

# Reconstruction photogramétrique des formes 3D; nouveaux résultats théoriques et nouveaux algorithmes pour des projections orthographique et en perspective.

## “Shape from Shading”: some new theoretical results and new algorithms for orthographic and pinhole cameras

E. Prados

O. Faugeras

Projet Odyssée, INRIA Sophia Antipolis,

2004 route des Lucioles, B.P. 93, 06902 Sophia-Antipolis Cedex, France.  
emmanuel.prados(olivier.faugeras)@sophia.inria.fr  
<http://www-sop.inria.fr/odyssee/>

### Résumé

Cet article propose une solution au problème de “Shape from Shading” (SFS) en modélisant l’appareil photographique par une projection orthographique et une projection en perspective. Notre approche est basée sur la notion de solution de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi. Cette approche fournit un cadre mathématique permettant de bien poser le problème et de prouver la pertinence de nos algorithmes. Nos travaux étendent les précédents dans le domaine sous trois aspects : 1) ils modélisent l’appareil photographique par une projection en perspective alors que la plupart des auteurs considèrent une projection orthographique (voir [17, 37, 23] pour un panorama complet sur le “Shape from Shading”); nos algorithmes sont ainsi plus efficaces sur des images plus réalistes. 2) La formulation “en perspective” aboutit, comme avec la formulation orthographique, à une équation aux dérivées partielles (EDP). Ainsi, des résultats sur l’existence et l’unicité de la solution sont obtenus. 3) Notre approche nous permet d’obtenir deux nouveaux algorithmes (un pour chaque modélisation) permettant de calculer des approximations numériques de la solution. Nous prouvons enfin la convergence de nos approximations vers la solution.

### Mots Clef

Shape from Shading, Vision 3D, problèmes inverses, traitement d’image.

### Abstract

This article proposes a solution of the shape from shading (SFS) problem in the case of a pinhole camera model (performing a perspective projection) and of an orthographic camera model. Our approach is based upon the notion of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations.

This approach provides a mathematical framework allowing to well pose the problem and to prove correctness of our algorithms. Our work extends previous work in the area in three aspects: 1) It models the camera as a pinhole whereas most authors assume an orthographic projection (see [17, 37, 23] for a panorama of the SFS problem), thereby extending the applicability of shape from shading methods to more realistic images. 2) By adapting the brightness equation to the perspective problem, we obtain a new partial differential equation (PDE), as for the orthographic case. Also, for the both cases, we obtain results about the existence and uniqueness of the solutions. 3) It allows us to come up with two new algorithms (one for each formulation) for computing numerical approximations of the solution as well as a proof of their convergence toward that solution.

### Keywords

Shape from Shading, 3D vision, inverse problems, image processing.

## 1 Introduction

Le problème du SFS a toujours été un problème central en vision par ordinateur. Le problème consiste à calculer la forme tridimensionnelle d’une surface à partir de la variation de l’éclairement (ombrage) d’une seule image en niveaux de gris de cette surface. Dans les années 70, Horn fut le premier à poser le problème sous la forme d’une EDP [18]. Cette EDP non linéaire du premier ordre est appelée “l’équation d’irradiance”. Par la suite plusieurs approches ont été proposées pour sa résolution. Le livre de Horn et Brooks [17] fait un état de l’art du SFS très complet jusqu’en 1989; pour une étude plus récente voir [37, 23]. Malgré la richesse de la littérature dans le domaine du SFS,

la plupart des algorithmes ont été développés sous l'hypothèse d'une projection orthographique. Très peu d'approches considèrent le problème avec une projection en perspective. Penna [30, 29] propose une méthode locale basée sur des propriétés géométriques. Sa formulation du problème aboutit à la résolution d'un système d'équations algébriques. Weiss [36] propose un formalisme basé sur des considérations physiques. Il exploite des invariants propres au processus d'acquisition de l'image et utilise des a priori géométriques. Remarquons que Penna [30, 29] et Weiss [36] ne présentent aucun résultat numérique. Lee et Kuo [24] proposent une approche variationnelle et minimisent un coût fonctionnel basé sur une approximation linéaire locale de la carte de réflectance. Enfin, Hasegawa et Tozzi [16] suggèrent de combiner des techniques de SFS avec des techniques de photogramétrie, pour reconstruire la surface et calibrer l'appareil photographique. Leur méthode aboutit à la résolution de grands systèmes linéaires et semble n'être appropriée qu'à de petites images.

Lorsque la scène est disposée très loin de l'appareil photographique, il est pertinent de modéliser celui-ci par une projection orthographique. En effet, l'erreur induite sera alors faible et l'algorithme associé sera plus rapide (car l'équation considérée est plus simple que celle que nous obtenons avec une projection en perspective). Cependant, dans le cas contraire, cette modélisation implique de fortes distorsions. En considérant une projection en perspective, ces quatre approches [30, 29, 36, 24, 16] permettent d'appliquer le SFS à des images plus réalistes et plus variées: désormais nous pouvons reconstruire la forme d'objets disposés près de l'appareil photographique.

Dans cet article nous supposons que l'appareil photographique effectue une projection en perspective de la scène. Nous proposons une méthode globale et nous ne linéarisons pas la carte de réflectance. Par ailleurs, dans les quatre approches précédentes, les auteurs utilisent un système de coordonnées 3D lié à la scène. Nous trouvons plus simple d'utiliser un système de coordonnées basé sur l'appareil photographique. Dans la section 2, ce choix de coordonnées nous permet de formuler le problème de "SFS perspectif" sous la forme d'une nouvelle EDP.

Un aspect très important du problème de SFS consiste à répondre aux questions d'existence et d'unicité d'une solution. Ces questions tout comme celles liées à la convergence des schémas numériques deviennent centrales dans la dernière décennie du 20ème siècle. Par exemple les articles de Bruss [5], Brooks [4], Horn [19] et Durou [13, 14] montrent les nombreuses difficultés rencontrées. Aussi, dès le milieu des années 90, des premières réponses à ces questions ont été présentées par Dupuis et Oliensis [12, 27], et Lions, Rouy et Tourin [34, 26]. Nous généralisons ici ces résultats:

a) concernant le "SFS orthographique", Dupuis et Oliensis [12] considèrent le problème avec des fonctions  $C^1$ ; ici nous nous plaçons dans le cadre des solutions de viscosité, une notion de solutions plus générique. Lions, Rouy et

Tourin [34, 26] utilisent la notion de solutions de viscosité continues pour résoudre le cas où la direction de l'axe optique correspond avec la direction de la source de lumière; ici nous considérons une direction d'éclairage quelconque. b) concernant le "SFS perspectif", aucun des travaux précédents ne traite des questions d'existence et d'unicité de la solution ou de convergence. Dans cet article, nous résolvons ces questions dans ce nouveau cadre.

Autrement dit, dans cet article, nous présentons une extension des travaux de Rouy et Tourin [34, 26] (qui considéraient l'équation eikonale) aux problèmes de "SFS orthographique" et "SFS perspectif" avec une direction d'éclairage quelconque. Nous généralisons leur résultats théoriques (basés sur la théorie classique des solutions de viscosité). En particulier, nous caractérisons les solutions de viscosité du SFS perspectif et orthographique en fixant la "hauteur" des points critiques. Nous généralisons aussi leur méthode numérique (algorithmes).

Par ailleurs, notons que, dans le cadre du "SFS orthographique", Falcone et ses collaborateurs [7, 15] ont récemment proposé d'utiliser une nouvelle notion de solutions de viscosité: la notion de solutions de viscosité maximales introduite par Ishii et Ramaswamy [21] et modernisée ces quatre dernières années par Camilli [9, 8, 6]. A la fin de la section 3, nous expliquerons brièvement les motivations de l'approche de Falcone.

Cet article est organisé de la façon suivante. Dans la section 2, nous rappelons tout d'abord la formulation classique du problème de SFS (cas orthographique), puis nous développons une nouvelle formulation du problème de "SFS perspectif". Dans la section 3, nous développons de nouveaux résultats concernant l'existence et l'unicité de la solution de viscosité des équations obtenues. Dans la section 4, nous proposons un schéma d'approximation et deux algorithmes numériques originaux permettant de calculer des approximations de la solution de viscosité des problèmes de SFS orthographique et perspectif. De plus nous donnons des conditions suffisantes assurant la convergence de ceux-ci. Dans la section 5, nous montrons des résultats expérimentaux sur des images synthétiques. Nous concluons dans la section 6.

## 2 Formulation mathématique du problème de SFS

Le problème consiste donc à retrouver la forme tridimensionnelle d'une scène à partir de la variation de l'éclairage (ou intensité) d'une image en niveaux de gris .

Supposons que la scène soit représentée par une surface  $S$  paramétrée explicitement par une fonction  $S : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto S(x)$ :

$$S = \{ S(x), \quad x \in \bar{\Omega} \};$$

$\Omega$  étant un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  représentant le support de l'image. Supposons de plus que la réflectance soit lambertienne, que l'albédo soit constant et égal à 1, et que la scène soit illuminée par une source de lumière disposée à l'infini. Par

cette dernière hypothèse, la direction de la source de lumière est la même en tout point de l'espace; nous pouvons donc la représenter par le vecteur unitaire uniforme  $\mathbf{L} = (\alpha, \beta, \gamma) = (1, \gamma)$  avec  $\gamma > 0$ ; nous notons aussi  $\mathbf{l} = (\alpha, \beta)$ . Nous supposons par ailleurs que la scène ne présente aucune ombre portée<sup>1</sup>.

Sous ces hypothèses, le niveau de gris  $I(x)$  correspondant à un point  $S(x)$  de la surface est donné par l'équation d'irradiance suivante:

$$I(x) = \frac{\mathbf{n}(x) \cdot \mathbf{L}}{|\mathbf{n}(x)|}, \quad (1)$$

où  $\mathbf{n}(x)$  est un vecteur normal sortant à  $S$  au point  $S(x)$ . Enfin, nous supposons que la "distance" de la scène à l'appareil photographique est connue sur les bords de l'image. Evidemment ces hypothèses sont très restrictives; cependant nous pouvons en éliminer certaines (en particulier celle concernant la distance aux bords), ce qui sera l'objet d'un prochain article.

## 2.1 Formulation classique du problème: "SFS orthographique"

Nous revisitons ici la version classique du problème de SFS dans laquelle l'appareil photographique est modélisé par une projection orthographique. Dans ce cas, la surface  $S$  est naturellement représentée par:

$$S = \{(x_1, x_2, u(x_1, x_2)); (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}\},$$

voir la figure 1.

Les vecteurs normaux à la surface sont alors donnés par:

$$\mathbf{n}(x) = (-\nabla u(x), 1).$$

Ainsi, l'équation d'irradiance (1) peut se réécrire de la façon suivante:

$$\forall x \in \Omega, \quad I(x)\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2} + \nabla u(x) \cdot \mathbf{l} - \gamma = 0. \quad (2)$$

Dans le cas où  $\mathbf{L} = (0, 0, 1)$ , cette équation peut se réécrire en une équation eikonale:

$$|\nabla u(x)| - \sqrt{\frac{1}{I(x)^2} - 1} = 0. \quad (3)$$

Ainsi, le problème de "SFS orthographique" consiste à résoudre l'EDP (2) ou éventuellement l'EDP (3).

**Remarque:** Aux équations (2) et (3), nous associons respectivement les fonctions

$$H_{R/T}(x, p) = I(x)\sqrt{1 + |p|^2} + p \cdot \mathbf{l} - \gamma$$

et

$$H_{Eiko}(x, p) = |p| - \sqrt{\frac{1}{I(x)^2} - 1}.$$

Ces fonctions  $H$  sont appelées *Hamiltoniens*.

<sup>1</sup>. Cette hypothèse sur les ombres portées, nécessaire à la formulation de l'équation (1), sera discutée dans la section 4.3.

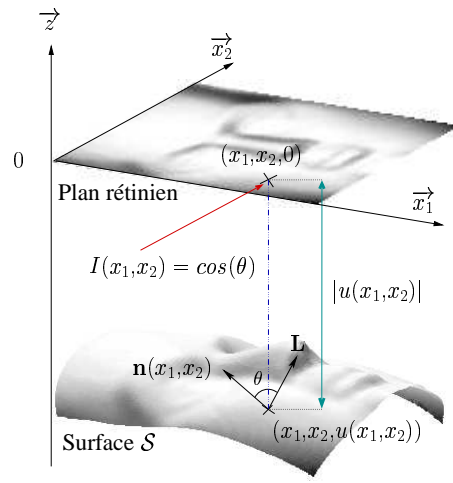


FIG. 1 – Image obtenue par une projection orthographique; l'intensité du "pixel"  $(x_1, x_2)$  est l'intensité du point  $(x_1, x_2, u(x_1, x_2))$  de la surface  $S$ .

## 2.2 Adaptation originale de l'équation d'irradiance au problème du "SFS perspectif"

Dans cette section, nous modélisons l'acquisition photographique par une projection en perspective de la scène. L'appareil photographique est alors caractérisé et représenté par le plan rétinien et par le centre optique, comme l'illustre la figure 2. Nous notons  $f$  la distance focale. En introduisant une fonction  $u$  correspondant au "facteur de profondeur", nous paramétrons la surface  $S$  représentant la scène par:

$$S = \left\{ u(x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -f \end{pmatrix}; (x_1, x_2) \in \bar{\Omega} \right\}.$$

Une expression du vecteur normal  $\mathbf{n}(x)$  s'obtient facilement grâce au calcul différentiel:

$$\mathbf{n}(x) = \begin{pmatrix} f \nabla u(x) \\ u(x) + x \cdot \nabla u(x) \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons alors reformuler l'équation d'irradiance (1) par l'EDP suivante:

$$I(x) = \frac{f \cdot \mathbf{l} \cdot \nabla u(x) + \gamma (x \cdot \nabla u(x) + u(x))}{\sqrt{f^2 |\nabla u(x)|^2 + (x \cdot \nabla u(x) + u(x))^2}}. \quad (4)$$

Par ailleurs, nous pouvons supposer que la surface est "visible", c'est-à-dire devant le plan rétinien; donc nous pouvons supposer que  $u$  vérifie

$$\forall x \in \bar{\Omega}, \quad u(x) \geq 1.$$

De plus, l'équation (4) est homogène en  $u(x)$  et  $\nabla u(x)$ ; nous pouvons alors la simplifier en utilisant le changement

de variables  $v = \ln(u)$ . Ainsi le problème du “SFS perspectif” consiste en la résolution de l’EDP suivante:

$$I(x)\sqrt{f^2|\nabla v|^2 + (x \cdot \nabla v + 1)^2} - (f + \gamma x) \cdot \nabla v - \gamma = 0. \quad (5)$$

**Remarque:** A cette nouvelle EDP, nous associons l’Hamiltonien

$$H_{P/F}(x,p) = I(x)\sqrt{f^2|p|^2 + (x \cdot p + 1)^2} - (f + \gamma x) \cdot p - \gamma. \quad (6)$$

Insistons sur le fait que, contrairement à Penna [30, 29], Weiss [36], Lee et Kuo [24] ou Hasegawa et Tozzi [16], notre formalisme aboutit à une EDP explicite. Ainsi, cette formulation nous permet de prouver des résultats d’existence et d’unicité pour le problème de “SFS perspectif”.

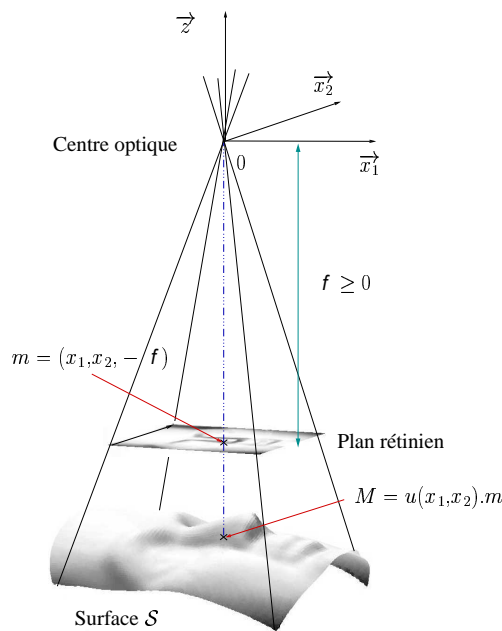


FIG. 2 – Image obtenue par une projection en perspective; l’intensité du “pixel”  $(x_1, x_2)$  est l’intensité du point  $u(x_1, x_2)(x_1, x_2, -f)$  de la surface  $S$ .

### 3 Résultats d’existence et d’unicité pour les problèmes du “SFS orthographique” et du “SFS perspectif”

La notion de solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi a été introduite par Crandall et Lions [25, 11, 10]. Pour des résultats plus récents voir [1] ou [2]. Pour une approche plus intuitive liée à la vision par ordinateur le lecteur pourra se référer à [32].

Dans les années 90, Lions, Rouy et Tourin [34, 26] ont utilisé la notion de solutions de viscosité pour résoudre le problème de SFS. Leurs travaux étaient basés sur la notion de solutions de viscosité continues. Les solutions de viscosité continues sont des solutions d’EDP au sens faible. En particulier, elles ne sont pas différentiables et peuvent présenter des arêtes. Cette notion permet de définir une solution pour une EDP qui ne possède pas de solution au sens classique. Par exemple, le théorème de Rolle permet d’affirmer que l’équation

$$|\nabla u(x)| = 1 \text{ pour tout } x \text{ dans } ]0,1[ \quad (7)$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet

$$u(0) = u(1) = 0,$$

n’a pas de solution au sens classique. Cependant cette équation a une solution de viscosité continue (voir la figure 3-a). Remarquons par ailleurs que les solutions de viscosité continues sont continues (sur la fermeture des ensembles sur lesquels elles sont définies) et que les solutions au sens classique sont des solutions de viscosité continues.

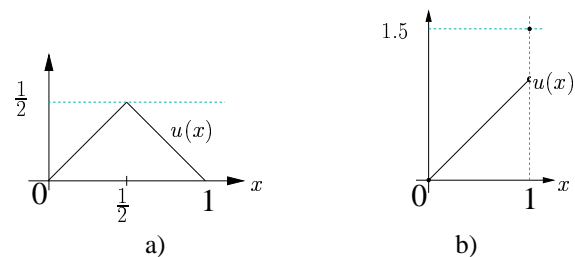


FIG. 3 – a) Solution de viscosité continue de (7) avec  $u(0) = u(1) = 0$ ; b) Solution de viscosité discontinue de (7) avec  $u(0) = 0$  et  $u(1) = 1.5$ .

Dans la section précédente, nous avons vu que le problème de “SFS perspectif”, tout comme celui de “SFS orthographique”, consiste en la résolution d’EDP. Nous remarquons que ces EDP ne dépendent pas de  $u$  (ou de  $v$ ). Pour assurer l’unicité, nous devons alors ajouter des conditions aux limites. Notre choix porte sur des conditions aux limites de Dirichlet:

$$\forall x \in \partial\Omega, u(x) = \varphi(x), \quad (8)$$

$\varphi$  étant continue sur  $\partial\Omega$ .

Dans le rapport de recherche [31], nous prouvons que la théorie des solutions de viscosité continues s’applique aux équations du SFS (2), (3) et (5) avec les conditions aux limites de Dirichlet (8). Pour toutes les modélisations du SFS, nous donnons des conditions assurant l’existence de solutions de viscosité continues. De manière générale, les trois hypothèses suivantes suffisent pour démontrer l’existence de solutions:

1. régularité de l’image:  $I$  doit être lipschitzienne;

2. coercivité en  $\nabla u$  de l'Hamiltonien  
 ( $H(x)$  est coercive si  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} H(x) = +\infty$ ).  
 Par exemple,

- pour l'équation (3),  $I$  doit vérifier  $I(x) > 0$ ;
- pour l'équation (2),  $I$  doit vérifier  $I(x) > |1|$ ;
- pour (5) avec  $\mathbf{L} = (0,0,1)$ ,  $I$  doit vérifier

$$I(x) > \frac{|x|}{\sqrt{f^2 + |x|^2}};$$

3.  $\varphi$  vérifie la condition de compatibilité classique [25].

Par ailleurs, en utilisant le théorème d'unicité de Rouy et Tourin [34], nous montrons que si de plus  $I(x) < 1$  pour tout  $x \in \Omega$ , alors il existe au plus une solution de viscosité continue. Insistons sur le fait que ceci s'applique à toutes nos formulations du problème de SFS.

Récemment, dans le but de s'affranchir des conditions de compatibilité (sur les conditions aux bords) nécessaires à l'existence de solutions de viscosité continues, nous avons proposé d'utiliser l'idée plus générale des solutions de viscosité discontinues [33]. La notion de solutions de viscosité discontinues est essentiellement due à Ishii [20]. Cette notion est décrite en détail dans le livre de Barles [2]. Le livre plus récent de Bardi et Capuzzo Dolcetta [1] complète cette théorie.

Un des intérêts de la notion de solutions de viscosité discontinues réside dans la possibilité de détacher la solution des conditions aux limites. Ainsi, grâce à cette notion, nous pouvons reconstruire des solutions du SFS même avec de grandes erreurs sur les conditions aux bords (que nous supposons connues). Par exemple, l'équation précédente (7) contrainte aux conditions aux limites

$$u(0) = 0 \text{ et } u(1) = 1.5$$

n'a pas de solution de viscosité continue, mais a une solution de viscosité discontinue (cette solution est représentée dans la figure 3-b)). Remarquons par ailleurs que les solutions de viscosité discontinues peuvent présenter des discontinuités et qu'une solution de viscosité continue est une solution de viscosité discontinue.

Comme dans le cas continu, nous prouvons des résultats d'existence et d'unicité des solutions de viscosité discontinues pour les équations (2), (3) et (5) des problèmes de "SFS orthographique" et "SFS perspectif".

En utilisant la transformée de Legendre [25] et le calcul différentiel, nous pouvons réécrire nos équations sous la forme de "sup".

$$\sup_{a \in B(0,1)} \{-f(x,a) \cdot \nabla u - l(x,a)\} = 0$$

- Pour l'équation eikonale (3), les fonctions  $f$  et  $l$  adéquates sont les suivantes:

$$f(x,a) = -I(x)a, \quad l(x,a) = \sqrt{\frac{1}{I(x)^2} - 1};$$

- Pour le problème orthographique général (2), les fonctions  $f$  et  $l$  sont:

$$f(x,a) = -[I(x)a + 1],$$

$$l(x,a) = -I(x)\sqrt{1 - |a|^2} - \gamma;$$

- Pour le problème perspectif (5), les fonctions  $f$  et  $l$  adaptées sont:

$$f(x,a) = -I(x)^t R_x D_x R_x a + f1 + \gamma x,$$

et

$$l(x,a) = -I(x) \left[ f \sqrt{\frac{1 - |a|^2}{f^2 + |x|^2}} + ({}^t R_x D_x^{-1} R_x x) \cdot a \right] + \gamma; \quad (9)$$

où

- pour  $x \neq 0$ ,  $R_x$  est la matrice de rotation

$$R_x = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ avec}$$

$$\cos \theta = \frac{x_2}{|x|} \quad \text{et} \quad \sin \theta = -\frac{x_1}{|x|},$$

- pour  $x = 0$ ,  $R_x$  est la matrice identité  $I_{d_{2 \times 2}}$ ;

- $D_x = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & \sqrt{f^2 + |x|^2} \end{pmatrix}$ ,

Grâce à ces nouvelles représentations, nous prouvons que pour toutes conditions au bord continues, il existe toujours des solutions de viscosité discontinues aux équations (2), (3) et (5). Et ceci est valable dès que  $I$  est lipschitzienne sur  $\bar{\Omega}$ .

Si de plus, nos Hamiltoniens sont coercifs (conditions décrites ci-dessus) pour tout  $x$  sur un voisinage du bord de  $\Omega$ , alors nous avons un résultat d'unicité fort; par suite il existe au plus une solution de viscosité discontinue aux équations.

En pratique,  $I$  peut atteindre la valeur 1 mais dans ce cas, nous n'avons plus l'unicité. Pour la version orthographique du problème de SFS la perte d'unicité est complètement caractérisée dans [26, 34, 33]. Comme dans la version orthographique, pour obtenir l'unicité, il suffit d'ignorer l'ensemble  $\{x \in \Omega \mid I(x) = 1\}$  et de travailler sur l'ouvert  $\Omega' = \Omega - \{x \in \Omega \mid I(x) = 1\}$  au lieu de  $\Omega$ . Autrement dit, nous devons imposer les valeurs de la solution sur le bord de l'image et à tous les points critiques. Ceci est quelque peu insatisfaisant, étant donné qu'en pratique, ces valeurs ne sont pas connues. Aussi, nous travaillons désormais sur la suppression de ces conditions aux limites.

A ce propos, remarquons que Falcone [7, 15] propose de ne pas spécifier les valeurs de la solution aux points critiques (son approche nécessite cependant de spécifier les valeurs de la solution au bord de l'image). Pour cela, il utilise la notion de solutions de viscosité maximale récemment modernisée par Camilli [9, 8, 6]. Remarquons cependant que, malgré cet avantage, l'approche de Falcone ne

nous semble pas réellement adaptée au problème du Shape from Shading; voir par exemple la figure 4. Dans cette fi-

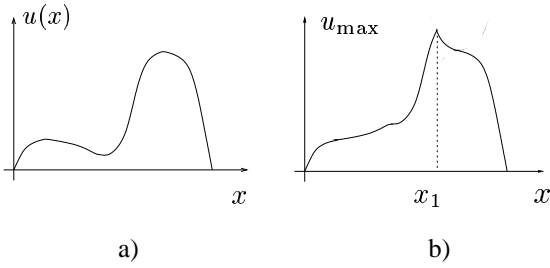


FIG. 4 – a) Surface originale  $u$ ; b) solution de viscosité maximale  $u_{\max}$  (au sens de Falcone [7, 15]) associée à l'image obtenue à partir de la surface originale a) avec l'équation eikonale.

gure, la solution maximale  $u_{\max}$  associée à l'image obtenue à partir de la surface originale  $u$  présente une crête très marquée là où la surface devrait être lisse. Insistons sur le fait que, même avec des conditions au bord correctes, la méthode de Falcone ne retourne pas nécessairement une solution convenable.

Pour plus de détails sur les résultats présentés dans cette section, voir notre rapport technique [31] dans lequel nous développons entièrement les preuves.

## 4 Deux nouveaux algorithmes numériques pour le Shape from Shading

Dans la section précédente nous avons exprimé les équations du SFS (2), (3) et (5) sous la forme d'un "sup":

$$\sup_{a \in B(0,1)} \{-f(x,a) \cdot \nabla u(x) - l(x,a)\} = 0 \quad \forall x \in \Omega. \quad (10)$$

Dans cette section nous développons une méthode permettant d'obtenir des approximations numériques de la solution de viscosité de ces équations. Cette méthode peut être interprétée comme une généralisation des outils développés par Rouy et Tourin pour résoudre l'équation eikonale (3) [34].

### 4.1 Schéma d'approximation et convergence

Pour toute taille de grille  $\rho = (\Delta x_1, \Delta x_2)$ , nous considérons le schéma aux différences finies  $S(\rho, x, u(x), u) = 0$  avec

$$S(\rho, x, t, u) = \max_{s_1, s_2 = \pm 1} S_{s_1, s_2}(\rho, x, t, u), \quad (11)$$

où  $S_{s_1, s_2}(\rho, x, t, u) =$

$$\sup_{a \in B_{s_1, s_2}} \left\{ -f(x, a) \cdot \left( \begin{array}{c} s_1 \frac{t - u(x - s_1 \Delta x_1 \vec{e}_1)}{\Delta x_1} \\ s_2 \frac{t - u(x - s_2 \Delta x_2 \vec{e}_2)}{\Delta x_2} \end{array} \right) - l(x, a) \right\},$$

$$B_{s_1, s_2} = \{a \in B(0,1) \mid -f_1(x, a) s_1 \geq 0 \text{ et } -f_2(x, a) s_2 \geq 0\}.$$

En utilisant les définitions de Barles et Souganidis [3], nous prouvons que le schéma (11) est monotone et est cohérent

avec les équations de la forme (10). Quelle que soit la modélisation de SFS considérée, nous montrons aussi que le schéma (11) associé est toujours stable. Enfin, nous montrons que si l'intensité de l'image est Lipschitzienne, et si les Hamiltoniens sont coercifs (voir ci-dessus) sur le bord de l'image, alors les solutions  $u^\rho$  des schémas (11) associés aux équations, convergent vers l'unique solution de viscosité discontinue de l'équation considérée, quand  $\rho \rightarrow 0$ .

Pour plus de détails ou pour les preuves de ces affirmations, voir [31].

## 4.2 Deux nouveaux algorithmes numériques pour le SFS

Dans la section précédente, nous avons décrit un schéma d'approximation permettant d'approximer des équations de type (10). En particulier, ce schéma s'applique à toutes les équations de SFS (équations (2), (3) et (5)) que nous décrivons dans la section 2. Nous avons aussi donné des conditions suffisantes assurant la convergence de ses solutions  $u^\rho$  vers l'unique solution de viscosité de l'équation associée. Décrivons maintenant des algorithmes permettant de calculer des approximations numériques des fonctions  $u^\rho$ .

Fixons  $\rho = (\Delta x_1, \Delta x_2)$ ; notons  $\forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2, x_{ij} = (i \Delta x_1, j \Delta x_2)$ ,

$\mathcal{X} = \{x_{ij}\}_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$ ,  $Q = \overline{\Omega} \cap \mathcal{X}$  et

$Q^\rho = \{x_{ij} \mid x_{ij} \pm \Delta x_1 \vec{e}_1 \in \overline{\Omega} \text{ et } x_{ij} \pm \Delta x_2 \vec{e}_2 \in \overline{\Omega}\}$ .

Nos algorithmes consistent à calculer les séquences de valeurs  $U_{ij}^n, n \geq 0$  ( $U_{ij}^n$  étant une approximation de  $u^\rho(x_{ij})$ ).

**Algorithme:**

1. Initialisation ( $n = 0$ ):  
 $\forall x_{i,j} \in Q \quad U_{ij}^0 = u_0(x_{i,j});$   
 puis choix d'un premier pixel  $x_{i,j} \in Q^\rho$ .
2.  $x_{i,j}$  étant fixé précédemment, nous modifions  $U_{ij}^n$ :  
 nous choisissons  $U^{n+1}$  tel que  $\forall (k,l) \neq (i,j)$ ,  
 $U_{kl}^{n+1} = U_{kl}^n$  et  $S(\rho, x_{i,j}, U_{i,j}^{n+1}, U^n) = 0$ .
3. Choix d'un prochain pixel  $x_{i,j} \in Q^\rho$  de telle façon que tous les pixels de  $Q^\rho$  soient régulièrement visités.  
 Retour à l'étape 2.

Dans l'algorithme précédent,  $u_0$  est une sous-solution du schéma.

Nous disposons ainsi de deux nouveaux algorithmes permettant de calculer des approximations numériques du problème de SFS. *Un premier algorithme* calcule des approximations numériques de la solution de viscosité de l'équation (2) correspondant à la modélisation du processus d'acquisition photographique par une *projection orthographique*. *Le deuxième algorithme* calcule des approximations numériques de la solution de viscosité de l'équation (5), correspondant à la modélisation du processus photographique à l'aide d'une *projection en perspective*. Notons au passage que l'algorithme associé au problème "eikonale" correspond à celui donné par Rouy et Tourin [34].

Pour toutes les formulations du SFS, nous prouvons que les algorithmes associés sont bien définis et que les suites construites  $U^n$  sont croissantes et convergent vers des solutions  $u^\rho$  du schéma associé quand  $n \rightarrow +\infty$ . Rappelons qu'avec des hypothèses adéquates, les solutions  $u^\rho$  de nos schémas convergent vers les solutions de viscosité discontinues des équations (2), (3) ou (5).

### 4.3 Comportement des algorithmes avec des images comportant des ombres portées

**Difficultés théoriques.** Les difficultés théoriques rencontrées lorsque l'image présente des ombres portées, sont de deux sortes:

1. l'image présente des discontinuités;
2. l'Hamiltonien n'est plus coercif.

Dans ce cas, la théorie des solutions de viscosité (continues et discontinues) classiques [2, 1], tout comme la théorie des solutions de viscosité maximales récemment développée par Camilli [9, 8, 6], ne s'appliquent pas.

Notons en particulier que la présence des discontinuités dans l'image implique la perte de l'unicité de la solution de viscosité. Remarquons cependant que, dans le cas particulier de l'équation eikonale, Ostrov [28, 22] et Soravia [35] ont récemment caractérisé la fonction valeur (parmi l'ensemble des solutions de viscosité) lorsque l'image présente des discontinuités.

**Convergence de nos algorithmes.** Bien que la (les) théorie(s) des solutions de viscosité ne s'applique(nt) pas, nous prouvons que même en présence de discontinuité ou d'ombres portées dans l'image, le schéma d'approximation (11) est stable; et ceci, quelque soit la modélisation de SFS choisie. De plus, nous prouvons que les approximations numériques calculées avec les algorithmes numériques associés convergent vers une solution du schéma.

**Solutions reconstruites.** Dans les années 90, Lions, Rouy et Tourin [26] avaient déjà proposé une approche théorique permettant de considérer les ombres portées (dans le cas orthographique). Dans cet article, les auteurs ne cherchent pas à reconstruire la surface dans les zones d'ombres (zones complètement noires, ne contenant aucune information d'ombrage ("shading")) et réinterprètent le problème en jouant sur les conditions aux limites (en particulier en alternant judicieusement des conditions de Dirichlet et des conditions de Neumann).

Plus récemment, Falcone [15] proposa une autre manière de considérer les ombres portées (dans le cas orthographique). En particulier, Falcone propose de reconstruire une solution sur toute l'image (donc aussi dans les zones d'ombres). Pour cela, il remarque que, dans les zones d'ombres, le faisceau de lumière rasant la surface vérifie l'équation (2). Contrairement à Lions, Rouy et Tourin [26], Falcone ne propose pas de résultat théorique (à cause des difficultés citées ci-dessus) mais il propose un algorithme numérique qui reconstruit généralement une surface correspondant à la solution dans la zone d'ombrage ("sha-

ding") et correspondant au faisceau de lumière rasant la surface, dans les zones d'ombres portées. Un exemple de reconstruction en dimension 1 est représenté dans la figure 5.

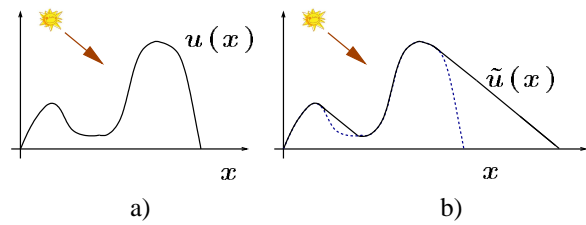


FIG. 5 – a) Surface originale  $u$  et direction de l'éclairage; b) solution  $\tilde{u}$  retournée par notre algorithme et celui de Falcone [15].

Les algorithmes (la version orthographique et la version en perspective) que nous proposons ici ont le même comportement que l'algorithme de Falcone. Ainsi, en général, dans la zone de "shading", nos algorithmes reconstruisent la surface correspondant à la solution, et dans les zones d'ombres portées, ils reconstruisent le faisceau de lumière rasant la solution. Un exemple de reconstruction 2D en utilisant nos algorithmes est donné dans la figure 9.

## 5 Résultats expérimentaux

Nous avons appliqué la méthode décrite dans la section 4 afin de calculer des approximations numériques des solutions des équations du "SFS orthographique" et du "SFS perspectif". Dans [33], nous avons testé "l'algorithme orthographique" avec des images synthétiques obtenues par des projections orthographiques. Les résultats obtenus sont de qualité très comparable à ceux obtenus ici avec "l'algorithme perspectif" avec des images synthétiques créées avec des projections en perspective. Ici, nous nous concentrons sur "l'algorithme perspectif". Nous comparons aussi les performances des deux algorithmes appliqués à des images synthétiques obtenues par des projections en perspective (plus proches des images réelles).

Pour tous les résultats présentés, nous montrons l'objet original, l'image de départ, la surface reconstruite avec "l'algorithme perspectif" et la surface reconstruite avec "l'algorithme orthographique". Notons  $r$  le rapport "distance focale sur distance de l'objet" (la distance de l'objet correspond à la distance moyenne des points de la surface au centre optique). Remarquons que, dès que le rapport  $r$  est plus petit que  $1/2$ , "l'algorithme orthographique" engendre des erreurs importantes tandis que la qualité des résultats obtenus avec "l'algorithme perspectif" est toujours très bonne.

Dans tous les résultats donnés, les paramètres sont  $n$ , le nombre d'itérations,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_\infty$  les erreurs associées à la surface calculées selon les normes  $L_1, L_2$  et  $L_\infty$ , respectivement.

Pour démontrer la capacité de notre méthode à traiter les objets lisses comme non lisses, nous avons testé notre al-

gorithme avec des images synthétiques générées par des formes de différents niveaux de régularité. Tout d'abord, nous avons testé nos algorithmes avec une surface  $C^\infty$  (le vase classique proposé dans [37] que nous avons convenablement lissé; voir figure 6), et une surface  $C^0$ : une pyramide, voir figure 7. Nos données étant synthétiques, nous pouvons utiliser les conditions aux bords exactes lors des calculs des approximations des solutions. L'exemple de la pyramide montre la remarquable capacité de notre méthode à traiter des surfaces qui sont seulement continues. Cet exemple montre également la convergence de nos algorithmes appliqués à des images discontinues. Rappelons que dans un tel cas la théorie des solutions de viscosité ne s'applique pas. Cependant, les résultats récents de [35, 22] nous permettent d'espérer une prochaine extension de cette théorie à des images discontinues.

La figure 9 illustre de plus la capacité de notre algorithme à traiter des images présentant des ombres portées (cf. section 4.3). Dans cet exemple, le vecteur représentant la direction de la lumière est  $\mathbf{L} = (0.8, 0.0, 0.6)$ . L'angle entre  $\mathbf{L}$  et l'axe optique est approximativement  $53^\circ$ .

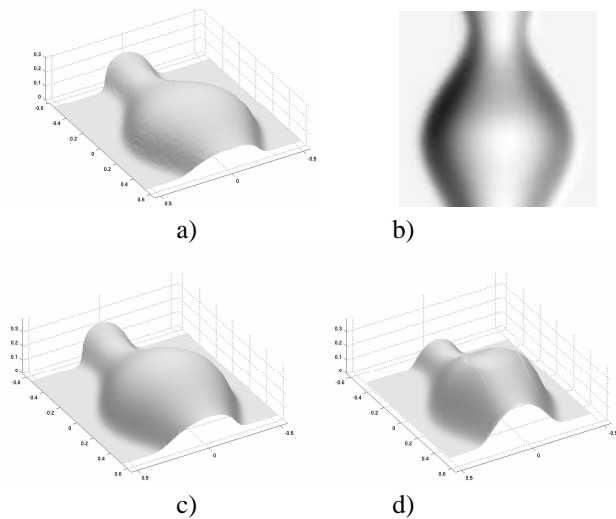


FIG. 6 – Résultats pour une image générée à partir d'une surface lisse: a) surface originale, b) image originale ( $\mathbf{l} = (0.2, 0.2)$ ,  $r = 0.4$ , taille=128 × 128), c) surface reconstruite à partir de b) avec "l'algorithme perspectif":  $n \approx 1000$ ,  $\varepsilon_1 = 2.3\%$ ,  $\varepsilon_2 = 2.4\%$ ,  $\varepsilon_\infty = 2.8\%$ ; d) surface reconstruite à partir de b) avec "l'algorithme orthographique":  $n \approx 1000$ ,  $\varepsilon_1 = 15.8\%$ ,  $\varepsilon_2 = 16.1\%$ ,  $\varepsilon_\infty = 22.3\%$ ;

Par ailleurs, nous avons démontré la stabilité de notre méthode face à deux types de bruits. Tout d'abord, nous avons testé l'effet d'un bruit pixélique. Du bruit uniformément réparti a été ajouté aux images d'entrée. Les surfaces alors reconstruites sont données dans la figure 8. Le second type de bruit est lié aux erreurs faites sur l'estimation de la direction de la lumière  $\mathbf{L}$ . La figure 10 montre les surfaces reconstruites avec une erreur de  $5^\circ$  sur ce paramètre. Dans les

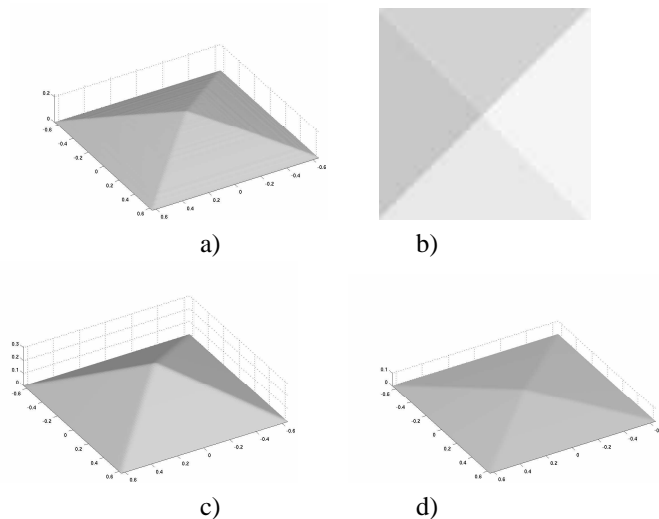


FIG. 7 – Résultats pour une image générée à partir d'une surface pyramidale: a) surface originale, b) image originale ( $\mathbf{l} = (0.2, 0.2)$ ,  $r = 0.47$ , taille= 100 × 100), c) surface reconstruite à partir de b) par "l'algorithme perspectif":  $n = 76$ ,  $\varepsilon_1 = 0.25\%$ ,  $\varepsilon_2 = 0.26\%$ ,  $\varepsilon_\infty = 0.37\%$ ; d) surface reconstruite à partir de b) par "l'algorithme orthographique":  $n = 83$ ,  $\varepsilon_1 = 49.1\%$ ,  $\varepsilon_2 = 49.7\%$ ,  $\varepsilon_\infty = 52.7\%$ ;

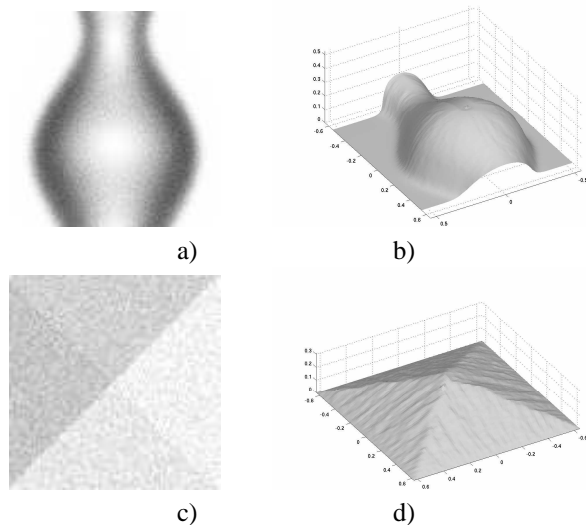


FIG. 8 – Résultats pour les images 6-b) et 7-b) bruitées uniformément: a) image bruitée du vase; b) surface reconstruite à partir de a):  $n \approx 2000$ ,  $\varepsilon_1 = 3.5\%$ ,  $\varepsilon_2 = 3.9\%$ ,  $\varepsilon_\infty = 6.2\%$ ; c) image bruitée de la pyramide; d) surface reconstruite à partir de c):  $n \leq 100$ ,  $\varepsilon_1 = 0.5\%$ ,  $\varepsilon_2 = 0.9\%$ ,  $\varepsilon_\infty = 1.0\%$ ;

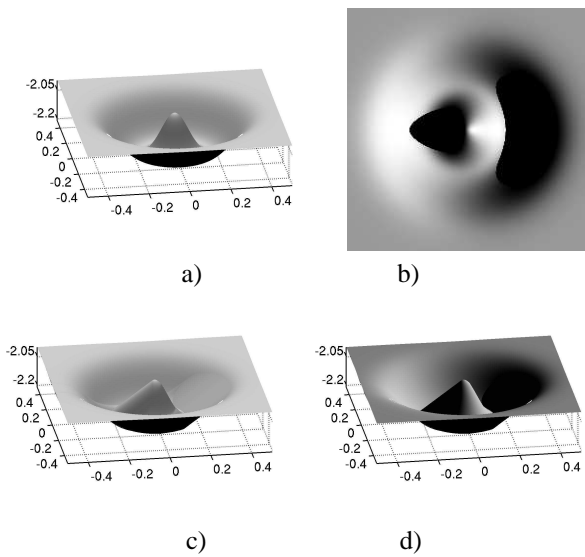


FIG. 9 – Exemple de reconstruction avec une image comportant des ombres portées. a) Surface originale (direction de l'éclairage de visualisation  $(0,0,1)$ ); b) image obtenue à partir de la surface a) avec  $\mathbf{L} = (0.8,0.0,0.6)$ ; c) solution reconstruite par notre algorithme à partir de b) (direction de l'éclairage de visualisation  $(0,0,1)$ ); d) surface c) visualisée avec un éclairage de direction  $(0.8,0.0,0.6)$ .

deux cas, les résultats montrés sont relativement convaincants.

Enfin, nous avons également testé nos algorithmes sur des images plus compliquées; par exemple nous les avons testés sur une partie du visage de Mozart présenté dans [37]. La figure 11 montre les résultats obtenus avec  $\mathbf{l} = (0.1,0.1)$  et  $r = 0.6$ .

## 6 Conclusion

Nous avons proposé une méthode permettant de reconstruire la forme 3D d'objets lambertiens à partir des ombres d'une seule image obtenue par une projection orthographique ou une projection en perspective. Cette approche est basée sur une analyse mathématique rigoureuse; nous avons donné des résultats d'existence et d'unicité de la solution de viscosité, puis fourni un schéma d'approximation. De ce schéma, nous avons déduit deux nouveaux algorithmes de SFS: un algorithme adapté à la modélisation orthographique, l'autre adapté à la modélisation en perspective. Finalement, nous avons démontré la convergence de nos approximations numériques vers la solution de viscosité du problème considéré.

Nous étendons actuellement notre approche à la reconstruction de surfaces non lambertiennes et travaillons sur la suppression des conditions aux limites.

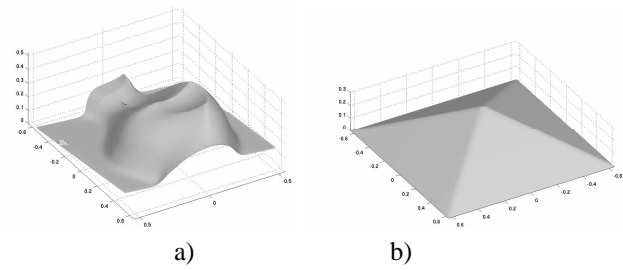


FIG. 10 – Surfaces lisse et pyramidale de la figure 6 et 7 reconstruites avec une erreur de  $5^\circ$  sur le paramètre  $\mathbf{L}$ : a)  $n \approx 2000$ ,  $\varepsilon_1 = 24.4\%$ ,  $\varepsilon_2 = 26.3\%$ ,  $\varepsilon_\infty = 35.9\%$ ; b)  $n \leq 100$ ,  $\varepsilon_1 = 1.50\%$ ,  $\varepsilon_2 = 1.58\%$ ,  $\varepsilon_\infty = 2.64\%$ .

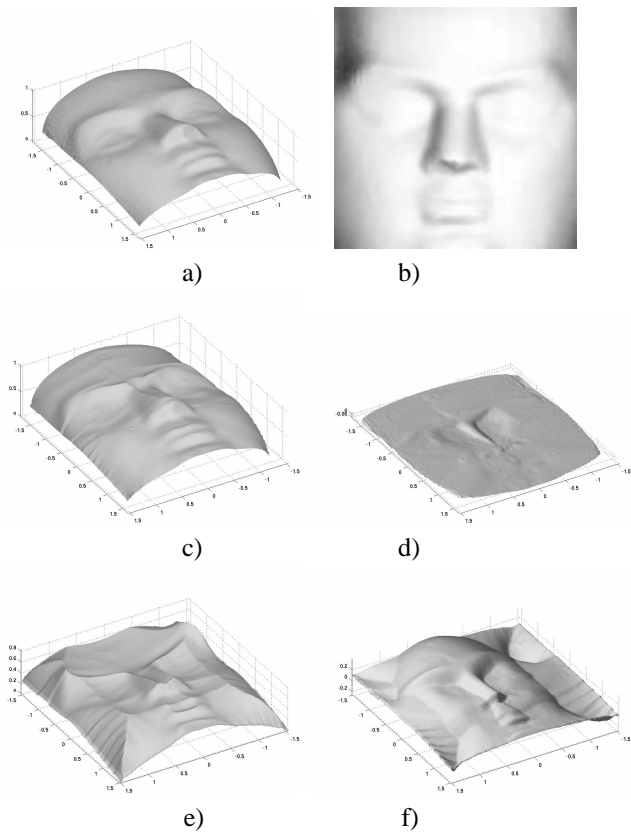


FIG. 11 – Résultats pour une image générée par le visage de Mozart: a) surface originale, b) image originale ( $\mathbf{l} = (0.1,0.1)$ ,  $r \approx 0.6$ , taille =  $128 \times 128$ ), c) surface reconstruite à partir de b) par "l'algorithme perspectif", d) surface d'erreur associée:  $n \approx 4000$ ,  $\varepsilon_1 = 3.0\%$ ,  $\varepsilon_2 = 3.6\%$ ,  $\varepsilon_\infty = 4.4\%$ ; e) surface reconstruite à partir de b) par "l'algorithme orthographique" et f) surface d'erreur associée:  $n \approx 5600$ ,  $\varepsilon_1 = 14.8\%$ ,  $\varepsilon_2 = 17.1\%$ ,  $\varepsilon_\infty = 30.3\%$ ;

## Références

- [1] M. Bardi et I. Capuzzo-Dolcetta. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Birkhauser, 1997.
- [2] G. Barles. *Solutions de Viscosité des Equations de Hamilton-Jacobi*. Springer-Verlag, 1994.
- [3] G. Barles et P.E. Souganidis. Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations. *Asymptotic Analysis*, 4:271–283, 1991.
- [4] M.J. Brooks, W. Chojnacki, et R. Kozera. Shading without shape. *Quarterly of Applied Mathematics*, 50(1):27–38, 1992.
- [5] A.R. Bruss. The eikonal equation: Some results applicable to computer vision. *Journal of Mathematical Physics*, 23(5):890–896, May 1982.
- [6] F. Camilli. *A characterization of the value function for a class of degenerate control problems*, In “numerical methods for viscosity solutions and applications” publié par M. Falcone et C. Makridakis, chapitre 3, pages 47–58. World Scientific, 2001.
- [7] F. Camilli et M. Falcone. An approximation scheme for the maximal solution of the shape-from-shading model. *International Conference on Image Processing*, pages 49–52, 1996.
- [8] F. Camilli et L. Grune. Numerical approximation of the maximal solutions for a class of degenerate hamilton-jacobi equations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 38(5):1540–1560, 2000.
- [9] F. Camilli et A. Siconolfi. Maximal subsolutions for a class of degenerate hamilton-jacobi problems. *Indiana Univ. Math. J.*, 48(3):1111–1132, 1999.
- [10] M.G. Crandall, H. Ishii, et P.-L. Lions. User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Soc.*, 27:1–67, 1992.
- [11] M.G. Crandall et P.-L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. AMS*, 277:1–43, 1983.
- [12] P. Dupuis et J. Oliensis. An optimal control formulation and related numerical methods for a problem in shape reconstruction. *The Annals of Applied Probability*, 4(2):287–346, 1994.
- [13] J.-D. Durou et H. Maître. On convergence in the methods of Strat and Smith for shape from shading. *The International Journal of Computer Vision*, 17(3):273–289, 1996.
- [14] J.-D. Durou et D. Piau. Ambiguous shape from shading with critical points. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 12(2):99–108, 2000.
- [15] M. Falcone et M. Sagona. An algorithm for the global solution of the shape-from-shading model. *International Conference on Image Analysis and Processing*, 1:596–603, 1997. LNCS 1310.
- [16] J.K. Hasegawa et C.L. Tozzi. Shape from shading with perspective projection and camera calibration. *Computers and Graphics*, 20(3):351–364, May 1996.
- [17] B.K. Horn et M.J. Brooks, éditeurs. *Shape from Shading*. The MIT Press, 1989.
- [18] B.K.P. Horn. Obtaining shape from shading information. In P.H. Winston, éditeur, *The Psychology of Computer Vision*. McGraw-Hill, New York, 1975.
- [19] B.K.P. Horn, R.S. Szeliski, et A.L. Yuille. Impossible shaded images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(2):166–170, 1993.
- [20] H. Ishii. Hamilton-Jacobi equations with discontinuous hamiltonians on arbitrary open subsets. *Bull. Fac. Sci. Engrg. Chuo Univ.*, 28:33–77, 1985.
- [21] H. Ishii et M. Ramaswamy. Uniqueness results for a class of hamilton jacobi equations with singular coefficients. *Comm. Par. Diff. Eq.*, 20:2187–2213, 1995.
- [22] J. Kain et D.N. Ostrov. Numerical shape-from-shading for discontinuous photographic images. *The International Journal of Computer Vision*, 44(3):163–173, 2001.
- [23] R. Kozera. An overview of the shape from shading problem. *Machine Graphics and Vision*, 7(1-2):291–312, 1998.
- [24] K.M. Lee et C.C.J. Kuo. Shape from shading with perspective projection. *CVGIP: Image Understanding*, 59(2):202–212, 1994.
- [25] P.-L. Lions. *Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*. Numéro 69 de “Research Notes in Mathematics”. Pitman Advanced Publishing Program, 1982.
- [26] P.-L. Lions, E. Rouy, et A. Tourin. Shape-from-shading, viscosity solutions and edges. *Numer. Math.*, 64:323–353, 1993.
- [27] J. Oliensis. Shape from shading as a partially well-constrained problem. *CVGIP: Image Understanding*, 54(2):163–183, 1991.
- [28] D.N. Ostrov. Extending viscosity solutions to eikonal equations with discontinuous spatial dependence. *Nonlinear Anal.*, 42(4):709–736, 2000.
- [29] M.A. Penna. Local and semi-local shape from shading for a single perspective image of a smooth object. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 46(3):346–366, 1989.
- [30] M.A. Penna. A shape from shading analysis for a single perspective image of a polyhedron. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(6):545–554, Juin 1989.
- [31] E. Prados et O. Faugeras. A mathematical and algorithmic study of the lambertian SFS problem for orthographic and pinhole cameras. Rapport de Recherche, INRIA, 2003.
- [32] E. Prados, O. Faugeras, et E. Rouy. Shape from shading and viscosity solutions. Rapport de Recherche RR-4638, INRIA, Novembre 2002.
- [33] E. Prados, O. Faugeras, et E. Rouy. Shape from shading and viscosity solutions. In *Proceedings of ECCV’02, LNCS*, volume 2351, pages 790–804, Mai 2002.
- [34] E. Rouy et A. Tourin. A Viscosity Solutions Approach to Shape-from-Shading. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 29(3):867–884, Juin 1992.
- [35] P. Soravia. Optimal control with discontinuous running cost: eikonal equation and shape from shading. In *39th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 79–84, Décembre 2000.
- [36] I. Weiss. A perspective 3D formalism for shape from shading. In *Proceedings of DARPA Image Understanding Workshop*, volume 2, pages 1393–1402, Mai 1997.
- [37] R. Zhang, P.-S. Tsai, J.-E. Cryer, et M. Shah. Shape from shading: A survey. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(8):690–706, Août 1999.