Remarques sur la cohomologie des groupes kählériens nilpotents

Benoît CLAUDON

14 juin 2009

Résumé

Dans cette note, nous montrons que la cohomologie des groupes kählériens (virtuellement) nilpotents portent une structure de Hodge mixte naturelle, les morphismes de Hopf devenant des morphismes de structures de Hodge mixtes. Nous illustrons ce phénomène sur les exemples connus de groupes kählériens nilpotents (non abéliens).

Remarks on the cohomology of Kähler groups

Abstract

In this note, we show that the cohomology groups of (virtually) nilpotent Kähler groups are naturally endowed with a mixed Hodge structure. These structures make the Hopf morphisms into mixed Hodge structures morphisms. We illustrate this fact with the study of known examples of non-abelian nilpotent Kähler groups.

1 Introduction

Soit X une variété kählérienne compacte de groupe fondamental $\Gamma = \pi_1(X)$. La cohomologie de ces deux objets est relié par des morphismes naturels :

$$H^k(\Gamma, \mathbb{C}) \longrightarrow H^k(X, \mathbb{C}),$$

dont l'existence est due à Hopf. Pour les petits degrés, on peut bien sûr être plus précis ; en degré 0 et 1, ces morphismes sont des isomorphismes. En degré 2, on dispose de plus d'une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow H^2(\Gamma, \mathbb{C}) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^2(\widetilde{X}, \mathbb{C}),$$

où $\widetilde{X}$ est le revêtement universel de X et le morphisme $H^2(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^2(\widetilde{X}, \mathbb{C})$ étant celui induit par la projection naturelle $\widetilde{X} \longrightarrow X$. En particulier, $H^2(\Gamma, \mathbb{C})$ est de dimension finie.

Il est communément admis que la cohomologie des groupes kählériens devrait se comporter d'une façon similaire à celle des variétés. En particulier, la conjecture suivante est attribuée à Carlson et Toledo (relayée notamment par Kollár [Kol95]) :

Conjecture 1.1
Le groupe $H^2(\Gamma, \mathbb{C})$ est toujours non-nul (pour Γ un groupe kählérien infini*).*

Cependant, on ne sait pas trop qu'elle devrait être la forme des énoncés en degré plus élevé ; en effet, contrairement à celle des variétés compactes, la cohomologie des groupes n'est pas nécessairement de dimension finie en degré ≥ 3 (le premier exemple de groupe de présentation finie dont la cohomologie est de dimension infinie est dû à Stallings[1] [Sta63] ; pour les exemples kählériens, voir [DPS09]).

Indépendamment de savoir si la réponse à la conjecture 1.1 est affirmative, la question suivante est assez naturelle :

Question 1.1
le sous-espace vectoriel $H^2(\Gamma, \mathbb{C})$ est-il une sous-structure de Hodge de $H^2(X, \mathbb{C})$?

En d'autres termes, on doit vérifier l'égalité :

$$\begin{aligned} H^2(\Gamma, \mathbb{C}) = \left(H^2(\Gamma, \mathbb{C}) \cap H^{2,0}(X, \mathbb{C})\right) &\oplus \left(H^2(\Gamma, \mathbb{C}) \cap H^{1,1}(X, \mathbb{C})\right) \\ &\oplus \left(H^2(\Gamma, \mathbb{C}) \cap H^{0,2}(X, \mathbb{C})\right). \end{aligned}$$

Dans sa plus grande généralité, la question 1.1 semble hors de portée des techniques actuelles (ou du moins nécessiter une idée nouvelle). En revanche, dans le cas des groupes nilpotents (voir la section 4.2 pour les exemples de groupes kählériens nilpotents), nous allons constater que la réponse est affirmative.

Théorème 1.1
Soit X une variété kählérienne compacte de groupe fondamental Γ virtuellement nilpotents. Les groupes de cohomologie $H^k(\Gamma, \mathbb{C})$ (de dimension finie) sont naturellement munis de structures de Hodge mixtes (fonctorielles). De plus, les morphismes naturels

$$H^k(\Gamma, \mathbb{C}) \longrightarrow H^k(X, \mathbb{C})$$

sont des morphismes de SHM.

En degré 2, on peut même être plus précis.

Théorème 1.2
Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, la SHM *sur $H^2(\Gamma, \mathbb{C})$ est pure (de poids 2) et on a :*

$$\begin{aligned} H^2(\Gamma, \mathbb{C}) &= \mathrm{Im}\left(\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathbb{C}) \wedge \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathrm{X}, \mathbb{C})\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\mathrm{H}^2(\mathrm{Alb}(\mathrm{X}), \mathbb{C}) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{H}^2(\mathrm{X}, \mathbb{C})\right). \end{aligned}$$

En particulier, la conjecture 1.1 est vraie pour les groupes kählériens nilpotents.

En utilisant [Del06], il suffit par exemple de supposer que le groupe fondamental de X est résoluble.

Théorème 1.3
Si le groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte est résoluble, alors il est virtuellement nilpotent.

[1] le groupe défini par la présentation

$$\langle a, b, c, x, y |\, [x, a],\ [x, b],\ [y, a],\ [y, b],\ [a^{-1}x, c],\ [a^{-1}y, c],\ [b^{-1}a, c]\rangle$$

a un groupe de cohomologie de dimension inifinie en degré 3.

2 Rappels

2.1 Groupes nilpotents

Soit G un groupe (de type fini) et $C^i(G)$ sa suite centrale descendante définie par $C^1(G) = G$ et $C^{i+1}(G) = [C^i(G), G]$ pour $i \geq 1$. On notera $G_i = G/C^{i+1}(G)$ les quotients (nilpotents) correspondants. Les éléments d'ordre fini de G_i forment un sous-groupe fini caractéristique noté $\mathrm{Tor}(G_i)$ et $G_i^* = G_i/\mathrm{Tor}(G_i)$ est donc un groupe nilpotent sans torsion. On peut donc lui appliquer appliquer la proposition suivante.

Proposition 2.1 (Malčev, [Mal49])
Soit N un groupe de type fini, nilpotent et sans torsion. Il existe un unique groupe de Lie nilpotent (défini sur $\mathbb{Q}$) et simplement connexe $N_{\mathbb{R}}$ et une injection $N \hookrightarrow N_{\mathbb{R}}$ qui réalise N comme un réseau cocompact de $N_{\mathbb{R}}$. On notera $\mathcal{L}(N)$ l'algèbre de Lie de $N_{\mathbb{R}}$.

Cette proposition montre qu'on peut associer au groupe G une tour d'extensions centrales :

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{L}_{i+1}(G) \longrightarrow \mathcal{L}_i(G) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{L}_1(G) \longrightarrow 0,$$

où l'on a noté $\mathcal{L}_i(G) := \mathcal{L}(G_i^*)$. La limite projective de cette suite est notée

$$\mathcal{L}(G) := \varprojlim \mathcal{L}_i(G)$$

et est appelée la complétion de Malčev de G (si G est nilpotent, la suite est finie et $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G/\mathrm{Tor}(G))$ est une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie).

2.2 Cohomologie des groupes

Soit G un groupe et M un G-module (on sera surtout concerné par le cas du module trivial). L'assignation $F : M \mapsto M^G$ qui a un G module associe le sous-module de ses éléments G-invariants est un foncteur de la catégorie des G-modules vers celle des groupes abéliens, qui est de plus exact à gauche. On définit alors la cohomologie de G à valeurs dans M comme le foncteur dérivé de F :

$$\forall\, k \geq 0,\ H^k(G, M) = \mathrm{R}^k F(M).$$

C'est aussi la cohomologie du complexe $(\mathcal{C}^\bullet(G, M), d)$ où $\mathcal{C}^k(G, M)$ est constituée des applications de G^k dans M (par convention, $\mathcal{C}^0(G, M) = M$) et la différentielle étant donnée par :

$$\begin{aligned} df(g_1, \ldots, g_{k+1}) = g_1 \cdot f(g_2, \ldots, g_{k+1}) + &\sum_{j=1}^{k} (-1)^j f(g_1, \ldots, g_{j-1}, g_j g_{j+1}, \ldots) \\ &+ (-1)^{k+1} f(g_1, \ldots, g_k). \end{aligned}$$

Dans le cas des groupes nilpotents sans torsion, la cohomologie se calcule facilement grâce à la complétion de Malčev.

Théorème 2.1 (K. Nomizu [Nom54], voir aussi [Rag72])
Si G est un groupe nilpotent (de type fini) sans torsion d'algèbre de Lie $\mathcal{L}(G)$, on dispose des isomorphismes suivants :

$$\forall k \geq 0,\ H^k(G, \mathbb{C}) \simeq H^k(\mathcal{L}(G), \mathbb{C}).$$

En particulier, $H^k(G,\mathbb{C})$ *est de dimension finie pour tout* $k \geq 0$.

Remarque 2.1
La cohomologie d'une algèbre de Lie $(\mathcal{L},[\cdot,\cdot])$ *est celle du complexe des formes alternées* $\Lambda^\bullet \mathcal{L}^*$, *la différentielle étant défini comme l'action duale du crochet de Lie* $[\cdot,\cdot] : \mathcal{L}\wedge\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$.

Pour finir, mentionnons un outil très utile en cohomologie des groupes : l'opération de transfert. Soit $H \leq G$ un sous-groupe *d'indice fini* de G. L'inclusion $H \overset{i}{\hookrightarrow} G$ induit un morphisme $i^* : H^\bullet(G,M) \longrightarrow H^\bullet(H,M)$ mais, fait remarquable, il existe aussi un morphisme[2] allant dans la direction opposée :

$$V_{H\to G} = V : H^\bullet(H,M) \longrightarrow H^\bullet(G,M)$$

et qui vérifie : $V \circ i^* = [G:H]\mathrm{Id}$. On a donc :

Proposition 2.2 (voir prop. 10.4, p. 85 [Bro82])
Si la multiplication par $[G:H]$ *est un automorphisme de* M, *l'application* $i^* : H^\bullet(G,M) \longrightarrow H^\bullet(H,M)$ *est injective. Si de plus* H *est un sous-groupe* normal *de* G, *la cohomologie de* G *s'identifie à la partie invariante sous l'action de* G/H *de la cohomologie de* H *:*

$$H^\bullet(G,\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(H,\mathbb{C})^{G/H}.$$

Remarque 2.2
L'existence de l'application $V : G_{ab} \longrightarrow H_{ab}$ *avait d'abord été observée par Schur ; le transfert fut ensuite généralisé aux autres groupes de cohomologie par Eckmann [Eck53].*

L'interprétation géométrique des opérations de transfert peut se faire comme suit : soit X (resp. Y) un $K(G,1)$ (resp. un $K(H,1)$) et supposons pour simplifier que X et Y ont une topologie "raisonnable". L'inclusion $H \hookrightarrow G$ correspond à un revêtement fini $p : Y \longrightarrow X$; le transfert

$$V_{H\to G} : H^\bullet(Y,\mathbb{C}) \simeq H^\bullet(H,\mathbb{C}) \longrightarrow H^\bullet(G,\mathbb{C}) \simeq H^\bullet(X,\mathbb{C})$$

n'est autre que le morphisme d'intégration dans les fibres (ou morphisme de Gysin)

$$p_* : H^\bullet(Y,\mathbb{C}) \longrightarrow H^\bullet(X,\mathbb{C}).$$

Avec cette interprétation, on retrouve bien le fait mentionné ci-dessus, à savoir

$$V \circ i^* = p_* \circ p^* = \deg(p)\mathrm{Id} = [G:H]\mathrm{Id}.$$

2.3 Critère de 1-formalité

Dans ce paragraphe, nous rappelons la notion de 1-formalité d'une algèbre différentielle graduée (ADG dans la suite). Pour une discussion plus complète de cette notion, nous renvoyons à [GM81].

Définition 2.1
Une ADG $(\mathcal{M},d)$ *est dite* 1-minimale *si*

[2]la notation V provient de l'allemand *Verlagerung*.

(i) elle est connexe

(ii) $\mathcal{M}$ peut s'écrire comme une suite d'extension élémentaire (dite de Hirsch)

$$\mathbb{C} = \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \dots$$

c'est-à-dire $\mathcal{M}_{i+1} \simeq \mathcal{M}_i \otimes \bigwedge(V_i)$ où V_i est placé en degré 1.

(iii) d est décomposable *: au cours de chaque extension élémentaire, d envoie V_i dans $\mathcal{M}_i^+ \wedge \mathcal{M}_i^+$, $\mathcal{M}_i^+$ désignant les éléments de degré positif de $\mathcal{M}_i$.*

*Un morphisme (d'*ADG*) $\rho : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{A}$ est un* 1-modèle minimal *pour $(\mathcal{A}, d)$ si $(\mathcal{M}, d)$ est 1-minimale et si $\rho^* : H^*(\mathcal{M}) \longrightarrow H^*(\mathcal{A})$ induit un isomorphisme en degré 0 et 1 et est injectif en degré 2.*

Un des intérêts de cette définition réside dans la proposition suivante.

Proposition 2.3 (Sullivan, voir [DGMS75])
Toute ADG *admet (à isomorphisme près) un unique[3] 1-modèle minimal.*

Explicitons la construction dans le cas qui va nous intéresser, à savoir celui de l'algèbre de De Rham $\mathcal{E}^\bullet(X)$ d'une variété différentiable X. On souhaite construire inductivement un 1-modèle minimal $M_X^{(1)} \longrightarrow \mathcal{E}^\bullet(X)$ qui donne un isomorphisme en degré 0 et 1 et un morphisme injectif en degré 2. On commence donc par poser :

$$M_X^{(1)}(1) = \bigwedge(H^1(X, \mathbb{C}))$$

muni de la différentielle d_1 nulle, le morphisme

$$\rho_1 : M_X^{(1)}(1) \longrightarrow \mathcal{E}^\bullet(X)$$

correspondant à un choix de représentants des classes de $H^1(X, \mathbb{C})$ fixé une fois pour toute. On a bien un isomorphisme en degré 0 et 1 mais, en degré 2, on a :

$$\rho_1^* : H^2(M_X^{(1)}(1)) = \bigwedge^2 H^1(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{C}).$$

On pose donc

$$V_2 = \mathrm{Ker}(\rho_1^*) = \mathrm{Ker}(\bigwedge^2 H^1(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{C}))$$

et on considère l'extension

$$M_X^{(1)}(2) = M_X^{(1)}(1) \otimes \bigwedge(V_2)$$

et d_2 est définie sur V_2 comme l'injection naturelle $V_2 \hookrightarrow \bigwedge(H^1(X, \mathbb{C})) = M_X^{(1)}(1)$. Pour définir

$$\rho_2 : M_X^{(1)}(2) \longrightarrow \mathcal{E}^\bullet(X),$$

on le définit sur V_2. Un élément v de V_2, vu comme 2-classe, est exacte : $v = du$. On pose alors $\rho_2(v) = u$ (à nouveau en faisant un choix de primitive). Examinons l'effet de cette extension au niveau cohomologique. Comme les éléments de V_2

[3] parler d'unicité nécessite d'introduire les notions de points bases et d'homotopies entre ADG pour lesquelles nous renvoyons une fois encore à [GM81].

ne sont pas fermés (pour d_2), on ne change pas la cohomologie en degré 1. En degré 2, on a supprimé le défaut d'injectivité provenant du noyau de

$$\bigwedge^2 H^1(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{C})$$

mais on a éventuellement introduit de nouveaux éléments de

$$V_3 = \mathrm{Ker}\left(\rho_2^* : H^2(M_X^{(1)}(2)) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{C})\right).$$

La construction se produit donc inductivement en posant

$$M_X^{(1)}(i+1) = M_X^{(1)}(i) \otimes \bigwedge(V_{i+1}) \quad \text{avec}$$
$$V_{i+1} = \mathrm{Ker}\left(\rho_i^* : H^2(M_X^{(1)}(i)) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{C})\right)$$

et en construisant d_{i+1} et ρ_{i+1} comme nous l'avons fait pour passer de $M_X^{(1)}(1)$ à $M_X^{(1)}(2)$. Le 1-modèle minimal de $\mathcal{E}^\bullet(X)$ est alors obtenue en prenant la limite inductive de cette suite d'extension :

$$M_X^{(1)} = \bigcup_{i\geq 1} M_X^{(1)}(i).$$

Ceci mène naturellement à la définition suivante.

Définition 2.2
Une variété différentiable X est dite 1-formelle *si son algèbre de De Rahm $(\mathcal{E}^\bullet(X), d)$ l'est, c'est-à-dire si $(\mathcal{E}^\bullet(X), d)$ et $(H^\bullet(X), d)$ ont même 1-modèle minimal.*

Pour finir, signalons le critère suivant de 1-formalité (dû à Morgan) portant uniquement sur le groupe fondamental.

Théorème 2.2 (th. 9.4, p. 198 [Mor78])
Une variété différentiable X (dont le groupe fondamental est de présentation finie) est 1-formelle si et seulement si l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(\pi_1(X))$ est de présentation quadratique. Ceci est également équivalent à la surjectivité de l'application :

$$H^2(\mathcal{L}_1(\pi_1(X)),\mathbb{R}) \longrightarrow H^2(\mathcal{L}(\pi_1(X)),\mathbb{R}).$$

En effet, la correspondance existante entre 1-modèle minimal de $\mathcal{E}^\bullet(X)$ et complétion de Malčev du groupe fondamental est une simple dualité.

Théorème 2.3 (Sullivan, voir cependant [DGMS75])
Soit X une variété différentiable dont le groupe fondamental est de présentation finie. Le 1-modèle minimal de l'algèbre de De Rham $\mathcal{E}^\bullet(X)$

$$M_X^{(1)}(1) \subset \cdots \subset M_X^{(1)}(i) \subset M_X^{(1)}(i+1)\ldots$$

et la complétion de Malčev de $\pi_1(X)$

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{L}_{i+1}(\pi_1(X)) \longrightarrow \mathcal{L}_i(\pi_1(X)) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{L}_1(\pi_1(X)) \longrightarrow 0$$

sont duaux l'un de l'autre.

Remarque 2.3
Le fait que la différentielle vérifie $d^2 = 0$ se traduit exactement par l'identité de Jacobi au niveau du dual.

3 Cas du degré 2

3.1 Formalité et groupes nilpotents

Les résultats de la section précédente s'applique pleinement à la catégorie des variétés kählériennes compactes comme le montre le résultat suivant (dont la démonstration est une conséquence directe du lemme du dd^c).

Théorème 3.1 ([DGMS75])
Toute variété kählérienne compacte X est formelle ; plus précisément, les algèbres $(\mathcal{E}^\bullet(X), d)$ et $(H^\bullet(X), 0)$ sont équivalentes via *l'algèbre $(\mathcal{E}^\bullet_{d^c}(X), d)$ des formes d^c-fermées. En particulier, une variété kählérienne compacte est 1-formelle.*

Rappelons la

Définition 3.1
Une ADG $(\mathcal{A}, d)$ *est dite* formelle *si elle est équivalente à sa propre algèbre de cohomologie (avec différentielle nulle) ; c'est-à-dire si il existe une chaîne de quasi-isomorphismes :*

$$(\mathcal{A}, d) \longleftarrow (\mathcal{C}_1, d_1) \longrightarrow (\mathcal{C}_2, d_2) \longleftarrow \ldots \longleftarrow (\mathcal{C}_n, d_n) \longrightarrow (H^\bullet(\mathcal{A}), 0).$$

Une variété différentiable X est dite formelle *si son algèbre de De Rham $(\mathcal{E}^\bullet(X), d)$ l'est.*

Nous pouvons dès à présent démontrer le théorème 1.2 grâce au critère de quadraticité.

Démonstration du théorème 1.2 :
Soit X une variété kählérienne compacte dont le groupe fondamental est nilpotent sans torsion. Le théorème 2.1 s'applique et on a :

$$\forall k \geq 0,\ H^k(\pi_1(X), \mathbb{R}) \simeq H^k(\mathcal{L}(\pi_1(X)), \mathbb{R}).$$

Or, d'après les théorèmes 2.2 et 3.1, on sait que la flèche naturelle

$$H^2(\pi_1(X)_{ab}, \mathbb{R}) \simeq H^2(\mathcal{L}_1(\pi_1(X)), \mathbb{R}) \longrightarrow H^2(\mathcal{L}(\pi_1(X)), \mathbb{R}) \simeq H^2(\pi_1(X), \mathbb{R})$$

est surjective. Or, comme le groupe de gauche est aussi

$$H^2(\pi_1(X)_{ab}, \mathbb{R}) \simeq H^1(X, \mathbb{R}) \bigwedge H^1(X, \mathbb{R}),$$

on a bien :

$$H^2(\pi_1(X), \mathbb{R}) = \operatorname{Im}\left(H^1(X, \mathbb{R}) \bigwedge H^1(X, \mathbb{R}) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{R})\right).$$

Dans le cas général ($\pi_1(X)$ virtuellement nilpotent), on sait que X admet un revêtement galoisien fini $Y \longrightarrow X$ de groupe de Galois $G = \pi_1(X)/\pi_1(Y)$ et tel que $\pi_1(Y)$ est nilpotent sans torsion. On peut appliquer la discussion précédente à Y et on obtient donc un morphisme surjectif :

$$H^2(\pi_1(Y)_{ab}, \mathbb{R}) \longrightarrow H^2(\pi_1(Y), \mathbb{R}).$$

En considérant les éléments G-invariants de ces deux espaces (G agit naturellement sur $\pi_1(Y)_{ab}$) et en appliquant la proposition 2.2, on obtient la même conclusion pour $H^2(\pi_1(X), \mathbb{R})$.

Tout ceci montre en particulier que $H^2(\pi_1(X), \mathbb{C})$ est une sous-structure de Hodge de $H^2(X, \mathbb{C})$ (comme image d'un morphisme de structure de Hodge). Enfin, le fait que

$$\mathrm{Im}\left(H^1(X, \mathbb{C}) \bigwedge H^1(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{C})\right) \neq 0$$

(pour une variété kählérienne compacte) est une conséquence directe du théorème de Lefschetz difficile et du fait que $H^1(X, \mathbb{C})$ est lui-même non nul (un groupe nilpotent infini admet des quotients abéliens infinis). □

Remarque 3.1
La démonstration ci-dessus ne nécessite en réalité que la 1-formalité (et le caractère nilpotent du groupe fondamental) de X.

3.2 Exemples non-kählériens

Nous venons de montrer dans la section précédente que, pour un groupe kählérien nilpotent Γ, l'application naturelle

$$H^2(\Gamma_{ab}, \mathbb{C}) \longrightarrow H^2(\Gamma, \mathbb{C})$$

était surjective. Pour nous convaincre que ceci est bien spécifique au cas kählérien (au moins au cas des variétés 1-formelles), voici quelques exemples.

Exemple 3.1
Soit G le groupe de Heisenberg réel, Γ le réseau des éléments de G à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et considérons la variété différentiable $X = G/\Gamma$. Le groupe Γ s'écrit donc comme une extension centrale

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma_{ab} \simeq \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 1.$$

Cette décomposition induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\Gamma_{ab}) \longrightarrow H^2(\Gamma).$$

Pour des raisons de dimension, on constate immédiatement que la flèche

$$H^2(\Gamma_{ab}) \longrightarrow H^2(\Gamma)$$

est identiquement nulle alors que $H^2(\Gamma)$ ne l'est pas. En effet, comme X est un $K(\Gamma, 1)$, la dualité de Poincaré entraîne :

$$H^2(\Gamma) \simeq H^2(X) \simeq H^1(X)^* \simeq H^1(\Gamma)^* \neq 0.$$

Exemple 3.2
Pour obtenir un exemple de variété complexe (plus proche de la situation kählérienne), on reprend l'exemple précedent mais avec cette fois des coefficients complexes. Soit donc G le groupe de Heisenberg complexe, Γ le réseau des éléments de G à coefficients dans $\mathbb{Z}[i]$ et considérons la variété complexe (non-kählérienne) $X = G/\Gamma$. Comme $\Gamma_{ab} \simeq \mathbb{Z}^4$, le groupe $H^2(\Gamma_{ab})$ est de dimension 6. Or, X est à nouveau un $K(\Gamma, 1)$ et on a donc $H^2(\Gamma) \simeq H^2(X)$ et il est bien connu que $b_2(X) = 8$. La flèche $H^2(\Gamma_{ab}) \longrightarrow H^2(\Gamma)$ ne peut donc pas être surjective.

4 Structure de Hodge en degrés supérieurs

4.1 La SHM de Morgan

Le théorème 1.1 est en fait une réécriture des résultats de Morgan [Mor78]. En effet, d'après [Mor78], on peut munir le 1-modèle minimal d'une variété kählérienne compacte d'une structure de Hodge mixte (SHM[4] dans la suite) fonctorielle. Plus précisément, si X est une variété kählérienne compacte, notons $\rho_X : M_X^{(1)} \longrightarrow \mathcal{E}^\bullet(X)$ le 1-modèle minimal de son algèbre de De Rham. Comme X est formelle (théorème 3.1), $(\mathcal{E}^\bullet(X), d)$ et $(H^\bullet(X), 0)$ ont même 1-modèle minimal et on dispose d'un morphisme

$$\sigma_X : M_X^{(1)} \longrightarrow H^\bullet(X).$$

Théorème 4.1
Avec les notations ci-dessus, l'algèbre $(M_X^{(1)}, d^{(1)})$ possède une SHM *fonctorielle vérifiant :*

(1) la différentielle $d^{(1)}$ et le produit dans l'algèbre $M_X^{(1)}$ sont des morphismes de SHM.

(2) l'application $\sigma_X : M_X^{(1)} \longrightarrow H^\bullet(X, \mathbb{C})$ est un morphisme de SHM.

La filtration par le poids $W_\bullet$ de $M_X^{(1)}$ est donnée par la description de $M_X^{(1)}$ comme l'union croissante des sous-algèbres $M_X^{(1)}(n)$ (et est donc duale de la suite centrale descendante, la dualité étant fournie par le théorème 2.3). La filtration de Hodge $F^\bullet$ provient elle de celle de $H^1(X, \mathbb{C})$.

Comme mentionné ci-dessus, le théorème 1.1 consiste maintenant à réinterpréter les résultats de Morgan en termes de cohomologie du groupe $\pi_1(X)$ (dans le cas nilpotent).

Démonstration du théorème 1.1 :
Soit donc X dont le groupe fondamental est (dans un premier temps) nilpotent sans torsion. D'après les théorèmes 2.1 et 2.3, on dispose des isomorphismes :

$$H^*(\pi_1(X), \mathbb{C}) \simeq H^*(\mathcal{L}(\pi_1(X)), \mathbb{C}) \simeq H^*(M_X^{(1)}).$$

On peut alors appliquer le théorème 4.1 ; comme $M_X^{(1)}$ admet une SHM qui fait de la différentielle un morphisme de SHM, cette structure passe en cohomologie et ce procédé nous permet donc de définir une SHM sur la cohomologie de $\pi_1(X)$. D'autre part, comme le morphisme

$$\sigma_X : M_X^{(1)} \longrightarrow H^*(X, \mathbb{C})$$

est à la fois un morphisme d'algèbres et un morphisme de SHM, le morphisme induit

$$\sigma_X^* : H^*(\pi_1(X), \mathbb{C}) \simeq H^*(M_X^{(1)}) \longrightarrow H^*(X, \mathbb{C})$$

est bien un morphisme de SHM.

Si $\pi_1(X)$ est seulement supposé virtuellement nilpotent, on sait qu'il admet un sous-groupe d'indice fini nilpotent sans torsion. Si on note $Y \longrightarrow X$ le revêtement étale fini (galoisien) correspondant à ce sous-groupe, la discussion ci-dessus

[4] pour les notions concernant les SHM, nous renvoyons à [PS08].

s'applique à $\pi_1(Y)$ et on peut donc munir $H^*(\pi_1(Y), \mathbb{C})$ d'une SHM fonctorielle. Comme le groupe de Galois $G = \pi_1(X)/\pi_1(Y)$ agit par biholomorphismes sur Y, l'action de G sur $H^*(\pi_1(Y), \mathbb{C})$ préserve donc la SHM et ceci montre que

$$H^*(\pi_1(X), \mathbb{C}) = H^*(\pi_1(Y), \mathbb{C})^G$$

hérite d'une SHM et que le morphisme naturel

$$H^*(\pi_1(X), \mathbb{C}) = H^*(\pi_1(Y), \mathbb{C})^G \longrightarrow H^*(X, \mathbb{C}) = H^*(Y, \mathbb{C})^G$$

est bien un morphisme de SHM. $\square$

En guise de conclusion, récapitulons les différents isomorphismes (et morphismes) qui nous ont permis de munir $H^*(\Gamma, \mathbb{C})$ d'une SHM dans le cas nilpotent sans torsion. Dans le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
H^*(\Gamma,\mathbb{C}) \arrow[r, "\sim", "(1)"'] \arrow[d] & H^*(\mathcal{L}(\pi_1(X)),\mathbb{C}) \arrow[r, "\sim", "(2)"'] & H^*\left(M^{(1)}_{\mathcal{E}^\bullet(X)}\right) \arrow[dl, "\sim", "(3)"'] \\
H^*(X,\mathbb{C}) & H^*\left(M^{(1)}_X\right) \arrow[l, "(4)"] &
\end{tikzcd}$$

on a (volontairement) noté $M^{(1)}_{\mathcal{E}^\bullet(X)}$ (resp. $M^{(1)}_X$) le 1-modèle minimal de l'algèbre de De Rham de X (resp. celui de l'agèbre de cohomologie $H^*(X)$). L'isomorphisme (1) est donné par le théorème de Nomizu 2.1 et la flèche (2) correspond au théorème de Sullivan 2.3. La formalité (théorème 3.1) quant à elle assure que les modèles minimaux $M^{(1)}_{\mathcal{E}^\bullet(X)}$ et $M^{(1)}_X$ sont isomorphes et fournit la flèche (3). Le théorème de Morgan 4.1 montre enfin comment munir la cohomologie de $M^{(1)}_X$ d'une SHM à partir de la structure de Hodge de $H^*(X, \mathbb{C})$ de telle sorte que la flèche (4) soit un morphisme de SHM et complète le parcours de ce diagramme.

4.2 Revue des exemples connus

Les seuls exemples connus de groupes kählériens nilpotents (non-abéliens) sont ceux exhibés dans [Cam95] et [SVdV86] et bien sûr leurs produits. Ils sont tous obtenus comme extension centrale de $\mathbb{Z}$ par une groupe abélien A (sans torsion, de rang ≥ 8) :

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow A \longrightarrow 1.$$

Pour la commodité du lecteur, redonnons une des constructions de [Cam95]. Soit V le complémentaire dans $\mathbb{P}^{2n+1}$ de deux sous-espaces linéaires de dimension n en position générale (*i.e.* deux copies de $\mathbb{P}^n$ disjointes). Il est bien connu que V admet une structure de $\mathbb{C}^*$-fibré sur $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$. Si A est une variété abélienne admettant une application homolorphe, surjective et finie sur $\mathbb{P}^n$, considérons Y le $\mathbb{C}^*$-fibré sur $A \times A$ obtenu par tiré en arrière :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d] & V \arrow[d] \\
A \times A \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n
\end{tikzcd} .$$

La structure de $\mathbb{C}^*$-fibré sur $A \times A$ montre que le groupe fondamental de Y est une extension

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{C}^*) \longrightarrow \pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(A) \times \pi_1(A) \longrightarrow 1$$

qui est en fait centrale et que Y est un $K(\pi_1(Y), 1)$. La variété Y est quasi-projective mais on peut également réaliser $\pi_1(Y)$ comme le groupe fondamental d'une variété *projective* ; il faut pour cela utiliser les résultats de théorie de Morse stratifiée de Goreski et MacPherson. En effet, si L désigne un sous-espace linéaire de dimension n contenu dans V et en position générale, on peut appliquer les résultats de [GM88, th. p. 195] :

$$\forall\, i \leq n-1,\ \pi_i(Y, h^{-1}(L)) = 0.$$

Si $n \geq 2$, on obtient en particulier en posant $X = h^{-1}(L)$: $\pi_1(X) = \pi_1(Y)$. Pour $n \geq 2$, le groupe $\pi_1(Y)$ est donc aussi le groupe fondamental de la variété projective X (qui est lisse pour un choix de L générique). Nous allons voir que l'on peut vérifier *à la main* que la cohomologie du groupe $\pi_1(X)$ satisfait aux conclusions des théorèmes 1.1 et 1.2.

Première méthode :

Comme Y est un $K(\pi_1(X), 1)$, on sait que $H^*(\pi_1(X), \mathbb{C}) \simeq H^*(Y, \mathbb{C})$ et l'injection canonique $j : X \hookrightarrow Y$ induit les morphismes :

$$H^*(\pi_1(X), \mathbb{C}) \simeq H^*(Y, \mathbb{C}) \xrightarrow{j^*} H^*(X, \mathbb{C}).$$

Or, d'après [Del71], la cohomologie de Y (qui est quasi-projective lisse) porte une structure de Hodge mixte et on sait également que le morphisme j induit un morphisme de structure de Hodge mixte en cohomologie. C'est exactement ce qui est prédit par le théorème 1.1.$\square$

Deuxième méthode :

Le groupe fondamental $\Gamma = \pi_1(X)$ s'écrit comme une extension centrale :

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma_{ab} = \pi_1(A) \times \pi_1(A) \longrightarrow 1 \quad (*),$$

et celle-ci permet de calculer la cohomologie de Γ grâce à la suite spectrale de Hochschild-Serre [HS53]. Cette suite spectrale ayant peu de termes non nuls, elle dégénère en E_3 et induit une suite longue :

$$\begin{tikzcd}
E_2^{2,0} \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^2(\Gamma) \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_2^{1,1} \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, equal] & E_2^{3,0} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
H^2(\Gamma_{ab}) \arrow[r] & H^2(\Gamma) \arrow[r] & H^1(\Gamma_{ab}) \arrow[r, "cl"] & H^3(\Gamma_{ab}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Le morphisme cl ci-dessus est donné par le produit par la classe de l'extension $(*)$, qui est aussi celle du $\mathbb{C}^*$-fibré $Y \longrightarrow A \times A$. Si $f : A \longrightarrow \mathbb{P}^n$ désigne la projection, la classe d'extension de $(*)$ est donnée par

$$cl = (f^*\omega, -f^*\omega) \in H^2(\Gamma_{ab}) = H^2(A \times A, \mathbb{C})$$

où ω désigne la classe hyperplane de $\mathbb{P}^n$. Cette classe est donc de type (1,1) et non-dégénérée. On constate alors facilement que le produit par cette classe est injectif sur le $H^1(\Gamma_{ab})$; de façon équivalente, la flèche $H^2(\Gamma_{ab}) \longrightarrow H^2(\Gamma)$ est surjective (c'est le contenu du théorème 1.2). De plus, la suite longue ci-dessus montre que les groupes de cohomologie de Γ se décomposent de la façon suivante :

$$0 \longrightarrow H^k(\Gamma_{ab})/\left(H^{k-2}(\Gamma_{ab}) \wedge cl\right) \longrightarrow H^k(\Gamma, \mathbb{C}) \longrightarrow \\ \mathrm{Ker}\left(H^{k-1}(\Gamma_{ab}) \xrightarrow{cl} H^{k+1}(\Gamma_{ab})\right) \longrightarrow 0. \tag{1}$$

Comme la classe cl est de type (1,1) et que les groupes $H^j(\Gamma_{ab})$ sont naturellement munis de structure de Hodge (pures), la décomposition (1) donne une description de la SHM sur $H^k(\Gamma, \mathbb{C})$ (au moins des structures de Hodge des quotients successifs de la filtration par le poids). □

Remarque 4.1
Les morphismes $H^k(\Gamma) \longrightarrow H^{k-1}(\Gamma_{ab})$ obtenus à partir de la suite spectrale ci-dessus peuvent être exprimés explicitement. Par exemple, pour $k = 2$, si $f \in C^2(\Gamma, \mathbb{C})$ est un cocyle et si $z \in \mathbb{Z}$ est un générateur du centre $\mathbb{Z}$ de Γ, l'application

$$[f] : x \mapsto f(x, z) - f(z, x)$$

définit un élément de $H^1(\Gamma_{ab})$.

Pour finir, notons que la discussion ci-dessus s'appliquent pour les exemples de [SVdV86] ; en effet, les groupes kählériens obtenus sont encore des extensions centrales

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

où Q est un groupe abélien (le groupe fondamental d'une variété abélienne).

Références

[Bro82] K. S. Brown – *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York, 1982.

[Cam95] F. Campana – « Remarques sur les groupes de Kähler nilpotents », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **28** (1995), no. 3, p. 307–316.

[Del71] P. Deligne – « Théorie de Hodge. II », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1971), no. 40, p. 5–57.

[Del06] T. Delzant – « L'invariant de Bieri Neumann Strebel des groupes fondamentaux des variétés kählériennes », preprint arXiv :math/0603038, à paraître dans Math. Annalen, 2006.

[DGMS75] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan & D. Sullivan – « Real homotopy theory of Kähler manifolds », *Invent. Math.* **29** (1975), no. 3, p. 245–274.

[DPS09] A. Dimca, c. Papadima & A. Suciu – « Non-finiteness properties of the fundamental groups of smooth projective varieties », *J. Reine und Angew. Math.* **629** (2009), p. 89–105.

[Eck53] B. Eckmann – « Cohomology of groups and transfer », *Ann. of Math. (2)* **58** (1953), p. 481–493.

[GM81] P. A. Griffiths & J. W. Morgan – *Rational homotopy theory and differential forms*, Progress in Mathematics, vol. 16, Birkhäuser Boston, Mass., 1981.

[GM88] M. Goresky & R. MacPherson – *Stratified Morse theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 14, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[HS53] G. Hochschild & J.-P. Serre – « Cohomology of group extensions », *Trans. Amer. Math. Soc.* **74** (1953), p. 110–134.

[Kol95] J. Kollár – *Shafarevich maps and automorphic forms*, M. B. Porter Lectures, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[Mal49] A. I. Malčev – « On a class of homogeneous spaces », *Izvestiya Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat.* **13** (1949), p. 9–32.

[Mor78] J. W. Morgan – « The algebraic topology of smooth algebraic varieties », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1978), no. 48, p. 137–204.

[Nom54] K. Nomizu – « On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups », *Ann. of Math. (2)* **59** (1954), p. 531–538.

[PS08] C. A. M. Peters & J. H. M. Steenbrink – *Mixed Hodge structures*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[Rag72] M. S. Raghunathan – *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer-Verlag, New York, 1972, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 68.

[Sta63] J. Stallings – « A finitely presented group whose 3-dimensional integral homology is not finitely generated », *Amer. J. Math.* **85** (1963), p. 541–543.

[SVdV86] A. J. Sommese & A. Van de Ven – « Homotopy groups of pullbacks of varieties », *Nagoya Math. J.* **102** (1986), p. 79–90.

Benoît Claudon
Institut Fourier - UMR 5582
100, rue des Maths
B.P. 74
38402 Saint-Martin d'Hères
France

Benoit.Claudon@ujf-grenoble.fr