semble plus performante que les autres. Nous poursuivons nos comparaisons en nous focalisant sur les méthodes de quadrature et l'approche proposée, en retenant un calcul numérique des dérivées par différences décentrées.

(d) Comparaison entre la quadrature et l'approche proposée

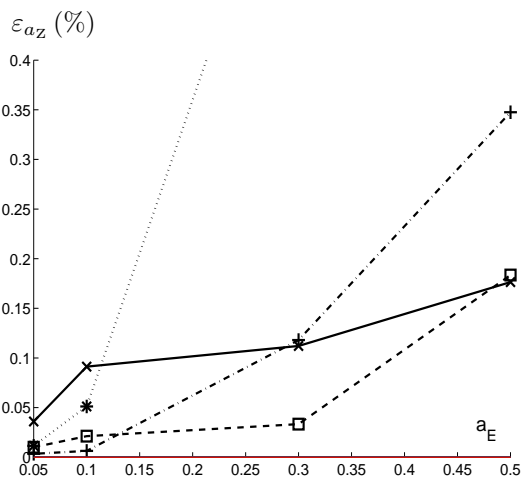
Les figures 4.10 présentent l'évolution des erreurs respectives ε_{a_Z} , $\varepsilon_{(\beta_1)_Z}$, $\varepsilon_{(\beta_2)_Z}$ (en %), en fonction du coefficient de variation $a_{Y_1} = a_{Y_2} = a_E$, pour $a_E = 0,3$ et pour un coefficient de corrélation $\rho_{Y_1 Y_2} = 0$.

Les figures 4.10 (a), (c), (e) montrent les évolutions respectives de ε_{a_Z} , $\varepsilon_{(\beta_1)_Z}$, $\varepsilon_{(\beta_2)_Z}$ pour l'approche proposée, pour différents nombres de calculs mécaniques ($5 \times 5 \leq N \leq 10 \times 10$; les figures 4.10 (b), (d), (f) montrent respectivement les mêmes évolutions obtenues par la méthode de quadrature.

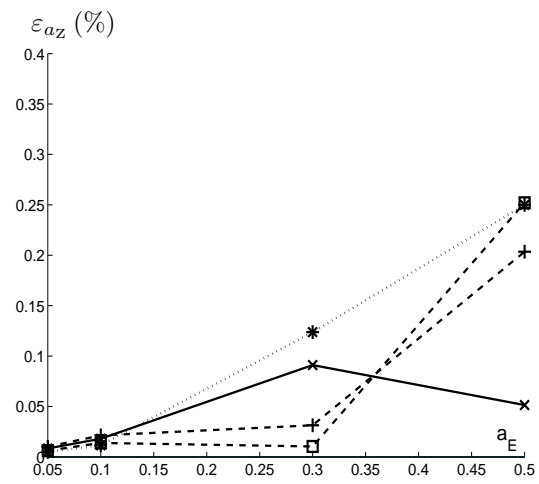
Globalement, l'approche proposée et la quadrature produisent des résultats du même ordre de grandeur :

- pour un coefficient de variation $a_E = 0,3$, les erreurs restent inférieures à 1%, voire à 0,1% dans le cas de l'erreur ε_{a_Z} , à condition que le nombre de calculs mécaniques soit supérieur à 5×5 pour l'approche proposée ;
- pour un coefficient de variation $a_E = 0,5$, les erreurs augmentent, mais restent raisonnables (0,25 à 2%).

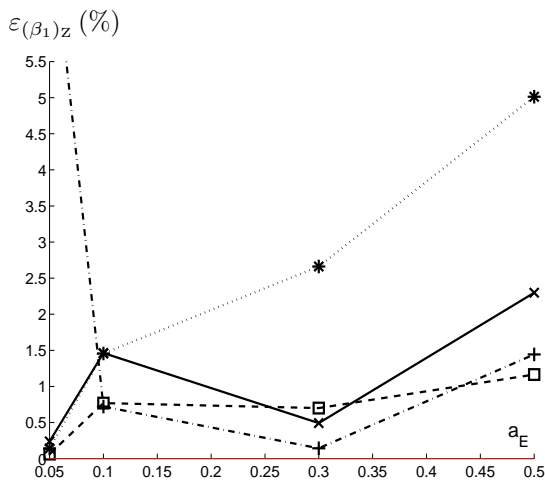
Par conséquent, bien que la quadrature apparaisse sensiblement plus précise que l'approche proposée, sur le coefficient de variation (cf. Fig. 4.10 (a)-(b)), sur cet exemple, on ne peut pas conclure sur les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement, où les deux approches fournissent des résultats comparables (cf. Fig. 4.10 (c)-(f)).



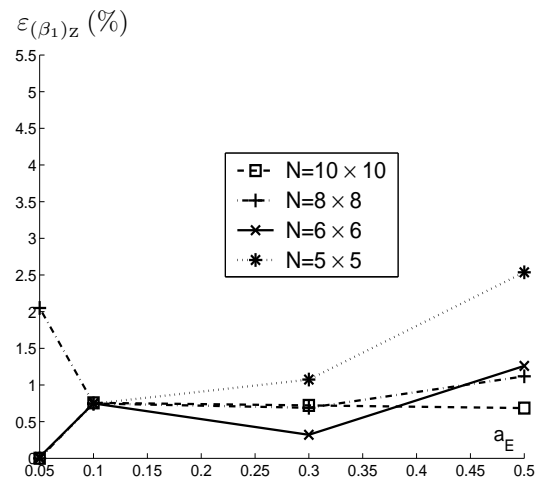
(a) erreur sur le coefficient de variation (approche proposée)



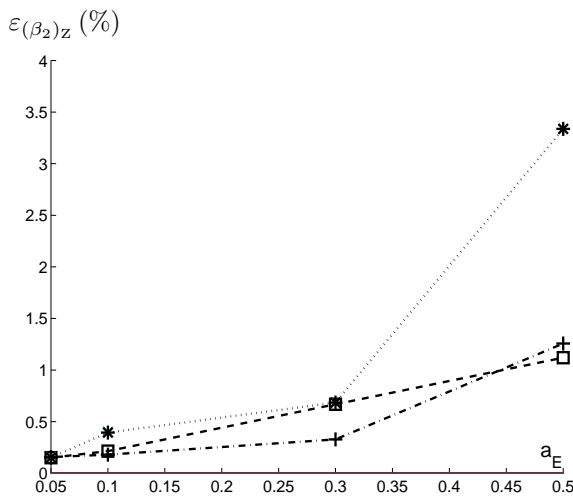
(b) erreur sur le coefficient de variation (méthode de quadrature)



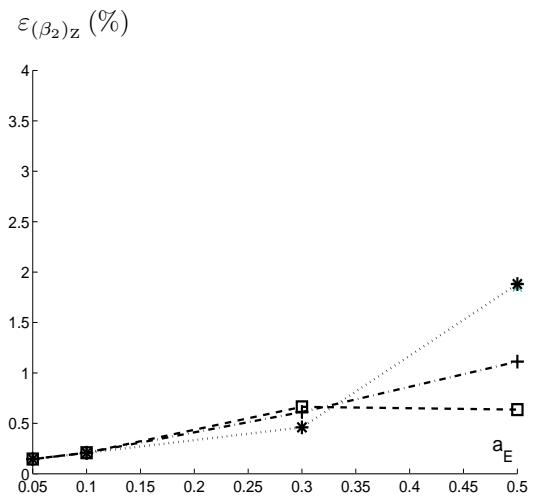
(c) erreur sur le coefficient d'asymétrie (approche proposée)



(d) erreur sur le coefficient d'asymétrie (méthode de quadrature)



(e) erreur sur le coefficient d'aplatissement (approche proposée)



(f) erreur sur le coefficient d'aplatissement (méthode de quadrature)

FIG. 4.10 – Évolution des erreurs respectives ε_{az} , $\varepsilon_{(\beta_1)_z}$, $\varepsilon_{(\beta_2)_z}$, en fonction du coefficient de variation $a_{Y_1} = a_{Y_2} = a_E$, pour $\rho_{Y_1 Y_2} = 0$

4.3.3 Sphère élasto-plastique sous pression

(a) Position du problème

Nous considérons une sphère épaisse de rayon intérieur a et de rayon extérieur b soumis à une pression interne p (Fig. 4.11). Le matériau constitutif de cette sphère est supposé obéir à un comportement élasto-plastique parfait et nous notons E son module d'élasticité longitudinal, ν son coefficient de Poisson et f_y sa limite élastique.

Les paramètres aléatoires du problème sont E et ν , notés respectivement y_1 et y_2 . Le couple

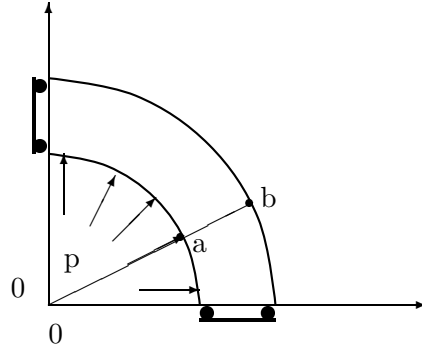


FIG. 4.11 – Sphère sous pression interne

$\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ est modélisé par une v.a. bidimensionnelle $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ de caractéristiques : $\mu_{Y_1} = 2 \cdot 10^{11}$ Pa, $\mu_{Y_2} = 0,3$, $\sigma_{Y_1} = \mu_{Y_1} a_{Y_1}$, $\sigma_{Y_2} = \mu_{Y_2} a_{Y_2}$ et $C_{Y_1 Y_2} = \mu_{Y_1} \mu_{Y_2} a_{Y_1} a_{Y_2} \rho_{Y_1 Y_2}$, où le coefficient de corrélation $\rho_{Y_1 Y_2}$ est choisi égal à 0,9.

Les autres paramètres sont déterministes et égaux à : $a = 10^{-3}$ m, $b = 2 \cdot 10^{-3}$ m, $f_y = 3 \cdot 10^8$ Pa, $p = 3,589 \cdot 10^8$ Pa.

Nous considérons ici par le déplacement radial z de la surface interne ($r = a$) de la sphère. Le niveau maximal de charge considéré ici ($p = 3,589 \cdot 10^8$ Pa) garantit que la surface interne est plastifiée. La solution déterministe du problème est connue (Mandel [Man66]). On note Z la v.a. scalaire associée à ce déplacement radial z , i.e. telle que :

$$Z = f(\mathbf{Y}) \quad (4.59)$$

où f est une application de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ dans \mathbb{R} , telle que, $\forall \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$:

$$f(\mathbf{y}) = \frac{A_1 - A_2 y_2}{y_1} \quad (4.60)$$

où $A_1 = a f_y [\alpha^3 - \ln \alpha^2 - \frac{2}{3}(1 - \beta^3)]$; $A_2 = a f_y [\alpha^3 - \ln \alpha^4 - \frac{4}{3}(1 - \beta^3)]$

$$\alpha = \frac{c}{a} ; \quad \beta = \frac{c}{b} \quad (4.61)$$

la constante c étant obtenue par résolution de l'équation :

$$p = 2 f_y \left[\ln \alpha + \frac{1}{3}(1 - \beta^3) \right] \quad (4.62)$$

Les figures 4.12 présentent l'évolution des premiers moments obtenus par simulations de Monte-Carlo de la réponse Z , en fonction des coefficients de variation a_{Y_1} et a_{Y_2} , variant de 0,05 à 0,5. Il apparaît que l'influence de Y_1 (modélisant le module d'élasticité) est plus importante que celle de Y_2 , modélisant le coefficient de Poisson, pour les moments étudiés. Nous choisissons alors dans

les paragraphes suivants d'effectuer des analyses en fonction du facteur le plus influent, i.e. Y_1 . La figure 4.12 (a) montre une évolution du coefficient de variation de Z , notés $\hat{\alpha}_Z(a_{Y_i})_{i=1,2}$, qui est croissante jusqu'à $a_{Y_1} = 0,3$, puis décroissante jusqu'à $a_{Y_1} = 0,5$. Cela signifie que dans une première phase, l'écart type $\hat{\sigma}_Z$ croît plus vite que la moyenne $\hat{\mu}_Z$, et inversement ensuite. De plus, le choix d'une v.a. lognormale (Y_2) pour modéliser les variations du coefficient de Poisson est discutable. Par précaution, nous effectuons plus loin des analyses limitées à $a_{Y_1} = 0,3$ pour le module d'élasticité longitudinale et $a_{Y_2} = 0,1$ pour le coefficient de Poisson.

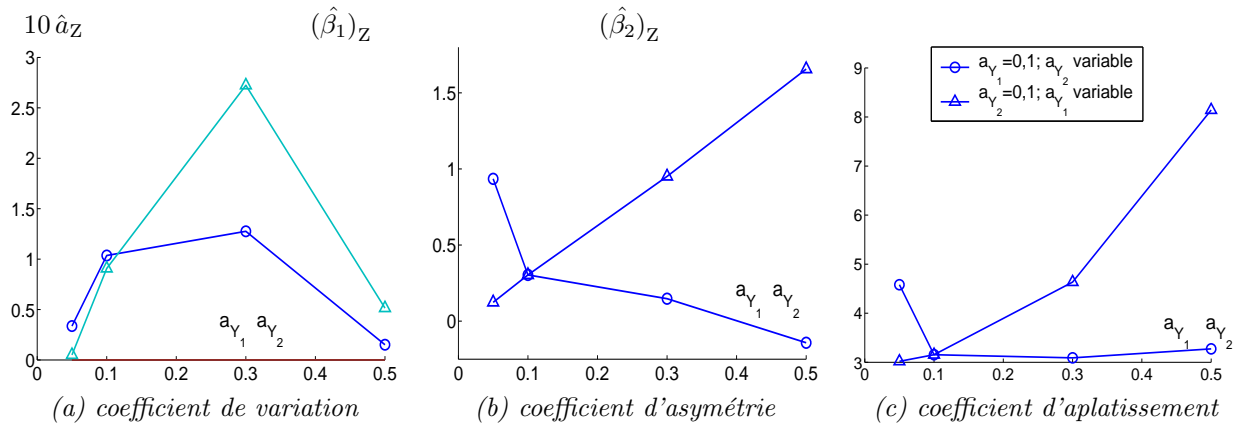


FIG. 4.12 – Évolution des premiers moments simulés de du nombre d'appels à la fonction mécanique ($op = 5$; $\rho_{Y_1 Y_2} = 1$)

(b) Analyse de l'approche proposée

La figure 4.13 montre l'évolution des coefficients de variation fournis par l'approche proposée, en fonction de a_{Y_1} pour $a_{Y_2} = 0,1$, avec $\rho_{Y_1 Y_2} = 0,9$; $op = 3$. Les graphes correspondants montrent de plus l'évolution du coefficient de variation cible $\hat{\alpha}_Z$ fourni par simulations de Monte-Carlo. De même que dans les applications précédentes, nous vérifions la cohérence entre les résultats approchés et cibles. Nous observons en outre que l'influence du module d'élasticité

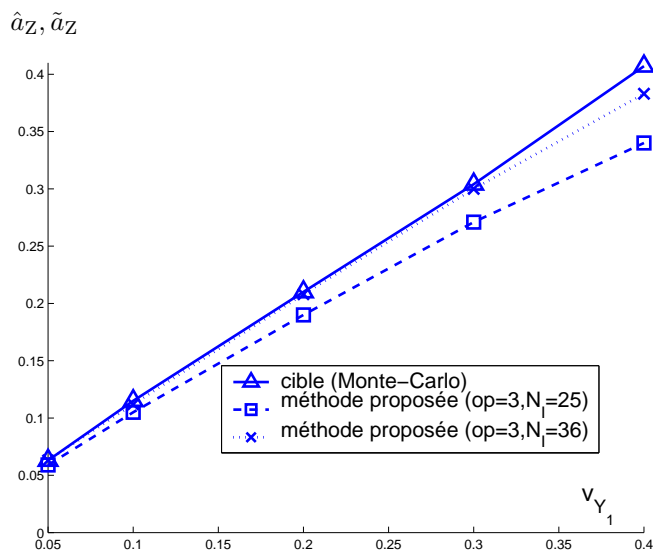


FIG. 4.13 – Évolution du coefficient de variation de Z en fonction de a_{Y_1} ($a_{Y_2} = 0,1$; $\rho_{Y_1 Y_2} = 0,9$; $op = 3$)

longitudinal Y_1 sur le déplacement radial plastique Z est significatif en terme de dispersion. De plus, d'autres calculs montrent que l'influence du module d'élasticité longitudinal Y_1 semble plus importante que celle du coefficient de Poisson Y_2 .

(c) Comparaison avec les alternatives testées

Par analogie à l'exemple précédent, nous observons tout d'abord figures 4.14 les valeurs de la moyenne $\hat{\mu}_Z$ et de l'écart type $\hat{\sigma}_Z$ du déplacement Z , obtenues par simulation de Monte-Carlo, sous la forme de traits continus. Ces valeurs ont été obtenues à partir de 100 000 tirages.

Ces mêmes figures décrivent respectivement les évolutions de la moyenne $\tilde{\mu}_Z$ et de l'écart type $\tilde{\sigma}_Z$ du déplacement Z , obtenues par les méthodes présentées au paragraphe précédent, en fonction du nombre d'appels N à la fonction mécanique.

Nous observons également pour ce problème une convergence numérique des valeurs approchées

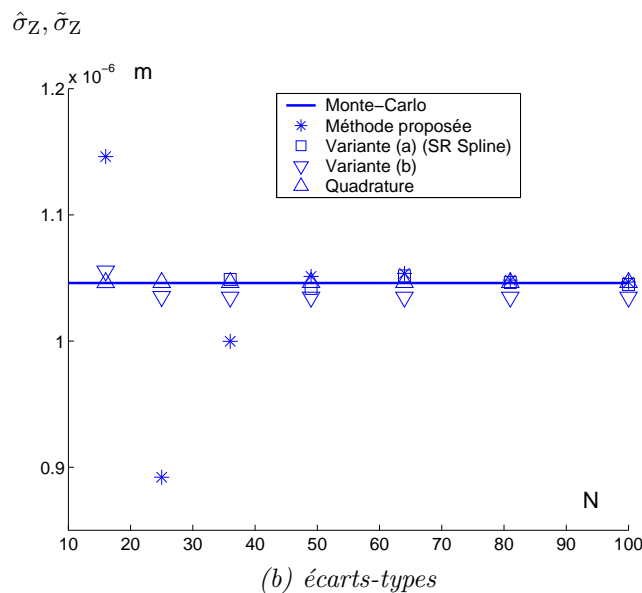
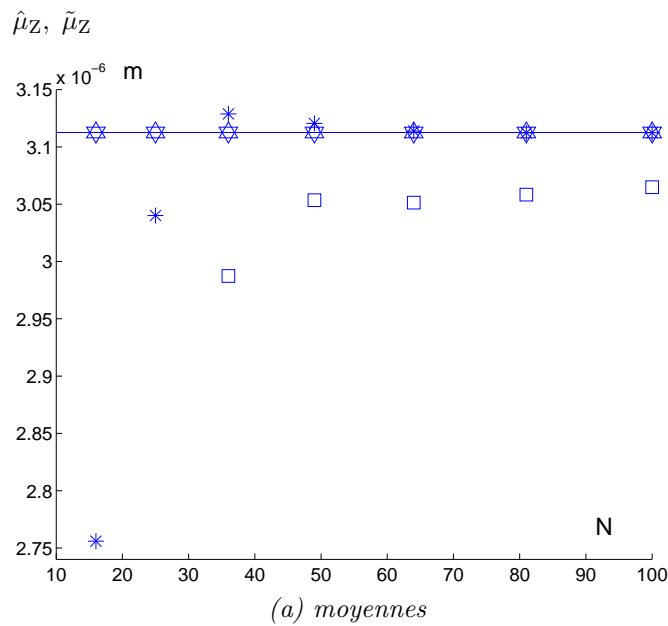


FIG. 4.14 – Évolution des premiers moments en fonction du nombre d'appels à la fonction mécanique ($a_{Y_1} = a_{Y_2} = 0,1$; $\rho_{Y_1 Y_2} = 0,9$; $op = 3$)

des moyennes figure 4.14 (a) et des écarts-types figure 4.14 (b) de la réponse mécanique considérée vers les valeurs « cibles » obtenues par simulations de Monte-Carlo.

Si l'on constate sur cet exemple encore la mauvaise performance de la variante a (surface de réponse par B-spline (cf. § 4.3.1 (a)), on vérifie en revanche les convergences numériques rapides des trois autres approches. On observe en effet des erreurs sur les moments inférieures à 5 % à partir de $6 \times 6 = 36$ appels.

À l'issue de ces premières comparaisons, la méthode de quadrature semble plus performante que les autres.

Nous poursuivons nos comparaisons en nous focalisant sur les méthodes de quadrature et l'approche proposée, en appliquant un calcul numérique des dérivées par différences décentrées.

(d) Comparaison entre la quadrature et l'approche proposée

Les figures 4.15 présentent respectivement l'évolution des erreurs ε_{a_Z} , $\varepsilon_{(\beta_1)_Z}$, $\varepsilon_{(\beta_2)_Z}$ (en %) par rapport aux coefficients simulés de variation \hat{a}_Z , d'asymétrie $(\hat{\beta}_1)_Z$ et d'aplatissement $(\hat{\beta}_2)_Z$ de la réponse Z, en fonction du nombre N de calculs mécaniques (de 3×3 à 10×10), pour les deux approches testées.

Les figures 4.15 (a), (c), (e) montrent les évolutions respectives de ε_{a_Z} , $\varepsilon_{(\beta_1)_Z}$, $\varepsilon_{(\beta_2)_Z}$ pour un coefficient de variation $a_{Y_1} = 0, 1$, tandis que les figures 4.10 (b), (d), (f) montrent respectivement les mêmes évolutions, pour $a_{Y_1} = 0, 3$.

Par souci de clarté, les évolutions sont représentées sur une échelle logarithmique.

- l'erreur ε_{a_Z} sur le coefficient de variation (figures 4.15 (a) et (b)) converge rapidement vers une erreur relative de l'ordre de 0,3%, pour l'approche proposée; la quadrature produit une erreur inférieure à 0,1%; les évolutions sont très semblables pour des coefficients de variation $a_{Y_1} = 0, 1$ et 0,3;
- l'erreur $\varepsilon_{(\beta_1)_Z}$ sur le coefficient d'asymétrie (figures 4.15 (c) et (d)) converge vers une erreur relative de l'ordre de 0,5%, pour les deux approches, pour des coefficients de variation $a_{Y_1} = 0, 1$ et 0,3; notons cependant que 3×3 calculs mécaniques entraînent une erreur bien plus importante pour l'approche proposée (30 %) que par quadrature (1% pour $a_Y = 0, 1$): la convergence numérique de $\varepsilon_{(\beta_1)_Z}$ semble alors bien plus rapide pour la quadrature; cependant, pour $a_Y = 0, 3$, les deux approches donnent des erreurs du même ordre de grandeur;
- l'erreur $\varepsilon_{(\beta_2)_Z}$ sur le coefficient d'aplatissement (figures 4.15 (e) et (f)) converge aussi vers une erreur relative de l'ordre de 0,5%, pour les deux approches, pour des coefficients de variation $a_{Y_1} = 0, 1$ et 0,3; l'approche proposée fournit des erreurs souvent sensiblement inférieures à la quadrature, qui semble stabilisée dès 6×6 calculs mécaniques à une « précision seuil », alors que l'approche proposée ne semble pas avoir fini de converger.

Si la quadrature apparaît sensiblement plus précise que l'approche proposée, sur le coefficient de variation (cf. Fig. 4.15 (a)-(b)), sur cet exemple, il paraît plus difficile de conclure sur les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement, où les deux approches fournissent des résultats comparables (cf. Fig. 4.15 (c)-(f)).

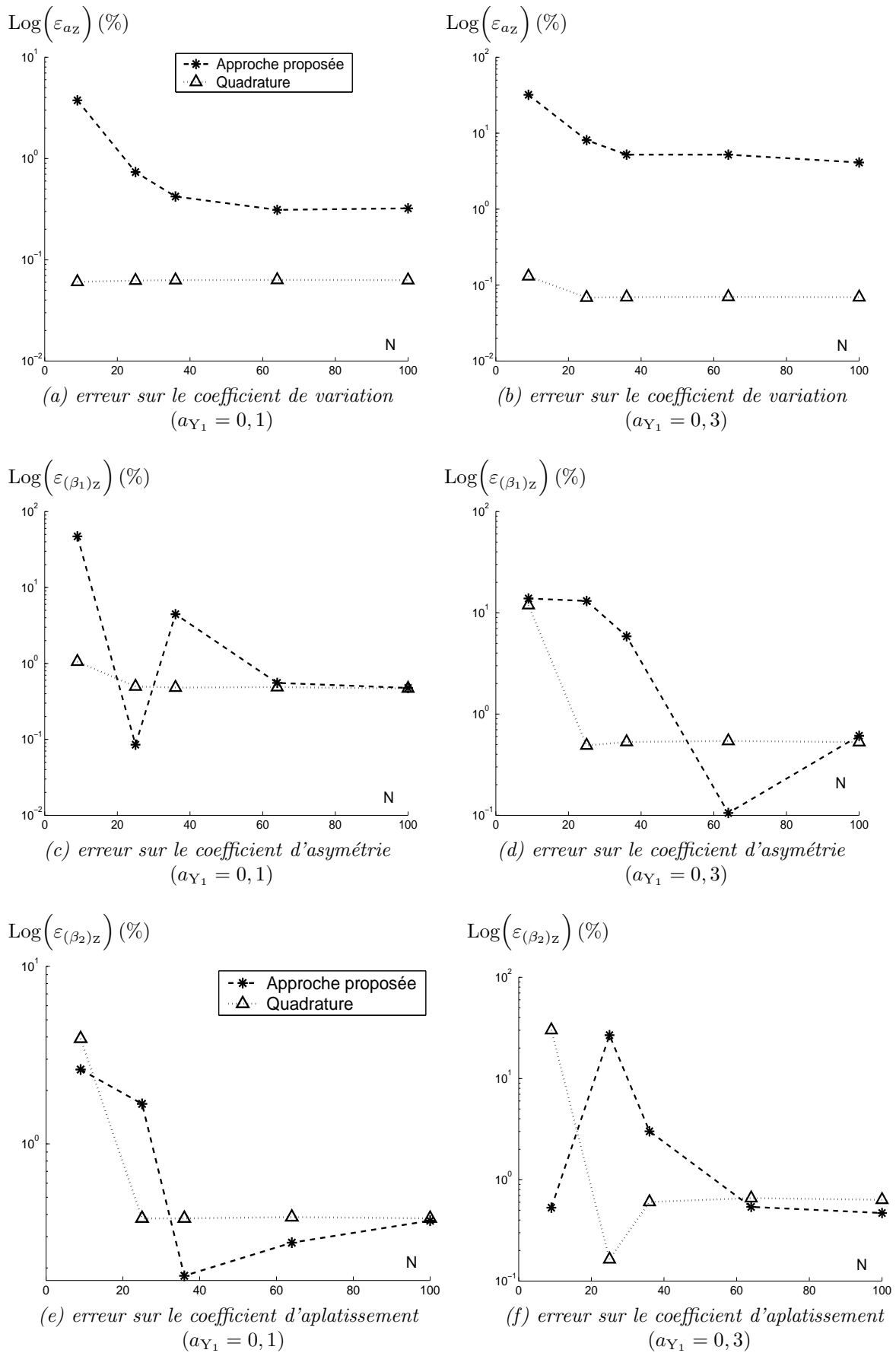


FIG. 4.15 – Évolution des erreurs respectives $\text{Log}(\varepsilon_{a_Z})$, $\text{Log}(\varepsilon_{(\beta_1)_Z})$, $\text{Log}(\varepsilon_{(\beta_2)_Z})$ sur les coefficients de variation \hat{a}_Z , d'asymétrie $(\hat{\beta}_1)_Z$ et d'aplatissement $(\hat{\beta}_2)_Z$ de la réponse Z , en fonction du nombre N de calculs mécaniques, pour $op = 3$, $a_{Y_2} = 0, 1$ et $\rho_{Y_1 Y_2} = 0, 8$

4.3.4 Cylindre en contact sur un plan

(a) Position du problème

Nous considérons dans ce dernier exemple un problème de contact de Hertz entre un cylindre infiniment long et un plan horizontal, fixe et rigide. Le cylindre est soumis à une charge verticale uniforme $2F$ le long de son axe. Le matériau constitutif du cylindre est supposé isotrope linéaire élastique dans un premier modèle (§ 4.3.4 (b)) puis élasto-plastique dans un second (§ 4.3.4 (c)). Nous faisons l'hypothèse de déformations planes.

Grâce à la symétrie du problème, nous discrétisons seulement la moitié de la section du cylindre, soumise à une charge F , en utilisant des éléments finis (EF) en déformations planes (cf. Fig. 4.16 (b)). Le contact est pris en compte en utilisant un maillage d'EF de contact, reliant la base du cylindre et la portion du plan qui peut être en contact. À cause de ce contact, le problème mécanique est non linéaire pour les deux modèles (élastique et élasto-plastique) et la résolution par EF est incrémentale et itérative.

Nous sommes intéressés par les déplacements (z_i) verticaux de cinq points i ($1 \leq i \leq 5$) de la

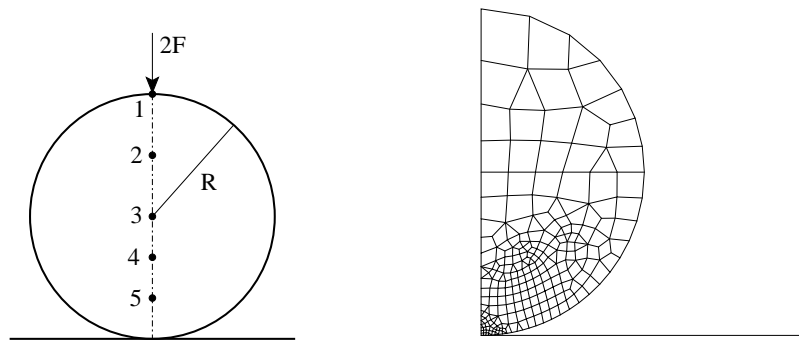


FIG. 4.16 – Problème de contact de Hertz – (a) géométrie, (b) maillage EF

section S ($\mathbf{1}=(0, 2R)$, $\mathbf{2}=(0, \frac{3}{2}R)$, $\mathbf{3}=(0, R)$, $\mathbf{4}=(0, \frac{2}{3}R)$, $\mathbf{5}=(0, \frac{1}{3}R)$, cf. Fig. 4.16 (a)).

Ces déplacements sont rassemblés dans un vecteur \mathbf{z} . Ceux-ci sont relevés à cinq incréments de charges successifs : $(F_i = 0, 2i \times F)_{1 \leq i \leq 5}$.

Les paramètres du modèle déterministe, le coefficient de Poisson ν , l'intensité de la charge F , le rayon R et la limite élastique f_y (pour le second modèle), sont égaux à : $\nu = 0,3$; $F = 5\,000\text{ N}$; $R = 50\text{ mm}$; $f_y = 30\,10^6\text{ Pa}$.

(b) Cylindre élastique

Le paramètre incertain de ce premier modèle est le module d'élasticité longitudinal E du matériau, modélisé par une v.a. lognormale Y , dont la moyenne et le coefficient de variation sont respectivement : $\mu_Y = 3\,10^{10}\text{ Pa}$; $a_Y = 0,2$. Les déplacements \mathbf{z} sont alors décrits par une v.a. vectorielle, que nous notons : $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_5)$.

Les tableaux 4.3 présentent des erreurs (exprimées en %) sur les moments statistiques, pour $a_Y = 0,2$, pour différentes valeurs du nombre N_I de points d'interpolation, pour chaque v.a. $(Z_i)_{1 \leq i \leq 5}$ et pour le dernier niveau de chargement $F = F_5$.

Le tableau 4.3 (a) montre les erreurs sur la moyenne et la variance. Ce tableau montre une convergence numérique rapide des erreurs sur la moyenne vers zéro : seulement 5 points d'interpolation sont nécessaires pour obtenir moins d'1 % d'erreur, quelle que soit la v.a. Z_i .

La convergence numérique des erreurs de variance est moins aisée à obtenir, mais environ 2 %

erreurs sont obtenus pour plus de 6 points d'interpolation. Le tableau 4.3 (b) fournit des erreurs sur les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement. Quelle que soit la v.a. Z_i , nous notons une bonne convergence numérique des erreurs vers zéro. Pour tous les moments statistiques, au plus 5% d'erreurs (et dans la plupart des cas, environ 2% d'erreurs) sont obtenus pour plus de 7 points d'interpolation.

La convergence numérique est relativement rapide : les erreurs sont divisées par un facteur allant de 10 à 100, entre $N_I = 6$ et $N_I = 8$, pour les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement.

Remarquons enfin que les ordres de grandeur des erreurs sur les moments sont les mêmes pour toutes les v.a. $(Z_i)_{1 \leq i \leq 5}$, correspondant aux déplacements relevés sur toute la hauteur du cylindre.

N_I		4	5	6	8	11
Moyenne	Z_1	3,49	0,90	0,21	0,06	0,06
	Z_2	3,21	0,90	0,26	0,06	0,06
	Z_3	3,06	0,90	0,28	0,06	0,05
	Z_4	2,93	0,91	0,30	0,06	0,05
	Z_5	2,62	0,91	0,35	0,06	0,05
Variance	Z_1	3,23	22,83	7,10	1,77	2,13
	Z_2	2,48	23,23	6,87	2,01	2,11
	Z_3	2,06	23,46	6,75	2,15	2,10
	Z_4	1,70	23,66	6,63	2,27	2,09
	Z_5	0,86	24,14	6,35	2,56	2,07

(a) Erreurs sur la moyenne et variance

N_I		4	5	6	7	8	9	10	11
Coefficients d'asymétrie	Z_1	138,36	36,73	27,61	11,02	1,89	0,79	0,76	0,63
	Z_2	139,13	35,93	30,50	10,58	2,60	0,56	0,72	0,94
	Z_3	139,44	35,38	32,28	10,32	3,09	0,45	0,67	1,13
	Z_4	139,64	34,85	33,94	10,10	3,57	0,36	0,61	1,31
	Z_5	139,75	33,29	38,26	9,56	4,91	0,18	0,40	1,78
Coefficients d'aplatissement	Z_1	77,97	62,81	110,71	9,00	1,91	1,34	1,67	0,83
	Z_2	74,60	60,72	121,99	9,46	1,24	2,02	1,72	0,80
	Z_3	72,65	59,54	128,77	9,76	0,90	1,98	1,79	0,74
	Z_4	70,90	58,50	134,96	10,06	0,62	1,71	1,86	0,65
	Z_5	66,62	56,01	150,48	10,86	0,07	0,41	2,10	0,13

(b) Erreurs sur les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement

TAB. 4.3 – Erreurs (%) sur les moments statistiques – Cylindre élastique pour $F = F_5$ – ($a_Y = 0,2$)

Les densités de probabilité (DP) des réponses Z_i sont ensuite étudiées. Les figures 4.17 & 4.18 montrent les DP estimées de la v.a. Z_1 au dernier incrément de charge ($F_5 = F$). Ces DP sont obtenues par simulations de Monte-Carlo de la réponse approchée \tilde{Z} (développement hilbertien tronqué (4.48)). L'approche proposée est donc très économique, puisque l'on simule une fonction polynomiale (la SR), connue de façon explicite.

Différentes qualités d'interpolations par spline sont considérées pour le calcul des coefficients du développement. Une convergence numérique est clairement observée sur la figure 4.17 si le nombre de points d'interpolation augmente (sur cette figure, les courbes représentatives des fonctions interpolantes obtenues avec 8 points et 11 points d'interpolation sont quasiment superposées).

À peine huit appels au modèle EF sont donc nécessaires pour estimer cette DP appelée DP « approchée ».

Dans la figure 4.18, les DP « approchées » sont comparées avec la DP obtenue par simulations

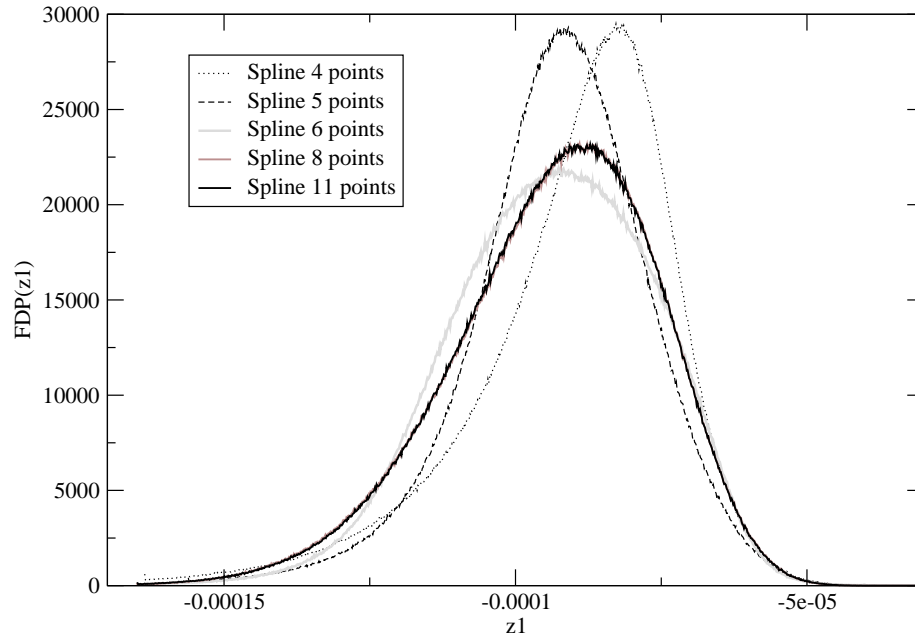


FIG. 4.17 – *Cylindre élastique – Convergence numérique des densités de probabilité – Déplacement z_1 – Incrément*

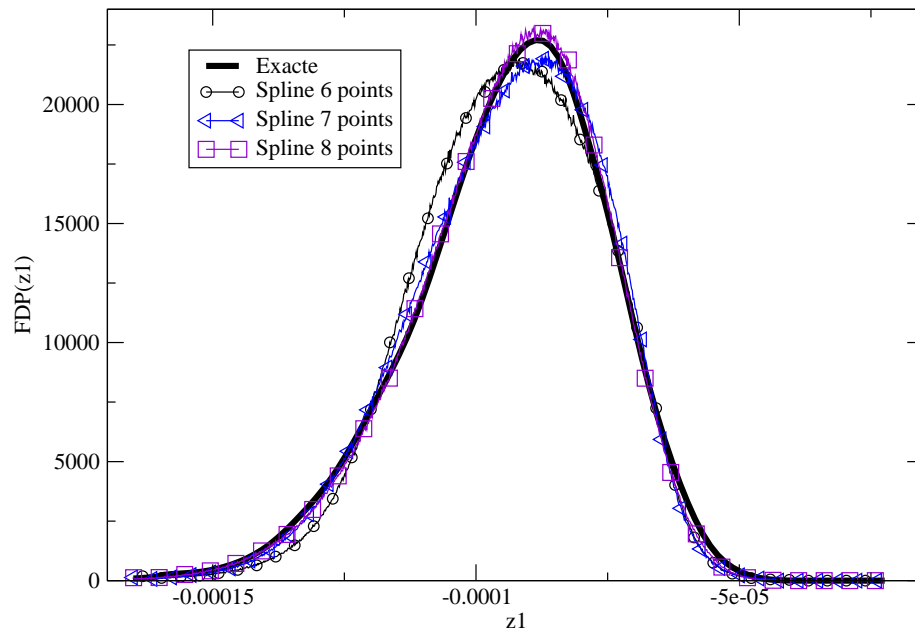


FIG. 4.18 – *Cylindre élastique – Convergence numérique des densités de probabilité – Déplacement z_1 – Incrément de charge 5*

de Monte-Carlo du modèle EF déterministe.

La DP, appelée DP « exacte », est estimée en seulement 100 points, à partir de 10^4 tirages, soit 10^4 appels au modèle EF, ce qui représente un coût de calcul important, sans commune mesure avec le coût des DP « approchées » (8 à 11 appels au modèle EF). Ces DP « ap-

prochées » peuvent par conséquent être tracées à moindre frais, à partir de 1000 points, issues de 10^7 tirages.

La courbe représentative de la DP « exacte » a été lissée puis représentée figure 4.18, afin d'améliorer la forme de la courbe. Malgré la qualité médiocre de cette DP « exacte », nous observons une bonne correspondance entre les DP « exacte » et « approchées », pour une qualité d'interpolation raisonnable.

(c) Cylindre élasto-plastique

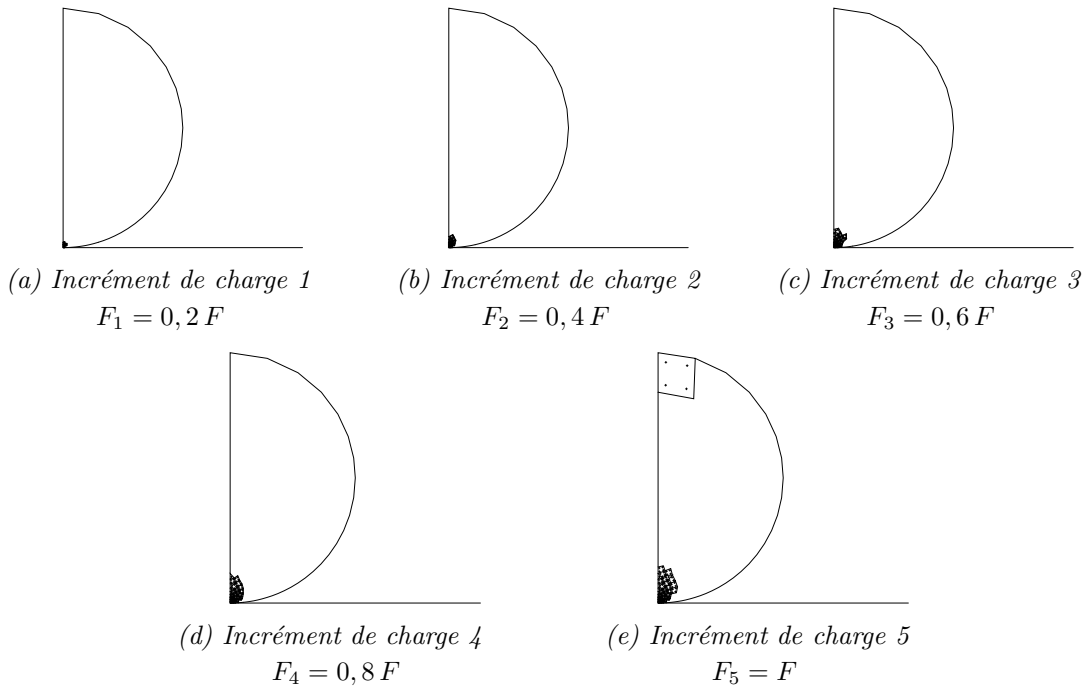


FIG. 4.19 – Points plastiques à différents incréments de charge
($E = y_1 = \mu_{Y_1}$, $E_p = y_2 = \mu_{Y_2}$)

Nous considérons désormais un cylindre ayant un comportement élasto-plastique avec écrouissage. Les paramètres incertains de ce second modèle sont le module d'élasticité longitudinal E , ainsi que le module d'écrouissage E_p , notés par la suite respectivement y_1 et y_2 . Le couple (y_1, y_2) est modélisé par une v.a. lognormale bidimensionnelle $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$, de caractéristiques :

Moyenne de Y_1 et Y_2 : $\mu_{Y_1} = 3 \cdot 10^{10}$ Pa et $\mu_{Y_2} = 9 \cdot 10^9$ Pa ;

Coefficient de variation de Y_1 et Y_2 : $a_{Y_1} = a_{Y_2} = 0,2$;

Coefficient de corrélation du couple (Y_1, Y_2) : $\rho_{Y_1 Y_2} = 0,9$.

Le vecteur des déplacements \mathbf{z} est modélisé par une v.a. vectorielle que nous notons $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_5)$.

Les points plastiques du cylindre (i.e. les points de la zone plastifiée du cylindre), donnés par des calculs EF déterministes avec $E = y_1 = \mu_{Y_1}$ et $E_p = y_2 = \mu_{Y_2}$, sont montrés figures 4.19 (a)-(e), pour les 5 incréments de charges considérés.

Ces figures illustrent la plastification progressive du cylindre. Cette plastification débute autour de la zone de contact, puis dans la partie supérieure du cylindre, au point d'application de la charge F , pour le dernier incrément de charge (cf. Fig. 4.19 (e)).

Au vu de ces figures, nous nous proposons d'observer l'évolution des moments statistiques des

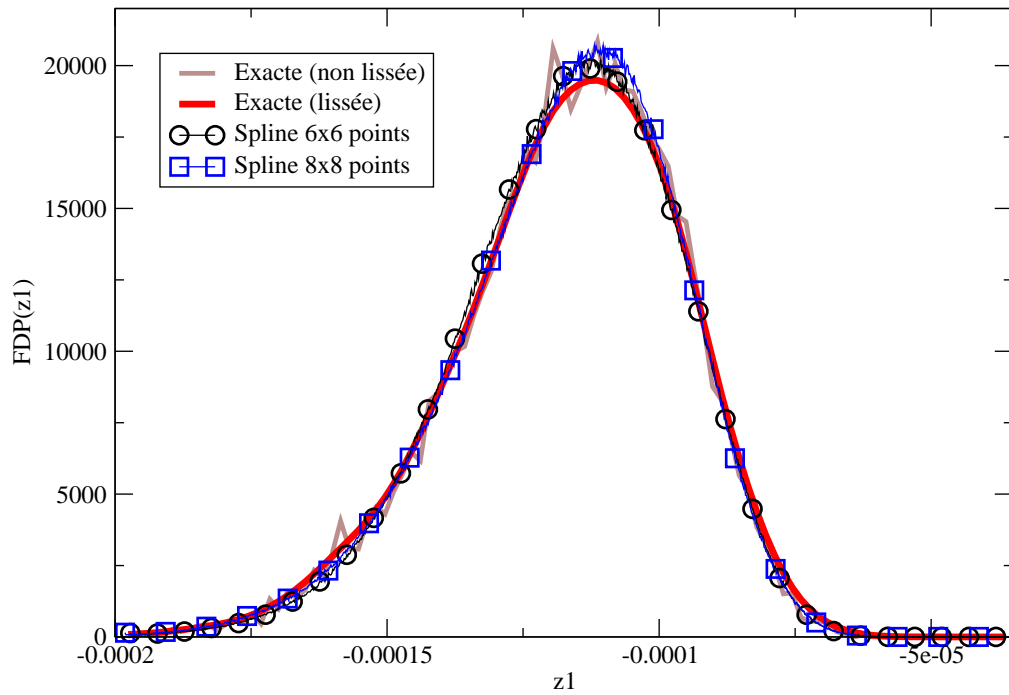


FIG. 4.20 – *Cylindre élasto-plastique* – Convergence numérique des densités de probabilité – Déplacement z_1 – Incrément de charge 5

déplacements en deux incréments de charges $F_1 = 0, 2 \times F$ et $F_5 = F$, pour chaque v.a. $(Z_i)_{1 \leq i \leq 5}$.

Les tableaux 4.4 (a)-(b) présentent les erreurs (exprimées en %) sur ces moments, pour $a_{Y_1} = a_{Y_2} = 0, 2$ et pour différentes valeurs du nombre N_I de points d'interpolation ($4 \times 4 \leq N_I \leq 11 \times 11$).

Le tableau 4.4 (a) illustre la convergence numérique rapide des erreurs sur la moyenne des v.a. modélisant les déplacements : des erreurs de moins de 1 % peuvent facilement être obtenues, quelles que soient la v.a. $(Z_i)_{1 \leq i \leq 5}$ et l'intensité de la charge.

On constate que les erreurs sont plus faibles au dernier incrément de charge : des erreurs de moins de 0,6 % sont obtenues pour $N_I = 4 \times 4$, jusqu'à moins de 0,1 % à partir de $N_I = 6 \times 6$.

Les tableaux 4.4 (b)-(d) montrent l'évolution des erreurs sur des moments de plus hauts degrés (variance, coefficients d'asymétrie et d'aplatissement). Comme prévu, des approximations précises de tels moments exigent des calculs bien plus coûteux. Cependant, des erreurs satisfaisantes de 1 à 3 % sont obtenues pour des approximations issues d'au moins 8×8 points d'interpolations B-spline, quelles que soient la v.a. Z_i et le niveau de chargement.

La figure 4.20 montre l'évolution des DP « exacte » et « approchées » de la v.a. Z_1 , pour différentes qualités d'interpolation ($N_I = 6 \times 6$ et 8×8), au dernier incrément de charge ($F_5 = F$). Entre 36 et 64 appels au modèle EF sont donc nécessaires à la construction de la réponse approchée \tilde{Z}_1 . La DP de cette v.a. \tilde{Z}_1 peut ensuite être estimée à moindre frais en 1000 points par simulation de Monte-Carlo, à partir de 10^7 tirages. En revanche, la DP « exacte » est estimée à partir de $3 \cdot 10^4$ appels au modèle EF. En raison du coût élevé que représentent ces appels, cette DP « exacte » n'est estimée qu'en 100 points. Par conséquent, la courbe correspondante est

logiquement bruitée par rapport à la courbe visée. C'est pourquoi une courbe lissée est proposée à des fins de comparaison. Ainsi, malgré une faible résolution de la DP « exacte » lissée, la DP « approchée » semble correspondre de manière satisfaisante à la DP « exacte ».

		N_I	4×4	5×5	6×6	8×8	11×11
Moyenne	Z_1	Incrément 1	1,31	0,25	0,16	0,17	0,18
		Incrément 5	0,46	0,27	0,04	0,09	0,09
	Z_2	Incrément 1	1,19	0,21	0,19	0,20	0,20
		Incrément 5	0,08	0,24	0,03	0,09	0,09
	Z_3	Incrément 1	1,14	0,20	0,21	0,21	0,21
		Incrément 5	0,10	0,23	0,02	0,08	0,09
	Z_4	Incrément 1	1,09	0,18	0,23	0,22	0,23
		Incrément 5	0,25	0,22	0,02	0,08	0,09
	Z_5	Incrément 1	0,98	0,15	0,27	0,25	0,25
		Incrément 5	0,56	0,21	0,02	0,09	0,09

(a) Erreurs sur les moyennes

		N_I	4×4	5×5	6×6	8×8	11×11
Variance	Z_1	Incrément 1	1,17	6,64	3,63	2,47	2,67
		Incrément 5	0,86	6,47	5,24	2,76	3,10
	Z_2	Incrément 1	1,17	6,81	3,52	2,25	2,50
		Incrément 5	0,62	6,57	5,72	2,67	3,10
	Z_3	Incrément 1	1,16	6,90	3,46	2,13	2,40
		Incrément 5	0,47	6,63	5,97	2,64	3,11
	Z_4	Incrément 1	1,16	6,98	3,40	2,01	2,31
		Incrément 5	0,33	6,69	6,18	2,61	3,12
	Z_5	Incrément 1	1,15	7,18	3,25	1,72	2,08
		Incrément 5	0,03	6,85	6,62	2,55	3,13

(b) Erreurs sur la variance

		N_I	4×4	5×5	6×6	8×8	11×11
Coefficients d'asymétrie	Z_1	Incrément 1	40,12	2,60	5,33	1,92	1,65
		Incrément 5	19,40	2,21	15,07	2,28	2,59
	Z_2	Incrément 1	39,61	2,96	4,62	2,12	1,73
		Incrément 5	10,23	4,23	18,59	2,74	3,09
	Z_3	Incrément 1	39,33	3,17	4,21	2,24	1,78
		Incrément 5	5,30	5,43	20,55	3,03	3,37
	Z_4	Incrément 1	39,07	3,35	3,86	2,35	1,83
		Incrément 5	1,11	6,52	22,26	3,31	3,63
	Z_5	Incrément 1	38,44	3,78	2,99	2,63	1,96
		Incrément 5	8,06	9,17	26,15	4,02	4,23

(c) Erreurs sur le coefficient d'asymétrie

		N_I	4×4	5×5	6×6	8×8	11×11
Coefficients d'aplatissement	Z_1	Incrément 1	20,58	10,23	2,48	2,07	2,66
		Incrément 5	11,49	7,49	0,49	1,46	2,33
	Z_2	Incrément 1	20,65	10,48	2,48	1,89	2,56
		Incrément 5	8,37	6,52	0,39	0,65	2,07
	Z_3	Incrément 1	20,69	10,62	2,47	1,78	2,51
		Incrément 5	6,84	5,98	0,88	0,05	1,91
	Z_4	Incrément 1	20,72	10,75	2,47	1,69	2,46
		Incrément 5	5,62	5,51	1,30	0,58	1,76
	Z_5	Incrément 1	20,80	11,04	2,46	1,43	2,31
		Incrément 5	3,19	4,45	2,22	2,45	1,42

(d) Erreurs sur le coefficient d'aplatissement

TAB. 4.4 – Erreurs (%) sur les moments statistiques – Cylindre élasto-plastique – ($\alpha_{Y_1} = \alpha_{Y_2} = 0,2$)

4.4 Conclusion du chapitre et perspectives

Ce chapitre présente une Méthode d'Eléments Finis Stochastiques (MEFS), basée sur l'utilisation de deux techniques : une projection de la réponse mécanique non linéaire sur une base de polynômes d'Hermite, ainsi que l'interpolation par B-splines cubiques (cf. article à paraître [Bar05]).

La MEFS présentée s'apparente à une méthode de Surface de Réponse (SR), la surface choisie étant un développement tronqué, issu de la projection sur la base de polynômes d'Hermite sur \mathbb{R}^M , où M est le nombre de v.a. d'entrée du modèle EF d'étude. Considérer une base orthogonale plutôt que la base canonique des polynômes, utilisée couramment pour définir des SR, évite le stockage puis l'inversion de la matrice d'un système, souvent mal conditionnée, pour le calcul des coefficients du développement.

La deuxième spécificité de l'approche proposée réside dans la technique d'approximation des coefficients du développement, qui utilise l'interpolation par B-splines cubiques. Après discussion de quelques formes possibles de cette B-spline, nous retenons celle qui consiste à simplement interpoler la fonction mécanique. Cette interpolation, qui représente l'essentiel du coût de la MEFS, permet ensuite d'engendrer tous les coefficients du développement qui définissent la SR. Les moments statistiques de cette SR, d'un ordre quelconque, sont calculables par une procédure numérique, grâce aux propriétés des polynômes d'Hermite. La simulation de Monte-Carlo de la SR (fonction analytique) s'effectue de plus à un coût négligeable par rapport à la simulation de la fonction mécanique (calcul EF coûteux). Une estimation précise de la densité de probabilité (DP) de la réponse Z est donc accessible.

Nous proposons quatre exemples d'application, dont trois sont non linéaires et font intervenir deux variables aléatoires lognormales corrélées. Les résultats obtenus sont comparés à une solution analytique (barre en traction) ou à des simulations de Monte-Carlo (pour les trois autres problèmes) et montrent d'une part la bonne convergence numérique du développement hilbertien, si l'interpolation par spline est suffisamment précise, et d'autre part qu'une SR représentative est obtenue à partir d'un nombre raisonnable de calculs mécaniques.

L'approche proposée est ensuite comparée à plusieurs alternatives sur les problèmes élastoplastiques d'un treillis puis d'une sphère sous pression, pour l'estimation d'une moyenne et d'une variance. Il apparaît que, pour un même nombre d'appels à la fonction mécanique, l'approche proposée est plus précise qu'une méthode de SR par spline interpolante, mais qu'elle est moins précise, en revanche, que la méthode d'intégration par quadrature, utilisée pour le calcul des coefficients de développements hilbertiens ou pour le calcul direct de moments.

D'autres comparaisons avec la méthode de quadrature montrent que les deux approches sont aussi intéressantes pour l'estimation des moments statistiques d'ordres trois et quatre. Enfin, nous avons estimé à moindre frais une DP dans la dernière application (problème de contact de Hertz). Une suite logique aux derniers travaux de cette thèse sera de comparer cette DP approchée à celle obtenue par la méthode de quadrature, associée à une méthode de moments adaptée. Nous pouvons néanmoins constater dans la littérature que les méthodes de moments risquent souvent d'être coûteuses et imprécises. Cette estimation simple de la DP d'une fonction mécanique non linéaire apparaît donc comme un point intéressant de la MEFS que nous développons.

Il sera en outre intéressant d'appliquer l'approche à des problèmes présentant plus de deux v.a. en entrée. Nous avons cependant noté que le coût de l'approche augmentait très rapidement avec le nombre de v.a. Le problème posé concerne alors finalement la réduction du nombre de points d'expérience de la grille d'interpolation utilisée.

Conclusion générale

Le travail présenté dans cette thèse s'inscrit dans le cadre d'une thématique de recherche de l'équipe Méthodes Probabilistes des Structures (MPS) du Laboratoire de Mécanique et Ingénieries (LaMI) de l'Université Blaise Pascal (UBP), qui développe depuis de nombreuses années des travaux de recherche dans le domaine de la mécanique aléatoire et de la fiabilité, en collaboration avec le Laboratoire de Mathématiques (LM) de l'UBP.

La thématique de recherche concernée est centrée sur le développement d'outils numériques et analytiques pour la résolution des problèmes de statique et de dynamique aléatoire et s'intéresse en particulier depuis quelques années aux méthodes d'éléments finis stochastiques. Une partie des recherches dans cette thématique particulière est menée en collaboration avec une équipe de recherche du Laboratoire de Génie Civil (LGC) de l'UBP. C'est dans le cadre de cette collaboration qu'a été préparée cette thèse.

Les méthodes d'éléments finis stochastiques (MEFS) sont des alternatives aux méthodes de Monte-Carlo, notamment pour le traitement des problèmes de propagation d'incertitudes dans les modèles mécaniques. Le projet de thèse a été bâti autour de ces MEFS, avec pour objectif l'élaboration d'une MEFS capable de traiter ce type de problème sous des hypothèses de comportement statique non linéaire.

L'étude bibliographique des deux premiers chapitres nous a conduit à une définition puis à une classification des MEFS. Il peut être utile de distinguer les MEFS modifiant ou non le modèle EF d'étude. Les MEFS exigeant une modification du modèle (MEFS Spectrale, approche issue de la méthode de discrétisation de champs par intégrales pondérées, perturbation) permettent l'étude de problèmes mécaniques linéaires mais sont difficilement généralisables au cas de problèmes mécaniques non linéaires. La MEFSS présente l'avantage de pouvoir prendre en compte un grand nombre de v.a., ces dernières pouvant résulter, par exemple, de la discrétisation d'un champ aléatoire.

Les méthodes utilisant le modèle EF sans le modifier (quadrature, FOSM, surfaces de réponse) sont *a priori* applicables directement à des modèles non linéaires. Une limite pratique semble toutefois être le nombre de v.a. prises en compte.

Notre contribution est double. Elle se décline dans les chapitres trois et quatre.

Le troisième chapitre commence tout d'abord par un rappel de la formulation de la MEFSS dans le cas d'un problème élasto-statique, où l'aléa porte sur le module d'élasticité longitudinal. Ce paramètre est successivement modélisé par un processus lognormal, puis par une v.a. lognormale. Notre étude de cette MEFS s'est traduite par (i) la définition d'indicateurs d'erreurs introduits afin d'évaluer la propagation d'incertitudes dans le modèle EF ; (ii) une programmation améliorée du calcul des moments statistiques de la réponse mécanique, nous dégageant de tout calcul formel ; (iii) une étude sur l'influence de la fonction d'autocorrélation du processus, en passant par la définition d'une longueur de corrélation adaptée. Puis nous avons établi une formulation de la MEFSS adaptée à l'étude de structures formées de poutres. La méthode a été mise en œuvre sur un assemblage en flexion de poutres en bois par tiges collées. Le modèle EF étudié est mécaniquement linéaire. Les paramètres incertains du modèle (modules d'élasticité des différentes poutres constitutives) sont modélisés par une famille de v.a. lognormales, indépendantes dans leur ensemble. Suite à de récents travaux (Taleb, [Tal05]), les moments de tous ordres des efforts résistants dans l'assemblage peuvent être obtenus. Dans cet exemple d'application à une structure réelle du génie civil (assemblage complexe), le coût de la MEFS proposée apparaît minime par rapport à celui des simulations de Monte-Carlo.

La MEFSS n'est en pratique applicable que si la relation entre le vecteur des paramètres incertains du modèle et la réponse de ce dernier est linéaire, ce qui est très rarement le cas. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés dans le dernier chapitre, et c'est le coeur du travail, à l'élaboration d'une MEFS capable de traiter le problème de propagation d'incertitudes lorsque cette relation est non linéaire.

La MEFS proposée s'apparente à une méthode de surface de réponse (SR). La SR est obtenue par une technique d'approximation hilbertienne basée sur un développement de la réponse mécanique sur une base tronquée de polynômes d'Hermite et l'emploi d'une procédure d'interpolation par B-splines cubiques pour le calcul des coefficients du développement. Elle permet d'obtenir à moindre coût, non seulement des moments de la réponse mais également sa densité de probabilité, constituant ainsi un outil potentiellement intéressant pour les analyses fiabilistes et de sensibilité. Les comparaisons effectuées sur l'exemple du cylindre en contact avec des densités de probabilité de référence issues de calculs coûteux par simulations de Monte-Carlo ont montré le bien fondé de cette approche. Il sera intéressant de tester dans de futurs travaux la qualité d'une telle estimation de la densité de probabilité dans la perspective de calculs fiabilistes ; il faudra en effet vérifier que la qualité des queues de distribution est satisfaisante pour le calcul de probabilités de défaillance.

La principale limite de l'approche, qui est inhérente à d'autres méthodes existantes, telle que la méthode de quadrature par exemple, est une augmentation très rapide du coût de calcul en fonction du nombre de v.a. Par conséquent, avec les moyens de calcul actuels, il semble délicat d'appliquer de telles méthodes à l'étude de problèmes faisant intervenir des champs aléatoires. En effet, dans ces problèmes, le nombre de v.a. est important du fait de la nécessité de construire des approximations de ces champs sous la forme de développements en série tronqués contenant beaucoup de v.a. en général.

Une réflexion essentielle à mener, pour le développement de cette approche, comme pour celui des autres MEFS, concerne l'approximation d'intégrales multidimensionnelles. En effet, la principale difficulté de l'approche proposée réside dans l'approximation des coefficients de la SR, qui sont définis par des intégrales. La méthode de quadrature est elle-même par définition une méthode d'approximation des intégrales qui définissent les moments statistiques.

Pratiquement, il s'agit de réduire de manière significative le nombre de points d'expérience nécessaires à une bonne approximation des intégrales. Chaque point d'expérience correspond, pour les problèmes considérés dans ce travail, à un calcul déterministe par EF.

Dans cette voie, plusieurs perspectives de recherches sont envisageables : le développement des plans d'expérience dans diverses disciplines transversales à la mécanique, la méthode de collocation (cf. Isukapalli [Isu98]) ou encore l'utilisation dans le cadre des MEFS des récents travaux sur les techniques de quadrature (Niederreiter [Nie92], Novak et Ritter [Nov97, Nov99a, Nov99b]) ; en particulier les quadratures de Smolyak (Smolyak [Smo63]) semblent pouvoir fournir des schémas d'intégration économiques.

Bibliographie

- [Alo87] Alonso. *Accuracy of stochastic finite element analysis of seepage problems. Appl. of Sta. and Prob. in Civil Engineering (ICASP5) Vancouver*, 1987.
- [And99] Anders M., Hori M. *Stochastic finite element method for elasto-plastic body. Int. J. of Num. Meth. In Engrg.*, 46(11) :1897–1916, 1999.
- [And01] Anders M., Hori M. *Three dimensional stochastic finite element method for elasto-plastic bodies. Int. J. of Num. Meth. In Engrg.*, 51 :449–478, 2001.
- [Att99] Attéia M. *Approximation hilbertienne - splines, ondelettes, fractales*. Presses universitaires de Grenoble, 1999.
- [Au 99] Au S.K., Beck J.L. *A new adaptative importance sampling scheme for reliability calculations. Structural Safety*, 21 :135–158, 1999.
- [Auv02] Auvinet G. Sixteenth Nabor Carrillo Lecture – Uncertainty in geotechnical Engineering. Sociedad Mexicana de Meánica de suelos, A.C., 2002.
- [Bac03] Bacconnet C. *La mise en place d'une expérimentation. 4-ièmes rencontres du RDGC, Aussois, France*, 1(7), 2003.
- [Bae81] Baecher G.B., Ingra I.S. *Stochastic finite element method in settlement predictions. J. Geotech. Eng. Div. ASCE*, 107(4) :449–463, 1981.
- [Bal99] Baldeweck H. *Méthodes aux éléments finis stochastiques – Application à la géotechnique*. Thèse de doctorat, Université d'Evry, 1999.
- [Bar01] Baroth J. *Analyse probabiliste de la coque déformée d'un aéroréfrigérant*. Mémoire de DEA, Institut des Sciences de l'Ingénieur CUST, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, 2001.
- [Bar03] Baroth J., Bodé L., Bressolette P., Fogli M. *Numerical convergence of a stochastic finite element method in a lognormal context. Appl. of Sta. and Prob. in Civil Engineering, Millpress*, 1 :217–224, 2003.
- [Bar04] Baroth J., Bodé L., Bressolette P., Fournely E., Racher P. *Glued-in rod connections in bending : experiment and stochastic finite-element modelling. World Conference on Timber Engineering (WCTE), Lahti, Finlande*, 2004.
- [Bar05] Baroth J., Bodé L., Bressolette P., Fogli M. *SFE method using Hermite Polynomials : an approach for solving nonlinear problems with uncertain parameters. Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, soumis avril 2005.
- [Bat82] Bathe K.J. *Finite Element Procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1982.
- [Bat02] Battelo Y. *Étude d'un assemblage bois par tiges collées sollicité en flexion*. Mémoire d'ingénieur, Institut des Sciences de l'Ingénieur CUST, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, 2002.
- [Bay86] Bayen F., Margoria Ch. *Espaces de Hilbert et opérateurs*. tome 2, Ellipses, 1986.
- [Bel99a] Bellizzi S., Bouc R. *Analysis of multi-degree of freedom strongly non linear mechanical systems with random input – Part I, non linear modes and stochastic averaging. Prob. Engrg. Mech.*, 14 :229–244, 1999.
- [Bel99b] Bellizzi S., Bouc R. *Analysis of multi-degree of freedom strongly non linear mechanical systems with random input – Part II, equivalent linear system with random matrices and power spectral density matrix. Prob. Engrg. Mech.*, 14 :245–256, 1999.
- [Ben82] Benzecri J.P. *L'analyse de données, Tome 2 : l'analyse des correspondances*. Dunod, 1982.

- [Ber87] Bernard P., Fogli M. *Une méthode de Monte-Carlo performante pour le calcul de la probabilité de ruine. Revue du CTICM*, 4 :23–40, 1987.
- [Ber98] Bernard P. *Stochastic linearization : what is available and what is not. Computers and structures*, 67 :9–18, 1998.
- [Ber04] Berveiller M., Sudret B., Lemaire M. *Presentation of two methods for computing the response coefficients in stochastic finite element analysis. 9th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability*, 2004.
- [Bha04] Bhattacharya R.N., Gosh J.K. *On the validity of the formal Edgeworth expansion. Ann. Statist.*, 6 :434–451, 2004.
- [Bla99] Blass H.J. and Laskewitz B. *Effect of spacing and edge distance on the axial strength of glued-in rods. CIB W18, Graz, paper 32-7-12*, 4 :23–40, 1999.
- [Bod98] Bodart O. Cours de statistique. cours au Cust, Institut des sciences de l'ingénieur de Clermont-Ferrand, 1998.
- [Bod99] Bodé L. La méthode aux éléments finis. Notes de cours, Institut des sciences de l'ingénieur, CUST, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, 1999.
- [Bod01] Bodé L., Mohamed A., Chazal C. Analyse non linéaire des structures par éléments finis. Notes de cours, DEA Génie Civil, Génie Mécanique, Université, Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, 2001.
- [Bol88] Bolle A. *Approche probabiliste en mécanique des sols avec prise en compte de la variabilité spatiale. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne*, 743, 1988.
- [Bou86] Boulefkhad T. Influence de la variabilité des propriétés des sols sur le calcul des tassements des fondations superficielles. Thèse de doctorat de l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, 1986.
- [Bou97] Bouayed T. Modélisation stochastique par éléments finis en géomécanique. Thèse de doctorat, ENSG, INPL, Nancy, 1997.
- [Box78] Box G.E.P., Hunter W.G., Hunter J.S. *On Statistics for Experimenters*. 1978.
- [Bre84] Breitung K. *Asymptotic approximations for multinormal integrals. J. of Engrg. Mech.*, 110(3) :357–366, 1984.
- [Bre89] Bressolette Ph. Endommagement par fatigue de structures élancées en béton armé soumise au vent aléatoire. Thèse de doctorat de l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, 1989.
- [Bre93] Brezis H. Analyse fonctionnelle. Masson, 1993.
- [Bre95] Brenner C., Bucher C. *A contribution to the SFE-based reliability assessment of nonlinear structures under dynamic loading. J. of Engrg. Mech*, 10 :265–273, 1995.
- [Bre98] Brenner C., Schuëller G. *Stochastic finite elements – under some perspectives on the assumptions on material properties. ASCE Engrg. Mech. Conf., ASCE, Reston, Va*, 1, 1998.
- [Bre01] Breyse D. *Les enjeux en modélisation des terrains et des structures pour mieux comprendre l'interaction sol-ouvrage. conférence Albert Caquot, modélisation et simulation en génie civil : de la théorie à la pratique, Paris*, 2001.
- [Bre02] Breyse D. *Modélisation des désordres dans les réseaux enterrés consécutifs à l'hétérogénéité du sol. JNGG 2002, Nancy*, 2002.
- [Brz01] Brzakala W., Elishakoff I. *Lessons pertaining to the finite element method for stochastic problems, learned from simplest example. Chaos, solution and fractals*, 12 :1217–1232, 2001.
- [Buc88a] Bucher C.G. *Adaptative sampling : an iterative fast Monte-Carlo procedure. Structural Safety*, 5 :119–126, 1988.
- [Buc88b] Bucher C.G., Chen Y.M., Schueller G.I. *Time variant reliability analysis utilisaing response surface approach. Thoft-Christensen P, editor. Reliability and optimization of structural system '88, Berlin, Springer*, pages 1–14, 1988.
- [Buc88c] Bucher C.G., Shinozuka M. *Structural response variability II. J. of Engrg. Mech.*, 114(12) :2035–2054, 1988.
- [Cam75] Cambou B. *Application of first-order uncertainty analysis in the finite element in linear elasticity. Proceedings, 2nd International Conference on Application of Statistics and Probability in Soil and Structure Engineering, Aachen*, pages 67–87, 1975.

- [Che00] Cherng R.H., Wen Y.K. *Reliability of uncertain trusses under random excitation. J. of Engrg. Mech.*, 126(8) :859–866, 2000.
- [Cho93] Chowdhury R.N., Xu D.W. *Rational polynomial technique in slope reliability analysis. J. of the geotechnical Engrg. Division, ASCE*, 119(12) :1910–1928, 1993.
- [Cho00] Choi C.K., Noh H.C. *Weighted integral SFEM including higher order terms. J. of Engrg. Mech.*, 126(8) :859–866, 2000.
- [Cor71] Cornell A.C. *First Order uncertainty analysis of soils deformation and stability. Proceedings, First conference on Applications of Statistics and Probability to Soil and Structural Engineering, Hong Kong*, pages 130–144, 1971.
- [Cri97] Crisfield M. A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol. 1 : Essentials*. J. Wiley & Sons, New York, 1997.
- [Cri00] Cristiani N., Shawe-Taylor J. *An introduction to support vector machines*. Cambridge University Press, 2000.
- [Cro98] Crouzeix J.P. *Cours d'analyse numérique. cours au Cust, Institut des sciences de l'ingénieur de Clermont-Ferrand*, 1998.
- [Das00] Das P.K., Zheng Y. *Cumulative formation of response surface and its use in reliability analysis. Prob. Engrg. Mech.*, 15 :309–315, 2000.
- [De 78] De Boor C. *A practical guide to splines. Applied mathematical Sciences, Springer-Verlag*, 27, 1978.
- [De 99] De Ville V. *Analyse non linéaire de structures. Cours de l'Institut du génie civil, Université de Liège*, 1999.
- [Dec98] Declercq D. *Apport des polynômes d'Hermite à la modélisation non gaussienne et tests statistiques associés. Thèse de doctorat, Université de Cergy-Pontoise*, 1998.
- [Dem98] Demengel G., Pouget J.P. *Modèles de Bézier, des B-splines et des Nurbs. Ellipses*, 1998.
- [Deo89a] Deodatis G. *Stochastic FEM sensitivity analysis of nonlinear dynamic problems. Prob. Engrg. Mech.*, 4(3) :135–141, 1989.
- [Deo89b] Deodatis G., Shinozuka M. *Bounds on response variability of stochastic systems. J. of Engrg. Mech.*, 115(11) :2543–2563, 1989.
- [Deo90a] Deodatis G. *Bounds on Response Variability of Stochastic Finite Elements Systems. J. of Engrg. Mech.*, 116(3) :565–585, 1990.
- [Deo90b] Deodatis G. *Bounds on Response Variability of Stochastic Finite Elements Systems : effect of statistical dependence. Prob. Engrg. Mech.*, 5(2) :88–98, 1990.
- [Deo91a] Deodatis G. *Weighted integral method I : stochastic stiffness matrix. J. of Engrg. Mech.*, 117(8) :1851–1864, 1991.
- [Deo91b] Deodatis G., Shinozuka M. *Weighted integral method II : response variability and reliability. J. of Engrg. Mech.*, 117(8) :1865–1877, 1991.
- [Der88] Der Kiureghian A., Ke. *Second order reliability approximations. J. of Engrg. Mech.*, 113(8) :1208–1225, 1988.
- [Der98] Der Kiureghian A., Lin H.Z., Hwang S.J. *Second order reliability approximations. J. of Engrg. Mech.*, 113(8) :1208–1225, 1998.
- [Des01] Dessombz O., Thouverez F., Laine J.P., Jézéquel L. *Calcul des valeurs et vecteurs propres d'une structure stochastique par projection sur un chaos polynomial – Calcul d'une fonction de transfert stochastiques. Actes du 5ème colloque National en calcul des Structures, 15-18 mai*, 2001.
- [Dev97] Devictor D. *Fiabilité et mécanique : méthodes FORM / SORM et couplages avec des codes éléments finis par des surfaces de réponse adaptatives. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand*, 1997.
- [Dit96] Ditlevsen O., Madsen H.O. *Structural reliability methods*. John Wiley & Sons, 1996.
- [Dol03] Doltsinis I. *Inelastic deformation processes with random parameters – methods of analysis and design. Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 192 :2405–2423, 2003.
- [Eli95a] Elishakoff I., Ren Y., Shinozuka M. *Improved finite element method for stochastic problems. Chaos, solitons and fractals*, 5(5) :833–846, 1995.

- [Eli95b] Elishakoff I., Ren Y., Shinozuka M. *Some exact solutions for the bending of beams with spatially stochastic stiffness. Int. J. Solids Structures*, 32(16) :2315–2327, 1995.
- [Eli96] Elishakoff I., Ren Y., Shinozuka M. *Variational principles developed for and applied to analysis of stochastic beams. J. of Engrg. Mech.*, 122(6) :559–565, 1996.
- [Eli99] Elishakoff I., Ren Y. *The bird's eye view on finite element method for structures with large stochastic variations. Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 168 :51–61, 1999.
- [Elm02] Elman H., Ernst O.G., O'Leary D.P., Stewart M. Efficient iterative algorithms for the stochastic finite element method with application to acoustic scattering. Report of the dept. of computer science – Institut for advanced computer studies – University of Maryland, 2002.
- [Eva67] Evans D.H. *An application of numerical integration techniques to statistical tolerancing. Technometrix*, 9(3) :441–456, 1967.
- [Fal02] Falsone G., Impollonia N. *A new approach for the stochastic analysis of finite element modelled structures with uncertain parameters. Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191 :5067–5085, 2002.
- [Fal04a] Falsone G., Impollonia N. *About the accuracy of a novel response surface method for the analysis of finite element modeled uncertain structures. Prob. Engrg. Mech.*, 19 :53–63, 2004.
- [Fal04b] Falsone G., Sofi A. *Exact solutions for some statically indeterminate stochastic beams. Proceedings of the 7th Int. Conf. on Computational Struct. Technology, Civil-Comp Press, Stirling, Scotland*, 1(111), 2004.
- [Far89] Faravelli L. *Response-Surface Approach for Reliability Analysis. J. of Engrg. Mech.*, 115 :2763–2781, 1989.
- [Far92] Farin G. *Courbes et surfaces pour la Conception Géométrique Assistée par Ordinateur (CGAO)*. Masson, 1992.
- [Fie03] Field R.V., Grigoriu M. *A new perspective on polynomial chaos. Computational Stochastic Mechanics, Spanos & Deodatis eds, Millpress*, pages 199–205, 2003.
- [Fie04] Field R.V., Grigoriu M. *On the accuracy of the polynomial chaos approximation. Prob. Engrg. Mech.*, 19 :65–80, 2004.
- [FIN99] FINELG. *Nonlinear finite element analysis program – User's manuel – version 8.2*. MSM Department, University of Liège, 1999.
- [Flo97] Flores Macias O., Lemaire M. *Éléments finis stochastiques et fiabilité – Application à la mécanique de la rupture. Revue française du génie civil*, 1 :247–284, 1997.
- [Fog00] Fogli M. *Cours de mécanique aléatoire. Cours de DEA, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand*, 2000.
- [Fol95] Foley. *Introduction à l'infographie*. Addison-Wesley, 1995.
- [Gao97] Gaouar E.M. *Approche probabiliste de la stabilité des barrages en terre par simulation de champs aléatoires. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand*, 1997.
- [Gay99] Gayton N. *Développement d'un algorithme de couplage mécano-fiabiliste par surface de réponse. mémoire pour le diplôme d'études approfondies, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand*, 1999.
- [Gay03] Gayton N., Mohamed A., Lemaire M. *CQ2RS : a new statistical approach to the response surface method for reliability analysis. Structural Safety*, 25 :99–121, 2003.
- [Geh01a] Gehri E. *Ductile behaviour and group effect of glued-in rods. International RILEM symposium Joints in timber structures, Stuttgart, PRO22*, pages 333–342, 2001.
- [Geh01b] Gehri E. *Ductile behaviour and group effect of glued-in rods. International RILEM Symposium Joints in timber structures, Stuttgart, PRO22*, pages 333–342, 2001.
- [Gha91] Ghanem R., Spanos P.D. *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Springer-Verlag, 1991.
- [Gha96] Ghanem R., Kruger R. *Numerical solution of spectral stochastic finite element systems. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 129 :289–303, 1996.
- [Gha98a] Ghanem R. *Hybrid stochastic finite elements : analytical methods and simulation techniques join hands. Proc. of ICOSSAR'97*, 2 :899–905, 1998.

- [Gha98b] Ghanem R. *Probabilistic characterization of transport in heterogeneous media. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 158 :199–220, 1998.
- [Gha99a] Ghanem R. *Ingredients for a general purpose stochastic finite elements implementation. Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 168 :19–34, 1999.
- [Gha99b] Ghanem R. *Stochastic Finite Element with Multiple Random Non-Gaussian Properties. J. of Engrg. Mech.*, 125(1) :26–40, 1999.
- [Gha99c] Ghanem R. *The Nonlinear Gaussian Spectrum Log-Normal Stochastic Processes. J. of Applied Mech.*, 66(4) :964–973, 1999.
- [Gha99d] Ghanem R., Red-Horse J. *Propagation of probabilistic uncertainty in complex physical systems using a stochastic finite element approach. Physica D*, 133 :137–144, 1999.
- [Gha01] Ghanem R. *Uncertainty characterisation, Propagation and Management in Model-Based Predictions. Actes du 5e colloque du calcul de structures de Gien*, pages 26–40, 2001.
- [Gha02] Ghanem R., Pellissetti M. *Adaptative refinement in the spectral stochastic finite element. Commun. Numer. Meth. Engrg.*, (18) :141–151, 2002.
- [Ghi02] Ghiocel D.M., Ghanem R. *Stochastic finite element analysis of seismic soil-structure interaction. J. of Engrg. Mech.*, 128(1) :66–77, 2002.
- [Gor69] Gordon W.J. Free-form surface interpolation through curve networks. 1969.
- [Gra98] Graham L.L., Deodatis G. *Variability response functions for stochastic plate bending problems. Structural Safety*, 20 :167–188, 1998.
- [Gra01] Graham L.L., Deodatis G. *Response and eigenvalue analysis of stochastic finite element systems with multiple correlated material and geometrical properties. Prob. Engrg. Mech.*, 16 :11–29, 2001.
- [Gri00] Grigoriu M. *Stochastic mechanics. Int. J. of Solids and Structures*, 37 :197–214, 2000.
- [Gru96] Grundman H., Waubke H. *Non linear stochastic dynamics of systems with random properties : a spectral approach combined with statistical linearization. Int. J. Non-Linear Mechanics*, 31(5) :619–630, 1996.
- [Gué01] Guédé Z. Mise en oeuvre de la méthode de quadrature. Mémoire de DEA, Institut Français de Mécanique Avancée (IFMA), 2001.
- [Gua01a] Guan X.L., Melchers RE. *A load space formulation for probabilistic finite element analysis of structural reliability. Structural Safety*, 23 :429–444, 2001.
- [Gua01b] Guan X.L., Melchers RE. *Effect of response surface parameter variation on structural reliability estimates. Structural Safety*, 23 :429–444, 2001.
- [Gus01] Gustafsson J., Serrano E., Aicher S., and Johansson C.J. *Strength design equation for glued-in rods. International RILEM Symposium Joints in timber structures, Stuttgart, PRO22*, pages 323–332, 2001.
- [Häh04] Hähnel A., Rieuneau F., Lemaire M. *Analyse fiabiliste de systèmes mécaniques modélisés par arbres de défaillances. Congrès Lambda-nu, maîtrise des risques et sûreté de fonctionnement*, 3 :691–698, 2004.
- [Hie97] Hien T.D., Kleiber M. *Stochastic finite element modeling in linear transient transfer. Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 144 :111–124, 1997.
- [His83] Hisada T., Nakagiri S., Nakagiri T. *Stochastic finite element analysis of uncertain intrinsic stresses caused by structural misfits. In Trans. 7th SMIRT, M4/7*, 1983.
- [Hua01] Huang S.P., Quek S.T., Phoon K.K. *Convergence of the truncated Karhunen-Loève expansion of stochastic processes. Int. J. Numer. Meth. en Engrg.*, 52 :1029–1043, 2001.
- [Hue92] Huet S. *La régression linéaire, méthodes et applications en biologie*. INRA Editions, 1992.
- [Hur02] Hurtado J.E. *Analysis of one dimensional stochastic finite element using neural networks. Prob. Engrg. Mech.*, 17 :35–44, 2002.
- [Imp03a] Impollonia N., Sofi A. *A response surface approach for the static analysis of stochastic structures with geometrical nonlinearities. Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192 :4109–4129, 2003.
- [Imp03b] Impollonia N., Sofi A. *A response surface approach for the static analysis of stochastic structures with geometrical nonlinearities. Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192 :4109–4129, 2003.

- [Isu98] Isukapalli S.S., Roy A., Georgopoulos P.G. *Stochastic Response Surface Methods for uncertainty propagation : application to environmental and biological systems. Risk analysis*, 18(3) :351–362, 1998.
- [Jar04] Jardak M., Ghanem R.G. *Spectral homogenization of divergence-type PDEs. Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193 :429–447, 2004.
- [Kam99] Kammer D.C., Hien T.D. *Stochastic finite element modeling of transient heat transfer in layered composites. Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 26(6) :801–810, 1999.
- [Kam02] Kammer D.C., Alvin K.F. *On Component metamodel synthesis for the construction of master responses surfaces. Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191 :4555–4568, 2002.
- [Kam04] Kaminski M. *On the generalised perturbation-based stochastic finite element method. Proceedings of the 7th Int. Conf. on Computational Struct. Technology, Civil-Comp Press, Stirling, Scotland*, 1(107), 2004.
- [Kee03a] Keese A. A review of recent developments in the numerical solution of stochastic partial differential equations (stochastic finite elements). Institut of Scientific Computing, Technical University Braunschweig, Brunswick, 2003.
- [Kee03b] Keese A., Matthies G. Numerical Methods and Smolyak Quadrature for Nonlinear Stochastic Partial Differential Equations. SIAM conference on Computational Science and Engineering, San Diego, 2003.
- [Kim97] Kim SH., Na SW. *Response surface method using vector projected sampling points. Structural Safety*, 19 :3–19, 1997.
- [Kle92] Kleiber M., Hien T.D. The stochastic finite element method - basic perturbation method techniques and computer implementation. John Wiley and Sons, Ed., 1992.
- [Kor83] Kordiouk V. Aide-mémoire de la théorie des probabilités et de statistiques mathématiques. Editions de Moscou, 1983.
- [Law87] Lawrence M.A. *Basis random variables en FE analysis. Int. J. for Numeric. Meth.*, 24 :1849–1863, 1987.
- [Le 98] Le Fichoux E. Présentation de Castem 2000, Code de calcul pour l'analyse de structures par la méthode des éléments finis. Département Mécaniques et Technologies, Commissariat à l'Énergie Atomique, 1998.
- [Lee88] Lee B.W., Lim O.K. *Application of stochastic finite element method to optimal design of structures. Computers and structures*, 68 :491–497, 1988.
- [Lei00a] Lei Z., Qiu C. *A stochastic variational formulation for nonlinear dynamic analysis of structure. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190 :597–608, 2000.
- [Lei00b] Lei Z., Qiu C. *Neumann dynamic stochastic finite element method of vibration structures with stochastic parameters to random excitation. Computers and structures*, 77 :651–657, 2000.
- [Lem97] Lemaire M. *Finite element analysis : combined methods by surfaces responses. in G.-N. Frantziskonis, Editor, Probamat-21st century, Probabilities and materials : tests, models and applications for the 21st century, Kluwer Academic Publishers*, pages 317–331, 1997.
- [Lem00] Lemaire M. Cours de fiabilité. Notes de cours, DEA Génie Civil, Génie Mécanique, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, 2000.
- [Lem05] Lemaire M., Chateauneuf A., Mitteau J.P. *Fiabilité des structures. Hermès*, 2005.
- [Li 93] Li C.C., Der Kiureghian A. *Optimal discretization of random fields. J. of Engrg. Mech.*, 119(6) :1136–1154, 1993.
- [Li 97] Li R., Ghanem R. *Adaptative polynomial chaos expansions applied to statistics of extremes in nonlinear random vibration. Prob. Engrg. Mech.*, 13(2) :125–136, 1997.
- [Lim00] Lima B.S.L.P., Ebecken N.F.F. *A comparison of models for uncertainty analysis by the finite element method. Finite Elements Anal. Des.*, 34 :211–232, 2000.
- [Lin83] Lind N.D. *Modelling of uncertainty in discrete dynamical systems. Appl. Math. Modelling.*, 7 :146–152, 1983.
- [Liu83] Liu P.L., Der Kiureghian A. *Modelling of uncertainty in discrete dynamical systems. Appl. Math. Modelling*, 7 :146–152, 1983.

- [Liu86a] Liu N., Tang W.H. *System reliability evaluation of nonlinear continuum structures – a probabilistic FEM approach*. *Fin. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 56 :61–81, 1986.
- [Liu86b] Liu P.L., Der Kiureghian A. *Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances*. *Prob. Engrg. Mech.*, 1(2), 1986.
- [Liu86c] Liu W.K., Belytscko T., Mani A. *Probabilistic finite elements for nonlinear structural dynamics*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 56 :61–81, 1986.
- [Liu87] Liu W.K., Belytscko T., Mani A. *Finite elements methods in probabilistic mechanics*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2(4) :201–213, 1987.
- [Liu88] Liu W.K., Besterfield H., Belytscko T. *Variational approach to probabilistic finite elements*. *J. of Engrg. Mech.*, 114(12) :2115–2133, 1988.
- [Liu91] Liu P.L., Der Kiureghian A. *Finite element reliability of geometrically nonlinear uncertain structures*. *J. of Engrg. Mech.*, 117(8) :1806–1825, 1991.
- [Liu93] Liu P.L., Liu K.G.G. *Selection of random field mesh in finite element reliability analysis*. *J. of Engrg. Mech.*, 119(4) :667–680, 1993.
- [Loè77] Loève. *Probability theory*. 4th edition, Springer-Verlag, New-York, 1977.
- [Luc04] Lucor D., Su C.-H., Karniadakis G.E. *Generalized polynomial chaos and random oscillator*. *Int. J. of Num. Meth. In Engrg.*, 60 :571–596, 2004.
- [Mag95] Magnan J.P. et Bouheraoua A. *Stochastic analysis of soil consolidation in theory and practice*. Proceedings, 7th International Conference on Applications of Statistics and Probability, Lemaire, Favre et Mébarki ed., Rotterdam :77–84, 1995.
- [Mah91] Mahadevan S. et Haldar. *Practical random field discretization in stochastic finite element analysis*. *Structural safety*, pages 283–304, 1991.
- [Mah03] Mahadevan S., Huang S., Rebba R. *A Stochastic Response Surface Methods for random field problems*. *Appl. of Sta. and Prob. in Civil Engineering, Millpress*, 1 :177–184, 2003.
- [Mal02] Malgouyres R. *Algorithmes pour la synthèse d'images et l'animation 3D*. 2002.
- [Man66] Mandel J. *Mécanique des milieux continus*. Paris, Gauthier-Villars, 1966.
- [Mat65] Matheron G. *Les variables régionalisées et leur estimation*. Masson, 1965.
- [Mat97a] Matthies H.G., Brenner C.E., Bucher C.G., Guedes Soares C. *Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids - Stochastic finite elements*. *Struct. Safety*, 19(3) :283–336, 1997.
- [Mat97b] Matthies H.G., Bucher C.G. *Finite elements for stochastic media problems*. *Comput. methods Appl.*, 19(3) :283–336, 1997.
- [Mat04] Matthies H.G., Keese A. *A hierarchical parallel solver for stochastic finite element equations*. *Proceedings of the 7th Int. Conf. on Computational Struct. Technology, Civil-Comp Press, Stirling, Scotland*, 1(105), 2004.
- [Mel99] Mellah R. *Modélisation stochastique par éléments finis en élastoplasticité appliquée à la géomécanique*. Thèse de doctorat, INPL Nancy, 1999.
- [Mel00] Mellah R., Auvinet G., Masroui F. *Stochastic finite element method applied to non linear analysis of embankments*. *Prob. Engrg. Mech.*, 15 :251–259, 2000.
- [Mic00] Micaletti R.C. *Direct generation of non-Gaussian weighted integrals*. *J. of Engrg. Mech.*, 126(1) :66–75, 2000.
- [Moh99] Mohamed A., Lemaire M. *The use of sensitivity operators in the reliability analysis*. *Computational Stochastic Mechanics*, pages 211–220, 1999.
- [Moh00] Mohamed A., Lemaire M. *Improved response surface method by using second order sensitivity operators*. *Proceedings of the ICASP8*, 1 :117–124, 2000.
- [Mra03] Mrad H. *Méthode des éléments stochastiques : une investigation pour résoudre un problème de contact*. Mémoire de DEA, Université Technologique de Compiègne, 2003.
- [Mye95] Myers R.H., Montgomery D.C. *Response Surface Methodology*. John Wiley and Sons, Inc., 1995.
- [Nak85] Nakagiri S., Hisada T. *An introduction to stochastic finite element method*. BaiFuKan, Tokyo, Japan (en langue japonaise), 1985.

- [Nay73] Nayfeh A.H. *Perturbation methods*. Wiley, New-York, 1973.
- [Nev68] Neveu J. *Processus gaussiens*. Presses de Montréal, université de Cergy-Pontoise, 1968.
- [Nie92] Niederreiter H. *Random Number Generation and quasi-Monte Carlo Methods*. SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
- [Nov97] Novak E., Ritter K. *The curse of dimension and a universal method for numerical integration*. In Schmidt J.W., Walz G., *Multivariate approximation and Splines*, pages 177–188, 1997.
- [Nov99a] Novak E. *Numerische Verfahren für hochdimensionale Probleme und der Fluch der Dimension*. *Jahresbericht der DMV*, 101 :151–177, 1999.
- [Nov99b] Novak E., Ritter K. *Simple cubature formulas with high polynomial exactness*. *Constructive approximation*, 15 :499–522, 1999.
- [O’C01] O’Callaghan M. *Modelling random fields using transformations and Hermite polynomials*. *Prob. Engrg. Mech.*, 16 :245–252, 2001.
- [Ols02] Olsson M.J., Sandberg G.E. *Latin hypercube sampling for stochastic finite element analysis*. *J. of Engrg. Mech.*, 128(1) :121–125, 2002.
- [Pap96] Papadrakakis M., Papadopoulos V. *Robust and efficient methods for stochastic finite element analysis using Monte-Carlo simulations*. *Comp. Meth. Appl. Mech.*, 134 :325–340, 1996.
- [Pap97] Papadopoulos V., Papadrakakis M. *Stochastic finite element-based reliability analysis of space frames*. *Prob. Engrg. Mech.*, 13(1) :53–65, 1997.
- [Pap04] Papadopoulos V., Papadrakakis M. *Non linear stochastic finite element analysis of shells with non homogeneous random imperfections*. *Proceedings of the 7th Int. Conf. on Computational Struct. Technology, Civil-Comp Press, Stirling, Scotland*, 1(106), 2004.
- [Pen00] Pendola M. *Fiabilité des structures en contexte d’incertitudes statistiques et d’écarts de modélisation*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, 2000.
- [Pet01] Petras K. *Fast calculation of coefficients in the Smolyak algorithm*. *Numerical Algorithms*, 26 :93–109, 2001.
- [Pet03] Petras K. *Asymptotically minimal Smolyak cubature*. preprint, 2003.
- [Pho90] Phoon K., Quek S., Chow Y., Lee S. *Reliability analysis of pile settlement*. *J. Geotech. Eng. ASCE*, 116(11) :1717–1735, 1990.
- [Pho04] Phoon K., Huang H.W., Quek S.T. *Comparison between Karhunen-Loève and wavelet expansions for simulation of gaussian*. *Computers and structures*, 82 :985–991, 2004.
- [Pro96] Procaccia H. *Fiabilité des structures des installations industrielles*. Eyrolles, 1996.
- [Pui02] Puig B., Poirion F., Soize C. *Non-Gaussian simulation using Hermite polynomial expansion*. *Prob. Engrg. Mech.*, 17 :253–264, 2002.
- [Raj93] Rajashekhar MR., Ellingwood BR. *A new look at the response surface approach for reliability analysis*. *Structural Safety*, 12 :205–220, 1993.
- [Rec03] Recek S. *Problème stochastique : exemple de détermination de la flèche d’une poutre en flexion 3 points*. Rapport du Commissariat à l’Energie Atomique, DM2S, SEMT/LM2S/RT/03-024, 2003.
- [Ren98] Ren Y.J., Elishakof I. *News results in finite element method for stochastic structures*. *Computers and structures*, 67 :125–135, 1998.
- [Rib86] Riberholt H. *Glued bolts in glulam*. Report N°210, Department of Structural Engineering, Technical University of Denmark, 1986.
- [Rom04] Giunta A.A., Romero V.J., Swiler L.P. *Construction of response surfaces base on progressive-lattice-sampling experimental designs with application to uncertainty propagation*. *Structural Safety*, 26 :201–219, 2004.
- [Ros52] Rosenblatt M. *Remarks on a multivariate transformation*. *Ann. Math. Stat.*, 23 :470–472, 1952.
- [Ros75] Rosenblueth E. *Point estimates for probability moments*. *Proceedings, Nat. Acad. Sciences, USA*, 72 :3812–3814, 1975.
- [Roy85] Roy B. *Méthodologie multicritère d’aide à la décision*. Economica, 1985.
- [Rui99] Ruiz-Molina J.C., Navarro J., Valderrama M.J. *Differentiation of the modified approximative Karhunen-Loève expansion of a stochastic process*. *Statistics and Probability Letters*, 42 :91–98, 1999.

- [Sak01] Sakurai S., Ellingwood B.R., Kushiyama S. *Probabilistic study of the behavior of steel frames with partially restrained connections. Engineering Structures*, 23 :1410–1417, 2001.
- [San99] Sandberg G., Olsson A. *Failure sensitivity of engineering structures. Computers and structures*, 72 :525–534, 1999.
- [Sch97] Schuëller G.I. *et al. A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics. Prob. Engrg. Mech.*, 12(4) :197–321, 1997.
- [Sch01] Schuëller G.I. *Computational stochastic mechanics – recent advances. Computers and structures*, 79 :2225–2234, 2001.
- [Sch03] Schuëller G.I., Pradlwarter H.J., Schenk C.A. *Non-stationary response of large linear FE models under stochastic loading. Computers and structures*, 81 :937–947, 2003.
- [She04] Shenk C.A., Pradlwarter H.J., Schuëller G.I. *On the dynamic stochastic response of FE models. Prob. Engrg. Mech.*, 18 :161–170, 2004.
- [Shi87] Shinozuka M. *Structural response variability. J. of Engrg. Mech.*, 113(6) :825–842, 1987.
- [Shi88a] Shinozuka M., Deodatis G. *Response variability of Stochastic Finite Element systems. J. of Engrg. Mech.*, 114(3) :499–519, 1988.
- [Shi88b] Shinozuka M., Yamazaki F. *Stochastic finite element analysis : an introduction. In Stochastic structural dynamics, progress in theory and applications, Elsevier Science publication*, pages 241–291, 1988.
- [Shr66] Shreider Y.A. *The Monte-Carlo method. Pergamon Press*, 1966.
- [Smo63] Smolyak S.A. *Quadrature and interpolation formulas for tensors products of certain classes of functions. Soviet Mathematiks Dokl.*, 4 :240–243, 1963.
- [Sob99] Sobczyk K., Treicki J. *Approximate probability distributions for stochastic systems : maximum entropy method. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 168 :91–111, 1999.
- [Soi84] Soize C. *Théorie spectrale des processus. Ecole Centrale de Paris*, 1984.
- [Soi86] Soize C. *Processus stochastiques et méthodes de résolution de problèmes aléatoires, tome 3. Ecole Centrale de Paris*, 1986.
- [Soi93] Soize C. *Méthodes mathématiques en analyse du signal. Masson*, 1993.
- [Soi01] Soize C. *Modélisation des incertitudes aléatoires en élastodynamique transitoire. C.R. Acad. Sci. Paris*, 329(IIb) :225–230, 2001.
- [Spa89] Spanos P.D., Ghanem R. *Stochastic finite element expansion for random media. J. of Engrg. Mech.*, 115(5) :1035–1053, 1989.
- [Spa98] Spanos P.D., Zeldin B.A. *Discretization aspects of stochastic finite elements. Structural safety and reliability*, pages 835–842, 1998.
- [Sri98] Srishti D., Chatterji. *Cours d'analyse, tome 3. Presses polytechniques et universitaires romandes*, 1998.
- [Ste04] Stefanou G., Papadrakatis M. *Stochastic finite element analysis of shell with combined random material and geometric properties. Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193 :139–160, 2004.
- [Sud00] Sudret B., Der Kiureghian A. *Stochastic Finite Element Methods and Reliability. A State-of-the-Art Report. Report No.UCB/SEMM-2000/08, Department of Civil & Engineering University of California, Berkeley*, 2000.
- [Sud02] Sudret B., Der Kiureghian A. *Comparaison of finite element methods. Prob. Engrg. Mech.*, 17 :337–348, 2002.
- [Sud03] Sudret B., Cherradi I. *Quadrature method for finite element reliability analysis. Appl. of Sta. and Prob. in Civil Engineering, Millpress*, 1 :387–394, 2003.
- [Sud04] Sudret B., Berveiller M., Lemaire M. *éléments finis stochastiques en élasticité linéaire. C.R. Mécanique*, 332 :531–537, 2004.
- [Suz04] Takada T. Suzuki M. . *C.R. Mécanique*, 332 :531–537, 2004.
- [Tak90a] Takada T. *Weighted integral method in multi-dimensional stochastic finite element analysis. Prob. Engrg. Mech.*, 5(4) :158–166, 1990.
- [Tak90b] Takada T. *Weighted integral method in stochastic finite element analysis. Prob. Engrg. Mech.*, 5(3) :146–155, 1990.

- [Tal05] Taleb R. Étude de sensibilité des assemblages bois par tiges collées par éléments finis stochastiques spectraux. Mastère recherche, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, 2005.
- [Tan00] Tandjiria V., Teh C.I., Low B.K. *Reliability analysis of laterally loaded piles using response surface methods. Structural Safety*, 22 :335–355, 2000.
- [Van83a] Vanmarcke E. Random fields, analysis and synthesis. the MIT Press Cambridge, 1983.
- [Van83b] Vanmarcke E., Grigoriu M. *Stochastic Finite Element Analysis of Simple Beams. J. of Engrg. Mech.*, 109(5) :1203–1214, 1983.
- [Van03] Van den Nieuwenhof B., Coyette J.P. *Modal approaches for the stochastic finite element analysis of structures with material and geometric uncertainties. Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192 :3705–3729, 2003.
- [Vil97] Villemeur A. Sécurité de fonctionnement des systèmes industriels : fiabilité, facteurs humains, informatisation. Collection de la direction des études et recherches d'Electricité de France, Eyrolles, 1997.
- [Wal94] Wall F. *Probabilistic response of stochastic 2D-systems under static loading. Tech. Rep., Dept. of Civ. Engrg. and Operations Res., Princeton University, Princeton N. J.*, 1994.
- [Wan90] Wang D. Modélisation de surfaces B-splines s'appuyant sur des courbes de Bézier ou B-splines. Thèse de doctorat, Laboratoire de mécanique des structures, 1990.
- [Wie38] Wiener N. *The homogeneous chaos. Amer. J. Math.*, 60 :897–936, 1938.
- [Win85] Winterstein S.R. *Non normal responses and fatigue damage. J. of Engrg. Mech.*, 111(10) :1291–1295, 1985.
- [Won84] Wong F.S. *Uncertainties in dynamic soil-structure interaction. J. of Engrg. Mech.*, 110(1) :32–53, 1984.
- [Won01] Wong R. Asymptotic approximations of integrals. SIAM edition, 2001.
- [Xiu02] Xiu D., Karniadakis G.E. *Modeling uncertainty in steady state diffusion problems via generalized polynomial chaos. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191 :4927–4948, 2002.
- [Xiu03] Xiu D., Karniadakis G.E. *A new stochastic approach to transient heat conduction modeling with uncertainty. Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 46 :4681–4693, 2003.
- [Yam88] Yamasaki F., Shinozuka M., Dasgupta G. *Neumann expansion for stochastic finite element analysis. J. of Engrg. Mech.*, 114(8) :1335–1354, 1988.
- [Yan05] Yang L., Leung A.Y.T., Yan L., Wong C.W.Y. *Stochastic spline Ritz method based on stochastic variational principle. Engineering structures*, (27) :455–462, 2005.
- [Yeh98] Yeh C.H., Rahman M.S. *Stochastic finite element methods for the seismic response of soils. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 22 :819–850, 1998.
- [You04] Young B.D., Choi K.K. *A new response surface methodology for reliability-based design optimization. Computers and structures*, 82 :241–256, 2004.
- [Zel98] Zeldin B.A., Spanos P.D. *On random field discretization in stochastic finite elements. J. App. Mech. ASME*, 65 :320–327, 1998.
- [Zha94] Zhang B.A., Ellingwood B. *Orthogonal series expansion of random fields in reliability analysis. J. Engrg. Mech., ASCE*, 120(12) :2660–2677, 1994.
- [Zha97] Zhao J.P., Huang W.L., Dai S.H. *The application of 2D elastic stochastic finite element method in the field of fracture mechanics. Int. J. Pres. Ves. & Piping*, 71 :169–173, 1997.
- [Zha98a] Zhang J., Ellingwood B. *SFEM in nonlinear reliability analysis. Proc. of ICOSSAR'97*, 2 :867–874, 1998.
- [Zha98b] Zhao J.P., Huang W.L., Dai S.H. *The application of 2D elasto-plastic stochastic finite element method in the field of fracture mechanics. Int. J. Pres. Ves. & Piping*, 75 :281–286, 1998.
- [Zhu86] Zhu W.Q., Ren Y.J. *Local average of random field and stochastic finite element method. Acta aeronautica et astronautica sinica, China*, 7(6) :604–611, 1986.
- [Zhu92] Zhu W.Q., Ren Y.J., Wu W.Q. *Stochastic FEM based on local averages of random vector fields. J. of Engrg. Mech.*, 118(3), 1992.

Annexes

Annexe A : Notations

Annexe B : Variables aléatoires et processus lognormaux

Annexe C : Les polynômes d'Hermite

Annexe D : Les B-splines cubiques

Annexe A

Notations

A.1 Abréviations courantes

CA Cinématiquement Admissible
DIV division entière
ddl degré(s) de liberté
FDP Fonction de Densité de Probabilité
MEF méthode des éléments finis
MEFS méthode des éléments finis stochastiques
MEFSS méthode des éléments finis stochastiques spectraux
MIP Méthode des Intégrales Pondérées
MOD reste de la division entière
MSR Méthodologie des Surfaces des Réponses
OND Orthogonal Normé Direct
SR Surface de Réponse
v.a. variable aléatoire

A.2 Notations courantes

§ paragraphe
II fonction indicatrice
 $\delta_{i,j}$ symbole de Kronecker : $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon, où $(i, j) \in \mathbb{N}^2$
 $\mathbf{E}[\cdot]$ espérance mathématique
 S fonction B-spline cubique
 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M)$ élément générique de \mathbb{R}^M
 $d\mathbf{x} = dx_1 \cdots dx_M$ mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^M

A.3 Notations propres à la modélisation EF

$\det(\cdot)$ ou $|\cdot|$ déterminant d'une matrice
 Ω_e domaine élémentaire d'un maillage EF
 N_{el} nombre d'EF
 $\mathbf{A}_{e=1}^{N_{el}}$ opérateur d'assemblage sur l'ensemble des EF
 \mathbf{q} vecteur des déplacements nodaux
 m dimension du vecteur des déplacements nodaux \mathbf{q}

\mathbf{f} vecteur des sollicitations nodales équivalentes
 N matrice des fonctions de forme
 U champ de déplacement
 D matrice de comportement
 B matrice des dérivées des fonctions de forme
 k et k^e matrice de rigidité globale et élémentaire

A.4 Notations propres à la modélisation EFS

Θ, \emptyset ensembles abstrait (fondamental) et vide
 θ élément de l'ensemble Θ
 $\mathcal{F}, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}$ tribu, tribu borélienne de \mathbb{R}^n , élément de \mathcal{B}_n
 (Θ, \mathcal{F}, P) espace de probabilité
 X, x v.a., réalisation de la v.a. X
 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_M)$ v.a. M -dimensionnelle
 $\mathbb{P}_{X_i}, p_{X_i}$ loi et densité de probabilité de X_i
 μ_X moyenne de la v.a. X exacte
 $\hat{\mu}_X$ estimée simulée de μ_X
 $\tilde{\mu}_X$ estimée autre de μ_X
 $V_X, \text{Var}(X)$ variance de la v.a. X
 σ_X écart-type de la v.a. scalaire X
 $\text{Cov}(X, Y)$ covariance des v.a. scalaires X et Y
 ρ_{kl} coefficient de corrélation des v.a. scalaires X_k et X_l
 $C_{\mathbf{X}}$ matrice de covariance du vecteur aléatoire \mathbf{X}
 $L^0(\Theta, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^M)$ espace vectoriel des v.a. définies sur (Θ, \mathcal{F}, P) , à valeurs dans \mathbb{R}^M
 $L^2(\Theta, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^M)$ espace vectoriel des v.a. de carré intégrables, à valeurs dans \mathbb{R}^M
 $\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{\mathbf{X}}$ v.a. gaussiennes standards, scalaire et vectorielle
 $\overset{\circ}{X}_i$ composante de rang i de $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$
 ν_M loi gaussienne standard sur $(\mathbb{R}^M, \mathcal{B}_M)$
 φ_M densité de probabilité gaussienne standard
 $G, \overset{\circ}{G}$ processus gaussien et gaussien standard
 $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ variable aléatoire gaussienne, de moyenne μ_X et d'écart-type σ_X
 $Y \sim \mathcal{LN}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ v.a. aléatoire lognormale de moyenne μ_Y et de variance σ_Y^2
 Z champ aléatoire quelconque de moyenne μ_Z et de variance σ_Z^2
 R_Z fonction d'autocorrélation de Z
 C_Z fonction de covariance (ou autocovariance) de Z
 H_{α_i} polynôme d'Hermite sur \mathbb{R} d'ordre $\alpha_i \in \mathbb{N}$
 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M) \in \mathbb{N}^M$ multi-indice d'ordre M de longueur $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_M$
 $\Psi_{\alpha} = \prod_{i=1}^M H_{\alpha_i}$ polynôme d'Hermite sur \mathbb{R}^M , d'ordre α
 op plus haut degré des monômes de la base $(\Psi_{\alpha})_{0 < |\alpha| < op}$, i.e. ordre de la base
 ψ_{α} polynôme d'Hermite normalisé sur \mathbb{R}^M , d'ordre α

Annexe B

Normalisation gaussienne d'une v.a. lognormale vectorielle et d'un processus lognormal scalaire

B.1 Normalisation gaussienne d'une v.a. lognormale vectorielle

Soit $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_M)$ une v.a. lognormale vectorielle M -dimensionnelle, de moyenne $\mu_{\mathbf{Y}} = (\mu_{Y_1}, \dots, \mu_{Y_M}) \in \mathbb{R}^M$ et de matrice de covariance $\mathbf{C}_{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^{M \times M}$.

$$\mathbf{C}_{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \sigma_{Y_1}^2 & C_{Y_1 Y_2} & \dots & C_{Y_1 Y_M} \\ C_{Y_2 Y_1} & \sigma_{Y_2}^2 & \dots & C_{Y_2 Y_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{Y_M Y_1} & C_{Y_M Y_2} & \dots & \sigma_{Y_M}^2 \end{bmatrix}$$

où :

$$\mu_{Y_i} = \mathbf{E}[Y_i] \quad ; \quad \sigma_{Y_i}^2 = C_{Y_i Y_i} \quad ; \quad C_{Y_i Y_j} = \mathbf{E}[(Y_i - \mu_{Y_i})(Y_j - \mu_{Y_j})]$$

Soit $\Gamma = (\Gamma_{ij})$ l'élément symétrique et défini positif de $\mathbb{R}^{M \times M}$ tel que, $\forall (i, j) \in \{1, \dots, M\}^2$:

$$\Gamma_{ij} = \ln\left(1 + \frac{C_{Y_i Y_j}}{\mu_{Y_i} \mu_{Y_j}}\right)$$

Soit $L \in \mathbb{R}^{M \times M}$ la matrice réelle triangulaire inférieure, issue de la factorisation de Cholesky de Γ :

$$\Gamma = L L^T$$

Soit $\mathbf{x} \rightarrow T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ l'application de \mathbb{R}^M dans \mathbb{R}^M , d'image $(\mathbb{R}_+)^M$, telle que :

$$\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{\mu_{Y_1}}{\sqrt{1+a_{Y_1}^2}} \exp((L\mathbf{x})_1) \\ \vdots \\ y_M = \frac{\mu_{Y_M}}{\sqrt{1+a_{Y_M}^2}} \exp((L\mathbf{x})_M) \end{cases}$$

où $a_{Y_i} = C_{Y_i Y_i}^{-1/2} \mu_{Y_i}^{-1}$ est le coefficient de variation de la v.a. Y_i et $(L\mathbf{x})_i$ la i -ème composante du vecteur $L\mathbf{x}$ sur la base canonique de \mathbb{R}^M .

Enfin, soit $\overset{\circ}{\mathbf{X}} = (\overset{\circ}{X}_i)$ une v.a. gaussienne standard à valeurs dans \mathbb{R}^M , i.e. une v.a. gaussienne M -dimensionnelle de moyenne nulle et de matrice de covariance unité.

On a alors l'égalité en loi :

$$\mathbf{Y} = T(\overset{\circ}{\mathbf{X}})$$

On obtient ainsi en dimensions un ($M = 1$) et deux ($M = 2$) :

- Cas scalaire ($M = 1$) :

$$Y = T(\overset{\circ}{X}) = \frac{\mu_Y}{\sqrt{1 + a_Y^2}} \exp(L \overset{\circ}{X})$$

avec :

$$L = \sqrt{\ln(1 + a_Y^2)}$$

où nous avons posé $\overset{\circ}{X} = \overset{\circ}{X}_1$, $Y = Y_1$.

- Cas bidimensionnel ($M = 2$) :

$$\mathbf{Y} = T(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \Leftrightarrow \begin{cases} Y_1 = \frac{\mu_{Y_1}}{\sqrt{1 + a_{Y_1}^2}} \exp(L_{11} \overset{\circ}{X}_1) \\ Y_2 = \frac{\mu_{Y_2}}{\sqrt{1 + a_{Y_2}^2}} \exp(L_{21} \overset{\circ}{X}_1 + L_{22} \overset{\circ}{X}_2) \end{cases}$$

avec :

$$L_{11} = \sqrt{\ln(1 + a_{Y_1}^2)}$$

$$L_{21} = \frac{\ln(1 + \rho_{Y_1 Y_2} a_{Y_1} a_{Y_2})}{\sqrt{\ln(1 + a_{Y_1}^2)}}$$

$$L_{22} = \sqrt{\frac{\ln(1 + a_{Y_1}^2) \ln(1 + a_{Y_2}^2) - \ln^2(1 + \rho_{Y_1 Y_2} a_{Y_1} a_{Y_2})}{\ln(1 + a_{Y_1}^2)}}$$

où $\rho_{Y_1 Y_2} = C_{Y_1 Y_2} C_{Y_1 Y_1}^{-\frac{1}{2}} C_{Y_2 Y_2}^{-\frac{1}{2}}$ est le coefficient de corrélation du couple (Y_1, Y_2) .

B.2 Normalisation gaussienne d'un processus lognormal stationnaire scalaire

Soit $Y = (Y(x), x \in \mathbb{R})$, un processus lognormal stationnaire scalaire de moyenne $\mu_Y \in \mathbb{R}_+^*$ et de fonction de covariance $C_Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : u \rightarrow C_Y(u)$.

Soit $\overset{\circ}{G} = (\overset{\circ}{G}(x), x \in \mathbb{R})$, un processus gaussien stationnaire scalaire normalisé (i.e. centré, de variance unité), de fonction de covariance $C_{\overset{\circ}{G}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : u \rightarrow C_{\overset{\circ}{G}}(u)$ telle que, $\forall u \in \mathbb{R}$:

$$C_{\overset{\circ}{G}}(u) = \frac{\ln\left(1 + \frac{C_Y(u)}{\mu_Y^2}\right)}{\ln\left(1 + \frac{C_Y(0)}{\mu_Y^2}\right)}$$

On a alors l'égalité en loi :

$$Y = \frac{\mu_Y}{\sqrt{1 + \frac{C_Y(0)}{\mu_Y^2}}} \exp\left(\sqrt{\ln\left(1 + \frac{C_Y(0)}{\mu_Y^2}\right)} \overset{\circ}{G}\right)$$

où l'on remarque que le terme $\frac{C_Y(0)}{\mu_Y^2}$ n'est autre que le carré du coefficient de variation a_Y de Y :

$$a_Y^2 = \frac{C_Y(0)}{\mu_Y^2}$$

Annexe C

Polynômes d'Hermite

Cette annexe présente les polynômes d'Hermite et leur propriété d'orthogonalité par rapport à la Densité de Probabilité (DP) gaussienne standard. Nous présentons ensuite d'autres propriétés utiles et des formules combinatoires d'espérances de produits de ces polynômes.

Les polynômes d'Hermite sont couramment utilisés comme base de projection fonctionnelle depuis vingt ans (Winterstein [Win85], Field [Fie04]). O'Callagan [O'C01] ou Puig *et al.* [Pui02] les utilisent dans le cadre de la simulation de champs. Les polynômes d'Hermite sont employés, parmi d'autres familles de polynômes orthogonaux, à la construction d'espaces vectoriels particuliers, appelés chaos (Xiu *et al.* [Xiu02]). C'est, par exemple, un chaos défini à partir d'une base de polynômes d'Hermite, nommé *chaos homogène*, ou *chaos de Wiener* [Wie38], qui a été utilisé par Ghanem et Spanos [Gha91], pour formuler la MEFS spectrale (cf. chapitre 3).

C.1 Généralités

Charles Hermite propose en 1864 la famille de polynômes orthogonaux dont une première définition générale, la formule de Rodrigue, les exprime comme une suite fonctionnelle s'obtenant par dérivations successives :

$$H_0(x) \equiv 1 \quad ; \quad H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-\frac{x^2}{2}}) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$$

Parmi de nombreuses propriétés intéressantes, ces polynômes sont solutions d'un système d'équations différentielles (comme d'autres polynômes orthogonaux [Bay86]). Mais la propriété des polynômes d'Hermite qui nous intéresse est leur lien étroit avec la DP gaussienne standard φ_M , qui se traduit par la relation suivante :

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{\varphi_M^{(n)}(x)}{\varphi_M(x)}$$

avec :

$$\varphi_M(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad ; \quad \varphi_M^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \varphi_M(x)$$

L'orthogonalité des polynômes d'Hermite par rapport à un produit scalaire lié à la DP gaussienne standard s'exprime par la relation :

$$\mathbb{E}[H_n(x)H_m(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \delta_{n,m}n!$$

Cette propriété des polynômes d'Hermite rend possible d'autres relations intégrales ; en posant par exemple $m = 0$, nous avons, pour tout $n \geq 1$:

$$\mathbf{E}[H_n(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = 0$$

Outre l'orthogonalité, nous pouvons obtenir d'autres relations de récurrence utiles :

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = nH_{n-1}(x)$$

$$H_{n+1}(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0$$

$$H_0(x) \equiv 1 \quad ; \quad H_{n+1}(x) = xH_n(x) - \frac{dH_n(x)}{dx} = 0$$

Un autre moyen de définir les polynômes d'Hermite à l'aide d'une formule intégrale est :

$$H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (x + it)^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (\text{C.1})$$

Il est intéressant de relier aussi les polynômes d'Hermite à la base canonique des polynômes. En effet, tout polynôme d'Hermite d'ordre n s'écrit sur cette base :

$$H_n(x) = h_0^n + h_1^n x + \dots + h_n^n x^n \quad (\text{C.2})$$

et en utilisant (C.1), on obtient les relations suivantes entre les coefficients du développement :

$$\begin{cases} h_0^n = -h_1^{n-1} \\ h_1^n = h_0^{n-1} - 2h_2^{n-1} \\ \vdots \\ h_{n-1}^{n-2} = h_{n-3}^{n-1} - (P-1)h_{n-1}^{n-1} \\ h_{n-1}^n = 0 \\ h_n^n = h_{n-1}^{n-1} = 1 \end{cases}$$

On montre en outre que si n est pair (resp. impair), les coefficients des monômes de degrés impairs (resp. pairs) sont tous nuls.

Les relations précédentes nous permettent aisément d'écrire les premiers polynômes :

$$H_0(x) = 1 \quad ; \quad H_1(x) = x \quad ; \quad H_2(x) = x^2 - 1 \quad ; \quad H_3(x) = x^3 - 3x \quad ; \quad H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$$

La valeur des polynômes en $x = 0$ s'exprime facilement :

$$H_{2n+1}(0) = 0 \quad ; \quad H_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n n!} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

Nous souhaitons par ailleurs engendrer le polynôme $Q_n = (H_n)^\lambda$, de degré $d_n = n \times \lambda$, $\lambda \in \mathbb{N}^*$, défini par $Q_n(x) = \sum_{j=0}^{d_n} q_j^n x^j$.

Rappelons tout d'abord la formule binomiale, $\forall \lambda \in \mathbb{N}$, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$(a + b)^\lambda = \sum_{k=0}^{\lambda} C_\lambda^k a^{\lambda-k} b^k$$

ainsi que sa forme généralisée, avec $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\alpha_k \in \mathbb{N}^n$, $\forall 0 \leq k \leq n$, $\lambda \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k \right)^\lambda = \underbrace{\sum_{\alpha_1=0}^{\lambda} \sum_{\alpha_2=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\alpha_{n-1}=0}^{\alpha_{n-2}} C_\lambda^{\alpha_1} C_{\alpha_1}^{\alpha_2} \dots C_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_n}}_{n \text{ sommes}} \times a_0^{\lambda-\alpha_1} \times \left(\prod_{l=1}^{n-1} a_l^{(\alpha_l-\alpha_{l+1})} \right) \times a_n^{\alpha_n}$$

D'après cette formule et la forme (C.2) du polynôme H_n :

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= \left(\sum_{j=0}^n h_j^n x^j \right)^\lambda & (C.3) \\ &= \sum_{\alpha_1=0}^{\lambda} \sum_{\alpha_2=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\alpha_{n-1}=0}^{\alpha_{n-2}} C_\lambda^{\alpha_1} C_{\alpha_1}^{\alpha_2} \dots C_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_n} \times (h_0^n)^{\lambda-\alpha_1} \times \left(\prod_{l=1}^{n-1} (h_l^n x^l)^{(\alpha_l-\alpha_{l+1})} \right) \times (h_n^n x^n)^{\alpha_n} \\ &= \sum_{\alpha_1=0}^{\lambda} \sum_{\alpha_2=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\alpha_{n-1}=0}^{\alpha_{n-2}} C_\lambda^{\alpha_1} C_{\alpha_1}^{\alpha_2} \dots C_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_n} \times (h_0^n)^{\lambda-\alpha_1} \times \left(\prod_{l=1}^{n-1} (h_l^n)^{(\alpha_l-\alpha_{l+1})} \right) \times (h_n^n)^{\alpha_n} \times x^{\left[n \times \alpha_n + \sum_{l=1}^{n-1} l(\alpha_l-\alpha_{l+1}) \right]} \end{aligned}$$

C.2 Calcul d'espérances mathématiques

Rappelons tout d'abord que si $\overset{\circ}{X}$ est une v.a. gaussienne standard à valeurs dans \mathbb{R} :

$$\mathbb{E}[\overset{\circ}{X}^{2m}] = \frac{(2m)!}{m! 2^m} \quad ; \quad \mathbb{E}[\overset{\circ}{X}^{2m+1}] = 0$$

et de plus (Declercq [Dec98]) :

$$\mathbb{E}[H_n(\overset{\circ}{X} + a)] = a^n \quad ; \quad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{E}[H_{2n+1}^3(\overset{\circ}{X})] = 0 \quad ; \quad \mathbb{E}[H_{2n}^3(\overset{\circ}{X})] = \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^3$$

Nous considérons ici les espérances de produits de polynômes définis sur \mathbb{R}^M .

Soient $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M) \in \mathbb{N}^M$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_M) \in \mathbb{N}^M$, $M \in \mathbb{N}^*$, deux multi-indices d'ordre M . Notons $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_M$ et $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_M$ leurs longueurs et posons, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^M \times \mathbb{N}^M$:

$$\alpha! = \alpha_1! \times \dots \times \alpha_M! \quad ; \quad \beta! = \beta_1! \times \dots \times \beta_M! \quad ; \quad \delta_{\alpha, \beta} = \delta_{\alpha_1, \beta_1} \times \dots \times \delta_{\alpha_M, \beta_M}$$

où $\alpha_l!$ et $\delta_{\alpha_l, \beta_l}$ sont la factorielle et le symbole de Kronecker usuels.

Le polynôme d'Hermite d'ordre α , sur \mathbb{R}^M , est défini par :

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x}) = \prod_{l=1}^M H_{\alpha_l}(x_l) \quad ; \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M) \in \mathbb{R}^M \quad (C.4)$$

où $(H_{\alpha_l})_{1 \leq l \leq M}$ sont les polynômes d'Hermite d'ordre α_l sur \mathbb{R} . On appelle ordre de la base polynomiale et on note op , le plus haut degré des monômes de la base $(\Psi_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq op}$. Par commodité algorithmique, il est préférable de réindicer ces polynômes par un entier j , tel que, $(\Psi_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq op} \equiv (\Psi_\alpha)_{0 \leq j \leq P-1}$, identité qui implique : $P = \sum_{k=0}^{op} C_{M-1+k}^k$.

Le calcul des espérances particulières suivantes est d'un intérêt pratique pour la mise en œuvre de certaines méthodes abordées dans cette thèse :

$$c_j = \mathbf{E}\left[\prod_{l=1}^M \Psi_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}})^2\right] \quad ; \quad c_{ijk} = \mathbf{E}\left[\overset{\circ}{X}_i \Psi_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \Psi_k(\overset{\circ}{\mathbf{X}})\right] \quad ; \quad d_{jkm} = \mathbf{E}\left[\Psi_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \Psi_k(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \Psi_m(\overset{\circ}{\mathbf{X}})\right]$$

où Ψ_j, Ψ_k et Ψ_m sont des polynômes d'Hermite définis sur \mathbb{R}^M , d'ordres j, k et m , respectivement et $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$ est une v.a. gaussienne standard à valeurs dans \mathbb{R}^M . La première présentation du calcul de ces espérances par Ghanem et Spanos [Gha91] implique un calcul formel, souvent plus long. Sudret et Der Kiureghian [Sud00] ont construit un algorithme intéressant, basé sur l'utilisation d'un boulier, permettant de calculer c_j et c_{ijk} . Dans le cadre de ce travail, nous avons généralisé ce résultat et sommes désormais en mesure de faire le calcul exact de l'espérance générale suivante :

$$\mu_{j,N} = \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^N \left(\Psi_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}})\right)^{\beta_i}\right]$$

(a) Calcul des espérances $c_j = \mathbf{E}[\Psi_j^2(\overset{\circ}{\mathbf{X}})]$

En utilisant les relations (C.4) et (C.1), les v.a. gaussiennes standards $(\overset{\circ}{X}_i)_{1 \leq i \leq M}$ étant indépendantes dans leur ensemble, nous avons :

$$\mathbf{E}[\Psi_j \Psi_k] = \prod_{i=1}^M \delta_{\alpha_i, \beta_i} \alpha_i!$$

Il vient que :

$$c_j = \mathbf{E}[\Psi_j^2] = \prod_{l=1}^M \alpha_l!$$

(b) Calcul des espérances $c_{ijk} = \mathbf{E}[\overset{\circ}{X}_i \Psi_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) \Psi_k(\overset{\circ}{\mathbf{X}})]$

Par définition, d'après (C.4) :

$$c_{ijk} = \mathbf{E}\left[\overset{\circ}{X}_i \prod_{l=1}^M H_{\alpha_l}(\overset{\circ}{X}_l) H_{\beta_l}(\overset{\circ}{X}_l)\right] = \mathbf{E}\left[\overset{\circ}{X}_i H_{\alpha_i}(\overset{\circ}{X}_i) H_{\beta_i}(\overset{\circ}{X}_i) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^M H_{\alpha_l}(\overset{\circ}{X}_l) H_{\beta_l}(\overset{\circ}{X}_l)\right]$$

D'où, puisque les v.a. gaussiennes standards $(\overset{\circ}{X}_i)_{1 \leq i \leq M}$ sont indépendantes :

$$c_{ijk} = \mathbf{E}\left[\overset{\circ}{X}_i H_{\alpha_i}(\overset{\circ}{X}_i) H_{\beta_i}(\overset{\circ}{X}_i)\right] \times \mathbf{E}\left[\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^M H_{\alpha_l}(\overset{\circ}{X}_l) H_{\beta_l}(\overset{\circ}{X}_l)\right]$$

soit :

$$c_{ijk} = \int_{-\infty}^{+\infty} x H_{\alpha_i}(x) H_{\beta_i}(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \times \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^M \delta_{\alpha_l, \beta_l} \alpha_l!$$

et par suite, en utilisant une intégration par parties :

$$c_{ijk} = \delta_{\alpha_i-1,\beta_i} (\beta_i! \prod_{l \neq i}^M \delta_{\alpha_l,\beta_l} \beta_l!) + \delta_{\beta_i-1,\alpha_i} (\alpha_i! \prod_{l \neq i}^M \delta_{\alpha_l,\beta_l} \alpha_l!)$$

soit encore :

$$c_{ijk} = \delta_{\alpha_i-1,\beta_i} \left(\prod_{l=1}^M \delta_{\alpha_l,\beta_l} \beta_l! \right) + \delta_{\beta_i-1,\alpha_i} \left(\prod_{l=1}^M \delta_{\alpha_l,\beta_l} \alpha_l! \right) = \delta_{\alpha_i-1,\beta_i} c_k + \delta_{\beta_i-1,\alpha_i} c_j$$

(c) **Calcul des espérances** $d_{jkm} = \mathbf{E}[\Psi_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}})\Psi_k(\overset{\circ}{\mathbf{X}})\Psi_m(\overset{\circ}{\mathbf{X}})]$

En rappelant que $\Psi_\alpha(\overset{\circ}{\mathbf{X}}) = \prod_{i=1}^M H_{\alpha_i}(\overset{\circ}{X}_i)$, et par définition de l'espérance, il vient :

$$d_{jkm} = \int_{\mathbb{R}^M} \prod_{l=1}^M H_{\alpha_l}(x_l) \prod_{l=1}^M H_{\beta_l}(x_l) \prod_{l=1}^M H_{\gamma_l}(x_l) \frac{\exp\left(-\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}^T}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}^M} d\mathbf{x}$$

Par indépendance des variables aléatoires, on obtient :

$$d_{jkm} = \prod_{l=1}^M \mathbf{E}[H_{\alpha_l}(\overset{\circ}{X}_l)H_{\beta_l}(\overset{\circ}{X}_l)H_{\gamma_l}(\overset{\circ}{X}_l)]$$

L'espérance du produit de trois polynômes sur \mathbb{R} , notée $\mathbf{E}[H_{\alpha_l}H_{\beta_l}H_{\gamma_l}]$, est donnée par :

(a) Si $\alpha_l \neq 0$ ET $\beta_l \neq 0$ ET $\gamma_l \neq 0$, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \alpha_l + \beta_l + \gamma_l \text{ impair} \quad \mathbf{E}[H_{\alpha_l}H_{\beta_l}H_{\gamma_l}] = 0 \\ \text{si } \alpha_l + \beta_l + \gamma_l \text{ pair} \quad \left[\begin{array}{l} \text{si } \gamma_l \leq \alpha_l + \beta_l \quad \text{alors } n = ((\alpha_l + \beta_l - \gamma_l) \text{DIV } 2) \\ \quad \left[\begin{array}{l} \text{si } \alpha_l \geq n \text{ et } \beta_l \geq n \quad \mathbf{E}[H_{\alpha_l}H_{\beta_l}H_{\gamma_l}] = C_{\alpha_l}^n C_{\beta_l}^n n! \gamma_l! \\ \text{sinon} \quad \mathbf{E}[H_{\alpha_l}H_{\beta_l}H_{\gamma_l}] = 0 \end{array} \right. \\ \text{si } \gamma_l > \alpha_l + \beta_l \quad \mathbf{E}[H_{\alpha_l}H_{\beta_l}H_{\gamma_l}] = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où DIV est l'opérateur de division entière

(b) Si un des indices $\alpha_l, \beta_l, \gamma_l$ est nul, alors nous utilisons la relation (C.1).

(d) **Calcul des espérances** $\mu_{j,N} = \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^N \left(\Psi_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}})\right)^{\beta_i}\right]$

Par indépendance des v.a. gaussiennes standard, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \mu_{j,N} &= \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^N \left(\Psi_j(\overset{\circ}{\mathbf{X}})\right)^{\beta_i}\right] \\ &= \prod_{l=1}^M \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^N \left(H_{\alpha_l}(\overset{\circ}{X}_l)\right)^{\beta_i}\right] \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

On utilise la relation (C.3) pour développer le polynôme $\Phi_i = \left(H_{\alpha_l}(\overset{\circ}{X}_l)\right)^{\beta_i}$. Une fois définis les coefficients du polynôme $\prod_{i=1}^N \Phi_i = \prod_{i=1}^N \left(H_{\alpha_l}(\overset{\circ}{\mathbf{X}})\right)^{\beta_i}$, l'espérance de ce polynôme peut se calculer aisément, eu égard à la linéarité de l'espérance.

Annexe D

Interpolation par B-splines cubiques

Les fonctions B-splines (ou Bell-Splines) sont une famille de fonctions polynomiales par morceaux. À l'origine de ces fonctions furent les splines, utilisées au XIX-ième siècle pour le dessin traditionnel de bateaux¹, puis développés dans l'industrie automobile² ou aéronautique (Demengel, [Dem98]), enfin plus généralement dans l'infographie (Foley, [Fol95]).

D.1 Fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

Soient a et b deux réels tels que $-\infty < a < b < +\infty$, et soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $Def(f) \supseteq [a, b] = I_1$, où $Def(f)$ désigne le domaine de définition de f . On considère une partition $[x_0, x_1] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n] \cup [x_n, x_{n+1}]$ de I_1 , où $x_0 = a$ et $x_{n+1} = b$. On suppose enfin que les valeurs $(f(x_i) ; i = 0, \dots, n+1)$ de f aux $n+2$ nœuds x_i de cette partition sont connues (grâce à un premier calcul). Nous voulons ensuite approcher f sur I_1 par une fonction B-spline cubique S satisfaisant aux $n+2$ conditions d'interpolation :

$$S(x_i) = f(x_i) \quad , \quad i \in \{0, \dots, n+1\}$$

D'après la technique d'interpolation par B-splines cubiques, l'approximation S s'écrit [Dem98] :

$$S(x) = \sum_{l=0}^{n+3} P_l N_3^l(x) \quad (\text{D.1})$$

où les $n+4$ fonctions réelles N_3^l sont les fonctions B-splines cubiques de base associées au vecteur nodal $(t_0, t_1, \dots, t_{n+7})$, avec $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = x_0$, $t_4 = x_1, \dots, t_{n+3} = x_n$, et $t_{n+4} = t_{n+5} = t_{n+6} = t_{n+7} = x_{n+1}$.

Pour ce vecteur nodal, les $n+7$ fonctions B-splines cubiques de base de degré 0 s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_0^0(x) = N_0^1(x) = N_0^2(x) \equiv 0 \\ N_0^l(x) = \mathbb{I}_{[t_l, t_{l+1}[}(x) = \mathbb{I}_{[x_{l-3}, x_{l-2}[}(x) \quad ; \quad l = 3 \dots, n+3 \\ N_0^{n+4}(x) = N_0^{n+5}(x) = N_0^{n+6}(x) \equiv 0 \end{array} \right.$$

¹Farin [Far92] rappelle que *spline* désigne une latte de bois mince et élastique utilisée dans le dessin des coques de bateaux : placé entre des poids métalliques (les canards), le faisceau maintient une position qui minimise son énergie élastique.

²Bézier, De Casteljaou, ingénieurs chez Renault et Citroën en France, Coons puis Gordon chez Ford et General Motors aux États-Unis.

avec :

$$P_l(y) = \sum_{k=0}^{m+3} P_{lk} N_3^k(y)$$

Ainsi, le problème de l'interpolation bi-dimensionnelle conduit à un jeu de $((m+2) + (n+4))$ problèmes uni-dimensionnels. Notons que quatre conditions d'interpolations supplémentaires sont requises dans une telle procédure d'interpolation bi-dimensionnelle. En pratique, on doit alors évaluer les quatre dérivées doubles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_{n+1}, y_0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_{m+1})$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_{n+1}, y_{m+1})$.

D.3 Fonctions de \mathbb{R}^k dans \mathbb{R}

Soient $(a_i, b_i)_{1 \leq i \leq k}$ $2k$ réels tels que $-\infty < a_i < b_i < +\infty$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$; soit ensuite f une fonction de \mathbb{R}^k dans \mathbb{R} telle que $Def(f) \supseteq [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k]$. Considérons la partition $[[x_0^1, x_1^1] \cup \dots \cup [x_{n_1-1}^1, x_{n_1}^1] \cup [x_{n_1}^1, x_{n_1+1}^1]] \times \dots \times [[x_0^k, x_1^k] \cup \dots \cup [x_{n_k-1}^k, x_{n_k}^k] \cup [x_{n_k}^k, x_{n_k+1}^k]]$ de $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] = I_k$, où $x_0^1 = a_1$, $x_{n_1+1}^1 = b_1$, \dots , $x_0^k = a_k$, $x_{n_k+1}^k = b_k$, puis supposons que les valeurs $(f(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_k}^k))$; $i_m = 0, \dots, n_m + 1$; $m = 1, \dots, k$ de f aux $(n_1 + 2) \times \dots \times (n_k + 2)$ nœuds $(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_k}^k)$ de la partition soient connues. Nous voulons approcher f sur I_k par une fonction B-spline cubique S satisfaisant aux $\prod_{j=1}^k (n_j + 2)$ conditions d'interpolation :

$$S(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_k}^k) = f(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_k}^k) \quad , \quad (i_m) \in \{0, \dots, n_m + 1\} \quad , \quad m \in \{1, \dots, k\}$$

La solution S est de la forme :

$$S(x^1, \dots, x^k) = \sum_{j_1=0}^{n_1+3} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k+3} P_{j_1 j_2 \dots j_k} N_3^{j_1}(x^1) \dots N_3^{j_k}(x^k) \quad (D.3)$$

où les fonctions $(N_3^{j_m})_{0 \leq j_m \leq n_m+3, 1 \leq m \leq k}$ sont les fonctions B-splines cubiques de base respectivement associées aux vecteurs nodaux $(x_0^m, x_0^m, x_0^m, x_0^m, x_1^m, \dots, x_{n_m}^m, x_{n_m+1}^m, x_{n_m+1}^m, x_{n_m+1}^m, x_{n_m+1}^m)$ où $m = 1, \dots, k$.

L'approche *produit tensoriel* de l'interpolation par une surface de \mathbb{R}^k dans \mathbb{R} permet de réécrire l'équation (D.3) sous la forme :

$$S(x^1, \dots, x^k) = \underbrace{\sum_{j_1=0}^{n_1+3} \left[\sum_{j_2=0}^{n_2+3} \left[\sum_{j_3=0}^{n_3+3} \dots \left[\sum_{j_k=0}^{n_k+3} N_3^{j_k}(x^k) P_{j_1 j_2 \dots j_k} \right] N_3^{j_3}(x^3) \right] N_3^{j_2}(x^2) \right] N_3^{j_1}(x^1)}_{P_{j_1 j_2 \dots j_{k-1}}(x^k)} \underbrace{\quad}_{P_{j_1 j_2}(x^3, \dots, x^k)} \underbrace{\quad}_{P_{j_1}(x^2, \dots, x^k)}$$

soit encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} S(x^1, \dots, x^k) = \sum_{j_1=0}^{n_1+3} N_3^{j_1}(x^1) P_{j_1}(x^2, \dots, x^k) \\ P_{j_1}(x^2, \dots, x^k) = \sum_{j_2=0}^{n_2+3} N_3^{j_2}(x^2) P_{j_1 j_2}(x^3, \dots, x^k) \\ \vdots \\ P_{j_1 j_2 \dots j_k}(x^k) = \sum_{j_k=0}^{n_k+3} N_3^{j_k}(x^k) P_{j_1 j_2 \dots j_k} \end{array} \right.$$

Ainsi, le problème de l'interpolation k -dimensionnelle conduit à un jeu de problèmes unidimensionnels. Rappelons que ces problèmes se ramènent à la résolution de simples systèmes tridiagonaux. Précisons enfin que le nombre N de systèmes à résoudre, en considérant par simplicité que $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$ est alors :

$$N = \sum_{m=0}^{k-1} (n+2)^{k-1-m} (n+4)^m \quad (\text{D.4})$$

Le problème des conditions aux limites reste cependant à expliciter puis à mettre en œuvre.