Imagerie astrophysique à la limite de diffraction des grands télescopes. Application à l'observation des objets froids.

Eric Thiébaut

▶ **To cite this version:**

Eric Thiébaut. Imagerie astrophysique à la limite de diffraction des grands télescopes. Application à l'observation des objets froids.. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 1994. Français. NNT : . tel-00366727

HAL Id: tel-00366727

https://theses.hal.science/tel-00366727

Submitted on 9 Mar 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat de l'Université Paris VII

en Astrophysique et Techniques Spatiales

présentée par

Eric Thiébaut

Imagerie astrophysique à la limite de diffraction des grands télescopes. Application à l'observation des objets froids.

soutenue le 8 juin 1994 devant le jury composé de :

MM.	**Pierre Léna**	président
	Renaud Foy	directeur de thèse
	Oscar von der Lühe	examinateur
	Jean-Marie Mariotti	rapporteur
	Thierry Montmerle	examinateur
	François Roddier	rapporteur
	Gérard Rousset	examinateur

A Valérie.

"Assurons-nous bien du fait, avant que de nous inquiéter de la cause. Il est vrai que cette méthode est bien lente pour la plupart des gens qui courent naturellement à la cause, et passent par-dessus la vérité du fait ; mais enfin nous éviterons le ridicule d'avoir trouvé la cause de ce qui n'est point."

Fontenelle, *La dent d'or* (1686).

Remerciements

Lors de ces années de recherche, j'ai beaucoup apprécié la liberté d'orientation que m'a laissée Renaud Foy tout en restant disponible et pédagogue pour discuter astrophysique et traitement des données. Si c'était à refaire c'est encore lui que je choisirais comme directeur de thèse !

J'ai honteusement mis à contribution mes rapporteurs "hawaiiens", Jean-Marie Mariotti et François Roddier, que je remercie vivement. Leurs commentaires m'ont aidé à prendre du recul par rapport à mon travail. Je voudrais exprimer toute ma gratitude à Pierre Léna qui a accepté de présider mon jury et qui est responsable de mon "intrusion" dans le monde de la haute résolution angulaire. Je remercie aussi Oscar von der Lühe, Thierry Montmerle et Gérard Rousset qui ont accepté la dure charge de juger mon travail.

J'ai eu la chance de travailler dans une équipe chaleureuse et riche en idées et en personnalités : Françoise Foy dont je me demande où elle trouve l'énergie pour nous soutenir, réduire des données, etc ; Igor Belkine qui doit assimiler en même temps le français et la statistique de Kolmogorov ; Franck Quatrehomme qui a vaillamment tenté d'introduire des PC chez nous (quelle insanité !) ; Christophe Pichon qui a, lui aussi, survécu aux affres de la thèse ; le flegmatique (car britannique) Robert Cannon qui commence à être sérieusement corrompu par notre travail de sape (*i.e.* de francisation) ; Nicholas Devaney qui nous a convaincu que le supplice de Sisyphe n'a rien à envier à la quête du chercheur (*et en plus à la fin il faut mourir...*). L'équipe AIRI quitte Meudon pour Lyon, je regretterai Claire Bentolila qui a subi héroïquement mes bouleversements en matière de correction de la distorsion, mais j'aurai la joie d'y trouver Isabelle Tallon-Bosc qui va devoir supporter mon humour discutable.

J'ai énormément appris et progressé en discutant et en confrontant des idées avec Michel Tallon et Christian Thom : le plus dur, au début, c'est qu'ils avaient souvent raison !

Si je peux faire de l'astrophysique aujourd'hui c'est grâce à des données uniques acquises par la caméra CP40 d'Alain Blazit et avec le tavélographe réalisé par Daniel Bonneau ; merci à tous les deux. Il y a aussi Guy Merlin qui fut d'une aide précieuse lors de ma première mission "tout seul" aux Canaries.

Je suis reconnaissant à Marc Séchaud qui m'a accueilli à la division d'optique physique de l'ONERA pendant mon service national et qui m'a laissé la possibilité de développer mes premiers algorithmes de restauration d'images. A l'ONERA, j'ai trouvé une ambiance stimulante et rencontré des gens motivés dont Gérard Rousset et Vincent Michau avec

lesquels j'ai beaucoup échangé d'idées, Didier Rabaud qui est la preuve que la pratique intensive de l'informatique n'empêche pas d'être un bon vivant et un ami, Jean-Marc Conan qui doit faire des cauchemards peuplés d'images déconvoluées en aveugle, et bien d'autres : Jean Laurent, Pierre-Yves Madec, Jérome Primot, Philippe Couvée, Thierry Marais, ...

Je remercie Chris Dainty et Andreas Glindemann qui m'ont permis de me familiariser avec les techniques barbares de l'analyse bispectrale lors d'un stage à Imperial College. Des collaborations avec d'autres équipes sont engagées : merci à Yura et Ildiko Balega, Claude Roddier, Jérome Bouvier et Margarita Karovska pour les discussions passionnantes passées et à venir.

Heureusement que je n'ai pas fréquenté que de dangereux chercheurs, Valérie, Lucie et Anne m'ont aidé plus qu'elles ne l'imaginent à survivre à cette "crise" de la thèse.

Introduction

A cause de la turbulence atmosphérique, seules les méthodes de l'interférométrie des tavelures et de l'interférométrie plan-pupille permettent d'atteindre la limite de résolution angulaire des grands télescopes terrestres aux longueurs d'onde du visible. Pour les plus grands télescopes, la résolution ainsi atteinte est de quelques centièmes de seconde d'arc contre seulement une seconde d'arc par les méthodes d'imagerie classiques. Depuis les travaux de Labeyrie (1970), l'interférométrie des tavelures a considérablement évolué jusqu'à permettre la restauration d'une *vraie* image à la limite de diffraction instrumentale. Cette résolution met à notre portée l'étude de la structure spatiale de nombreux objets d'intérêt astrophysique : environnement circumstellaire proche des étoiles froides comme les étoiles jeunes pré-séquence principale de type T Tauri ou comme les étoiles géantes évoluées de type Mira, structure de l'ionisation des novae et des super-novae ou encore noyaux galactiques.

Pourtant, on reproche souvent à l'interférométrie des tavelures — mais aussi à la haute résolution angulaire en général — le peu de résultats publiés à ce jour et, ce qui est peut être plus grave, le manque de fiabilité de ces résultats. A mon avis, ces deux défauts sont liés et s'expliquent d'une part par la relative jeunesse de ces techniques qui sont difficiles à mettre en œuvre et qui ont nécessité des développements importants à la fois instrumentaux et théoriques. D'autre part, par le fait que ces développements ont été souvent menés assez indépendamment de la réalité des observations ce qui a conduit à négliger les problèmes liés au rapport signal à bruit très défavorable des mesures de l'interférométrie des tavelures dans le visible et à sous-estimer l'influence des sources de biais dans ces conditions.

C'est conscient que, pour faire de la *bonne* astrophysique, il faut des résultats **fiables** et c'est confiant dans le potentiel astrophysique de l'interférométrie des tavelures que j'ai orienté le travail de recherche que je présente dans ce mémoire : des données propres, des algorithmes **robustes** qui ont nécessité une approche **globale** et, finalement, des résultats **astrophysiques** !

Dans le chapitre 1, je présente les différentes méthodes de l'interférométrie des tavelures sur lesquelles je me suis penché : méthodes de Labeyrie, de Knox et Thompson, du bispectre et de l'holographie auto-référencée. Ces préliminaires me permettent de mettre en évidence la rigueur nécessaire à l'exploitation de ces méthodes.

L'application en astronomie visible des méthodes de l'interférométrie des tavelures

nécessite le plus souvent un détecteur à comptage de photons. Dans le chapitre 2, je décris brièvement notre instrumentation : le tavélographe à quatre canaux et la caméra à comptage de photons CP40. J'en profite pour dresser l'inventaire d'un certain nombre de défauts qui affectent les données brutes et pour décrire comment je les corrige lors du prétraitement des données : suppression des reflets parasites et des photons doubles, correction de la distorsion en comptage de photons.

Au début du chapitre 3, je montre comment calculer des estimateurs sans biais dû au bruit de photons pour les méthodes de l'interférométrie des tavelures. Je modélise ensuite le défaut dit du *trou* du comptage de photons et je démontre qu'il est possible de le corriger pour la mesure du spectre de puissance en utilisant des intercorrélations plutôt que des autocorrélations. Je généralise cette approche pour les méthodes de Knox-Thompson et du bispectre et je montre qu'il est possible de mesurer sans biais le bispectre à partir seulement d'une série de couples d'images courte pose simultanées.

A cause du bruit et des lacunes des mesures, il n'est pas possible de reconstruire directement une image de l'objet observé. C'est pourquoi je propose d'effectuer cette inversion de façon robuste en maximisant la vraisemblance du résultat étant donné les mesures et compte tenu des connaissances a priori sur l'image à reconstruire (positivité, support). Dans le chapitre 4, je montre comment cette approche peut être appliquée au cas de la déconvolution, aux méthodes holographiques de l'interférométrie des tavelures et à la résolution du problème de la déconvolution lorsque la fonction de transfert est inconnue (déconvolution en aveugle).

Dans le chapitre 5, j'explique comment j'exploite au mieux les mesures de l'interférométrie des tavelures. Ainsi, j'applique les algorithmes de déconvolution du chapitre précédent au cas de l'interférométrie des tavelures classique pour obtenir le spectre de puissance de l'objet observé et, en introduisant une *contrainte d'autocorrélation*, je démontre qu'il est possible d'obtenir directement une image de l'objet à partir des seules mesures de spectre de puissance (avec une incertitude d'orientation). Je propose une méthode à la fois récursive et itérative pour reconstruire de façon robuste la phase du spectre de Fourier à partir des mesures fournies par la méthode de Knox-Thompson ou par le bispectre. J'argumente que la reconstruction d'image d'après les seules mesures de phase proposée par Glindemann & Dainty (1993) ne saurait être satisfaisante en astrophysique et je propose une approche plus *globale* qui tient compte des mesures de phase mais aussi des mesures de module. Afin de tester mes algorithmes sur des données réelles, je montre les images de Capella que j'ai reconstruites à partir de données analogiques et à partir de données en comptage de photons.

Ces algorithmes me permettent d'obtenir des résultats fiables et d'intérêt astrophysique que j'ai réunis dans le chapitre 6 . Ces observations concernent des étoiles pré-séquence principale avec la découverte en Hα de la base du jet émanant de T Tau, avec la première mise en évidence du mouvement orbital d'une étoile double pré-séquence principale pour DF Tau et avec la détection dans le visible du compagnon dit *infrarouge* de Z CMa. Je montre aussi une image d'une étoile géante évoluée de type Mira, χ Cygni, obtenue dans une bande d'absorption du TiO.

En conclusion, je fais le point sur les développements que j'envisage à moyen terme.

Chapitre 1

Interférométrie des tavelures en astronomie

La résolution des images longue pose obtenues au foyer d'un grand télescope au sol est rarement meilleure qu'une seconde d'arc ($1''$). Ceci est vrai quel que soit le diamètre D du télescope alors que la limite de résolution angulaire imposée par la diffraction est λ/D à la longueur d'onde λ. Cette dégradation des images est due à la turbulence atmosphérique qui perturbe la phase des ondes électromagnétiques qui la traverse.

En 1970, Labeyrie (1970) a démontré au moyen de l'interférométrie qu'il était possible d'obtenir des informations à la limite de diffraction instrumentale sur la structure spatiale de l'objet observé. Depuis, de nombreuses techniques ont été élaborées pour permettre la reconstruction d'images avec la résolution ultime de l'instrument.

Dans ce chapitre, je rappelle quelques notions relatives aux problèmes de l'imagerie à haute résolution en astronomie. J'introduis les équations fondamentales de formation des images et les définitions des quantités mesurées pour les besoins de l'interférométrie des tavelures. Mon but n'est pas de présenter une revue exhaustive des méthodes de l'interférométrie ou des propriétés de la formation des images en présence de turbulence (pour cela voir Roddier, 1988a, 1981) mais plutôt de fournir les bases nécessaires et suffisantes pour comprendre les chapitres suivants. Aussi, je me limiterai volontairement aux méthodes de l'interférométrie des tavelures que j'ai effectivement pratiquées.

Je profiterai de cette présentation pour relever quelques problèmes intrinsèques aux méthodes de l'interférométrie des tavelures. En particulier la difficulté de la calibration de la fonction de transfert.

1.1 Relation fondamentale de l'imagerie

En général, les objets astrophysiques résolus peuvent être considérés comme des sources étendues dont l'émission est spatialement incohérente. L'image d'une telle source est donc

simplement égale à la superposition des images de chacun de ses points :

$$i(\mathbf{x}) = \int o(\mathbf{y})\, s(\mathbf{x}|\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y} \tag{1.1}$$

où $o(\mathbf{y})$ est l'intensité reçue de l'objet dans la direction $\mathbf{y}$ et $s(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ est l'image d'un point, d'intensité unitaire, occupant la position $\mathbf{y}$ sur le ciel. La fonction $s(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ est la réponse impulsionnelle de l'intrument dans la direction $\mathbf{y}$.

Le domaine d'isoplanétisme du système d'imagerie est le champ angulaire limité pour lequel la forme de la réponse impulsionnelle est la même dans toutes les directions : $s(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ devient simplement $s(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. Si l'objet est contenu dans le domaine d'isoplanétisme alors la relation (1.1) devient :

$$i(\mathbf{x}) = \int o(\mathbf{y}) s(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y} = s(\mathbf{x}) * o(\mathbf{x}), \tag{1.2}$$

$*$ désignant l'opérateur produit de convolution. Cette relation fondamentale de l'imagerie s'exprime par un simple produit pour les transformées de Fourier :

$$I(\mathbf{u}) = S(\mathbf{u})\, O(\mathbf{u}) \tag{1.3}$$

où $\mathbf{u}$ est la fréquence spatiale et $I(\mathbf{u})$, $S(\mathbf{u})$ et $O(\mathbf{u})$ sont respectivement les transformées de Fourier [1] de $i(\mathbf{x})$, $s(\mathbf{x})$ et $o(\mathbf{x})$. $S(\mathbf{u})$ est la fonction de transfert du système de formation d'image.

Les équations exprimant la relation entre l'image observée et la distribution d'intensité de l'objet doivent être considérées avec précaution :

- Tout d'abord, l'équation (1.2) de formation des images suggère qu'il suffit de mesurer la fonction de transfert pour déconvoluer l'image — une simple division dans l'espace des transformées de Fourier — et pouvoir restaurer l'objet. En fait, nous allons voir que la fonction de transfert présente de toute façon une **fréquence de coupure** u_c au-delà de laquelle son module est nul. Il n'est donc pas possible de restaurer l'image de l'objet pour des fréquences spatiales supérieures à u_c.
- Ensuite, à cause de la turbulence atmosphérique, la fonction de transfert varie dans le temps ; les équations (1.2) et (1.3) sont donc **instantanées**. Nous verrons ce que ces équations deviennent lorsque les images sont intégrées sur des temps de pose soit petits, soit grands, devant le temps caractéristique d'évolution de la turbulence.
- Enfin, si les perturbations de chemin optique dues à la turbulence sont pratiquement achromatiques (l'indice de réfraction dépendant peu de la longueur d'onde), en revanche, les perturbations de phase dépendent fortement de la longueur d'onde. La fonction de transfert étant chromatique, les équations obtenues sont donc **monochromatiques**. En astronomie, cela est d'autant plus vrai que la distribution d'intensité de l'objet observé peut considérablement varier avec la longueur d'onde.

Bien que seule la variable de position $\mathbf{x}$ soit explicitement exprimée, il faut garder présent à l'esprit que les grandeurs considérées dépendent aussi de la longueur d'onde λ et du temps t.

[1] Dans ce mémoire, les transformées de Fourier sont notées en lettres majuscules. Ainsi, par exemple, $F(\mathbf{u})$ est la transformée de Fourier de $f(\mathbf{x})$.

1.2 Fréquence de coupure instrumentale

La fonction de transfert instrumentale est l'autocorrélation normalisée de la fonction pupille $P(\mathbf{u})$ de l'instrument (Mariotti, 1989) :

$$S(\mathbf{u}) = \frac{\int P^*(\mathbf{u}')\, P(\mathbf{u}'+\mathbf{u})\, \mathrm{d}\mathbf{u}'}{\int |P(\mathbf{u})|^2\, \mathrm{d}\mathbf{u}}\,, \tag{1.4}$$

où $\mathbf{u}$ est la fréquence spatiale sans dimension :

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}/\lambda, \tag{1.5}$$

$\mathbf{r}$ étant la position dans le plan pupille et λ la longueur d'onde.

Pour un système optique parfait (*i.e.* sans aberration), la fonction pupille vaut 1 à l'intérieur de la pupille de l'instrument et est nulle ailleurs ; elle peut donc s'écrire simplement :

$$P(\mathbf{u}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r} = \lambda\mathbf{u} \in \text{pupille}, \\ 0 & \text{si } \mathbf{r} = \lambda\mathbf{u} \notin \text{pupille}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Pour un instrument qui présente des défauts, $P(\mathbf{u})$ est une fonction complexe dont le module (inférieur ou égal à 1) et la phase rendent compte de l'atténuation de l'onde incidente et des aberrations.

Si D est la plus grande dimension du support de la pupille, alors, quelle que soit la forme de la pupille, les propriétés suivantes sont toujours vérifiées :

- $P^*(\mathbf{u}')\, P(\mathbf{u}'+\mathbf{u}) = 0\ \forall \mathbf{u}'$ si $\|\mathbf{u}\| > D/\lambda$;
- $\exists\ (\mathbf{u}, \mathbf{u}')$ tels que $P^*(\mathbf{u}')\, P(\mathbf{u}'+\mathbf{u}) \neq 0$ et $\|\mathbf{u}\| = D/\lambda$.

Ce qui donne pour la fonction de transfert :

- $S(\mathbf{u}) = 0$ si $\|\mathbf{u}\| > D/\lambda$;
- $\exists\ \mathbf{u}$ tel que $S(\mathbf{u}) \neq 0$ et $\|\mathbf{u}\| = D/\lambda$.

La plus grande fréquence spatiale accessible avec un tel instrument est donc [2] D/λ.

Pour un télescope de diamètre D,

$$u_\mathrm{c} = \frac{D}{\lambda} \tag{1.7}$$

est la fréquence de coupure optique : toutes les fréquences spatiales de module inférieur ou égal à u_c sont transmises. Par contre, pour un interféromètre à deux petits télescopes (interféromètre de Michelson), séparés d'une distance D (base de l'interféromètre), D/λ est la seule fréquence spatiale accessible si on néglige le diamètre des télescopes.

[2] Pour les fréquences spatiales $\mathbf{u}$ telles que $\|\mathbf{u}\| \leq D/\lambda$, le fait que la fonction de transfert $S(\mathbf{u})$ soit nulle ou non dépend de la forme de pupille.

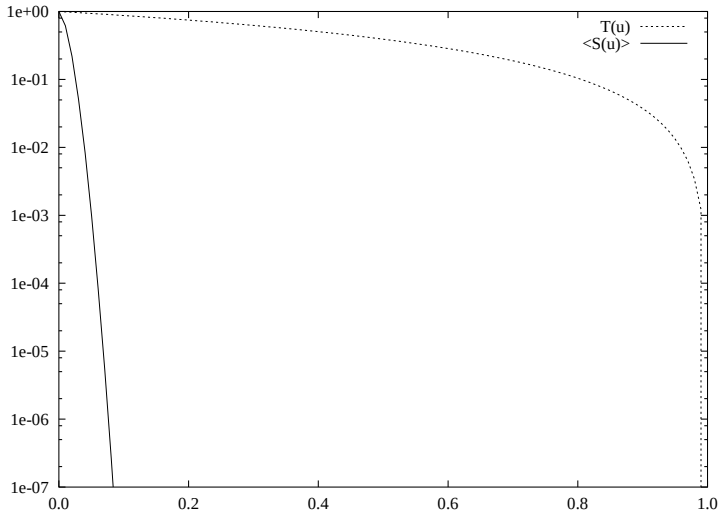


FIG. 1.1 – FTM longue pose (trait plein) comparée à la fonction de transfert d'un télescope (trait pointillé) pour un rapport D/r_0 de 30 (la fréquence spatiale est en unité de la fréquence de coupure intrumentale).

En terme de résolution :

$$\alpha_c = \frac{\lambda}{D} \tag{1.8}$$

est la dimension angulaire du détail le plus fin que permet de résoudre un télescope de diamètre D à la longueur d'onde λ. Nous retrouvons là un résultat bien connu de l'influence de la diffraction sur le pouvoir de résolution des instruments d'optique. Au mieux, et quelles que soient les conditions atmosphériques et les méthodes de restauration de l'image employées, cet angle est la limite supérieure absolue de résolution de l'instrument.

1.3 Fonction de transfert longue pose en présence de turbulence

Au sein de l'atmosphère terrestre, la turbulence engendre des inhomogénéités de l'indice de réfraction qui perturbent la phase des ondes électromagnétiques qui la traversent. Dans l'approximation des petites perturbations, l'influence de la turbulence est équivalente à celle d'un écran de phase (Roddier, 1981). Ainsi la fonction pupille du système atmosphère-télescope devient :

$$P(\mathbf{u})\, e^{\jmath\phi(\mathbf{u})}$$

où $P(\mathbf{u})$ est la fonction pupille du télescope et $\phi(\mathbf{u})$ la perturbation de phase turbulente. La phase $\phi(\mathbf{u})$ est une variable aléatoire de loi normale et résultant d'un processus ergodique dont les propriétés statistiques découlent de celles de la turbulence et sont connues (*cf.* Roddier, 1981, et références citées).

Si l'objet observé n'est pas rapidement variable, alors, lorsqu'on intègre l'image de cet objet pendant une durée grande devant le temps caractéristique d'évolution de la turbulence, l'équation (1.3) devient :

$$\langle I(\mathbf{u})\rangle = \langle S(\mathbf{u})\rangle\, O(\mathbf{u}) \tag{1.9}$$

où $\langle\ \rangle$ représente une moyenne temporelle ou la moyenne de plusieurs images en pose courte. La fonction de transfert longue pose est :

$$\langle S(\mathbf{u})\rangle = \frac{\int P^*(\mathbf{u}')\, P(\mathbf{u}'+\mathbf{u})\, \langle \mathrm{e}^{\jmath[\phi(\mathbf{u}'+\mathbf{u})-\phi(\mathbf{u}')]}\rangle\, \mathrm{d}\mathbf{u}'}{\int |P(\mathbf{u})|^2\, \mathrm{d}\mathbf{u}}. \tag{1.10}$$

Comme $\phi(\mathbf{u})$ est une variable gaussienne $\phi(\mathbf{u}'+\mathbf{u}) - \phi(\mathbf{u}')$ l'est aussi et par suite :

$$\langle \mathrm{e}^{\jmath[\phi(\mathbf{u}'+\mathbf{u})-\phi(\mathbf{u}')]}\rangle = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\langle[\phi(\mathbf{u}'+\mathbf{u})-\phi(\mathbf{u}')]^2\rangle} \tag{1.11}$$

Etant donné l'ergodicité de ϕ, la moyenne temporelle $\langle[\phi(\mathbf{u}'+\mathbf{u})-\phi(\mathbf{u}')]^2\rangle$ est égale à la moyenne spatiale (*i.e.* sur $\mathbf{u}'$) et ne dépend donc que de $\mathbf{u}$. En notant la fonction de cohérence spatiale de ϕ :

$$B(\mathbf{u}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\langle[\phi(\mathbf{u}'+\mathbf{u})-\phi(\mathbf{u}')]^2\rangle} \tag{1.12}$$

on obtient finalement la fonction de transfert longue pose :

$$\langle S(\mathbf{u})\rangle = B(\mathbf{u})T(\mathbf{u}) \tag{1.13}$$

où $T(\mathbf{u})$ est la fonction de transfert de l'instrument seul. Pour les images longue pose, l'influence de la turbulence peut être modélisée par un filtrage linéaire ; nous verrons que ce n'est plus le cas pour les fonctions de transfert de l'interférométrie des tavelures.

Pour une turbulence vérifiant la statistique de Kolmogorov (Fried, 1966) :

$$B(\mathbf{u}) \simeq \exp\left[-3.44\left(\frac{\lambda\,\|\mathbf{u}\|}{r_0}\right)^{5/3}\right] \tag{1.14}$$

où r_0 est le paramètre de Fried qui caractérise la cohérence spatiale du front d'onde ϕ. Lorsque l'image longue pose est la somme d'images instantanées recentrées sur leur photocentre, l'expression de la fonction de cohérence spatiale devient :

$$B(\mathbf{u}) \simeq \exp\left[-3.44\left(\frac{\lambda\,\|\mathbf{u}\|}{r_0}\right)^{5/3}\left(1-\left(\frac{\lambda\,\|\mathbf{u}\|}{D}\right)^{1/3}\right)\right] \tag{1.15}$$

Si les effets de la turbulence sur la résolution l'emportent (*i.e.* $D \gg r_0$), la fonction de transfert des images longue pose est pratiquement égale à la fonction de cohérence spatiale du front d'onde. La fréquence de coupure de ces images est égale à la fréquence de coupure atmosphérique

$$u_0 = \frac{r_0}{\lambda} \tag{1.16}$$

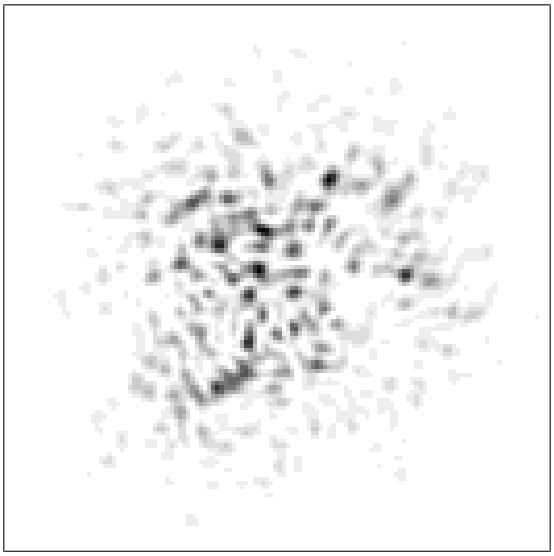


FIG. 1.2 – Image tavelée d'une source non résolue. Simulation avec $D/r_0 \simeq 20$.

Pour une turbulence normalement développée et dans le domaine visible, r_0 est de l'ordre d'une dizaine de centimètres ce qui équivaut à un angle de résolution sur le ciel $\lambda/r_0 \simeq 1''$ contre $\lambda/D \simeq 0''.025$ pour un télescope de classe 4 mètres dans le visible (bande V). C'est la limite effective de résolution en pose longue des instruments au sol quel que soit leur diamètre. C'est aussi cette limite que s'efforcent de dépasser les méthodes interférométriques d'imagerie à haute résolution.

1.4 Images courte pose

Avec un grand télescope et en pose suffisamment courte pour "geler" les effets de la turbulence, les images d'une source ponctuelle à l'infini présentent une structure tavelée (*i.e.* granulée, *cf.* figure 1.2). Chacune de ces tavelures a sensiblement la taille $\sim \lambda/D$ de l'image que donnerait la pupille du télescope hors atmosphère. Tandis que l'ensemble des tavelures est approximativement contenu dans la tache image de dimension $\sim \lambda/r_0$ que produirait la diffraction par une pupille de diamètre r_0. Comme la figure des tavelures varie rapidement, une longue pose brouille les détails fins que constituent les tavelures et ne laisse plus apparaître qu'une image de la taille de l'enveloppe des tavelures. Les images longue pose d'un objet résolu subissent donc un étalement qui limite leur finesse à λ/r_0 alors que la limite de diffraction instrumentale λ/D peut être beaucoup plus petite.

Une image courte pose est le résultat instantané des interférences de l'onde incidente diffractée par **toute** la pupille de l'instrument ; c'est pourquoi les images tavelées doivent contenir des informations spatiales à la limite de diffraction du télescope. Cette information à la limite de diffraction peut être recouvrée par l'étude des corrélations dans l'image courte pose.

Pour s'en convaincre il suffit de considérer la figure 1.3 qui montre l'image courte pose

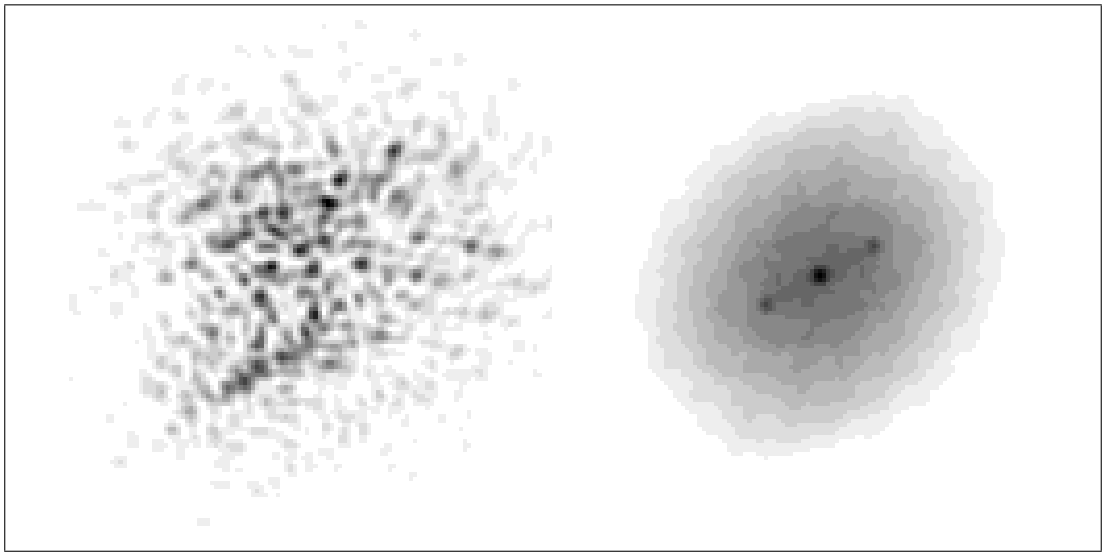


FIG. 1.3 – Simulation de l'image courte pose d'une étoile double et son autocorrélation. Pour comparaison, la fonction d'étalement de point est la même que celle de la figure 1.2.

simulée d'une étoile double et son autocorrélation. La figure des tavelures ne permet pas de déterminer la nature de l'objet observé alors que les trois pics dans l'autocorrélation montrent clairement que c'est une binaire (la figure 1.4 montre une vue en perspective de cette autocorrélation). Pour ce type d'objet, le pic central résulte de l'autocorrélation de chaque composante avec elle-même pour chaque tavelure tandis que les deux pics secondaires sont dus aux intercorrélations entre les deux composantes toujours pour chaque tavelure. Le dôme résulte des intercorrélations entre des tavelures différentes. Comme il n'y a pas de relation de cohérence entre deux tavelures différentes, ce dôme ne contient pas d'information à haute résolution angulaire. On peut noter que la position et l'intensité des pics de corrélation permet de déduire la différence de magnitude, la séparation et l'orientation de cette étoile double. Toutefois il subsiste une incertitude sur cette orientation : elle est déterminée modulo un angle de 180° à partir de l'autocorrélation. Il faut utiliser d'autres estimateurs que l'autocorrélation pour lever cette ambiguïté.

L'interférométrie des tavelures exploite cette propriété des images courte pose pour restaurer des informations jusqu'à la fréquence de coupure, $u_c = D/\lambda$, de l'instrument. D'une façon générale, toutes les techniques de l'interférométrie des tavelures sont basées sur l'intégration d'estimateurs qui sont des fonctions de corrélation moyennes (pas forcément de simples produits de corrélation) des images instantanées.

1.5 Interférométrie des tavelures classique

Le spectre de puissance $\langle I^{(2)}(\mathbf{u})\rangle$ étant la transformée de Fourier de l'autocorrélation moyenne des images courte pose, il préserve de même une partie de l'information à haute résolution angulaire. Ainsi, Labeyrie (1970) a effectivement démontré que les images ins-

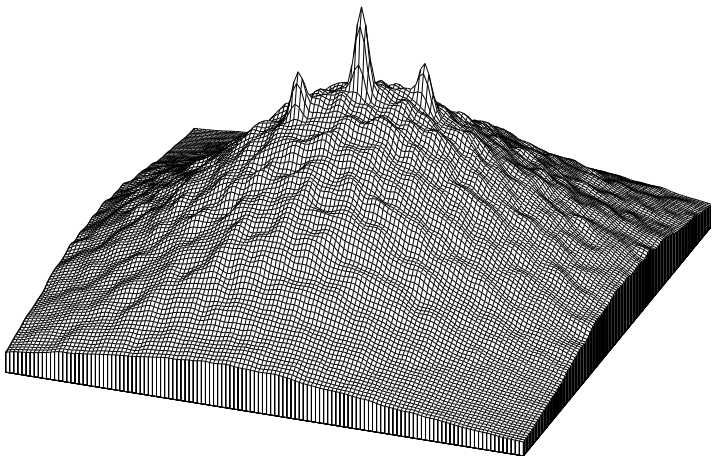


FIG. 1.4 – Autocorrélation de l'image courte pose de la figure précédente : les trois pics de corrélations caractéristiques de l'objet, ici une étoile double, sont clairement visibles.

tantanées contenaient de l'information à la limite de diffraction instrumentale sur la structure spatiale de l'objet observé en intégrant le spectre de puissance des images courte pose :

$$\langle I^{(2)}(\mathbf{u})\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle |I(\mathbf{u})|^2\rangle. \tag{1.17}$$

Compte tenu de la fonction de transfert instantanée $S(\mathbf{u})$, et en supposant que la distribution d'intensité de l'objet observé ne change pas pendant les observations, $\langle I^{(2)}(\mathbf{u})\rangle$ peut se mettre sous la forme :

$$\langle I^{(2)}(\mathbf{u})\rangle = \langle |S(\mathbf{u})|^2\rangle |O(\mathbf{u})|^2, \tag{1.18}$$

où l'on reconnaît le spectre de puissance de l'objet

$$O^{(2)}(\mathbf{u}) = |O(\mathbf{u})|^2 \tag{1.19}$$

et le spectre de puissance moyen des fonctions d'étalement de point instantanées

$$\langle S^{(2)}(\mathbf{u})\rangle = \langle |S(\mathbf{u})|^2\rangle \tag{1.20}$$

qui peut être vu comme la fonction de transfert pour le spectre de puissance.

Alors que la fonction de transfert $\langle S(\mathbf{u})\rangle$ d'une image longue pose s'annule au delà de la fréquence de coupure atmosphérique, $\langle S^{(2)}(\mathbf{u})\rangle$ est non nulle jusqu'à la fréquence de coupure instrumentale. Ainsi, il suffit de calibrer $\langle S^{(2)}(\mathbf{u})\rangle$ en observant une source ponctuelle non résolue pour obtenir le module du spectre de Fourier de l'objet observé jusqu'à la limite de diffraction :

$$|O(\mathbf{u})| = \sqrt{\frac{\langle I(\mathbf{u})^{(2)}\rangle}{\langle S^{(2)}(\mathbf{u})\rangle}} \qquad \text{pour } \|\mathbf{u}\| \leq \frac{D}{\lambda} \tag{1.21}$$

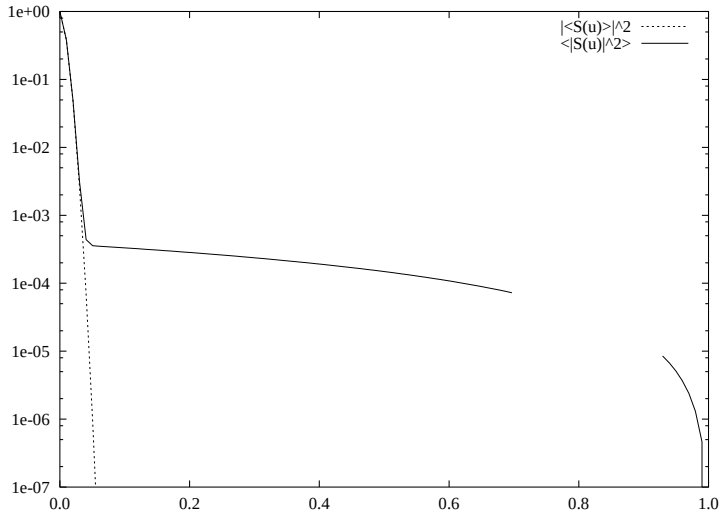


FIG. 1.5 – Profils comparés des fonctions de transfert pour les images longue pose et pour le spectre de puissance moyen des images courte pose ($D/r_0 = 30$, fréquence spatiale en unité de la fréquence de coupure du télescope).

où $\langle S^{(2)}(\mathbf{u})\rangle$ est le spectre de puissance moyen des images courte pose de l'étoile de référence.

Pour un télescope de diamètre D grand devant le paramètre de Fried r_0, Korff (1973) a obtenu les expressions asymptotiques à basse et à haute fréquence spatiale de la fonction de transfert $\langle S^{(2)}(\mathbf{u})\rangle$:

$$\langle S^{(2)}(\mathbf{u})\rangle = \begin{cases} |T(\mathbf{u})|^2 \exp\left(-6.88\left(\frac{\lambda\|\mathbf{u}\|}{r_0}\right)^{\frac{5}{3}}\left(1-\left(\frac{\lambda\|\mathbf{u}\|}{D}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right) & \text{pour } \|\mathbf{u}\| \ll \frac{r_0}{\lambda}, \\ 0.342\left(\frac{r_0}{D}\right)^2 T_0(\mathbf{u}) & \text{pour } \|\mathbf{u}\| \gg \frac{r_0}{\lambda}, \end{cases} \tag{1.22}$$

où $T(\mathbf{u})$ est la fonction de transfert du télescope *réel* et $T_0(\mathbf{u})$ est la fonction de transfert du télescope *parfait* (*i.e.* sans aberrations). La figure 1.5 compare les fonctions de transfert $\langle S(\mathbf{u})\rangle$ et $\langle S^{(2)}(\mathbf{u})\rangle$ pour un rapport D/r_0 de 30 ce qui correspond à un *seeing* de 1″ pour un télescope de classe 4 mètres dans le visible. On remarque que la fonction de transfert en longue pose s'annulle à partir de la fréquence de coupure atmosphérique alors que si la fonction de transfert en interférométrie des tavelures est sérieusement atténuée à partir de la fréquence de coupure atmosphérique r_0/λ, elle reste strictement supérieure à zéro jusqu'à la fréquence de coupure instrumentale D/λ.

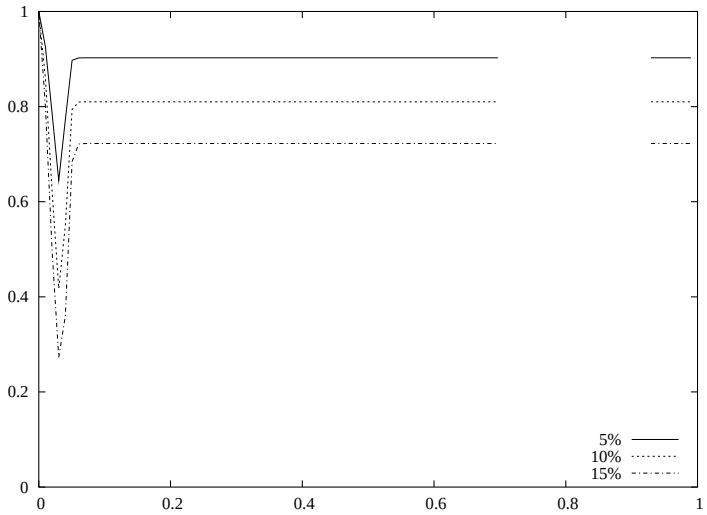


FIG. 1.6 – Effet des fluctuations du *seeing* pour la calibration de la fonction de transfert $\langle |S(\mathbf{u})|^2 \rangle$. Les courbes représentent le profil du spectre d'un objet non résolu observé dans des conditions telles que $D/r_0 \simeq 30$ et calibré par une référence observée dans des conditions de turbulence 5 %, 10 % et 15 % meilleures.

1.5.1 Calibration de la fonction de transfert

La mesure de la fonction de transfert pour le spectre de puissance moyen des images courte pose peut se faire en observant une source non résolue ailleurs sur le ciel et à un autre moment que l'objet. Cette mesure ne sera évidemment valable que si les caractéristiques de la turbulence — au sens des fluctuations de $\langle S^{(2)}(\mathbf{u}) \rangle$ — ne changent pas entre les observations de l'objet et celles de sa référence. En effet, d'après l'équation (1.22), une variation du paramètre de Fried affecte la partie basse fréquence de $\langle S^{(2)}(\mathbf{u}) \rangle$ d'une façon qui dépend de la fréquence spatiale. Par contre pour la partie haute fréquence de $\langle S^{(2)}(\mathbf{u}) \rangle$, les fluctuations de r_0 résultent en une multiplication par un facteur constant. La figure 1.6 met en évidence l'effet non-linéaire de la mauvaise calibration de la fonction de transfert sur les basses fréquences spatiales du spectre de puissance.

En pratique, les fluctuations de *seeing* peuvent être importantes même si les conditions de turbulence sont excellentes. Ainsi, au CFH, nous avons observé des variations de r_0 de l'ordre de 10 % à 25 % sur des durées d'observation d'une dizaine de minutes dans des conditions de turbulence bonnes par ailleurs : $r_0 \simeq 20$ cm. Par conséquent, une calibration correcte de la fonction de transfert $\langle |S(\mathbf{u})|^2 \rangle$ nécessite un minimum de précautions.

Afin de limiter l'influence des variations des conditions de turbulence sur la calibration, il faut observer l'objet et sa référence à peu de temps d'intervalle (typiquement quelques minutes dans le visible). De plus, comme r_0 dépend beaucoup de la position sur le ciel (notamment de l'angle zénithal), il faut choisir une référence qui soit angulairement proche de l'objet (typiquement à moins d'un degré). En réalité, même en prenant toutes ces précautions, les basses fréquences spatiales du spectre de puissance de la dis-

tribution d'intensité de l'objet ainsi obtenu sont souvent considérablement affectées par ce problème. C'est pourquoi, Christou et al. (1985) ont proposé de regrouper pour le traitement les observations de l'objet et de la référence faites pour des valeurs de r_0 comparables. Ces méthodes de regroupement des données peuvent être améliorées en utilisant des pondérations apropriées (*e.g.* von der Lühe, 1984).

Lorsque le volume de données acquises est insuffisant, il n'est pas envisageable d'en traiter des sous-ensembles séparément. De plus, on ne peut pas écarter la possibilité que la source de référence choisie soit résolue par le télescope. Ceci explique que pour résoudre le problème de la calibration, des approches qui ne nécessitent pas de source de référence ont été envisagées (*e.g.* Welter & Worden, 1978; Bruck & Sodin, 1980).

D'une façon générale en interférométrie des tavelures, les fluctuations de r_0 rendent trés délicate la calibration des fonctions de transfert ; Perrier (1989) discute plus en détail des différents problèmes liés à l'exploitation des mesures de l'interférométrie des tavelures. Dans la partie de ce mémoire consacrée à l'exploitation des mesures, je montre comment il est possible de s'affranchir de ce problème, soit en "interpolant" les valeurs du spectre aux basses fréquences spatiales, soit par une méthode d'auto-calibration. Dans le dernier cas, aucune mesure de la fonction de transfert n'est nécessaire.

1.5.2 Rapport signal à bruit

Pour une forte turbulence ($r_0 \ll D$), Dainty & Greenaway (1979) ont dérivé la valeur du rapport signal à bruit à haute fréquence pour le spectre de puissance moyen des images courte pose :

$$\frac{\langle I^{(2)}(\mathbf{u})\rangle}{\sigma_{\langle I^{(2)}(\mathbf{u})\rangle}} \underset{\|\mathbf{u}\|\gg r_0/\lambda}{=} \frac{N\,T(\mathbf{u})\,|O(\mathbf{u})|^2\,\sqrt{M}}{n + N\,T(\mathbf{u})\,|O(\mathbf{u})|^2} \tag{1.23}$$

où M est le nombre d'images, N est le nombre de photons par image et

$$n \simeq 2.30 \left(\frac{D}{r_0}\right)^2 \tag{1.24}$$

est le nombre de tavelures. Lorsque $N\,T(\mathbf{u})\,|O(\mathbf{u})|^2 \ll n$ alors le bruit de photons domine. Dans le cas inverse, c'est le bruit de turbulence qui domine et le rapport signal à bruit sature à $\sqrt{M}$.

1.6 Méthode de Knox-Thompson et bispectre

Lorsque la seule information disponible est l'ensemble des images courte pose de l'objet, l'interférométrie des tavelures traditionnelle ne permet de mesurer que le module du spectre de l'objet. Afin de reconstruire une image de l'objet, il est nécessaire d'estimer aussi la phase de son spectre.

Pour cela, différentes méthodes ont été proposées qui sont basées sur l'intégration d'estimateurs qui contrairement à l'autocorrélation (ou, de manière équivalente, au spectre de puissance) préservent l'information de phase du spectre de l'objet. Parmi ces méthodes, les plus largement utilisées sont celle de Knox-Thompson (Knox & Thompson, 1974; Knox, 1976) et celle du bispectre (Weigelt, 1977; Lohmann et al., 1983; Wirnitzer, 1985).

Bien qu'à l'origine, ces deux techniques aient été nettement différenciées, on s'accorde aujourd'hui à les trouver comparables. Dans cette partie je présente succintement la méthode de Knox-Thompson et celle du bispectre (appelée *speckle masking* à l'origine). Je décris en annexe H les principales propriétés des estimateurs liés à ces méthodes ainsi que les choix que j'ai faits pour les mettre en œuvre.

1.6.1 Définitions

Dans l'espace image, la transformée de Knox-Thompson d'une image $i(\mathbf{x})$ peut être obtenue en modifiant le produit de corrélation :

$$i^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{x},\mathbf{v}) = \int i^*(\mathbf{y}) i(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \mathrm{e}^{\jmath 2\pi \mathbf{v}\mathbf{y}} \,\mathrm{d}\mathbf{y} \tag{1.25}$$

dont la transformée de Fourier en $\mathbf{x}$ est :

$$\begin{aligned} I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \iint i^*(\mathbf{y}) i(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \mathrm{e}^{\jmath 2\pi \mathbf{v}\mathbf{y}} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi \mathbf{u}\mathbf{x}} \,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{y} \\ &= I(\mathbf{u}) \int i^*(\mathbf{y}) \mathrm{e}^{\jmath 2\pi (\mathbf{u}+\mathbf{v})\mathbf{y}} \,\mathrm{d}\mathbf{y} \\ &= I(\mathbf{u}) I^*(\mathbf{u}+\mathbf{v}). \end{aligned} \tag{1.26}$$

De même que le spectre de puissance est la transformée de Fourier de l'autocorrélation moyenne des images courte pose, le bispectre est la (double) transformée de Fourier de la triple corrélation moyenne des images courte pose :

$$\langle i^{(3)}(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle = \langle \int i(\mathbf{z}) i(\mathbf{x}+\mathbf{z}) i(\mathbf{y}+\mathbf{z}) \,\mathrm{d}\mathbf{z}\rangle \tag{1.27}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{TF}} \langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle = \langle I(\mathbf{u}) I(\mathbf{v}) I(-\mathbf{u}-\mathbf{v})\rangle. \tag{1.28}$$

Comme les images $i(\mathbf{x})$ sont des fonctions réelles, leurs transformées de Fourier sont hermitiques (*i.e.* $I(-\mathbf{u}) = I^*(\mathbf{u})$). Le bispectre des images peut donc se mettre sous la forme :

$$\langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle = \langle I(\mathbf{u}) I(\mathbf{v}) I^*(\mathbf{u}+\mathbf{v})\rangle. \tag{1.29}$$

En tenant compte des effets conjugués de la turbulence et du télescope, et si la distribution d'intensité de l'objet reste identique pendant les observations, alors la transformée de

Knox-Thompson des images observées devient :

$$\begin{aligned} \langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle &= \langle S(\mathbf{u})S^*(\mathbf{u}+\mathbf{v})\rangle O(\mathbf{u})O^*(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= \langle S^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle O^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \end{aligned} \tag{1.30}$$

où j'ai fait apparaître la fonction de transfert pour la transformée de Knox-Thompson

$$\langle S^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle S(\mathbf{u})S^*(\mathbf{u}+\mathbf{v})\rangle$$

et la transformée de Knox-Thompson de l'objet

$$O^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} O(\mathbf{u})O^*(\mathbf{u}+\mathbf{v}).$$

De même, pour le bispectre des images observées, il vient :

$$\begin{aligned} \langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle &= \langle S(\mathbf{u})S(\mathbf{v})S^*(\mathbf{u}+\mathbf{v})\rangle O(\mathbf{u})O(\mathbf{v})O^*(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= \langle S^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle O^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \end{aligned} \tag{1.31}$$

où apparaît la fonction de transfert bispectrale

$$\langle S^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle S(\mathbf{u})S(\mathbf{v})S^*(\mathbf{u}+\mathbf{v})\rangle$$

et le bispectre de l'objet

$$O^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} O(\mathbf{u})O(\mathbf{v})O^*(\mathbf{u}+\mathbf{v}).$$

Les fonctions de transfert $\langle S^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ et $\langle S^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ peuvent être estimées à partir des observations d'une source de référence non résolue. De même que pour l'interférométrie des tavelures traditionnelle, cette source de référence doit être proche de l'objet étudié (typiquement à moins d'un degré de distance angulaire). La division de la transformée de Knox-Thompson $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ ou du bispectre $\langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ des images courte pose par la fonction de transfert correspondante conduit à la transformée de Knox-Thompson $O^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ ou au bispectre $O^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ de l'objet. La fréquence de coupure de ces fonctions de transfert étant celle du télescope (Lohmann et al., 1983; Roddier, 1986), la transformée de Knox-Thompson ou le bispectre de l'objet peuvent ainsi être mesurés jusqu'à la limite de diffraction instrumentale.

1.6.2 Inversion

Le bispectre et la transformée de Knox-Thompson se prêtent bien à une inversion de proche en proche : une estimation de $O(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ peut être obtenue à partir de $O^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})$

et de $O(\mathbf{u})$ ou à partir de $O^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})$, de $O(\mathbf{u})$ et de $O(\mathbf{v})$:

$$O(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \begin{cases} \dfrac{O^{(\mathrm{KT})*}(\mathbf{u},\mathbf{v})}{O^{*}(\mathbf{u})} & \text{(Knox-Thompson)}, \\ \dfrac{O^{(3)*}(\mathbf{u},\mathbf{v})}{O^{*}(\mathbf{u})O^{*}(\mathbf{v})} & \text{(bispectre)}. \end{cases} \tag{1.32}$$

Par itérations successives, tout le spectre de l'objet peut ainsi être reconstruit à partir de sa transformée de Knox-Thompson $O^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ ou de son bispectre $O^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ et de la connaissance du spectre à quelques fréquences spatiales [3] — *i.e.* $O(0,0)$ pour la méthode de Knox-Thompson et $O(0,0)$ et $O(0,1)$ ou $O(1,0)$ pour le bispectre.

En théorie, il est donc possible de restaurer l'image d'un objet à la limite de diffraction instrumentale à partir de la transformée de Knox-Thompson ou du bispectre des images courte pose de l'objet et d'une calibration de la fonction de transfert correspondante. Pour cela, la méthode de Knox-Thompson et le bispectre sont supérieurs à l'interférométrie classique qui ne fournit qu'une information partielle sur la structure spatiale de l'objet observé.

En pratique, l'inversion de proche en proche s'avère peu robuste vis-à-vis du bruit de mesure. De plus, cela nécessite la calibration de la fonction de transfert, $\langle S^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ ou $\langle S^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$, ce qui présente le même type de désavantages que pour l'obtention du module de Fourier de l'objet à partir du spectre de puissance moyen des images courte pose.

1.6.3 Rapport signal à bruit

La qualité des fonctions de transfert $\langle S^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ et $\langle S^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ est loin d'être uniforme : elle dépend du paramètre de Fried, r_0, et des normes des fréquences spatiales $\|\mathbf{u}\|$ et $\|\mathbf{v}\|$.

Lorsque $\|\mathbf{u}\| \gg r_0/\lambda$ et $\|\mathbf{v}\| \to 0$, la variance de la phase de $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ a été déterminée par Fontanella & Seve (1987).

Des expressions théoriques des variances du module et de la phase du bispectre ont été calculées respectivement par Wirnitzer (1985) et par Roddier & Christou (1988) dans le régime des hautes fréquences, *i.e.* pour $\|\mathbf{u}\| \gg r_0/\lambda$ et $\|\mathbf{v}\| \gg r_0/\lambda$. Malheureusement comme l'ont remarqué Ayers et al. (1988), ce régime fréquentiel est celui pour lequel le rapport signal à bruit est le plus mauvais. En pratique et justement pour des raisons de qualité de signal, le bispectre d'images bidimensionnelles est intégré pour $\|\mathbf{v}\| \leq r_0/\lambda$. Ayers et al. (1988) ont obtenu des expressions asymptotiques, *i.e.* pour des flux très bas ou très élevés, pour le rapport signal à bruit.

On retiendra de toutes ces études que, pour les grands télescopes de diamètre $D \gg r_0$, le rapport signal à bruit est d'autant meilleur que l'une, ou mieux les deux, des fréquences spatiales $\mathbf{u}$ ou $\mathbf{v}$ a un module petit devant la fréquence de coupure atmosphérique r_0/λ.

[3] Plus rigoureusement, Lohmann et al. (1983), dans le cas discret, puis Bartelt et al. (1984), dans le cas continu, ont démontré que le bispectre était inversible à une translation près.

1.6.4 Intégration des sous-plans

Il n'est pas nécessaire d'intégrer $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ et de $\langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ pour tous les couples de fréquences spatiales $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ pour pouvoir reconstruire le spectre de l'objet. Par exemple, les deux sous-plans générés par $\mathbf{v}_1 = (1,0)$ et $\mathbf{v}_2 = (0,1)$ suffisent à reconstruire le spectre complet de l'objet. On définit le sous-plan généré par $\mathbf{v}_k$ pour la méthode de Knox-Thompson et pour le bispectre les ensembles de fréquences spatiales

$$\mathcal{P}^{(\mathrm{KT})}{}_{\mathbf{v}_k} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{u} \text{ tel que } (\mathbf{u},\mathbf{v}_k) \in \mathcal{S}^{(\mathrm{KT})}\} \tag{1.33}$$

$$\mathcal{P}^{(3)}{}_{\mathbf{v}_k} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{u} \text{ tel que } (\mathbf{u},\mathbf{v}_k) \in \mathcal{S}^{(3)}\} \tag{1.34}$$

où $\mathcal{S}^{(\mathrm{KT})}$ et $\mathcal{S}^{(3)}$ sont respectivement les supports de la méthode de Knox-Thompson et du bispectre.

A cause du volume important de $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ et de $\langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ pour des images bidimensionnelles, il est souvent impossible de stocker ces quantités dans leur totalité. Par contre, l'utilisation de mesures suplémentaires permet une estimation plus fiable du spectre de l'objet. Cela reste vrai même si ces mesures ne sont pas complètement statistiquement indépendantes. Il faut donc trouver un compromis entre la quantité de mesures effectuées et la qualité de la reconstruction obtenue. Afin de réduire le volume de données à traiter, plusieurs approches ont été proposées pour sélectionner un sous-ensemble de $\mathcal{S}^{(\mathrm{KT})}$ et de $\mathcal{S}^{(3)}$ suffisant pour reconstruire tout le spectre de l'objet.

Pour le bispectre, Lohmann et al. (1983) et Northcott et al. (1988) ont proposé de se ramener à l'intégration de bispectres de fonctions monodimensionnelles en projetant les images courte pose sur un jeu de quelques directions. Ces projections dans le plan image sont équivalentes à extraire des coupes dans l'espace de Fourier suivant les mêmes directions et passant par l'origine. Cette technique s'apparente à la tomographie puisque l'inversion de ce jeu de bispectres revient à reconstruire des coupes du spectre de l'image de l'objet. Malheureusement, cette approche impose de multiples interpolations, pour effectuer les projections, d'une part, et pour recombiner les coupes en un spectre de Fourier, d'autre part. Ces interpolations rendent ce type d'approche relativement compliqué et délicat si on veut éviter de générer un bruit de discrétisation. De plus, une inversion globale du jeu de bispectres qui conduit à une estimation robuste du spectre de l'objet n'est pas facilement envisageable.

La méthode sans doute la plus simple à mettre en oeuvre a été proposée par Northcott et al. (1988) et consiste à intégrer le bispectre $\langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ pour seulement quelques fréquences spatiales $\mathbf{v}$ particulières. Comme je l'ai défini plus haut, le sous-ensemble $\langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ à $\mathbf{v}$ fixé constitue le sous-plan du bispectre généré par $\mathbf{v}$. Cette technique me semble la plus intéressante lorsque le bruit devient important — ce qui est toujours le cas lorsque l'on cherche à obtenir une image de l'objet à partir du minimum d'images courte pose — car elle permet très simplement de sélectionner les points du bispectre pour lesquel le rapport signal à bruit est le meilleur. A cette fin, il suffit d'intégrer les sous-plans pour les valeurs les plus faibles de $\|\mathbf{v}\|$.

A l'origine, la méthode de Knox-Thompson a été appliquée en intégrant uniquement les deux sous-plans générés par $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ et $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$. Par analogie avec le bispectre, il est possible de mesurer $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\rangle$ pour davantage de sous-plans. Cela représente un gain en terme de qualité pour le spectre restauré.

1.6.5 Influence des aberrations de phase

La méthode de Knox-Thompson a d'abord été proposée pour les très petites normes de la fréquence spatiale $\mathbf{v}$. Dans ce cas, la fonction de transfert $\langle S^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\rangle$ est pratiquement celle de l'interférométrie des tavelures traditionnelle :

$$\langle S^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\rangle \underset{\|\mathbf{v}\| \ll r_0/\lambda}{\simeq} \langle S^{(2)}(\mathbf{u})\rangle, \tag{1.35}$$

et n'intervient donc pas dans le terme de phase de $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\rangle$. Plus généralement, Dainty (1975) a démontré que $\langle S^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\rangle$ est une fonction réelle tant que les aberrations de phase fixes (*e.g.* celles de l'instrument) restent petites devant la distorsion de phase introduite par l'atmosphère.

Lohmann et al. (1983) ont démontré que l'espérance de la fonction de transfert bispectrale est une fonction réelle (de partie imaginaire nulle) même lorsque le télescope présente des aberrations. Roddier (1986) justifie l'insensibilité de la phase du bispectre aux aberrations du télescope par la présence de termes de clôture de phase dans le bispectre. Ces termes sont effectivement insensibles aux distorsions de phases dans le plan pupille qu'elles soient dues au télescope ou à la turbulence. Les autres termes ayant une phase dominée par les effets de la turbulence, leurs contributions s'annulent en moyenne. Ce raisonnement n'est valable que pour des fréquences spatiales grandes devant la fréquence de coupure atmosphérique r_0/λ. Comme pour la méthode de Knox-Thompson, cette propriété n'est donc plus vraie si les aberrations de l'instrument sont importantes et se manifestent à basse fréquence spatiale. En général, les "bons" télescopes présentent des aberrations optiques inférieures au *seeing* ; ces aberrations se manifestent dans $\langle S^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\rangle$ et $\langle S^{(3)}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\rangle$ pour des fréquences spatiales inférieures à r_0/λ.

Le fait que les phases de $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\rangle$ et de $\langle I^{(3)}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\rangle$ soient insensibles à l'influence de la turbulence et aux aberrations du télescope est une propriété particulièrement intéressante puisqu'elle permet d'obtenir la phase du spectre de l'objet à partir de la méthode de Knox-Thompson ou du bispectre sans calibration de la fonction de transfert correspondante. En pratique, on peut observer des écarts sensibles à cette propriété (Freeman et al., 1988). Par conséquent, lorsqu'on dispose d'observations d'une étoile de référence, il faut s'en servir pour corriger la phase de $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\rangle$ ou de $\langle I^{(3)}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\rangle$ des aberrations instrumentales (Roddier, 1988a).

Par contre, il reste que l'influence de la turbulence se manifeste — à la limite pour un nombre infini d'images courte pose — uniquement dans le module de $\langle S^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\rangle$ et de $\langle S^{(3)}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\rangle$, la phase de ces fonctions de transfert étant liée aux aberrations de phase fixes. Ainsi, l'utilisation d'une source de référence non résolue permet de calibrer valablement

la phase de $\langle S^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ et de $\langle S^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ et ce même si les conditions de turbulence évoluent quelque peu entre l'observation de l'objet et de sa référence. C'est pourquoi, pour le traitement des données, j'ai fait le choix de n'utiliser que les informations de phase fournies par la méthode de Knox-Thompson ou par le bispectre.

1.6.6 Invariance par translation

Il est facile de vérifier que le bispectre $I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ est insensible à une translation de l'image $i(\mathbf{x})$. Il s'en suit que le bispectre moyen est insensible aux translations des images courte pose. Il n'en est pas de même pour la méthode de Knox-Thompson ; une pratique courante pour améliorer la qualité de la mesure de $I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ consiste à recentrer chaque image courte pose sur son photo-centre.

1.7 Méthodes holographiques

On parle d'interférométrie holographique des tavelures lorsqu'une mesure de la fonction de transfert instantanée est obtenue simultanément avec l'observation des images courte pose.

C'est par exemple le cas, si l'objet observé est résolu à une longueur d'onde et ne l'est pas à une longueur d'onde proche située dans le même domaine de cohérence spectral de la turbulence. Il suffit alors d'observer simultanément cet objet à ces deux longueurs d'onde pour avoir une mesure[4] $\widetilde{S}(\mathbf{u})$ de la fonction de transfert instantanée. En astrophysique, cela se produit notamment pour les étoiles ayant une grande structure observable dans une raie d'émission ou d'absorption mais pas dans le continuum proche où seule l'étoile centrale est visible. Les images observées dans le continuum fournissent alors une mesure de la fonction d'étalement de point instantanée.

L'analyse de surface d'onde est un autre moyen de mesurer la fonction de transfert instantanée. Dans ce cas, un analyseur de surface d'onde mesure la perturbation de phase due à la turbulence. A partir de cette information, il est possible de reconstruire la fonction d'étalement de point correspondante.

Pour des objets faibles, il ne suffit pas de déconvoluer une image courte pose par la fonction d'étalement de point correspondante, il faut aussi intégrer une certaine quantité d'information. De plus, même pour un objet brillant, la fonction de transfert instantanée peut présenter des lacunes qu'il faut combler en regroupant les informations fournies par plusieurs couples $\{\widetilde{I}(\mathbf{u});\widetilde{S}(\mathbf{u})\}$. Primot et al. (1988) et Roddier (1988b) ont obtenu un moyen robuste pour calculer le spectre $O(\mathbf{u})$ de l'objet à partir des mesures en minimisant

[4]Dans ce mémoire, je note les quantités mesurées avec un tilde ; par exemple, $\widetilde{S}(\mathbf{u})$ est la mesure de $S(\mathbf{u})$.

la quantité :

$$\varepsilon = \sum_{\mathbf{u}} \langle |O(\mathbf{u})\widetilde{S}(\mathbf{u}) - \widetilde{I}(\mathbf{u})|^2 \rangle \tag{1.36}$$

Le spectre de l'objet qui minimise ε est

$$O(\mathbf{u}) = \frac{\langle \widetilde{I}(\mathbf{u})\widetilde{S}^*(\mathbf{u}) \rangle}{\langle |\widetilde{S}(\mathbf{u})|^2 \rangle}. \tag{1.37}$$

Dans la partie traitant de l'exploitation des mesures, je montre comment cette approche peut être améliorée en incorporant d'autres informations sur la distribution d'intensité de l'objet et en tenant compte de la qualité des mesures.

1.8 Contraintes observationnelles

Nous avons vu que les équations qui gouvernent la formation des images dépendent du temps, de la longueur d'onde et de la position sur le ciel. Ces dépendances imposent des contraintes observationnelles pour l'interférométrie des tavelures.

1.8.1 Dépendances du paramètre de Fried

Le paramètre de Fried, r_0, mesure la longueur de cohérence spatiale du front d'onde incident perturbé par la turbulence atmosphérique ; c'est une grandeur importante pour caractériser l'état de cette turbulence. Pour des conditions de turbulence données, r_0 varie avec la longueur d'onde λ et la distance zénithale ζ comme (Roddier, 1981) :

$$r_0 \propto \lambda^{\frac{6}{5}} \cos^{\frac{3}{5}} \zeta. \tag{1.38}$$

1.8.2 Temps d'exposition

Si les couches d'atmosphère turbulente ont une certaine dispersion de vitesse Δv, alors on peut interpréter le temps caractéristique d'évolution des effets de la turbulence τ_0 comme étant le temps que met le vent à modifier la perturbation d'indice de réfraction au niveau de chaque sous-pupille de cohérence. D'où il vient :

$$\tau_0 \simeq \frac{r_0}{\Delta v}. \tag{1.39}$$

Afin de geler les effets de la turbulence, il faut que le temps d'exposition des images soit petit ou de l'ordre du temps de cohérence τ_0. Du point de vue du rapport signal à bruit (Roddier, 1988a), le temps de pose optimum est :

$$\tau \simeq 2\tau_0 \tag{1.40}$$

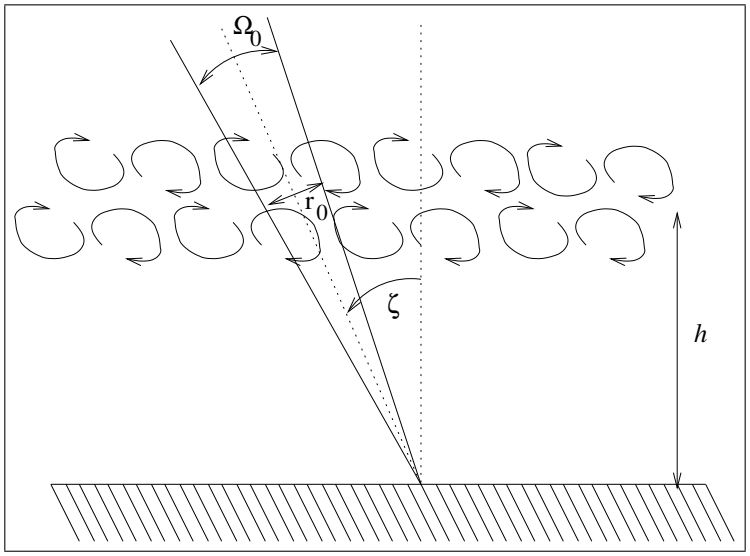


FIG. 1.7 – Définition qualitative du domaine d'isoplanétisme.

La dispersion des vitesses au sein des couches turbulentes est de l'ordre de quelques mètres par seconde (typiquement $\Delta v = 5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$). Pour un paramètre de Fried de 10 centimètres dans le visible, τ_0 est donc de l'ordre de 20 ms. Les acquisitions en interférométrie des tavelures visibles doivent donc se faire au moins à la cadence de 50 images par seconde.

1.8.3 Domaine d'isoplanétisme

L'approximation qui consiste à considérer comme invariante par translation la réponse du télescope et de l'atmosphère n'est justifiée que pour un champ angulaire restreint : le domaine d'isoplanétisme. Aux longueurs d'onde du visible, c'est la turbulence qui limite essentiellement la largeur du domaine d'isoplanétisme. Très simplement, on peut considérer que deux rayons lumineux sont dans le même domaine d'isoplanétisme de la turbulence s'ils traversent les mêmes aires de cohérence (*cf.* figure 1.7). D'où il vient :

$$\Omega_0 \quad = \quad \frac{r_0 \cos\zeta}{h} \quad \propto \quad \lambda^{\frac{6}{5}} \cos^{\frac{8}{5}}\zeta \tag{1.41}$$

où h mesure une certaine hauteur moyenne des couches turbulentes.

La turbulence atmosphérique dont l'influence se fait sentir pour les observations depuis le sol est, en gros, localisée entre 4 et 10 kilomètres d'altitude et dans une couche limite au niveau du sol. Les bons sites astronomiques se situent au dessus d'une couche d'inversion à environ 2000 m. On peut retenir que h est de l'ordre de quelques kilomètres (typiquement $h \simeq 5$ km). Ce qui donne des champs d'isoplanétisme de quelques secondes d'arc sur le ciel ($\Omega_0 \simeq 4''$ pour un *seeing* r_0/λ d'une seconde).

1.8.4 Bande passante

Les acquisitions de photons se font toujours sur une bande passante d'une certaine largeur $\Delta\lambda$. Même si l'objet est identique sur toute la fenêtre spectrale, la fonction de transfert dépend de la longueur d'onde. Ceci entraîne un brouillage des fréquences spatiales au delà d'une certaine fréquence spatiale. Pour éviter que ce brouillage ne détruise les informations à haute résolution angulaire, il faut que la bande passante soit petite devant la largeur de cohérence spectrale, soit (Roddier, 1988a) :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \ll \left(\frac{r_0}{D}\right)^{\frac{5}{6}} \tag{1.42}$$

1.8.5 Conséquences

Dans la bande photométrique V ($\lambda = 0.55\,\mu$m) et pour un télescope de plusieurs mètres de diamètre, les paramètres observationnels en interférométrie des tavelures sont typiquement :

paramètre de Fried : $r_0 = 10\,\text{cm}$;
bande passante : $\Delta\lambda = 10\,\text{nm}$;
temps de pose : $\Delta\text{t} = 20\,\text{ms}$.

Dans ces conditions, et sans tenir compte de la transmission de l'instrument ni du rendement quantique du détecteur, le nombre de photons par image reçus d'un objet de magnitude m_V donnée est :

m_V	nombre de photons	
	$D = 4\,\text{m}$	$D = 8\,\text{m}$
8	6.9×10^5	2.8×10^6
10	1.1×10^5	4.4×10^5
12	1.7×10^4	6.9×10^4
14	2.7×10^3	1.1×10^4
16	4.3×10^2	1.7×10^3
18	6.9×10^1	2.8×10^2

Pour la plupart des objets d'intérêt astrophysique, le flux collecté pour une image courte pose est donc très faible. En conséquence, seul les détecteurs à comptage de photons sont appropriés pour les observations en interférométrie des tavelures pour les objets moins brillants que la magnitude $m_\text{v} \sim 7 - 10$.

Chapitre 2

Instrumentation et prétraitement des données

En pratique, pour l'observation d'objets d'intérêt astrophysique, les contraintes de l'interférométrie des tavelures imposent de travailler avec un détecteur à comptage de photons. Les données en comptage de photons dont je dispose, proviennent d'observations faites avec un tavélographe conçu par Bonneau, Blazit et Foy (Foy, 1988a). La partie optique du tavélographe a été réalisée par Bonneau sur un concept de Courtès et Labeyrie, elle permet d'imager le même objet à deux longueurs d'onde différentes sur les quatre canaux du détecteur. Le détecteur est la caméra CP40 réalisée et développée par Blazit (1987) et Foy (1988a). Je décris d'abord sommairement les caractéristiques de notre instrumentation.

Avant de pouvoir traiter les données par les méthodes de l'interférométrie des tavelures en comptage de photons, il était absolument nécessaire de corriger les données brutes de tous les défauts dus à la chaîne d'acquisition. Je passe rapidement en revue les défauts qui ont été faciles à corriger tels les "photons doubles" ou les réflexions parasites ainsi que les solutions que j'ai adoptées pour les supprimer. Par contre, je décris plus en détail les méthodes que j'ai élaborées pour la correction de la distorsion d'image dans le cas du comptage de photons. Cette correction, plus délicate à mettre en œuvre que les autres prétraitements, a fait, en autres choses, l'objet d'une publication (Thiébaut, 1994a, *cf.* annexe A).

2.1 Tavélographe à quatre canaux

Le rôle du tavélographe est essentiellement de fournir le grandissement optique et de permettre la sélection de la bande passante spectrale. Dans notre tavélographe, la sélection de longueur d'onde se fait grâce à un monochromateur de Courtès : un réseau concave dans un plan image forme l'image dispersée de la pupille sur un miroir concave qui forme l'image du plan focal sur le détecteur. Ce montage particulier permet de sélectionner

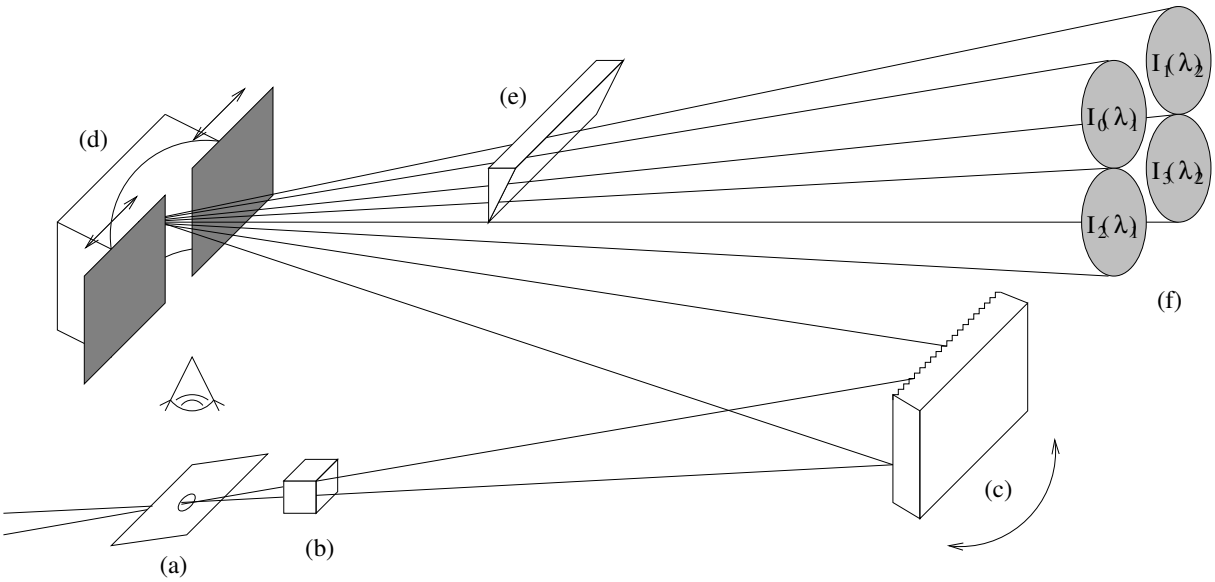


FIG. 2.1 – Schéma optique du tavélographe : (a) oculaire et lentille grossissante ; (b) séparatrice plan-pupille ; (c) réseau orientable ; (d) miroir concave avec masques sélecteurs de longueur d'onde ; (e) lame prismatique ; (f) les quatre images résultantes.

plusieurs longueurs d'onde (deux pour notre instrument) simultanément par un système de masques placés au niveau du miroir concave. La largeur de bande passante spectrale peut être choisie différente pour les deux longueurs d'ondes et varie de 20 à 2 nm. Dans le montage actuel, les deux longueurs d'onde sont contiguës, mais il suffirait de modifier le système des masques pour changer cela. C'est pourquoi, en général, nos observations sont menées en choisissant une raie d'émission ou d'absorption, d'une part, et le continuum proche, d'autre part.

Notre instrument présente une spécificité suplémentaire : les faisceaux obtenus pour les deux longueurs d'onde sont séparés de sorte que quatre images (deux à chaque longueur d'onde) sont finalement formées sur le détecteur. Pour les deux longueurs d'onde d'observation, nous enregistrons donc deux réalisations indépendantes de même distribution d'intensité. Je montrerai (*cf.* section 3.3) comment cette particularité permet de s'affranchir d'un important défaut du détecteur.

2.2 La caméra CP40

La caméra CP40 (fig. 2.2) est un détecteur à comptage de photons à base de CCD intensifiés. Elle est constituée de quatre parties distinctes : les intensificateurs de lumière, la partie détection, l'électronique de localisation des photo-événements et la partie acquisition.

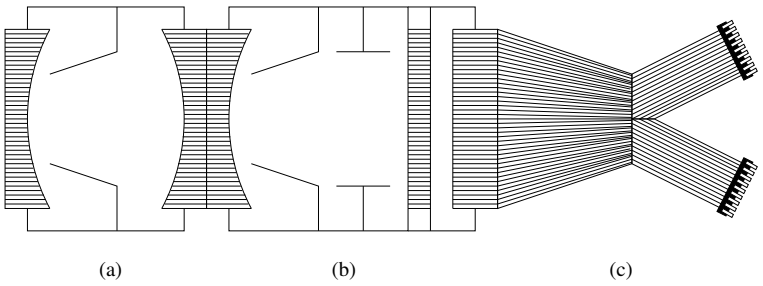


FIG. 2.2 – Schéma optronique de la caméra CP40 : (a) intensificateur de première génération ; (b) intensificateur à galette de micro-canaux ; (c) réducteur et éclateur d'image à fibres et CCD.

2.2.1 Intensification

La caméra travaillant en comptage, il faut absolument intensifier le signal d'entrée (*i.e.* multiplier les photons) afin qu'il domine les bruits du détecteur (bruit de lecture et courant d'obscurité) et de la transmission vidéo (parasites). Pour la CP40, le gain total doit être de l'ordre de 10^6. Le rendement quantique de la partie intensification fixe donc celui de la caméra. De même, ce sont la résolution spatiale et le temps de récupération des étages d'intensification qui déterminent les limites ultimes de la caméra.

L'intensificateur est constitué de deux étages : un tube de première génération suivi d'un tube de seconde génération. Ce choix est justifié par le fait que les tubes de première génération ont un rendement quantique acceptable (environ 10%) mais un faible gain (de l'ordre de 10^2) alors que les tubes de deuxième génération ont un fort gain (de l'ordre de 10^3 à 10^8) mais un mauvais rendement quantique (environ 3 ou 4%).

Les deux étages de l'intensificateur de la CP40 sont constitués d'une photocathode d'entrée (de type S-20), d'une partie amplification et d'un écran de sortie au phosphore (de type P-20). Le couplage entre les deux étages est réalisé par des fibres optiques. L'arrivée d'un photon sur la photocathode d'entrée arrache un électron avec un rendement quantique d'environ 10 %. Dans le tube de première génération, cet électron est accéléré par un champ électrostatique avant de provoquer l'émission d'une gerbe de photons par le phosphore de sortie. Dans le tube de deuxième génération, les électrons sont multipliés par une galette de micro-canaux. C'est le facteur d'obstruction des galettes de micro-canaux (30 à 50 %) qui explique leur mauvais rendement quantique. Le rendement quantique global de la CP40 est celui de la photocathode du premier étage soit, au mieux, 10 %.

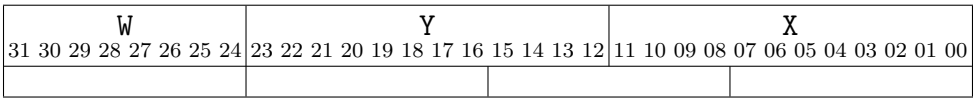
Il existe une faible rémanence, due aux phosphores de sortie, dont la durée est très inférieure à la période d'acquisition (*i.e.* moins de 2 ms de rémanence contre 20 ms par trame). Cette rémanence est pratiquement négligeable dans les images sauf peut-être, dans le cas de particules très énergétiques comme les ions, qui excitent plus durablement les phosphores. Un photon incident détecté par la photocathode du premier étage provoque, en sortie de la partie intensification, l'émission d'une gerbe de photons étalée.

2.2.2 Détection et localisation des photo-événements

La détection des photons en sortie de l'intensificateur est assurée par quatre CCD (*Charge Coupled Device*). Ces CCD sont couplés à l'intensificateur par un réducteur et un éclateur d'image à fibres optiques. Chaque CCD comporte 384×288 pixels. Cette configuration permet de disposer soit d'un détecteur de 768×576 pixels, soit de quatre canaux sur lesquels on peut imager le même objet à des longueurs d'onde différentes par exemple. Le nombre effectif d'éléments de résolution peut être multiplié par 16 grâce à l'électronique du centreur de photons qui localise les photo-événements.

Sur les CCD, chaque photo-événement — *i.e.* chaque gerbe de photons engendrée par la détection d'un photon sur la photocathode du premier étage — est constitué d'environ 10^6 photons et s'étale sur plusieurs pixels (typiquement 3×3 pixels). Cela permet de déterminer le photo-centre de chaque photo-événement avec une précision meilleure que le pixel afin de retrouver la résolution du premier étage de l'intensificateur. Pour ce faire, une électronique cablée conçue par Blazit (1987) calcule le barycentre de chaque photo-événement dans une matrice 3×3 autour d'un maximum d'intensité. Cette méthode permet de déterminer la position des photo-événements avec une précision d'un quart de pixel[1]. Il y a 16 fois plus de *pixels logiques* que de *pixels physiques*. Pour le moment ce gain en nombre d'éléments de résolution n'est exploité que pour les observations de SFM (Spectrographe à Fentes Multiples, Foy et al., 1994).

Les coordonnées des photons recentrés sont codées en pixels logiques avec le numéro du canal sur 4 octets comme suit :



où :

- les bits de poids faibles `00` à `11` constituent l'abscisse du photon en pixels logiques (le bit `11` étant le numéro du canal en abscisse),
- de la même manière, les bits `12` à `23` constituent l'ordonnée du photon (le bit `23` étant le numéro du canal en ordonnée),
- les bits de poids forts `24` à `31` constituent le poids du photon (dans les données brutes, le bit de poids fort `31` sert à marquer le premier photon d'une trame, ou le dernier suivant les versions du logiciel d'acquisition ; les 7 bits suivants pouvant servir à numéroter les images modulo 128).

[1] L'unité de position d'un photo-événement recentré est communément appelée *pixel logique* par opposition au pixel ou *pixel physique* qui désigne l'élément de résolution d'un CCD.

2.2.3 Acquisition des données

L'acquisition des coordonnées des photo-événements est assurée par un micro-ordinateur à base de 68020 et bus DMA (*Direct Memory Access*) sous système OS-9. L'évolution rapide des moyens de stockage de masse a fait que le format des données enregistrées a souvent changé. A l'origine, des séquences d'observation d'un mégaoctet (Mo) étaient enregistrées sur des bandes magnétiques de type *streamer*. Aujourd'hui, des séquences de plusieurs dizaines de mégaoctets sont stockées sur un disque dur d'un gigaoctet pouvant contenir les observations de toute une nuit. Après les observations, ces données sont transférées sur DAT (*Digital Audio Tape*).

2.2.4 Obturateur

L'inconvénient d'un détecteur lu séquentiellement est que la durée minimale des poses est celle d'une trame (soit 10 à 20 ms) alors que la résolution temporelle des caméras de type PAPA ou à anode résistive est de l'ordre de la microseconde. Actuellement, les CCD de CP40 sont lus à la cadence vidéo (50 Hz). Cette résolution temporelle est la plupart du temps suffisante. Dans les cas où il faut réduire le temps de pose, un obturateur a été ajouté à l'entrée de la caméra CP40. Pendant la durée de l'obturation, les photons sont perdus...

2.3 Prétraitement des données

2.3.1 L'effet "fenêtre"

L'influence néfaste de l'optique du tavélographe se manifeste sous la forme de reflets parasites qu'il est relativement facile de supprimer par un "fenêtrage" approprié des données. L'intensité des reflets est plus importante dans le bleu que dans le rouge. Ces reflets sont bien plus génants qu'on ne pourrait le croire. En effet, le fenêtrage des données augmente la probabilité de tronquer les images courte pose. Cette troncature invalide en partie l'hypothèse d'isoplanéticité (*i.e.* une image tronquée ne peut plus exactement être modélisée par un produit de convolution). Pour limiter les effets de troncature, je sélectionne les trames dont le photo-centre n'est pas trop proche des bords du champ. Bien entendu le même effet "fenêtre" serait systématiquement observé si le champ est trop petit par rapport aux dimensions de la figure des tavelures ou par rapport aux dimensions de l'objet observé. Ce dernier cas de figure se pose par exemple pour les observations à haute résolution angulaire du soleil (Pehlemann & von der Lühe, 1989; von der Lühe, 1992).

2.3.2 Les photons doubles

Jusqu'aux missions de 1990, le centreur avait le défaut de dédoubler certains photons. Une étude approfondie des autocorrélations en pixels logiques par M. Tallon et Ch. Thom a mis en évidence des photons dédoublés avec des séparations variables et une certaine périodicité spatiale du phénomène.

Ce défaut n'est malheureusement pas assez systématique pour pouvoir être corrigé *a posteriori*. Comme l'algorithme de centrage interdit les paires de photons plus proches que deux pixels, il est possible de discriminer les paires de photons proches ainsi créées. Les paires de photons dédoublés proches étant les plus nombreuses, il est acceptable de se contenter de ne corriger que celles-ci.

J'ai commencé par supprimer toute paire de photons litigieuse. Dans la mesure où près de 25 % des photons sont touchés par ce défaut, j'ai envisagé une autre solution qui consiste à remplacer chaque paire de photons trop proches par un photon ayant la position de leur barycentre. Mais le choix du barycentre, s'il n'est pas justifié, introduit un bruit sur la position réelle du photo-événement. En comparant, à fort flux, les mesures obtenues par ces deux approches, je n'ai pas noté de différence appréciable autrement qu'en terme de rapport signal à bruit en faveur de la deuxième méthode.

Depuis 1993, le problème a été corrigé par A. Blazit en modifiant le programme du centreur. Pour les données plus anciennes, je remplace les paires de photons proches par leur barycentre.

2.3.3 La non-uniformité de la réponse du détecteur

A cause surtout de la non-uniformité de la sensibilité de la photo-cathode, même après correction de la distorsion, la réponse de la caméra n'est pas identique sur tout le champ. La façon habituelle de procéder pour corriger la non-uniformité du détecteur consiste à imager le champ le plus uniforme possible. Ceci permet de déterminer le poids qu'il faut donner à chaque pixel du détecteur pour retrouver une réponse uniforme. Cette correction peut se faire une fois pour toute sur les données brutes en modifiant la valeur du poids (bits `24` à `31`) de chaque photo-événement.

Néanmoins, grâce à l'agitation des tavelures dans le plan image, on peut considérer qu'une même fréquence spatiale n'est pas systématiquement affectée de la même atténuation. Dans un premier temps au moins, la correction de la non-uniformité de la réponse du détecteur n'est donc pas absolument nécessaire. De plus, il a été remarqué par certains auteurs (*e.g.* Christou, 1991) que la réalisation d'un champ uniforme est très délicate et qu'un étalonnage médiocre de la non-uniformité conduit à une correction qui dégrade la qualité des mesures.

2.3.4 Autres problèmes

Vraisemblablement à cause du bruit de la transmission vidéo, des photons sont créés artificiellement. Cela est mis en évidence, dans les données, par des photons dont les positions sont en dehors des CCD. La nouvelle transmission par fibre optique a remédié à cela.

2.4 Correction de la distorsion

Pour les détecteurs à comptage de photons à base de CCD intensifiés, l'optique électrostatique des intensificateurs déforme l'image projetée sur les CCD. Cette distorsion géométrique étale les fréquences spatiales détectées pour une même fréquence spatiale observée. Il s'en suit une dégradation du rapport signal à bruit et une plus grande incertitude quant aux mesures de fréquences spatiales. La fréquence de coupure effective est rabaissée par ce défaut. Il est donc crucial de corriger ces effets de distorsion. A cet effet des intensificateurs s'ajoute une distorsion et même des micro-dislocations de l'image dues au réducteur à fibres.

2.4.1 Calibration de la distorsion

En l'absence de champ magnétique extérieur et entre deux démontages de la caméra, la distorsion ne devrait pas changer [2]. En pratique j'ai effectivement observé que la distorsion était remarquablement stable. A condition de la calibrer correctement, il est donc possible de corriger cette distorsion en temps différé.

Pour la CP40, les distorsions introduites par les étages de l'intensificateur et le réducteur à fibres sont calibrées en projetant une grille régulière de $\simeq 26 \times 24$ points sur la photocathode d'entrée de la caméra au cours de chaque mission. La figure 2.3 montre l'image longue pose de la grille de calibration et met en évidence la distorsion en coussinet de l'image. L'intérêt de mesurer la distorsion en même temps sur toute la photocathode est de pouvoir en déduire une correction globale qui permet de juxtaposer les quatre canaux pour reformer une image corrigé complète de la photocathode. Ceci est utilisé pour le traitement des donnée de SFM (Spectrographe à Fentes Multiples, Foy et al., 1994). En interférométrie des tavelures, quatre images différentes sont formées sur les quatre voies du détecteur ; dans ce cas, la calibration globale permet d'obtenir la même orientation et le même grandissement pour tous les canaux après correction de la distorsion.

La projection d'une grille sur la photocathode permet de calibrer correctement la distorsion sous réserve que la grille soit imagée sans aberration sur la photocathode, que l'échantillonnage soit suffisant et que les déformations de l'image soient continues. En effet, comme les faisceaux de fibres optiques qui constituent le réducteur optique et l'éclateur

[2] Au second ordre, les déformations de l'image peuvent dépendre des tensions appliquées à l'intensificateur.

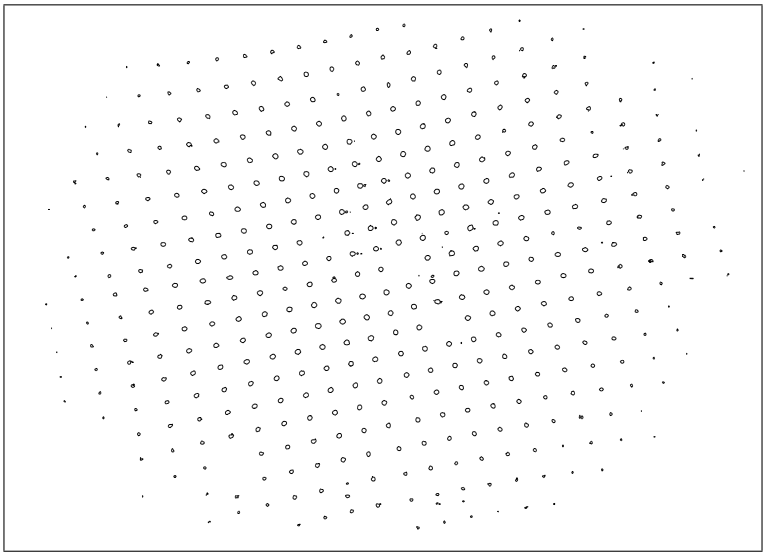


FIG. 2.3 – Image longue pose de la grille de calibration de la distorsion avant la correction.

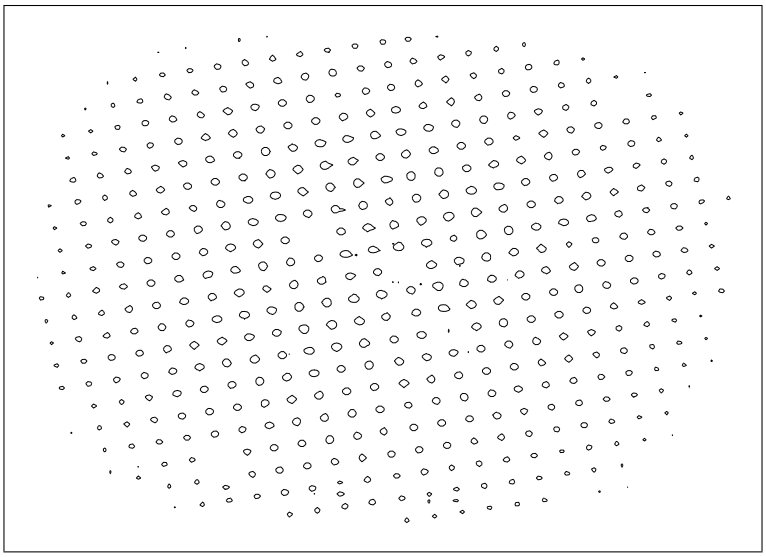


FIG. 2.4 – Image longue pose de la grille de calibration de la distorsion après la correction.

d'image de la caméra sont fabriqués en juxtaposant des barreaux de fibres, il peut y avoir des discontinuités entre les parties de la photocathode imagées par chaque barreau. L'hypothèse de continuité n'est donc valable que si ces défauts sont petits devant le pas d'échantillonnage choisi pour les observations, soit au minimum la dimension du pixel logique.

2.4.2 Calcul de la correction

Pour chaque canal, la correction calculée est polynômiale :

$$X = P(x,y) = \sum_{\substack{i,j \\ i+j\leq n}} p_{i,j}x^i y^j \tag{2.1}$$

$$Y = Q(x,y) = \sum_{\substack{i,j \\ i+j\leq n}} q_{i,j}x^i y^j \tag{2.2}$$

où X et Y sont les coordonnées corrigées et x et y les coordonnées mesurées, n est le degré du polynôme de correction. Les coefficients $p_{j,k}$ et $q_{j,k}$ sont obtenus en minimisant la somme des distances au carré entre les positions corrigées et les positions idéales des points de la grille.

L'image intégrée, $g(x,y)$, de la grille de calibration montre des taches sur un fond diffus, ces taches sont les images des points de la grille. Il faut d'abord supprimer le fond diffus et repérer le centre de chaque tache. Pour cela, je calcule le barycentre (x_l, y_l) de chaque tache, l étant le numéro du point de la grille correspondant. Afin d'éviter un biais dans le calcul des barycentres, je supprime les taches qui sont tronquées par les bords du champ. Je détermine alors la position correcte de chaque point, ce qui revient à attribuer à chaque tache son numéro de ligne et de colonne, X_l et Y_l, dans la grille de calibration. J'estime ensuite, par la méthode des moindres carrés, les coefficients polynomiaux de la correction pour chaque canal. En fait, à ce stade, je ne dispose que d'une première estimation de la correction à appliquer. En effet, la distorsion n'étant pas une transformation linéaire, le calcul des barycentres des taches est biaisé par la déformation de l'image. Afin d'affiner la correction de la distorsion, il faut donc tenir compte de son effet dans le calcul de la position des taches. Pour cela, je recalcule le barycentre de chaque tache dans l'image corrigée, la position correspondante dans l'image distordue est obtenue en inversant les relations (2.1) et (2.2) par une méthode du tir à deux paramètres. A partir de cette nouvelle estimation des positions des points de la grille de calibration, je calcule un nouveau jeu de coefficients de correction. Eventuellement, les dernières étapes peuvent être répétées jusqu'à la convergence (*i.e.* jusqu'à ce que l'estimation de la position des taches dans l'image distordue ne varie plus de façon significative). Cet algorithme de calcul des coefficients de correction de la distorsion est schématisé par la figure 2.5.

Comme la distorsion peut varier d'une mission à l'autre, le calcul de correction de la distorsion se devait d'être convivial et facile à réaliser. Dans ce but, j'ai mis au point un programme qui, à partir des images longue pose de la grille en comptage de photons, calcule de façon autonome les coefficients de correction en appliquant la démarche décrite plus haut. Pour déterminer le numéro de ligne et de colonne de chaque point de la grille distordue automatiquement, le programme reconstruit la grille de proche en proche en déduisant la position la plus probable du prochain point de celle de ses voisins. La partie "interpolation" du programme est écrite de telle sorte que l'on peut choisir des polynômes de degré arbitraire.

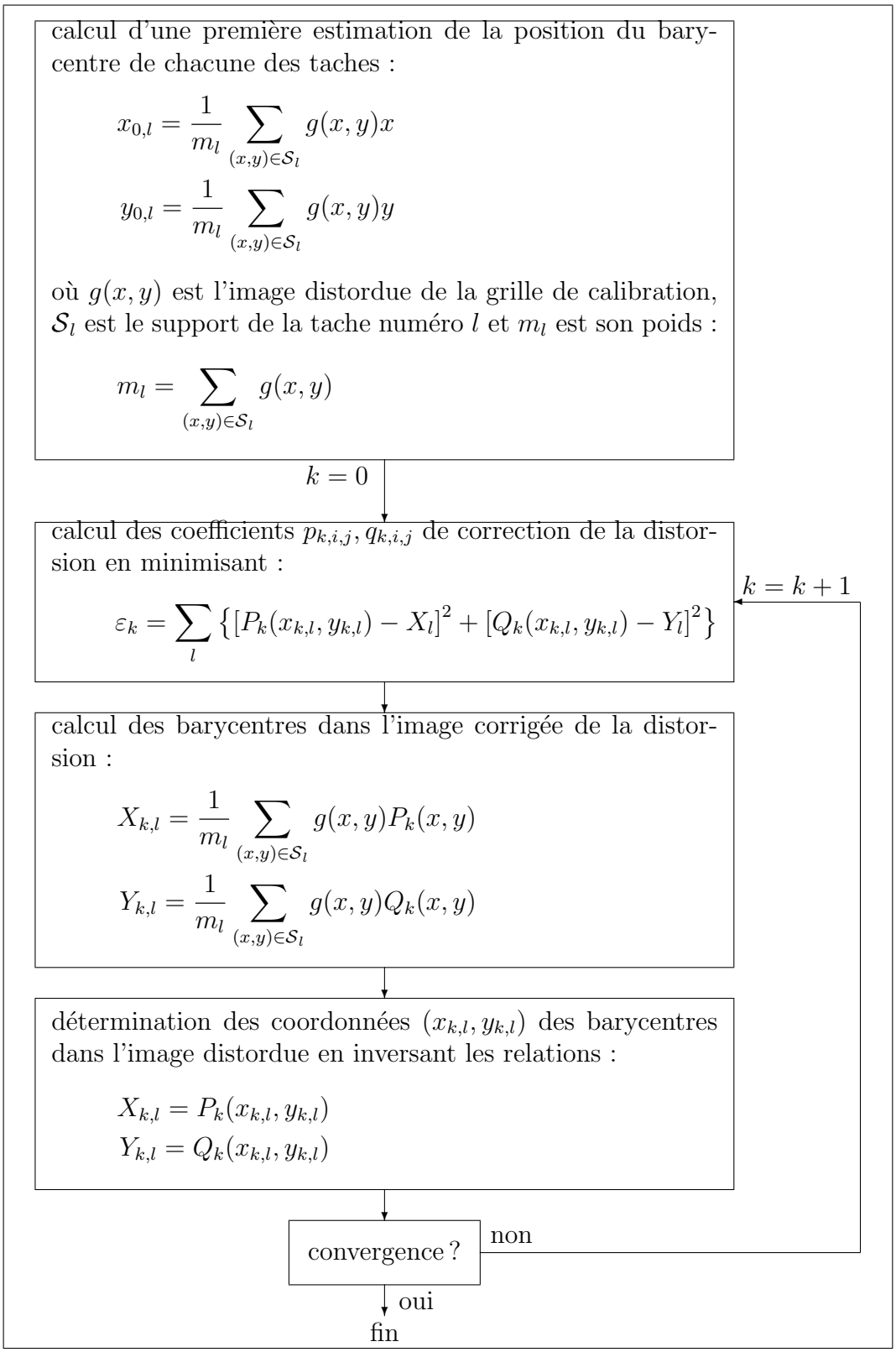


FIG. 2.5 – Algorithme de calcul des coefficients de correction de la distorsion.

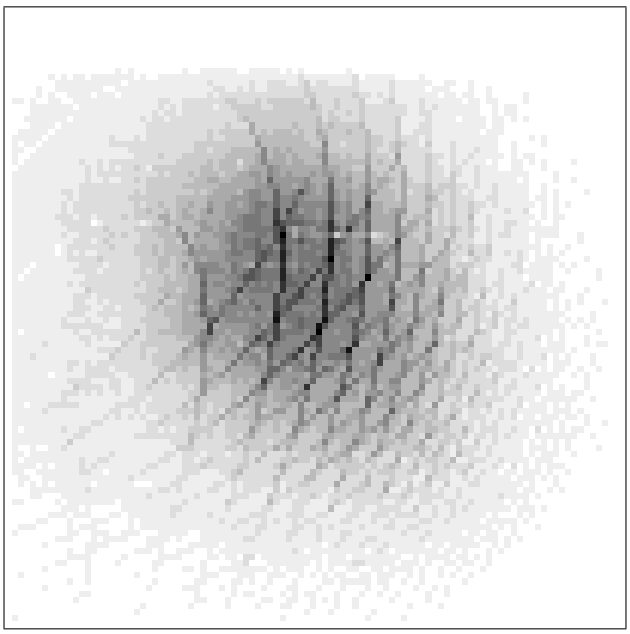


FIG. 2.6 – Correction élémentaire de la distorsion sur une image longue pose. Les effets de rediscrétisation sont clairement visibles.

Avec un polynôme de degré 3, la distorsion résiduelle est de l'ordre de 5 μm en écart type soit 0.25 pixel CCD. Cette erreur résiduelle est inférieure aux discontinuités causées par la dislocation des paquets de fibres optiques qui sont, au maximum, de 10 μm. Puisqu'une correction polynômiale ne permet de compenser que des déformations continues de l'image, une plus grande précision est inutile.

La correction de la distorsion polynômiale permet d'ajuster à volonté la rotation et le grandissement d'ensemble des images corrigées. De cette façon, il est possible d'augmenter le pas d'échantillonnage après correction de la distorsion. Bien sûr, la fréquence d'échantillonnage maximum reste fixée par le pas d'échantillonnage du détecteur. L'intérêt est de pouvoir adapter l'échantillonnage des données corrigées à la fréquence de coupure optique qui varie en fonction de la longueur d'onde. Ainsi, non seulement le nombre de pixels à traiter est réduit au minimum ce qui permet un gain de temps pour les traitements, mais surtout cela évite la sur-résolution au moment de la restauration d'image.

2.4.3 Application de la correction

L'application de la correction de la distorsion déforme la matrice régulière des pixels des CCD. Afin de faciliter le traitement des données, il faut reprojeter les coordonnées corrigées des photo-événements sur une matrice régulière. Cette rediscrétisation des coordonnées des photo-événements est une source d'effets indésirables. Je me suis employé à trouver des méthodes d'application de la correction qui évitent ces effets.

2.4.4 Correction élémentaire

La façon la plus simple d'appliquer la correction de la distorsion consiste à remplacer la position (k_x, k_y) de chaque pixel de l'image distordue par la position (K_x, K_y) du pixel dans l'image corrigée la plus proche de la position corrigée $(P(k_x, k_y), Q(k_x, k_y))$. Comme K_x et K_y sont des entiers, la position la plus proche est obtenue en arrondissant les coordonnées corrigées :

$$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{correction}} \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{rnd}[P(k_x, k_y)] \\ \text{rnd}[Q(k_x, k_y)] \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

où rnd() est la fonction qui retourne son argument arrondi à l'entier le plus proche :

$$\text{rnd}(x) = \text{ent}\left(x + \frac{1}{2}\right) \tag{2.4}$$

où ent() est la fonction partie entière.

L'intérêt de cette méthode est qu'elle permet de corriger la distorsion pour les données enregistrées une fois pour toutes. Malheureusement, les images intégrées ainsi corrigées de la distorsion sont comme marquées d'empreintes digitales (*cf.* fig. 2.6). Cela est dû à la rediscrétisation des coordonnées. En effet, l'erreur de position pour les coordonnées corrigées arrondies est inférieure à un demi-pixel mais c'est un effet systématique. Ainsi, les pixels de l'image corrigées correspondent à un nombre entier variable de pixels de l'image distordue.

La quasi-périodicité spatiale de ces "empreintes digitales" se manifeste aux moyennes fréquences dans le spectre de Fourier des images. Comme cet effet est anisoplanétique, il ne peut pas être calibré et corrigé de façon simple. Par conséquent, il faut, si possible, s'orienter vers d'autres méthodes pour appliquer la correction de la distorsion.

2.4.5 Sous-pixel aléatoire

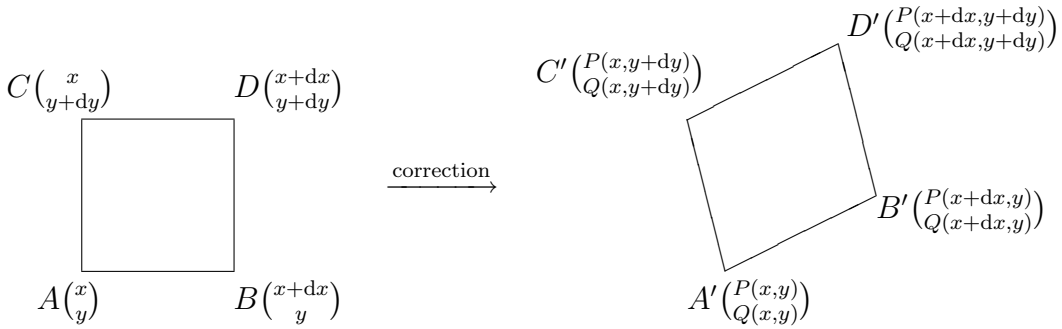
En fait, la méthode de correction précédente ne fait que remplacer la position de chaque photo-événement détecté sur un pixel donné par la position corrigée du centre du pixel. Alors que, suivant la position du photo-événement sur le pixel, sa position réelle corrigée aurait pu ne plus être sur le même pixel corrigé. Il n'y a donc pas correspondance univoque entre les pixels de l'image distordue et les pixels de l'image corrigée. De toute façon, l'information de la position exacte d'un photo-événement détecté à l'intérieur d'un pixel n'est plus accessible. En partant de ce constat, j'ai imaginé une autre méthode de correction de la distorsion. Cette méthode consiste à attribuer une position aléatoire, à l'intérieur du pixel où il a été détecté, à chaque photo-événement ; cette position est corrigée de la distorsion et projetée sur la matrice des pixels corrigés pour donner la position corrigée du photo-événement :

$$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{correction}} \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{rnd}[P(k_x + s_x, k_y + s_y)] \\ \text{rnd}[Q(k_x + s_x, k_y + s_y)] \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

où (s_x, s_y) sont les coordonnées aléatoires du sous-pixel généré : ce sont deux variables aléatoires de loi uniforme sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Statistiquement, cette approche est valable à condition que la densité de probabilité de la position d'un photo-événement à l'intérieur d'un pixel soit uniforme. Sinon, il faudrait utiliser une loi différente pour s_x et s_y. Afin de vérifier la validité de cette approximation, j'ai calculé la contribution de la distorsion à la non-uniformité de la sensibilité de la caméra[3] à l'échelle d'un pixel non corrigé.

A partir des formules de correction de la distorsion, il est possible de mesurer la contribution de la distorsion à la non-uniformité : il suffit de déterminer le rapport de deux éléments de surface correspondants entre les CCD et la photocathode. Pour cela, je considère un carré (A, B, C, D) délimitant une surface élémentaire $\mathrm{d}x \times \mathrm{d}y$ de l'image distordue. Après correction de la distorsion, ce carré devient approximativement un quadrilatère (A', B', C', D') :



La surface de (A', B', C', D') est :

$$\mathcal{A}(A', B', C', D') = \frac{1}{2}||\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}|| + \frac{1}{2}||\overrightarrow{D'B'} \wedge \overrightarrow{D'C'}||. \tag{2.6}$$

Si $\mathrm{d}x \times \mathrm{d}y$ est suffisamment petit, alors la contribution de la distorsion à la non-uniformité peut-être négligée sur (A, B, C, D) et (A', B', C', D') est un parallélogramme de surface :

$$\mathcal{A}(A', B', C', D') = ||\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}||, \tag{2.7}$$

soit approximativement :

$$\mathcal{A}(A', B', C', D') \simeq \left| \frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.8}$$

[3]La non-uniformité spatiale de la sensibilité de la caméra est essentiellement due à la photocathode d'entrée de l'intensificateur et à la distorsion ; dans une moindre mesure, les rendements quantiques des pixels des CCD peuvent être différents. La contribution de la distorsion à la non-uniformité de la sensibilité, s'explique par le fait qu'il n'y a pas de relation de proportionalité entre les aires d'un élément de surface pris sur la photocatode et de l'élément de surface correspondant sur les CCD. Afin de corriger la non uniformité de la sensibilité de la caméra, il faut utiliser les images longues poses **corrigées de la distorsion** d'une plage de lumière uniforme. De cette manière, sont prises en compte les contributions de la photocathode, des CCD et de la distorsion à la non-uniformité de la sensibilité entre des pixels différents.

Le rapport des surfaces :

$$\begin{aligned}\gamma(x,y) &= \frac{\mathcal{A}(A',B',C',D')}{\mathcal{A}(A,B,C,D)} \\ &\simeq \left|\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right| \end{aligned} \tag{2.9}$$

donne le grandissement de surface entre la photocathode (*i.e.* l'image non distordue) et les CCD (*i.e.* l'image distordue).

Si $\gamma(x,y)$ varie de façon négligeable à l'échelle d'un pixel CCD, alors il est légitime de négliger la contribution de la distorsion à la non-uniformité sur un pixel. Pour caractériser les variations de $\gamma(x,y)$ à l'échelle d'un pixel distordu, j'ai évalué l'écart relatif maximum Γ de γ sur un pixel CCD. Je définis Γ comme :

$$\Gamma(x,y) = \frac{\max\{\gamma(x\pm\frac{1}{2},y\pm\frac{1}{2})\} - \min\{\gamma(x\pm\frac{1}{2},y\pm\frac{1}{2})\}}{\gamma(x,y)} \tag{2.10}$$

où (x,y) et $(x\pm\frac{1}{2},y\pm\frac{1}{2})$ sont respectivement les coordonnées du centre et des coins du pixel. La figure 2.7 montre que $\Gamma(x,y)$ est inférieur à 1 % sur les 4 CCD de CP40. L'écart à l'uniformité dû à la distorsion peut donc raisonnablement être négligé à l'échelle d'un pixel.

La correction de la distorsion par cette méthode du sous-pixel aléatoire permet d'éviter les effets de redicrétisations. Mais on peut s'attendre à ce qu'elle soit la source d'un bruit. Afin de limiter ce bruit, on peut intégrer les estimateurs de l'interférométrie des tavelures mesurés en appliquant plusieurs fois la correction de la distorsion aux même données. Bien entendu, il faut alors changer la graine du générateur aléatoire à chaque fois.

2.4.6 Correction pondérée

En appliquant la correction de la distorsion par la méthode du sous-pixel aléatoire, un photo-événement brut détecté en (x,y) a une certaine probabilité $\Pr(X,Y|x,y)$ d'avoir une position corrigée (X,Y). Cela suggère une autre façon d'appliquer la correction de la distorsion qui évite le biais de rediscrétisation et le bruit engendré par la méthode du sous-pixel aléatoire. Cette méthode consiste à remplacer chaque pixel (x,y) distordu par plusieurs pixels (X,Y) de l'image corrigée chacun affecté d'un poids égal à $\Pr(X,Y|x,y)$. Ainsi, si $i_{\mathrm{d}}(x,y)$ est l'image distordue, l'image corrigée de la distorsion est :

$$i_{\mathrm{c}}(X,Y) = \sum_x \sum_y i_{\mathrm{d}}(x,y)\Pr(X,Y|x,y). \tag{2.11}$$

En pratique, $\Pr(X,Y|x,y)$ est non nul sur au plus 3×3 pixels corrigés[4].

[4]davantage si la distorsion est très importante ou si le grandissement que permet la correction de la distorsion est choisi de telle sorte que l'échantillonnage dans l'image corrigée soit beaucoup plus serré que dans l'image distordue

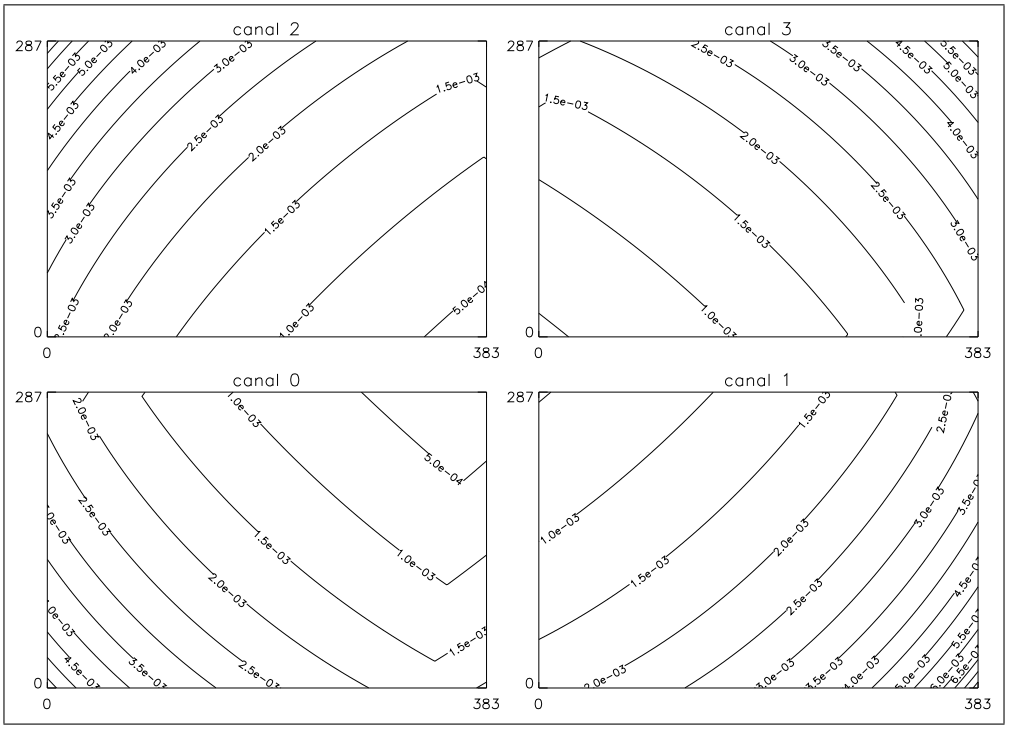


FIG. 2.7 – Iso-contours de la variation relative maximum du grandissement de surface due à la distorsion à l'échelle d'un pixel CCD. Les contours sont linéairement répartis, le maximum vaut $\simeq 0.8$ % et le minimum vaut $\simeq 0.01$ %.

En comptage de photons, cette correction pondérée de la distorsion revient à remplacer un photo-événement brut par plusieurs (typiquement 9) photo-événements corrigés de poids différents. Cela multiplie par environ 81 le nombre d'opérations nécessaires à l'intégration des corrélations de photo-événements.

Afin de calculer les poids $\Pr(X, Y|x, y)$, je subdivise régulièrement chaque pixel brut en $N \times N$ sous-pixels pour lesquels j'applique la corection de la distorsion. Les poids sont obtenus en comptant combien de sous-pixels bruts "tombent" dans chaque pixel corrigé.

Une autre méthode de calcul des pondérations a été utilisé par Foy et al. (1994). Les poids sont calculés en faisant l'approximation que le pixel brut a la forme d'un quadrilatère une fois corrigé de la distorsion. Les surfaces relatives des intersections de ce quadrilatère avec la matrice des pixels de l'image corrigée donnent directement la valeur de la pondération. Par rapport à l'approximation d'uniformité de la distorsion à l'échelle d'un pixel brut, cette approximation est moins restrictive.

Quelle que soit la façon de calculer les pondérations, la correction de la distorsion pondérée donne d'excellents résultats. Elle a de plus l'avantage de pouvoir être tabulée et donc calculée une fois pour toute contrairement à la correction de la distorsion par la méthode du sous-pixel aléatoire qui est calculée pour chaque photo-événement. Néanmoins, les pondérations étant calculées avec une précision finie, on peut s'attendre à voir apparaître à nouveau un biais de discrétisation (biais et non bruit parce que c'est un ef-

fet systématique). Actuellement, les poids sont calculés sur 256 niveaux ce qui s'avère légèrement insuffisant pour le traitement des données SFM : on peut encore distinguer des "dermatoglyphes" avec un contraste très faible (de l'ordre de 0.5 %) dans les images longue pose. Cet effet n'est pas gênant en interférométrie des tavelures compte tenu du bruit de photons et des effets de la turbulence.

2.5 Conclusion

La démarche de travail que j'ai adoptée pour le traitement des données a consisté à chercher à comprendre et à corriger les sources de biais suceptibles d'affecter les mesures avant d'entreprendre leur interprétation. En plus des prétraitements que je viens de décrire et qui visent à mettre en forme les données, j'ai aussi démontré la possibilité de compenser un grave défaut des détecteurs à comptage de photons : le *trou* du comptage de photons. L'analyse de ce défaut et les réponses concrètes que j'y apporte font l'objet du chapitre suivant.

Ce travail de mise au point des prétraitements des données a représenté un investissement en temps non négligeable. C'est, de plus, une tache qui peut paraître assez ingrate car peu productive de résultats astrophysiques à court terme. Pourtant, le gain de la qualité des mesures est largement appréciable puisqu'il m'a permis, par exemple, de passer d'une fréquence de coupure effective inférieure à 40 % de la limite de diffraction à une fréquence de coupure uniquement limitée par le rapport signal à bruit et pouvant atteindre les limites instrumentales. A long terme, cet investissement est rentabilisé par ce gain de qualité et de résolution qui autorise une analyse de la structure spatiale des objets observé à la fois plus fiable et plus fine.

Dans le cas de la distorsion, les approches que j'ai proposées permettent de corriger de manière effective ce défaut en comptage de photons. Néanmoins, ces solutions ne sont pas spécifiques au comptage de photons : la correction pondérée notamment peut être utilisée en imagerie pour corriger des effets anisoplanétiques. Aujourd'hui, la correction de la distorsion est appliquée de même que les prétraitements au moment de la lecture des trames de photo-événements de façon transparente pour l'utilisateur. Le temps de calcul nécessaire à l'application de la correction est tout à fait raisonnable, voire négligeable, devant les opérations de traitement des données.

Chapitre 3

Correction des biais en comptage de photons

Dans ce chapitre, j'introduis le modèle de (Goodman, 1985) propre à rendre compte de la statistique particulière des images détectées en comptage de photons. Ce modèle permet de déterminer les estimateurs qu'il faut intégrer pour mesurer sans biais dû au bruit de photons le spectre de puissance moyen, le bispectre moyen des images ou encore le produit spectral de la méthode de Knox-Thompson.

Ces résultats ont déjà été démontrés par d'autres auteurs (voir par exemple Dainty & Greenaway, 1979; Nisenson & Papaliolios, 1983; Wirnitzer, 1985; Ayers et al., 1988), mais je montre comment le modèle des images détectées peut être modifié pour prendre en compte un défaut qui affecte la plupart des détecteurs à comptage de photons : le *trou* du comptage de photons. Cette modélisation me permet d'établir la possibilité de compenser ce défaut important en utilisant des intercorrélations plutôt que des autocorrélations. Dans un article (Thiébaut, 1994a, inclus en annexe A), j'ai démontré la validité de cette approche pour l'interférométrie des tavelures classique. Ici je montre qu'il est effectivement possible d'étendre ce type de compensation au cas de la méthode de Knox-Thompson et du bispectre. Je discute de différents cas de figures faisant intervenir deux ou trois réalisations indépendantes de la même distribution d'intensité. Je discute aussi des effets et de la prise en compte des décalages d'origine entre les différentes voies d'imagerie. La validité de ces approches est illustrée par l'application à des données simulées mais aussi à des données réelles.

3.1 Modélisation

A partir de la distribution d'intensité, $i(\mathbf{x})$, il existe plusieurs possibilités pour décrire correctement la statistique de l'image détectée, $\widetilde{i}(\mathbf{x})$. En général, le détecteur effectue un échantillonnage spatial des images, on peut donc représenter l'image détectée par ces échantillons. Chaque échantillon est alors une variable aléatoire (indépendante des autres

mesures) obéissant à une loi de Poisson dont le paramètre est l'intégrale de $i(\mathbf{x})$ sur l'élément du détecteur correspondant. Cette description est appropriée pour prendre en compte les effets de discrétisation spatiale due à un détecteur matriciel (de type CCD par exemple) mais elle nécessite de reformuler la transformation de Fourier et les produits de corrélation et de convolution sous une forme "discrétisée".

Une autre approche permet de s'affranchir des effets de discrétisation dus au détecteur. Pour cela, il suffit de représenter l'image detectée par $\widetilde{N}$ photo-événements dont les positions $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\widetilde{N}}\}$ sont des variables aléatoires indépendantes de densité de probabilité (Goodman, 1985)

$$p(\mathbf{x}) = \frac{i(\mathbf{x})}{N} \; ; \tag{3.1}$$

où N est l'espérance du nombre de photo-événements :

$$\mathrm{E}\{\widetilde{N}\} = N = \int i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.2}$$

Le nombre de photo-événements détectés, $\widetilde{N}$, est aussi une variable aléatoire et obéit à une loi de Poisson de paramètre N. L'image détectée est alors modélisée par :

$$\widetilde{i}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\widetilde{N}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \tag{3.3}$$

où $\delta()$ est la fonction de Dirac.

Quelle que soit la modélisation choisie, la distribution d'intensité considérée doit être exprimée en nombre moyen de photons détectés par unité de surface du détecteur, c'est une quantité intégrée sur l'intervalle de temps de pose et sur la bande passante spectrale.

La transformée de Fourier de l'image détectée est :

$$\widetilde{I}(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{\widetilde{N}} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi \mathbf{x}_k \mathbf{u}}. \tag{3.4}$$

Lorsque l'on veut déterminer l'espérance de $\widetilde{I}(\mathbf{u})$, il ne faut pas perdre de vue que plusieurs processus aléatoires sont mis en œuvre : un processus Poissonien de paramètre N et $\widetilde{N}$ processus de "localisation" de densité de probabilité $p(\mathbf{x})$. Comme les variables aléatoires $\widetilde{N}$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ... sont indépendantes, l'espérance de $\widetilde{I}(\mathbf{u})$ peut s'écrire :

$$\mathrm{E}\left\{\widetilde{I}(\mathbf{u})\right\} = \mathrm{E}\{\widetilde{N}\}\mathrm{E}\left\{\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi \mathbf{x}_k \mathbf{u}}\right\}. \tag{3.5}$$

Nous savons déjà que $\mathrm{E}\{\widetilde{N}\} = N$, il reste à déterminer l'autre terme :

$$\mathrm{E}\left\{\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi \mathbf{x}_k \mathbf{u}}\right\} = \int p(\mathbf{x}_k)\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi \mathbf{x}_k \mathbf{u}}\mathrm{d}\mathbf{x}_k.$$

où l'on reconnaît la transformée de Fourier $P(\mathbf{u})$ de la densité de probabilité $p(\mathbf{x})$. Comme $p(\mathbf{x}) = i(\mathbf{x})/N$ alors $P(\mathbf{u}) = I(\mathbf{u})/N$ et il vient

$$\mathrm{E}\left\{\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi \mathbf{x}_k \mathbf{u}}\right\} = \frac{1}{N} I(\mathbf{u}). \tag{3.6}$$

Finalement, en combinant (3.2), (3.5) et (3.6), on trouve que l'espérance de la transformée de Fourier de l'image détectée n'est autre que la transformée de Fourier de la distribution d'intensité $i(\mathbf{x})$:

$$\mathrm{E}\left\{\widetilde{I}(\mathbf{u})\right\} = I(\mathbf{u}). \tag{3.7}$$

Comme la transformée de Fourier est linéaire, cela implique que l'espérance de l'image détectée est bien la distribution d'intensité. Bien entendu, ce résultat aurait pu être démontré plus directement. Néanmoins, la démarche qui a permis de l'obtenir est importante : la même approche va me permettre de déterminer les espérances de quantités plus complexes que $\widetilde{I}(\mathbf{u})$ ou $\widetilde{\imath}(\mathbf{x})$.

Avant d'aborder la suite, il est utile d'établir l'espérance des moments d'ordre k du nombre de photons dans l'image que je définis comme :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\{\widetilde{N}(\widetilde{N}-1)\dots(\widetilde{N}-k+1)\} &= \sum_{n\geq 0} \frac{\mathrm{e}^{-N} N^n}{n!} n(n-1)\dots(n-k+1) \\ &= N^k \mathrm{e}^{-N} \sum_{n\geq k} \frac{N^{n-k}}{(n-k)!}, \end{aligned}$$

en remarquant que la somme est égale au développement en série de e^N, il vient

$$\mathrm{E}\{\widetilde{N}(\widetilde{N}-1)\dots(\widetilde{N}-k+1)\} = N^k. \tag{3.8}$$

3.2 Biais dû au bruit de photons

Chaque image détectée $\widetilde{\imath}(\mathbf{x})$ est la réalisation d'un processus aléatoire dont l'espérance est la distribution d'intensité $i(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) * o(\mathbf{x})$ et dont les fluctuations sont dues au bruit de photon et au bruit de détecteur. Dès lors, tout estimateur faisant intervenir une puissance (supérieure à 1) de l'intensité détectée en un point donné voit son espérance biaisée. Par exemple, le biais d'un double produit est égal à la variance des fluctuations. Par conséquent, même si ces bruits sont décorrélés d'un élément du détecteur à un autre, ils introduisent un biais dans les mesures des fonctions de corrélation moyennes des images détectées. Afin de tirer le meilleur parti des données acquises, il est souhaitable de corriger les quantités mesurées de ces biais. Dans le cas contraire, cela revient au mieux à limiter le pouvoir de résolution effectif du système.

3.2.1 Spectre de puissance

L'interférométrie des tavelures traditionnelle (Labeyrie, 1970) permet de déterminer le spectre de puissance de l'objet observé. Cette méthode nécessite d'estimer le spectre de puissance moyen de la distribution d'intensité ou, de façon équivalente, l'autocorrélation moyenne de la distribution d'intensité :

$$\langle i^{(2)}(\mathbf{x})\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int i(\mathbf{x}')i(\mathbf{x}+\mathbf{x}')\,\mathrm{d}\mathbf{x}' \quad \stackrel{\text{TF}}{\longrightarrow} \quad \langle I^{(2)}(\mathbf{u})\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle |I(\mathbf{u})|^2\rangle,$$

qui sont obtenus en intégrant l'autocorrélation ou le spectre de puissance des images détectées.

L'espérance du spectre de puissance moyen des images détectées est :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left\{\langle \widetilde{I}^{(2)}(\mathbf{u})\rangle\right\} &= \langle \mathrm{E}\left\{\widetilde{I}^{(2)}(\mathbf{u})\right\}\rangle \\ &= \left\langle \mathrm{E}\left\{\sum_{k=1}^{\widetilde{N}}\sum_{l=1}^{\widetilde{N}} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi(\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_l)\mathbf{u}}\right\}\right\rangle \end{aligned} \tag{3.9}$$

Afin de pouvoir évaluer simplement l'espérance du spectre de puissance des images courte pose, il faut se ramener à des variables aléatoires indépendantes. Comme, d'une part, $\widetilde{N}$ et $\mathbf{x}_k$ sont indépendantes et, d'autre part, $\mathbf{x}_k$ et $\mathbf{x}_l$ sont indépendantes si $l \neq k$, il suffit de considérer séparément les cas $l = k$ et $l \neq k$:

$$\mathrm{E}\left\{\langle \widetilde{I}^{(2)}(\mathbf{u})\rangle\right\} = \left\langle \mathrm{E}\left\{\sum_{\substack{k=1\\l=k}}^{\widetilde{N}} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi(\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_l)\mathbf{u}} + \sum_{k=1}^{\widetilde{N}}\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{\widetilde{N}} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi\mathbf{x}_k\mathbf{u}}\mathrm{e}^{\jmath 2\pi\mathbf{x}_l\mathbf{u}}\right\}\right\rangle.$$

En introduisant la densité de probabilité $p(\mathbf{x})$ des variables aléatoires $\mathbf{x}_k$ et $\mathbf{x}_l$, il vient

$$\mathrm{E}\left\{\langle \widetilde{I}^{(2)}(\mathbf{u})\rangle\right\} = \left\langle \mathrm{E}\{\widetilde{N}\} + \mathrm{E}\{\widetilde{N}(\widetilde{N}-1)\}\int p(\mathbf{x}_k)\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi\mathbf{x}_k\mathbf{u}}\mathrm{d}\mathbf{x}_k \int p(\mathbf{x}_l)\mathrm{e}^{\jmath 2\pi\mathbf{x}_l\mathbf{u}}\mathrm{d}\mathbf{x}_l\right\rangle$$

où l'on reconnait la transformée de Fourier $P(\mathbf{u}) = I(\mathbf{u})/N$ de $p(\mathbf{x})$ et son conjugué $P^*(\mathbf{u})$. En se rappellant que $\mathrm{E}\{\widetilde{N}(\widetilde{N}-1)\} = N^2$ (*cf.* eq. 3.8), on obtient l'expression de l'espérance du spectre de puissance moyen des images détectées :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left\{\langle \widetilde{I}^{(2)}(\mathbf{u})\rangle\right\} &= \langle N\rangle + \langle |I(\mathbf{u})|^2\rangle \\ &= \langle N\rangle + \langle I^{(2)}(\mathbf{u})^2\rangle. \end{aligned} \tag{3.10}$$

A partir de l'expression précédente, on obtient immédiatement un estimateur sans biais de la densité spectrale de puissance moyenne :

$$\widetilde{D}(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle |\widetilde{I}(\mathbf{u})|^2 - \widetilde{N}\rangle. \tag{3.11}$$

Dans l'espace image, cela correspond à l'estimateur sans biais de l'autocorrélation moyenne des images :

$$\widetilde{d}(\mathbf{x}) = \langle \sum_{k=1}^{\widetilde{N}} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{\widetilde{N}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_l) \rangle \tag{3.12}$$

où l'on voit que le biais est évité simplement en ne corrélant pas les photo-événements avec eux-mêmes (condition $l \neq k$). L'intégration de $\widetilde{d}(\mathbf{x})$ est particulièrement simple et rapide en comptage de photons puisqu'il suffit d'intégrer l'histogramme des séparations $(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l)$ entre deux photo-événements différents ($l \neq k$) dans chaque image.

Dainty & Greenaway (1979) ont démontré que le meilleur résultat est obtenu en ne tenant pas compte des images dans lesquelles le nombre de photons est inférieur à 2. Si cette sélection est faite, l'intégration de $\widetilde{d}(\mathbf{x})$ ou de $\widetilde{D}(\mathbf{u})$ permet de mesurer le spectre de puissance moyen même à très bas flux ; c'est-à-dire même lorsque le nombre moyen de photons par image est inférieur à 1 ($N \ll 1$).

3.2.2 Méthode de Knox-Thompson

La méthode de Knox-Thompson, permet d'obtenir la phase du spectre de Fourier de l'objet observé, mais, comme elle nécessite l'intégration d'un produit spectral, on s'attend donc à trouver un terme de biais. Afin de déterminer un estimateur débiaisé de

$$\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rangle = \langle I(\mathbf{u}) I^*(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \rangle,$$

je vais calculer l'espérance de $\widetilde{I}^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ en suivant une démarche analogue à celle qui précède :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left\{\langle\widetilde{I}^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle\right\} &= \left\langle \mathrm{E}\left\{\widetilde{I}^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\right\}\right\rangle \\
&= \left\langle \mathrm{E}\left\{\widetilde{I}(\mathbf{u})\widetilde{I}^{*}(\mathbf{u}+\mathbf{v})\right\}\right\rangle \\
&= \left\langle \mathrm{E}\left\{\sum_{k=1}^{\widetilde{N}} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi \mathbf{x}_k \mathbf{u}} \sum_{l=1}^{\widetilde{N}} \mathrm{e}^{\jmath 2\pi \mathbf{x}_l(\mathbf{u}+\mathbf{v})}\right\}\right\rangle \\
&= \left\langle \mathrm{E}\left\{\sum_{l=1}^{\widetilde{N}} \mathrm{e}^{\jmath 2\pi \mathbf{x}_l \mathbf{v}}\right\}\right\rangle + \left\langle \mathrm{E}\left\{\sum_{l=1}^{\widetilde{N}} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{\widetilde{N}} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi \mathbf{x}_k \mathbf{u}} \mathrm{e}^{\jmath 2\pi \mathbf{x}_l(\mathbf{u}+\mathbf{v})}\right\}\right\rangle \\
&= \langle \mathrm{E}\{\widetilde{N}\} P^{*}(\mathbf{v})\rangle + \langle \mathrm{E}\{\widetilde{N}(\widetilde{N}-1)\} P(\mathbf{u}) P^{*}(\mathbf{u}+\mathbf{v})\rangle \\
&= \langle N P^{*}(\mathbf{v})\rangle + \langle N^2 P(\mathbf{u}) P^{*}(\mathbf{u}+\mathbf{v})\rangle \\
&= \langle I^{*}(\mathbf{v})\rangle + \langle I(\mathbf{u}) I^{*}(\mathbf{u}+\mathbf{v})\rangle \\
&= \langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle + \langle I^{*}(\mathbf{v})\rangle
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Cette expression nous permet de déduire un estimateur sans biais de $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ Nisenson & Papaliolios (1983) :

$$\widetilde{K}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle \widetilde{I}(\mathbf{u})\widetilde{I}^{*}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - \widetilde{I}^{*}(\mathbf{v})\rangle. \tag{3.14}$$

En comptage de photons, il est avantageux d'utiliser une méthode de corrélation pour obtenir plus rapidement $\widetilde{K}(\mathbf{u},\mathbf{v})$. Dans le calcul qui précède, on voit tout de suite que :

$$\begin{aligned}
\widetilde{K}(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \left\langle \mathrm{E}\left\{\sum_{l=1}^{\widetilde{N}} \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq l}}^{\widetilde{N}} \mathrm{e}^{\jmath 2\pi \mathbf{x}_l(\mathbf{u}+\mathbf{v})} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi \mathbf{x}_m \mathbf{u}}\right\}\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{l=1}^{\widetilde{N}} \mathrm{e}^{\jmath 2\pi \mathbf{x}_l \mathbf{v}} \sum_{\substack{m \\ m\neq l}}^{\widetilde{N}} \mathrm{e}^{\jmath 2\pi(\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_m)\mathbf{u}}\right\rangle
\end{aligned} \tag{3.15}$$

où l'on reconnait une transformation de Fourier en $\mathbf{u}$:

$$\widetilde{K}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int \widetilde{k}(\mathbf{x},\mathbf{v}) \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi \mathbf{x}\mathbf{u}} \,\mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{3.16}$$

avec :

$$\widetilde{k}(\mathbf{x},\mathbf{v}) = \left\langle \sum_{l=1}^{\widetilde{N}} \mathrm{e}^{\jmath 2\pi \mathbf{x}_l \mathbf{v}} \sum_{\substack{m \\ m\neq l}}^{\widetilde{N}} \delta(\mathbf{x}+\mathbf{x}_l-\mathbf{x}_m) \right\rangle . \tag{3.17}$$

Le calcul de $\widetilde{k}(\mathbf{x},\mathbf{v})$ est tout à fait adapté au comptage de photons. Dans ce cas, il faut intégrer $\widetilde{k}(\mathbf{x},\mathbf{v})$ pour chaque sous-plan généré par $\mathbf{v}$. A la fin de l'intégration, $\widetilde{K}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ est obtenu par une simple transformation de Fourier.

Comme pour le spectre de puissance, un estimateur sans biais pour la méthode de Knox-Thompson peut être obtenu par une méthode de corrélation si on évite de corréler chaque événement avec lui-même.

3.2.3 Triple corrélation et bispectre

En comptage de photons, la triple corrélation de l'image détectée a pour expression :

$$\begin{aligned} \widetilde{\imath}^{(3)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \int \widetilde{\imath}(\mathbf{x}+\mathbf{z})\widetilde{\imath}(\mathbf{y}+\mathbf{z})\widetilde{\imath}(\mathbf{z})\,\mathrm{d}\mathbf{z} \\ &= \sum_{k=1}^{\widetilde{N}}\sum_{l=1}^{\widetilde{N}}\sum_{m=1}^{\widetilde{N}} \delta(\mathbf{x}+\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_l)\delta(\mathbf{y}+\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_m) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Une double transformation de Fourier en $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ donne le bispectre de l'image détectée :

$$\begin{aligned} \widetilde{I}^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \widetilde{I}(\mathbf{u})\widetilde{I}(\mathbf{v})\widetilde{I}^{*}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= \sum_{k=1}^{\widetilde{N}}\sum_{l=1}^{\widetilde{N}}\sum_{m=1}^{\widetilde{N}} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi(\mathbf{x}_l-\mathbf{x}_k)\mathbf{u}}\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi(\mathbf{x}_m-\mathbf{x}_k)\mathbf{v}} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Afin de calculer l'espérance de $\widetilde{I}^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})$, il faut considérer séparément les cas

$$\begin{aligned} k=l=m \quad & \text{nombre de cas} = \widetilde{N} && \text{(a)} \\ m=k\neq l \quad & \text{nombre de cas} = \widetilde{N}(\widetilde{N}-1) && \text{(b)} \\ l=k\neq m \quad & \text{nombre de cas} = \widetilde{N}(\widetilde{N}-1) && \text{(c)} \\ l=m\neq k \quad & \text{nombre de cas} = \widetilde{N}(\widetilde{N}-1) && \text{(d)} \\ k\neq l,\ k\neq m \text{ et } l\neq m \quad & \text{nombre de cas} = \widetilde{N}(\widetilde{N}-1)(\widetilde{N}-2) && \text{(e)} \end{aligned}$$

Le terme (a) vaut :

$$\mathrm{E}\left\{ \sum_{k=1}^{\widetilde{N}} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi(\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_k)\mathbf{u}}\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi(\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_k)\mathbf{v}} \right\} = \mathrm{E}\{\widetilde{N}\} = N. \tag{a}$$

Les termes (b), (c) et (d) s'évaluent de la même manière que pour le spectre de puissance et valent respectivement :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left\{\sum_{k=1}^{\widetilde{N}}\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{\widetilde{N}} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi(\mathbf{x}_l-\mathbf{x}_k)\mathbf{u}}\right\} &= \mathrm{E}\{\widetilde{N}(\widetilde{N}-1)\}\int p(\mathbf{x}_k)\mathrm{e}^{\jmath 2\pi\mathbf{x}_k\mathbf{u}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}_k \\ &\quad\times\int p(\mathbf{x}_l)\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi\mathbf{x}_l\mathbf{u}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}_l \\ &= |I(\mathbf{u})|^2 \\ &= I^{(2)}(\mathbf{u}) \end{aligned} \tag{b}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left\{\sum_{k=1}^{\widetilde{N}}\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{\widetilde{N}} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi(\mathbf{x}_m-\mathbf{x}_k)\mathbf{v}}\right\} &= \mathrm{E}\{\widetilde{N}(\widetilde{N}-1)\}\int p(\mathbf{x}_k)\mathrm{e}^{\jmath 2\pi\mathbf{x}_k\mathbf{v}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}_k \\ &\quad\times\int p(\mathbf{x}_m)\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi\mathbf{x}_l\mathbf{v}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}_m \\ &= |I(\mathbf{v})|^2 \\ &= I^{(2)}(\mathbf{v}) \end{aligned} \tag{c}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left\{\sum_{k=1}^{\widetilde{N}}\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{\widetilde{N}} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi(\mathbf{x}_l-\mathbf{x}_k)\mathbf{u}}\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi(\mathbf{x}_l-\mathbf{x}_k)\mathbf{v}}\right\} &= \mathrm{E}\{\widetilde{N}(\widetilde{N}-1)\}\int p(\mathbf{x}_k)\mathrm{e}^{\jmath 2\pi\mathbf{x}_k(\mathbf{u}+\mathbf{v})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}_k \\ &\quad\times\int p(\mathbf{x}_l)\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi\mathbf{x}_l(\mathbf{u}+\mathbf{v})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}_l \\ &= |I(\mathbf{u}+\mathbf{v})|^2 \\ &= I^{(2)}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \end{aligned} \tag{d}$$

Il reste à évaluer l'espérance du terme (e) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left\{\sum_{k=1}^{\widetilde{N}}\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{\widetilde{N}}\sum_{\substack{m=1\\m\neq k\\m\neq l}}^{\widetilde{N}} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi(\mathbf{x}_l-\mathbf{x}_k)\mathbf{u}}\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi(\mathbf{x}_m-\mathbf{x}_k)\mathbf{v}}\right\} &= \mathrm{E}\{\widetilde{N}(\widetilde{N}-1)(\widetilde{N}-2)\} \\
&\quad\times\int p(\mathbf{x}_k)\mathrm{e}^{\jmath 2\pi\mathbf{x}_k(\mathbf{u}+\mathbf{v})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}_k \\
&\quad\times\int p(\mathbf{x}_l)\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi\mathbf{x}_l\mathbf{u}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}_l \\
&\quad\times\int p(\mathbf{x}_m)\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi\mathbf{x}_m\mathbf{v}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}_m \\
&= I^*(\mathbf{u}+\mathbf{v})I(\mathbf{u})I(\mathbf{v}) \\
&= I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v}). \qquad \text{(e)}
\end{aligned}$$

En faisant la somme (a)+(b)+(c)+(d)+(e), on obtient l'espérance du bispectre des images détectées :

$$\mathrm{E}\left\{\widetilde{I}^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\right\} = I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + I^{(2)}(\mathbf{u}) + I^{(2)}(\mathbf{v}) + I^{(2)}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + N \tag{3.20}$$

En combinant ce que nous savons de l'espérance du spectre de puissance des images détectées (*cf.* équation (3.10)) et le résultat précédent, nous pouvons écrire un estimateur sans biais du bispectre :

$$\widetilde{B}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \overset{\text{def}}{=} \langle\widetilde{I}^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \widetilde{I}^{(2)}(\mathbf{u}) - \widetilde{I}^{(2)}(\mathbf{v}) - \widetilde{I}^{(2)}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + 2\widetilde{N}\rangle \tag{3.21}$$

Cette expression a été obtenue pour la première fois par Wirnitzer (1985).

Au cours du calcul de l'espérance de $\widetilde{I}^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})$, nous avons vu que le terme égal au bispectre de la distribution d'intensité correspond au cas (e) (*i.e.* $k\neq l$, $k\neq m$ et $l\neq m$), pour lequel seules les corrélations entre trois photons différents sont prises en compte. Pour mesurer la triple corrélation de la distribution d'intensité en comptage de photons, il faut donc intégrer :

$$\widetilde{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left\langle\sum_{k=1}^{\widetilde{N}}\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{\widetilde{N}}\sum_{\substack{m=1\\m\neq k m\neq l}}^{\widetilde{N}} \delta(\mathbf{x}+\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_l)\delta(\mathbf{y}+\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_m)\right\rangle \tag{3.22}$$

Nous avons vu qu'étant donné le volume du bispectre (de la triple corrélation) d'images bidimensionnelles, seuls quelques "sous-plans" du bispectre sont intégrés en pratique. Northcott et al. (1988) ont proposé d'intégrer, pour chaque sous-plan généré par $\mathbf{v}$, la quantité suivante :

$$\widetilde{q}(\mathbf{x},\mathbf{v}) = \left\langle\sum_{k=1}^{\widetilde{N}}\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi\mathbf{x}_k\mathbf{v}}\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{\widetilde{N}}\sum_{\substack{m=1\\m\neq k m\neq l}}^{\widetilde{N}} \delta(\mathbf{x}+\mathbf{x}_m-\mathbf{x}_l)\mathrm{e}^{\jmath 2\pi\mathbf{x}_m\mathbf{v}}\right\rangle \tag{3.23}$$

ce qui correspond à la transformée de Fourier inverse pour la fréquence spatiale $\mathbf{u}$ de $\widetilde{B}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ ou encore à la transformée de Fourier pour la position $\mathbf{y}$ de $\widetilde{b}(\mathbf{x},\mathbf{y})$. A la fin de l'intégration, une seule transformation de Fourier par sous-plan mesuré est nécessaire au lieu d'une transformation de Fourier par image si les sous-plans du bispectre sont calculés directement.

3.2.4 Conclusion

Nous avons vu comment éviter les biais dûs au bruit de photons dans l'intégration des estimateurs qui sont à la base de l'interférométrie des tavelures traditionnelle, de la méthode de Knox-Thompson et de la triple corrélation. Lorsque l'on travaille à très bas flux, notamment en comptage de photons, ces biais ne sont pas du tout négligeables et l'utilisation d'estimateurs débiaisés est absolument nécessaire. En comptage de photons, il est beaucoup plus rapide d'intégrer les histogrammes des corrélations (doubles ou triples) de photo-événements. Dans ce cas, le biais du bruit de photons est évité très simplement en ne tenant compte que des corrélations entre photo-événements tous différents (Ayers et al., 1988).

3.3 Trou du comptage de photons

Un photo-événement occupe un certain volume spatio-temporel : il a une certaine durée et une certaine dimension. Du point de vue du détecteur, l'espace et le temps sont discrétisés aussi il voit des photo-événements qui occupent au moins un volume égal à un intervalle de temps par un élément de surface. A l'heure actuelle, les dispositifs à comptage de photons ne sont pas capables de distinguer des photo-événements qui occupent des volumes non disjoints. Dans le cas où une telle occurence se produit, au mieux un événement est détecté. L'absence de paire (et de triplet, ...) de photo-événements dans les données fournies par un détecteur à comptage de photons se traduit par un trou au centre de l'autocorrélation moyenne des images : le *trou* du comptage de photons. Ce trou a, au moins, les dimensions du volume d'un photo-événement (Thiébaut, 1994a). Comme les méthodes de l'interférométrie des tavelures sont basées sur la mesure de fonctions de corrélation des images, ce défaut des détecteurs à comptage de photons est une source majeure de biais lorsque l'on applique ces techniques. A ma connaissance, ce défaut est connu depuis longtemps mais ce n'est que depuis peu que sont développées des techniques permettant de s'en affranchir (Foy, 1988b; Hofmann, 1993; Thiébaut, 1994a).

Pour les CCD intensifiés, à cause notamment du temps de récupération des galettes de micro-canaux et des phosphores, le nombre de photons émis en sortie des étages d'intensification n'est pas proportionnel au nombre de photons incidents détectés par la photocathode : le gain des intensificateurs n'est pas linéaire. Cette non linéarité du gain interdit de distinguer deux photo-événements superposés pour une trame donnée. Dans ce cas, le *trou* a au moins la durée du temps de pose et au moins la surface d'un pixel. La rémanence

des phosphores peut augmenter la longueur temporelle du *trou* tandis que l'étalement de la gerbe de photons crée par les intensificateurs pour un photon détecté augmente la surface du *trou*.

Si le gain est approximativement linéaire jusqu'à quelques coups par élément du détecteur, il est théoriquement possible de séparer et de localiser deux ou trois photo-événements se chevauchant. Mais il faut pour cela des algorithmes beaucoup plus sophistiqués que ne le permet la détection en temps réel. Il reste alors la possibilité d'enregistrer la totalité du signal vidéo afin d'effectuer la détection des photons en temps différé. Outre que le traitement de ces données devient alors extrêmement long, le volume de stockage et le débit de données nécessaires peuvent rendre cette approche inapplicable.

Les systèmes à comptage de photons de type caméra PAPA (Papaliolios et al., 1985) ou à anode résistive repèrent les photons au fur et à mesure de leur arrivée. Dans ce cas, il existe un temps mort entre la détection de deux photo-événements successifs. Par rapport aux dispositifs à base de CCD intensifiés, le principal inconvénient de ce type de détecteurs est qu'ils présentent un flux de saturation beaucoup plus faible. Par contre, ils ont l'avantage de permettre d'adapter au moment du dépouillement le temps de pose en fonction du temps d'évolution de la turbulence. Si le temps mort est suffisamment faible devant le plus long temps de pose autorisé, le *trou* peut devenir négligeable. En pratique cela n'est jamais le cas.

Une solution pour les futurs détecteurs à comptage de photons serait d'utiliser la technique des EBCCD (*Electron-Bombarded CCD*) dont le gain est pratiquement linéaire jusqu'à une dizaine de coups par pixel. Le principe des EBCCD est de détecter directement les électrons émis par la photocathode avec un CCD aminci (Cuby, 1988). Ce type de détecteur n'utilise pas d'étage d'intensification à base de galette de micro-canaux ni d'écran au phosphore qui sont les principaux responsables de la non linéarité du gain des CCD intensifiés : une optique électrostatique suffit pour accélérer les électrons et leur donner suffisamment d'énergie pour créer des charges dans les puits de potentiel du CCD.

Dans une première partie, je vais introduire une description de ce défaut des détecteurs à comptage de photons propre à rendre compte de son effet dans l'autocorrélation. Comme l'a proposé Foy (1988b), je montrerai ensuite comment l'intégration d'intercorrélations au lieu d'autocorrélations permet d'éviter ce biais en interférométrie des tavelures classique. Cette démonstration ne diffère de celle que j'ai déjà effectuée (Thiébaut, 1994a) que par la description des images détectées, cela ne change en rien les prévisions du modèle. Enfin, en vue d'obtenir une mesure de la phase du spectre de Fourier de l'objet, je proposerai d'étendre cette approche à la méthode de Knox-Thompson et à la triple corrélation.

3.3.1 Modélisation du trou

Dans la modélisation de l'image détectée introduite dans la section précédente, le nombre de photons $\widetilde{N}$ est une variable aléatoire obéissant à une loi de Poisson de paramètre $N = \mathrm{E}\{\widetilde{N}\}$ et les positions $\mathbf{x}_k$ $(k = 1, \ldots, \widetilde{N})$ des photo-événements sont des variables

aléatoires indépendantes dont la densité de probabilité est proportionnelle à la distribution d'intensité $i(\mathbf{x}_k)$. Pour un détecteur parfait, la densité de probabilité jointe du couple de variables aléatoires $\mathbf{x}_k$ et $\mathbf{x}_l$ est donc :

$$p^{(2)}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) = \begin{cases} p(\mathbf{x}_k) & \text{si } k = l \\ p(\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_l) & \text{si } k \neq l \end{cases} \tag{3.24}$$

où $p(\mathbf{x}) = i(\mathbf{x})/N$ est la densité de propabilité de localisation des photo-événements. A cause de l'incapacité du détecteur à distinguer deux photo-événements proches, les positions de deux photo-événements différents ne peuvent plus être considérées comme des variables aléatoires indépendantes. La densité de probabilité jointe devient :

$$p^{(2)}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) = \begin{cases} p(\mathbf{x}_k) & \text{si } k = l \\ p(\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_l) & \text{si } k \neq l \text{ et } (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l) \notin \mathcal{S} \\ 0 & \text{si } k \neq l \text{ et } (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l) \in \mathcal{S} \end{cases} \tag{3.25}$$

où $\mathcal{S}$ est une surface dont les dimensions sont la plus petite distance pour laquelle le détecteur est capable de séparer deux photo-événements. Si le détecteur est incapable de distinguer deux photo-événements dès lors qu'ils se chevauchent, alors $\mathcal{S}$ est le support de l'autocorrélation du support d'un photo-événement. La caméra CP40 est capable de séparer deux photo-événements si leurs centres sont au moins séparés par un pixel ; dans ce cas $\mathcal{S}$ est une matrice de 3×3 pixels (Thiébaut, 1994a). Dans la modélisation de ce défaut, je suppose que $\mathcal{S}$ est symétrique — *i.e.* $\mathbf{x} \in \mathcal{S} \Leftrightarrow (-\mathbf{x}) \in \mathcal{S}$ — et invariant sur tout le détecteur.

L'équation (3.25) donne une expression de la densité de probabilité jointe qui n'est valable que si le flux est suffisamment faible. Cela signifie que les hypothèses suivantes doivent être raisonnables :

1. la statistique du nombre de photons détectés, $\widetilde{N}$, est pratiquement la même que précédemment, plus précisemment l'équation (3.8) reste approximativement valable pour déterminer l'espérance des moments d'ordre k du nombre de photons détectés dans l'image ;
2. l'espérance de l'image détectée reste pratiquement égale à la distribution d'intensité.

En pratique, il suffit que le flux soit très en deçà du niveau de saturation du détecteur.

En introduisant une fonction $h(\mathbf{x})$ valant zéro sur $\mathcal{S}$ et un partout ailleurs, on peut aussi modéliser la probabilité jointe de deux photo-événements par :

$$p^{(2)}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) = \begin{cases} p(\mathbf{x}_k) & \text{si } k = l \\ p(\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_l)h(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l) & \text{si } k \neq l \end{cases} \tag{3.26}$$

avec :

$$h(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{S} \\ 1 & \text{si } \mathbf{x} \notin \mathcal{S} \end{cases} \tag{3.27}$$

Comme $\mathcal{S}$ est symétrique, alors $h(\mathbf{x})$ est une fonction paire (*i.e.* $h(-\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$).

En tenant compte du défaut des détecteurs à comptage de photons, l'espérance de l'autocorrélation moyenne des images détectées devient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left\{\langle\widetilde{i}^{(2)}(\mathbf{x})\rangle\right\} &= \mathrm{E}\left\{\left\langle\sum_{k=1}^{\widetilde{N}}\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{\widetilde{N}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k+\mathbf{x}_l)\right\rangle\right\} \\
&= \left\langle\mathrm{E}\{\widetilde{N}(\widetilde{N}-1)\}\iint\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k+\mathbf{x}_l)p^{(2)}(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_l)\,\mathrm{d}\mathbf{x}_k\,\mathrm{d}\mathbf{x}_l\right\rangle \\
&= \left\langle N^2\iint\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_k+\mathbf{x}_l)p(\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_l)h(\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_l)\,\mathrm{d}\mathbf{x}_k\,\mathrm{d}\mathbf{x}_l\right\rangle \\
&= \left\langle N^2\int p(\mathbf{x}_l)p(\mathbf{x}+\mathbf{x}_l)h(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}_l\right\rangle \\
&= \left\langle\int i(\mathbf{x}_l)i(\mathbf{x}+\mathbf{x}_l)h(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}_l\right\rangle \\
&= h(\mathbf{x})\langle\int i(\mathbf{x}_l)i(\mathbf{x}+\mathbf{x}_l)\,\mathrm{d}\mathbf{x}_l\rangle
\end{aligned}$$

où l'on reconnait l'autocorrélation

$$i^{(2)}(\mathbf{x})\overset{\text{def}}{=}\int i(\mathbf{x}')i(\mathbf{x}+\mathbf{x}')\,\mathrm{d}\mathbf{x}'$$

de la distribution d'intensité $i(\mathbf{x})$. Finalement, à cause de l'incapacité des détecteurs à comptage de photons à détecter des photo-événements trop proches, l'autocorrélation moyenne des images détectées est :

$$\mathrm{E}\left\{\langle\widetilde{i}^{(2)}(\mathbf{x})\rangle\right\} = h(\mathbf{x})\langle i^{(2)}(\mathbf{x})\rangle. \tag{3.28}$$

D'après la forme de $h(\mathbf{x})$ (*cf.* éq. (3.27)), l'espérance de l'autocorrélation moyenne des images détectées est égale à l'autocorrélation moyenne de la distribution d'intensité sauf au centre (*i.e.* pour $\mathbf{x}\in\mathcal{S}$) ou elle vaut zéro. La figure 3.1 montre le centre de l'autocorrélation des images détectées : le *trou* est clairement visible au centre (les bords du *trou* ne sont pas aussi abrupts que mon modèle le prévoit car les hypothèses d'invariance par translation du support d'un photo-événement ne sont plus tout à fait justifiées du fait de la correction de la distorsion).

Dans le spectre de puissance, le *trou* de l'autocorrélation se manifeste par de fortes oscillations. A moins que le *trou* soit très large, les basses fréquences spatiales sont peu affectées par ce défaut. C'est pourquoi une solution peut être de sur-échantillonner largement l'image, de sorte que le biais du *trou* du comptage de photons n'ait pas trop d'influence sur le spectre jusqu'à la fréquence de coupure optique. Bien entendu, pour un même format de détecteur, le champ accessible se trouve alors réduit d'autant.

Cette modélisation de l'effet du comptage de photons rend compte d'un *trou* spatial. Une approche similaire à celle décrite ci-dessus permet de modéliser un défaut temporel. De

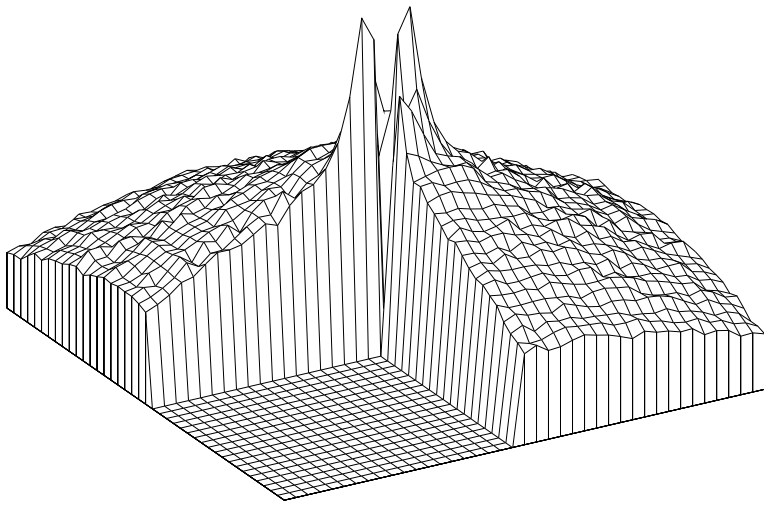


FIG. 3.1 – *Trou* du comptage de photon dans l'autocorrélation. Cette autocorrélation a été calculée à partir de 49 081 trames de 41 photons chacune en moyenne de l'étoile SAO 93887 observée au CFHT en novembre 1989. Le quart inférieur de l'autocorrélation a été tronqué pour mieux en montrer la partie centrale : ce n'est pas un effet du détecteur !

façon plus générale, en considérant les positions spatio-temporelles, $(\mathbf{x}_k, t_k)$, des photo-événements, on pourrait mettre en évidence un *trou* spatio-temporel.

Aime & Aristidi (1992) ont proposé un modèle "discret" (*i.e.* en introduisant les pixels) des détecteurs à comptage de photons. Dans le cadre de ce modèle, ils rendent compte de biais comme le *trou* du comptage de photons mais celui-ci se réduit à un seul pixel. J'ai montré (Thiébaut, 1994a) que ce type de modèle peut servir à décrire un *trou* de taille arbitraire dans l'autocorrélation moyenne.

3.3.2 Interférométrie des tavelures traditionnelle

Le tavélographe de CP40 à été modifié pour éviter ce biais. En effet, notre instrument permet de dédoubler l'image à l'aide d'une séparatrice. Deux versions différentes de la même distribution d'intensité sont alors détectées par deux canaux différents de la caméra CP40. L'intercorrélation de ces images permet de prendre en compte les paires de photo-événements proches.

Je vais démontrer que l'intercorrélation moyenne des images détectées est un estimateur sans biais de l'autocorrélation moyenne de la distribution d'intensité. Je montrerai ensuite le gain en terme de rapport signal à bruit qu'il y a à symétriser l'intercorrélation.

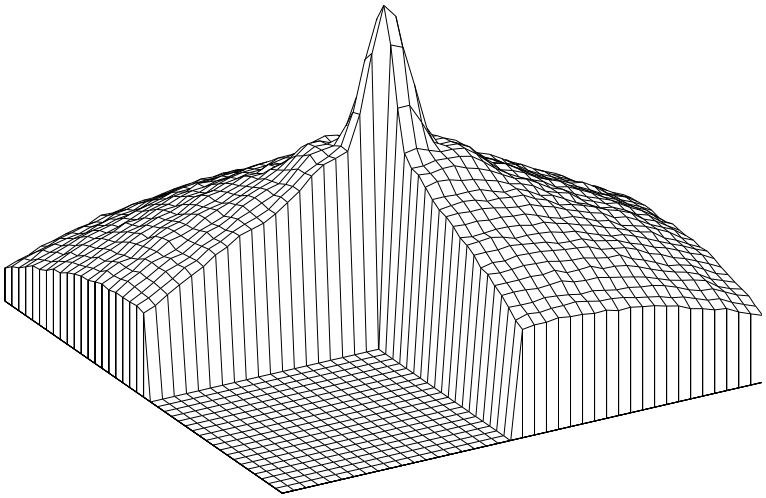


FIG. 3.2 – Pic tavelure dans l'intercorrélation. Cette intercorrélation a été calculée à partir de 49 081 trames de 41 photons chacune en moyenne de l'étoile SAO 93887 observée au CFHT en novembre 1989.

intercorrélations

Soient $\widetilde{\imath}_1(\mathbf{x})$ et $\widetilde{\imath}_2(\mathbf{x})$ les deux images détectées à la même longueur d'onde par deux canaux différents de notre instrument. Ces deux images sont deux réalisations indépendantes du même processus stochastique, en particulier elles ont la même espérance $i(\mathbf{x})$. Je note $\widetilde{\imath}^{(2)}_{1,2}(\mathbf{x})$ l'intercorrélation de ces deux images :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\imath}^{(2)}_{1,2}(\mathbf{x}) &= \int \widetilde{\imath}_1(\mathbf{x}')\widetilde{\imath}_2(\mathbf{x}+\mathbf{x}')\,\mathrm{d}\mathbf{x}' \\
&= \sum_{k_1=1}^{\widetilde{N}_1}\sum_{k_2=1}^{\widetilde{N}_2}\int \delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_{k_1})\delta(\mathbf{x}+\mathbf{x}'-\mathbf{x}_{k_2})\,\mathrm{d}\mathbf{x}' \\
&= \sum_{k_1=1}^{\widetilde{N}_1}\sum_{k_2=1}^{\widetilde{N}_2}\delta(\mathbf{x}+\mathbf{x}_{k_1}-\mathbf{x}_{k_2})
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Comme $\widetilde{N}_1$, $\widetilde{N}_2$, $\mathbf{x}_{k_1}$ et $\mathbf{x}_{k_2}$ sont des variables aléatoires indépendantes, l'espérance de

l'intercorrélation des deux images détectées est :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left\{\widetilde{\imath}^{(2)}_{1,2}(\mathbf{x})\right\} &= \mathrm{E}\{\widetilde{N}_1\}\mathrm{E}\{\widetilde{N}_2\} \iint \delta(\mathbf{x}+\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)p(\mathbf{x}_1)p(\mathbf{x}_2)\,\mathrm{d}\mathbf{x}_1\,\mathrm{d}\mathbf{x}_2 \\
&= N^2 \int p(\mathbf{x}_1)p(\mathbf{x}+\mathbf{x}_1)\,\mathrm{d}\mathbf{x}_1 \\
&= \int i(\mathbf{x}_1)i(\mathbf{x}+\mathbf{x}_1)\,\mathrm{d}\mathbf{x}_1 \\
&= i^{(2)}(\mathbf{x}), \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

où N est l'espérance de $\widetilde{N}_1$ et de $\widetilde{N}_2$ et vaut la moitié de l'espérance de $\widetilde{N}$ (le flux est divisé par deux). Le passage à la moyenne est immédiat et l'on trouve que l'intercorrélation moyenne des images détectées est effectivement un estimateur sans biais de l'autocorrélation moyenne de la distribution d'intensité :

$$\mathrm{E}\left\{\langle\widetilde{\imath}^{(2)}_{1,2}(\mathbf{x})\rangle\right\} = \langle i^{(2)}(\mathbf{x})\rangle. \qquad (3.31)$$

La figure 3.2 montre que le centre de l'intercorrélation est correctement estimé, on distingue même nettement le premier anneau de la tache d'Airy autour du pic tavelure.

Symétrisation de l'intercorrélation

Je viens de montrer comment obtenir une mesure non biaisée de l'autocorrélation ou du spectre de puissance moyen des images courte pose. Comme, $\widetilde{\imath}_1(\mathbf{x})$ et $\widetilde{\imath}_2(\mathbf{x})$ sont deux réalisations indépendantes du même processus stochastique, leur intercorrélation n'est pas exactement symétrique. Par suite, $\langle\widetilde{\imath}^{(2)}_{1,2}(\mathbf{x})\rangle$ et $\langle\widetilde{\imath}^{(2)}_{2,1}(\mathbf{x})\rangle$ sont deux mesures différentes de $\langle i^{(2)}(\mathbf{x})\rangle$. J'ai donc essayé d'améliorer la qualité de l'estimation de l'autocorrélation moyenne en sommant ces deux mesures : le gain en terme de rapport signal à bruit devrait être égal à $\sqrt{2}$. Cela revient à symétriser l'une des intercorrélations moyennes, $\langle\widetilde{\imath}^{(2)}_{1,2}(\mathbf{x})\rangle$ par exemple. Il est équivalent de ne prendre que la partie réelle de la transformée de Fourier de l'intercorrélation moyenne pour estimer le spectre de puissance.

Pour obtenir cette amélioration, il m'a fallu déterminer correctement le centre de symétrie dans l'intercorrélation. En effet, si la position du centre de symétrie est mal estimée, il s'en suivra un biais dans l'estimation de l'autocorrélation et du spectre de puissance. Dans le cas de notre instrumentation, cette position dépend de la position du réseau (et donc de la longueur d'onde des observations) et, lentement, du temps car les *offsets* des CCD sont sujets à des dérives.

Si, après recentrage, $\mathbf{c}$ est la position du centre de symétrie dans l'intercorrélation alors son espérance devient :

$$\mathrm{E}\left\{\langle\widetilde{\imath}^{(2)}_{1,2}(\mathbf{x})\rangle\right\} = \langle i^{(2)}(\mathbf{x}-\mathbf{c})\rangle. \qquad (3.32)$$

L'espérance de l'estimation du spectre de puissance fournie par la partie réelle du spectre de Fourier de l'intercorrélation est :

$$\mathrm{E}\left\{\mathrm{Re}\left[\langle\widetilde{I}^{(2)}_{1,2}(\mathbf{u})\rangle\right]\right\} = \cos(2\pi\mathbf{cu})\langle I^{(2)}(\mathbf{u})\rangle. \tag{3.33}$$

La mesure du spectre de puissance est donc biaisée par un facteur d'atténuation $\cos(2\pi\mathbf{cu})$. La table 3.1 donne la valeur de cette atténuation pour différentes valeurs de l'erreur de centrage. Si la précision du recentrage est égale à celle de l'échantillonnage, alors l'erreur dans l'estimation de la position du centre de l'intercorrélation peut atteindre $2^{-1/2} \simeq 0.71$ pixel. Dans ce cas, $\cos(2\pi\mathbf{cu})$ peut être aussi faible que 0.45 à la moitié de la fréquence de Nyquist. A moins que le sur-échantillonnage soit très important, **il est absolument nécessaire de mesurer la position du centre de l'intercorrélation avec une précision de l'ordre du dixième de pixel**.

J'ai testé un certain nombre de méthodes différentes pour déterminer de façon robuste et précise la position de ce centre de symétrie. Finalement, c'est la position du maximum de corrélation qui s'est avérée donner le meilleur résultat (Thiébaut, 1994a). Pour estimer la position du maximum de corrélation avec une précision meilleure que le pixel, j'applique le théorème d'échantillonnage qui prévoit que la valeur d'une fonction correctement échantillonnée peut-être interpolée en tout point. Ainsi, j'obtiens la position $\mathbf{c}$ du maximum de corrélation en maximisant la valeur de l'intercorrélation moyenne interpolée en $\mathbf{c}$:

$$\langle\widetilde{\imath}^{(2)}(\mathbf{c})\rangle = \mathrm{Re}\left[\int\langle\widetilde{I}^{(2)}_{1,2}(\mathbf{u})\rangle \mathrm{e}^{\jmath 2\pi\mathbf{cu}}\right]. \tag{3.34}$$

La solution est recherchée par un algorithme de minimisation en plusieurs dimensions de type *quasi-Newton* ou *gradients-conjugués* (Press et al., 1990). Une fois déterminée la position $\mathbf{c}$ du maximum de corrélation, la meilleure estimation du spectre de puissance est :

$$\langle\widetilde{I}^{(2)}(\mathbf{u})\rangle = \mathrm{Re}\left[\langle\widetilde{I}^{(2)}_{1,2}(\mathbf{u})\rangle \mathrm{e}^{\jmath 2\pi\mathbf{cu}}\right]. \tag{3.35}$$

J'ai évalué la précision atteinte pour la détermination de la position du maximum de corrélation en comparant les positions obtenues pour des fractions différentes du même fichier de données. Cette précision est de l'ordre du dixième de pixel et s'avère effectivement suffisante en pratique.

Comme la correction de la distorsion permet d'ajuster à volonté les décalages des origines des canaux de CP40, je modifie les coefficients de correction de la distorsion en fonction de l'estimation de la position des maxima de corrélation entre les images fournies par les canaux. Ainsi, pour tout traitement ultérieur faisant intervenir des corrélations entre différents canaux, je n'ai plus à me préoccuper de ces décalages. Dans tout ce qui suit, à moins que je ne précise le contraire, le défaut de centrage est supposé corrigé de cette manière.

erreur de centrage $\|\mathbf{c}\|$ en pixel	$\min\{\cos(2\pi\mathbf{cu})\}$ à $\|\mathbf{u}\| = 0.25$ pixel^{-1}
0.1	0.99
0.2	0.95
0.3	0.89
0.4	0.81
0.5	0.71
0.6	0.59
0.7	0.45

TAB. 3.1 – Facteur d'atténuation à la moitié de la fréquence de Nyquist dans l'estimation du spectre de puissance lorsque la position du maximum de corrélation est erronée.

3.3.3 Méthode de Knox-Thompson

Nous avons vu que la méthode de Knox-Thompson est basée sur l'estimation de :

$$\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle = \langle I(\mathbf{u})I^{*}(\mathbf{u}+\mathbf{v})\rangle. \tag{3.36}$$

L'intégration de $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ fait intervenir des corrélations de photo-événements ; le *trou* du comptage de photons affecte donc nécessairement la mesure de $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$. En utilisant la modélisation du défaut des détecteurs à comptage de photons, il est immédiat d'obtenir que l'espérance de (*cf.* équation (3.17))

$$\widetilde{k}(\mathbf{x},\mathbf{v}) = \left\langle \sum_{k=1}^{\widetilde{N}} \mathrm{e}^{\jmath 2\pi \mathbf{x}_k \mathbf{v}} \sum_{\substack{l \\ l\neq k}}^{\widetilde{N}} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_l+\mathbf{x}_k) \right\rangle$$

au lieu de valoir :

$$\left\langle \int i(\mathbf{x}')i(\mathbf{x}+\mathbf{x}')\mathrm{e}^{\jmath 2\pi \mathbf{v}\mathbf{x}'}\,\mathrm{d}\mathbf{x}' \right\rangle$$

devient :

$$\mathrm{E}\left\{\widetilde{k}(\mathbf{x},\mathbf{v})\right\} = h(\mathbf{x}) \left\langle \int i(\mathbf{x}')\, i(\mathbf{x}+\mathbf{x}')\, \mathrm{e}^{\jmath 2\pi \mathbf{v}\mathbf{x}'}\,\mathrm{d}\mathbf{x}' \right\rangle \tag{3.37}$$

conduisant à une estimation biaisée de $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$:

$$\mathrm{E}\left\{\widetilde{K}(\mathbf{u},\mathbf{v})\right\} = H(\mathbf{u}) * \langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle, \tag{3.38}$$

où $*$ désigne un produit de convolution pour la fréquence spatiale $\mathbf{u}$ et $H(\mathbf{u})$ est la transformée de Fourier de $h(\mathbf{x})$.

Afin de mettre en évidence ce biais de façon contrôlée et dans un cas réaliste, j'ai utilisé l'algorithme du *point milieu* proposé par Lane et al. (1992) pour simuler les effets de la

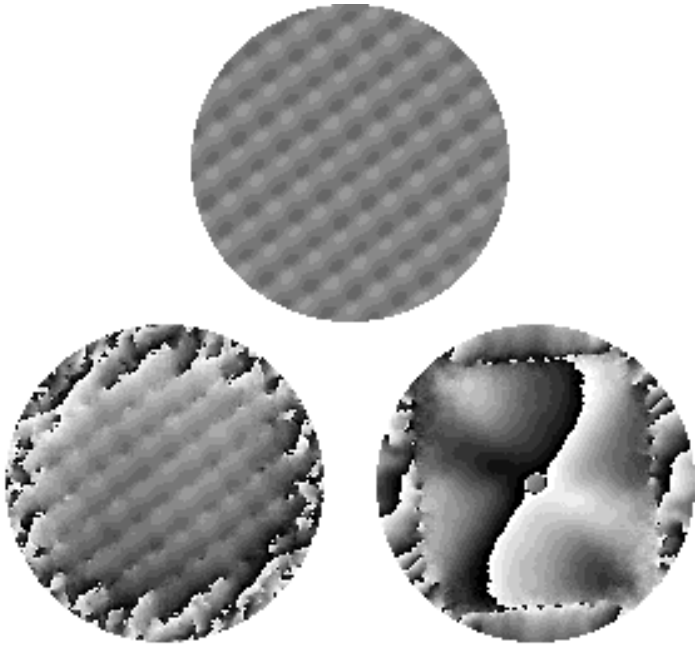


FIG. 3.3 – Phase d'un objet test reconstruite par la méthode de Knox-Thompson : phase de l'objet original (en haut), phase obtenue par la méthode de Knox-Thompson classique sans trou du comptage de photon (en bas, à gauche) et phase obtenue par la méthode de Knox-Thompson avec le trou du comptage de photon (en bas, à droite). Les paramètres de la simulation sont : $D/r_0 = 20$, 1000 images avec, en moyenne, 500 photons (sans trou) et 296 photons (avec trou).

turbulence avec un paramètre de Fried tel que $D/r_0 = 20$. J'ai ainsi généré 1000 images courte pose de 500 photons en moyenne chacune. Ces conditions correspondent à un paramètre de Fried $r_0 = 20\,\text{cm}$ pour un télescope de 4 m de diamètre et un objet observé de magnitude $m_\text{V} \simeq 14$ en supposant une efficacité totale du télescope et du détecteur de 20 %. L'objet test est une étoile quadruple avec des différences de magnitude de 1, 2 et 3 par rapport à la composante la plus brillante.

La figure 3.3 montre les effets du *trou* du comptage de photons lorsque la phase de l'objet est estimée par la méthode de Knox-Thompson. Sans l'effet du *trou*, on voit qu'il subsiste une pente dans la phase reconstruite ; ceci est dû au fait que la méthode de Knox-Thompson n'est pas insensible à une translation des images. Pour cette même phase, on voit nettement apparaître un bruit à haute fréquence spatiale qui permet de déterminer une fréquence de coupure effective due au bruit de mesure. J'ai simulé les effets du *trou* du comptage de photons en supprimant les occurences multiples de photo-événements dans une même fenêtre de 3×3 pixels pour un échantillonnage minimal (*i.e.* $\frac{\lambda}{2D}$ par pixel). Dans ce cas, la structure bizarre de la phase reconstruite ne peut pas être expliquée ni par un effet du bruit plus important (il y a moins de photons par image : 296 au lieu de 500) ni par une translation dans l'espace image : le *trou* du comptage de photons biaise irrémédiablement l'estimation de la phase.

Utilisation des intercorrélations

Par analogie avec le spectre de puissance, en utilisant deux réalisations $\widetilde{\imath}_1(\mathbf{x})$ et $\widetilde{\imath}_2(\mathbf{x})$ du même processus stochastique associé à la distribution d'intensité $i(\mathbf{x})$, je m'attends à ce que :

$$\langle \widetilde{I}_{1,2}^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle \widetilde{I}_1(\mathbf{u})\widetilde{I}_2^*(\mathbf{u}+\mathbf{v})\rangle \tag{3.39}$$

soit un estimateur de $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ insensible au *trou* du comptage de photons. L'espérance de $\langle \widetilde{I}_{1,2}^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left\{\langle \widetilde{I}_{1,2}^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle\right\} &= \mathrm{E}\left\{\left\langle \sum_{k_1=1}^{\widetilde{N}_1}\sum_{k_2=1}^{\widetilde{N}_2} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi \mathbf{u}\mathbf{x}_{k_1}}\mathrm{e}^{\jmath 2\pi(\mathbf{u}+\mathbf{v})\mathbf{x}_{k_2}}\right\rangle\right\} \\
&= \left\langle \mathrm{E}\{\widetilde{N}_1\}\mathrm{E}\{\widetilde{N}_2\}\int p(\mathbf{x}_{k_1})\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi \mathbf{u}\mathbf{x}_{k_1}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}_{k_1}\right. \\
&\qquad \left. \times \int p(\mathbf{x}_{k_2})\mathrm{e}^{\jmath 2\pi(\mathbf{u}+\mathbf{v})\mathbf{x}_{k_2}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}_{k_2}\right\rangle \\
&= \langle N^2 P(\mathbf{u})P^*(\mathbf{u}+\mathbf{v})\rangle \\
&= \langle I(\mathbf{u})I^*(\mathbf{u}+\mathbf{v})\rangle \\
&= \langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Ce qui valide mon hypothèse.

Bien entendu, la qualité de la mesure est améliorée si on intègre :

$$\langle \widetilde{I}_{\mathrm{sym}}^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle = \langle \widetilde{I}_{1,2}^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \widetilde{I}_{2,1}^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle. \tag{3.41}$$

Afin de tester la possibilité de corriger effectivement les effets du trou du comptage de photons de cette façon, j'ai appliqué la méthode à des données simulées et à des données réelles.

La figure 3.4 permet de comparer la phase d'un objet test avec les phases reconstruites à partir de $\langle \widetilde{I}_{\mathrm{sym}}^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ lorsque le trou du comptage est simulé ou non. Les paramètres de la simulation sont les mêmes que précedemment. On voit nettement apparaître le bruit à haute fréquence spatiale qui caractérise la fréquence de coupure effective. La phase reconstruite est plus bruitée et la fréquence de coupure effective plus basse lorsque les effets du détecteurs sont simulés. Cette dégradation est normale car le flux moyen tombe alors à 296 photons par image ; il faudrait intégrer 3 fois plus d'images pour atteindre la même qualité que sans le trou du comptage. Compte tenu du format des images (128×128) et de la dimension du trou simulé (3×3), il ne faut pas perdre de vue que ces conditions

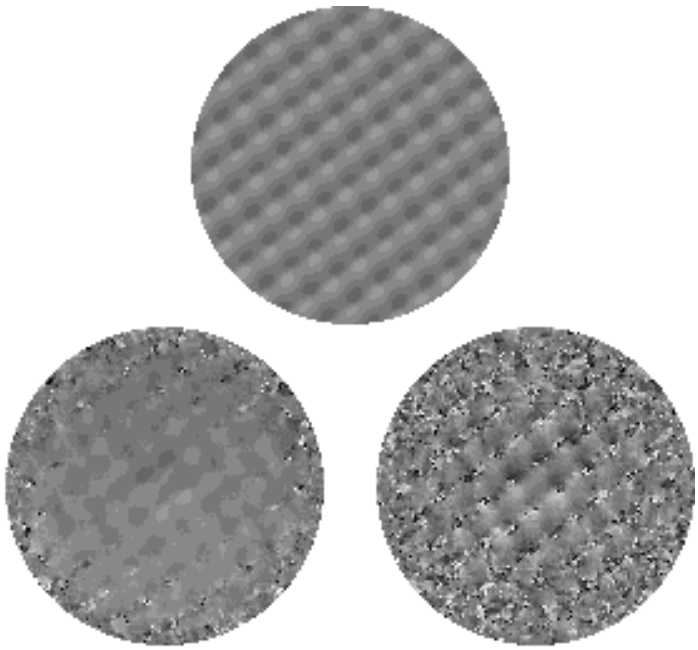


FIG. 3.4 – Phase d'un objet test reconstruite par la méthode de Knox-Thompson : phase de l'objet original (en haut), phase obtenue par la méthode de Knox-Thompson à deux images sans trou du comptage de photon (en bas, à gauche) et phase obtenue par la méthode de Knox-Thompson à deux images avec le trou du comptage de photon (en bas, à droite). Les paramètres de la simulation sont : $D/r_0 = 20$, 2×1000 images avec, en moyenne, 500 photons (sans trou) et 296 photons (avec trou).

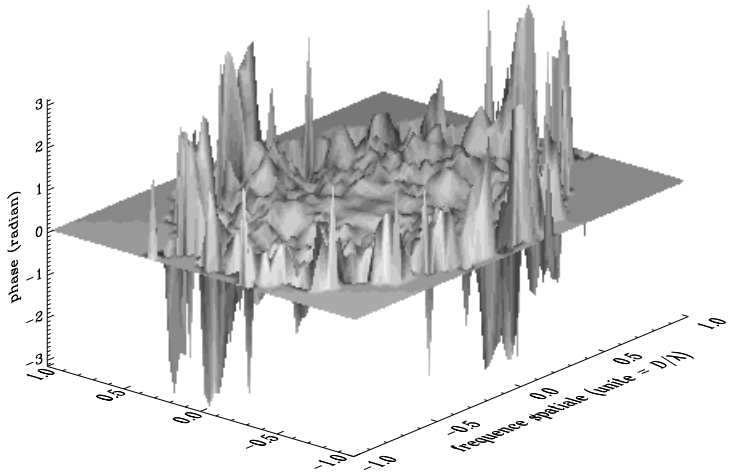


FIG. 3.5 – Phase de l'étoile de référence SAO 93887 reconstruite par la méthode de Knox-Thompson (voir le texte pour plus de détails).

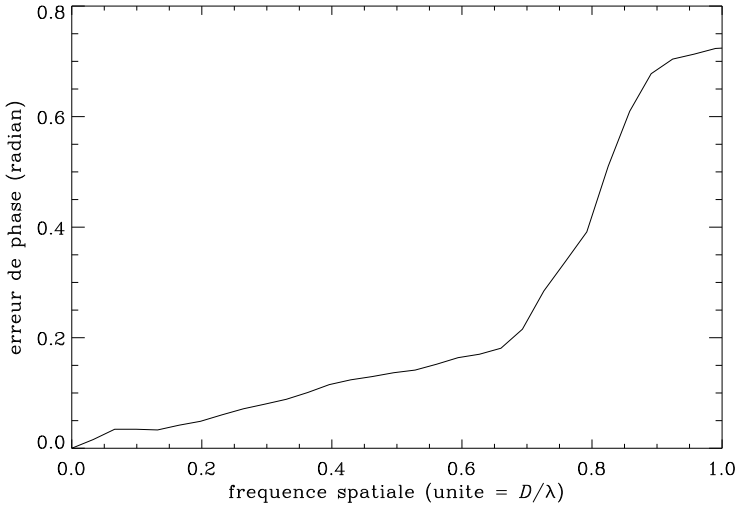


FIG. 3.6 – Progression de l'erreur de phase moyenne en fonction de la fréquence de coupure choisie (données : l'étoile de référence SAO 93887 reconstruite par la méthode de Knox-Thompson, voir le texte pour plus de détails).

de simulations sont sévères ; en pratique, les effets du *trou*, notamment sur le flux détecté, sont nettement moins violents.

La figure 3.5 montre la phase de l'étoile de référence SAO 93887 reconstruite par la méthode de Knox-Thompson en utilisant les intercorrélations comme je le propose. La phase est reconstruite à partir de $\langle \widetilde{I}^{(\mathrm{KT})}_{\mathrm{sym}}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ (*cf.* équation 3.41) mesuré sur les trames paires et calibré par le même estimateur mesuré sur les trames impaires. La phase est reconstruite jusqu'à 80 % de la fréquence de coupure optique avec un écart-type de 0.4 radian (*cf.* figure 3.6). Le nombre total de trames de 20 ms est de $2 \times 49\,081$ avec, en moyenne, 41 photons par trame.

Défaut de recentrage

Voyons maintenant ce qu'il advient de cet estimateur s'il subsiste un défaut de recentrage $\mathbf{c}$ entre les deux voies d'imagerie. Dans ce cas on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{E}\{\widetilde{\imath}_1(\mathbf{x})\} &=& i(\mathbf{x}) \\ \mathrm{E}\{\widetilde{\imath}_2(\mathbf{x})\} &=& i(\mathbf{x}-\mathbf{c}) \end{array}\right. \quad \stackrel{\mathrm{TF}}{\longrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{E}\{\widetilde{I}_1(\mathbf{u})\} &=& I(\mathbf{u}) \\ \mathrm{E}\{\widetilde{I}_2(\mathbf{u})\} &=& I(\mathbf{u})\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi \mathbf{uc}} \end{array}\right. \tag{3.42}$$

Ce qui nous permet de déterminer les espérances de $\langle \widetilde{I}^{(\mathrm{KT})}_{1,2}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ et de $\langle \widetilde{I}^{(\mathrm{KT})}_{2,1}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$:

$$\mathrm{E}\left\{\langle \widetilde{I}^{(\mathrm{KT})}_{1,2}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle\right\} = \langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle \mathrm{e}^{\jmath 2\pi(\mathbf{u}+\mathbf{v})\mathbf{c}} \tag{3.43}$$

$$\mathrm{E}\left\{\langle \widetilde{I}^{(\mathrm{KT})}_{2,1}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle\right\} = \langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi \mathbf{uc}} \tag{3.44}$$

$$\tag{3.45}$$

En présence d'un défaut de centrage, l'espérance de $\langle \widetilde{I}^{(\mathrm{KT})}_{\mathrm{sym}}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ (*cf.* équation (3.41)) devient :

$$\mathrm{E}\left\{\langle \widetilde{I}^{(\mathrm{KT})}_{\mathrm{sym}}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle\right\} = \langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle \left[\mathrm{e}^{\jmath 2\pi(\mathbf{u}+\mathbf{v})\mathbf{c}} + \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi \mathbf{u}\mathbf{c}}\right]. \tag{3.46}$$

La phase de $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ mesurée est alors biaisée d'un angle

$$\arg\left\{\mathrm{e}^{\jmath 2\pi(\mathbf{u}+\mathbf{v})\mathbf{c}} + \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi \mathbf{u}\mathbf{c}}\right\}$$

qui ne dépend que des fréquences spatiales $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Si le décalage est le même pour les observations de l'objet et de sa référence, alors ce biais est corrigé lorsque l'on calibre les mesures de $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ effectuées pour l'objet par celles effectuées pour l'étoile de référence. De plus, le biais étant constant, cela ne perturbe pas la statistique de la phase de $O^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ ainsi obtenue (il en est de même pour le module). La précision du recentrage des deux voies d'imagerie ne devrait donc pas être critique pour appliquer la méthode de Knox-Thompson comme je le propose.

Néanmoins, la méthode de Knox-Thompson nécessite de recentrer les images courte pose sur leur photo-centre. Afin d'améliorer l'estimation de la position du photo-centre il faut évidemment utiliser conjointement les informations fournies par les deux voies d'imagerie. Cela n'est possible que si la correspondance entre les coordonnées sur les deux voies est connue. A faible flux, à cause du bruit de photons, il existe une incertitude dans la position du photo-centre mesurée de l'ordre de $\sigma/\sqrt{N}$ si σ est l'étalement de la tache image et N le nombre de photons. Typiquement, $N \sim 100$ photons et, pour un détecteur de 100×100 pixels, σ ne devrait pas excéder 20 à 30 pixels sinon l'effet de troncature des images courte pose qui est anisoplanétique biaise sérieusement les mesures. En fin de compte, la précision de la mesure de la position du photo-centre instantané n'est guère meilleure qu'un pixel. Il suffit donc d'une précision un peu meilleure que le pixel dans la correction du décalage $\mathbf{c}$ d'origine des coordonnées entre les deux voies d'imagerie pour que l'erreur sur $\mathbf{c}$ n'affecte pas la qualité des mesures. Comme je l'ai remarqué plus haut, une précision d'un dixième de pixel est couramment atteinte en pratique.

3.3.4 Triple corrélation

De même que les estimateurs permettant d'obtenir le spectre de puissance ou d'appliquer la méthode de Knox-Thompson, l'estimateur $\widetilde{\imath}^{(3)}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ (*cf.* équation (3.22)) de la triple corrélation est affecté par l'incapacité des détecteurs à comptage de photons à détecter des photo-événement proches.

Afin de calculer ce biais dans la triple corrélation, j'introduis la densité de probabilité jointe de l'occurrence de trois photo-événements (pas forcément différents) localisés en

$\mathbf{x}_k$, $\mathbf{x}_l$ et $\mathbf{x}_m$:

$$p^{(3)}(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_l,\mathbf{x}_m) = \begin{cases} p(\mathbf{x}_k) & \text{si } k=l=m \\ h(\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_l)p(\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_l) & \text{si } k\neq l=m \\ h(\mathbf{x}_l-\mathbf{x}_m)p(\mathbf{x}_l)p(\mathbf{x}_m) & \text{si } l\neq m=k \\ h(\mathbf{x}_m-\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_m)p(\mathbf{x}_k) & \text{si } m\neq k=l \\ h(\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_l)h(\mathbf{x}_l-\mathbf{x}_m)h(\mathbf{x}_m-\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_l)p(\mathbf{x}_m) & \\ \qquad\qquad \text{si } k\neq l,\ l\neq m \text{ et } m\neq k & \end{cases} \tag{3.47}$$

Comme, pour éviter le biais dû au bruit de photons dans la triple corrélation moyenne, il ne faut corréler que des photo-événements différents (*i.e.* $k\neq l$, $l\neq m$ et $m\neq k$), seul le dernier cas dans l'expression de $p^{(3)}(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_l,\mathbf{x}_m)$ nous intéresse. L'espérance de l'estimateur $\widetilde{b}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ (*cf.* équation (3.22)) de la triple corrélation moyenne des images devient :

$$\begin{aligned} \widetilde{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \left\langle \sum_{k=1}^{\widetilde{N}} \sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{\widetilde{N}} \sum_{\substack{m=1\\m\neq k\\m\neq l}}^{\widetilde{N}} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_l+\mathbf{x}_k)\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}_m+\mathbf{x}_k) \right\rangle \\ &= \Bigg\langle \mathrm{E}\{\widetilde{N}(\widetilde{N}-1)(\widetilde{N}-2)\} \iiint h(\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_l)h(\mathbf{x}_l-\mathbf{x}_m)h(\mathbf{x}_m-\mathbf{x}_k) \\ &\qquad \times\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_l+\mathbf{x}_k)\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}_m+\mathbf{x}_k) \\ &\qquad \times p(\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_l)p(\mathbf{x}_m)\,\mathrm{d}\mathbf{x}_k\,\mathrm{d}\mathbf{x}_l\,\mathrm{d}\mathbf{x}_m \Bigg\rangle \\ &= \left\langle N^3 \int h(\mathbf{x})h(\mathbf{y})h(\mathbf{y}-\mathbf{x})p(\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k+\mathbf{x})p(\mathbf{x}_k+\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{x}_k \right\rangle \\ &= h(\mathbf{x})h(\mathbf{y})h(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \left\langle \int i(\mathbf{x}')i(\mathbf{x}'+\mathbf{x})i(\mathbf{x}+\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{x}' \right\rangle \end{aligned}$$

qui donne finalement :

$$\widetilde{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = h(\mathbf{x})h(\mathbf{y})h(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,\langle i^{(3)}(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle \tag{3.48}$$

Cette expression met en évidence l'effet du *trou* du comptage de photons dans la triple corrélation. A partir d'une estimation de la fonction $h(\mathbf{x})$, il est possible de prévoir ses effets pour le bispectre.

Bispectre calculé à partir de trois images

Dans le cas du bispectre (ou de la triple corrélation), il est possible d'éviter le défaut du *trou* du comptage de photons si l'on dispose de trois réalisations indépendantes du même processus stochastique d'imagerie. Exactement comme je l'ai proposé pour le spectre de

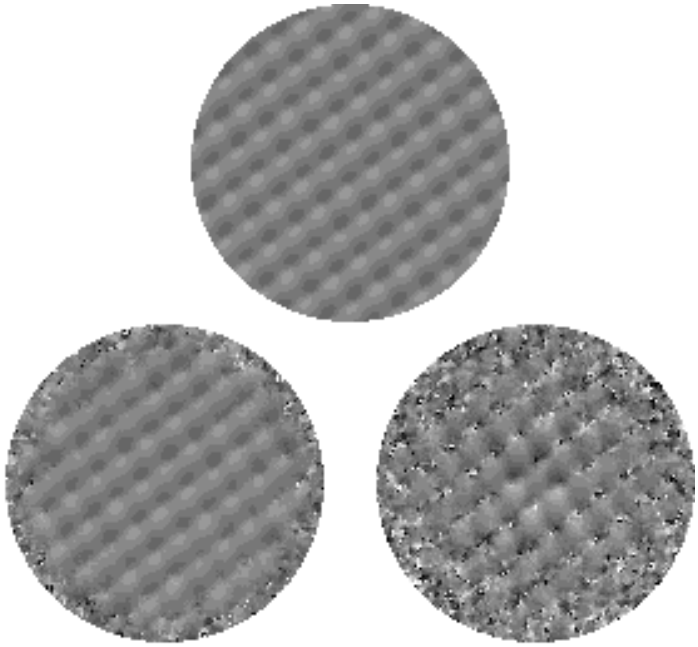


FIG. 3.7 – Phase d'un objet test reconstruite par la méthode du bispectre : phase de l'objet original (en haut), phase obtenue par la méthode du bispectre à trois images sans trou du comptage de photon (en bas, à gauche) et phase obtenue par la même méthode mais avec le trou du comptage de photon (en bas, à droite). Les paramètres de la simulation sont : $D/r_0 = 20$, 3×1000 images avec, en moyenne, 500 photons (sans trou) et 296 photons (avec trou).

puissance et pour la méthode Knox-Thompson, il suffit alors d'intégrer le produit spectral suivant :

$$\langle \widetilde{I}^{(3)}_{1,2,3}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widetilde{I}_1(\mathbf{u})\widetilde{I}_2(\mathbf{v})\widetilde{I}^*_3(\mathbf{u}+\mathbf{v})\rangle, \tag{3.49}$$

où $\widetilde{I}_1(\mathbf{u})$, $\widetilde{I}_2(\mathbf{u})$ et $\widetilde{I}_3(\mathbf{u})$ sont les spectres de Fourier des trois images détectées. La démonstration de la validité de cet estimateur est analogue à celles que j'ai faites pour l'intercorrélation et la méthode Knox-Thompson. Afin d'améliorer l'estimation du bispectre, il faut intégrer les différentes estimations obtenues en permutant les images détectées :

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{I}^{(3)}_{\text{sym}}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle \;=\; & \langle \widetilde{I}^{(3)}_{1,2,3}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \widetilde{I}^{(3)}_{1,3,2}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \widetilde{I}^{(3)}_{2,1,3}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \\ & + \widetilde{I}^{(3)}_{2,3,1}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \widetilde{I}^{(3)}_{3,1,2}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \widetilde{I}^{(3)}_{3,2,1}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle \end{aligned} \tag{3.50}$$

La figure 3.7 montre que la méthode de mesure du bispectre que je propose permet effectivement de reconstruire la phase de l'objet observé même en présence du *trou* du comptage de photons. Les paramètres de la simulation sont les mêmes que précédemment. Comme pour la méthode de Knox-Thompson basée sur les intercorrélations, la limite de résolution effective dépend uniquement du nombre de photons par trame, des conditions de turbulence et du nombre d'images.

Pour les données acquises avec la caméra CP40, je dispose de quatres images simultanées par temps de pose pour deux longueurs d'onde voisines (*i.e.* deux images à chaque longueur d'onde). Ces longueurs d'onde sont suffisamment proches ($\Delta\lambda \leq 50$ Å) pour que la différence de la réponse du système atmosphère-télescope puisse être négligée ($\Delta\lambda/\lambda < r_0/D$). Le calcul du bispectre à partir de trois canaux différents est donc applicable à ces données si la distribution d'intensité de l'objet est identique aux deux longueurs d'onde. C'est par exemple le cas pour des binaires. Par contre, pour les observations d'enveloppes stellaires, de jets ou de la surface d'une étoile, les longueurs d'onde sont choisies de telle sorte que l'objet est observé en même temps dans une raie d'émission ou d'absorption et dans le continuum proche. Dans ce cas la structure de l'objet peut être très différente aux deux longueurs d'onde et le calcul du bispectre à partir de trois canaux devient hasardeux. Pour cette raison, j'ai tenté d'intégrer un bispectre en comptage de photons à partir seulement de deux canaux (à la même longueur d'onde).

Bispectre calculé à partir de deux images

Dans le cas du spectre de puissance, l'influence du *trou* du comptage de photons est négligeable pour les faibles fréquences spatiales (Foy, 1988b). Comme, dans le bispectre, seuls les sous-plans engendrés par les basses fréquences spatiales nous intéressent — *i.e.* les valeurs $I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ pour $\|\mathbf{v}\| \ll r_0/\lambda$ — je m'attends à ce que les 4 quantités suivantes, après correction du biais dû au bruit de photons, soient des estimateurs de $I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ peu affectés par ce défaut :

$$\widetilde{I}^{(3)}_{1,1,2}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{I}_1(\mathbf{u})\widetilde{I}_1(\mathbf{v})\widetilde{I}^*_2(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \tag{3.51}$$

$$\widetilde{I}^{(3)}_{2,2,1}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{I}_2(\mathbf{u})\widetilde{I}_2(\mathbf{v})\widetilde{I}^*_1(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \tag{3.52}$$

$$\widetilde{I}^{(3)}_{1,2,2}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{I}_1(\mathbf{u})\widetilde{I}_2(\mathbf{v})\widetilde{I}^*_2(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \tag{3.53}$$

$$\widetilde{I}^{(3)}_{2,1,1}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{I}_2(\mathbf{u})\widetilde{I}_1(\mathbf{v})\widetilde{I}^*_1(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \tag{3.54}$$

puisqu'ils font intervenir le produit du spectre de la même image uniquement à basse fréquence ($\|\mathbf{v}\| \ll r_0/\lambda$).

Dans un premier temps, je vais déterminer l'espérance de $\widetilde{I}^{(3)}_{1,1,2}(\mathbf{u},\mathbf{v})$, $\widetilde{I}^{(3)}_{2,2,1}(\mathbf{u},\mathbf{v})$, $\widetilde{I}^{(3)}_{1,2,2}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ et $\widetilde{I}^{(3)}_{2,1,1}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ en négligeant l'effet du *trou* du comptage de photons afin d'ob-

tenir des estimateurs débiaisés du bruit de photons. Ainsi :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left\{\widetilde{I}^{(3)}_{1,1,2}(\mathbf{u},\mathbf{v})\right\} \\
&= \mathrm{E}\left\{\sum_{k_1}^{\widetilde{N}_1} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi \mathbf{u}\mathbf{x}_{k_1}} \sum_{l_1}^{\widetilde{N}_1} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi \mathbf{v}\mathbf{x}_{l_1}} \sum_{k_2}^{\widetilde{N}_2} \mathrm{e}^{\jmath 2\pi (\mathbf{u}+\mathbf{v})\mathbf{x}_{k_2}}\right\} \\
&= \mathrm{E}\left\{\sum_{k_1}^{\widetilde{N}_1} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi (\mathbf{u}+\mathbf{v})\mathbf{x}_{k_1}} + \sum_{k_1}^{\widetilde{N}_1} \sum_{\substack{l_1 \\ l_1 \neq k_1}}^{\widetilde{N}_1} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi \mathbf{u}\mathbf{x}_{k_1}} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi \mathbf{v}\mathbf{x}_{l_1}}\right\} I_2^*(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\
&= \left[I_1(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + I_1(\mathbf{u})I_1(\mathbf{v})\right] I_2^*(\mathbf{u}+\mathbf{v}),
\end{aligned}$$

soit, en fin de compte :

$$\mathrm{E}\left\{\widetilde{I}^{(3)}_{1,1,2}(\mathbf{u},\mathbf{v})\right\} = {I^{(3)}}_{1,1,2}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + {I^{(2)}}_{1,2}(\mathbf{u}+\mathbf{v}). \tag{3.55}$$

De la même façon, on obtient :

$$\mathrm{E}\left\{\widetilde{I}^{(3)}_{2,2,1}(\mathbf{u},\mathbf{v})\right\} = {I^{(3)}}_{2,2,1}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + {I^{(2)}}_{2,1}(\mathbf{u}+\mathbf{v}), \tag{3.56}$$

$$\mathrm{E}\left\{\widetilde{I}^{(3)}_{1,2,2}(\mathbf{u},\mathbf{v})\right\} = {I^{(3)}}_{1,2,2}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + {I^{(2)}}_{1,2}(\mathbf{u}), \tag{3.57}$$

$$\mathrm{E}\left\{\widetilde{I}^{(3)}_{2,1,1}(\mathbf{u},\mathbf{v})\right\} = {I^{(3)}}_{2,1,1}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + {I^{(2)}}_{2,1}(\mathbf{u}), \tag{3.58}$$

où j'ai conservé les indices correspondants aux numéros d'image pour pouvoir le cas échéant rendre compte d'un éventuel décalage des origines entre les deux voies d'imagerie.

Pour supprimer le biais dû au bruit de photon, il faut donc intégrer les estimateurs suivants :

$$\widetilde{B}_{1,1,2}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \widetilde{I}^{(3)}_{1,1,2}(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \widetilde{I}^{(2)}_{1,2}(\mathbf{u}+\mathbf{v}), \tag{3.59}$$

$$\widetilde{B}_{2,2,1}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \widetilde{I}^{(3)}_{2,2,1}(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \widetilde{I}^{(2)}_{2,1}(\mathbf{u}+\mathbf{v}), \tag{3.60}$$

$$\widetilde{B}_{1,2,2}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \widetilde{I}^{(3)}_{1,2,2}(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \widetilde{I}^{(2)}_{1,2}(\mathbf{u}), \tag{3.61}$$

$$\widetilde{B}_{2,1,1}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \widetilde{I}^{(3)}_{2,1,1}(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \widetilde{I}^{(2)}_{2,1}(\mathbf{u}). \tag{3.62}$$

En négligeant les effets de fenêtrage et de décalage de l'origine, même s'il subsiste un biais dû au *trou* du comptage de photons, les espérances de $\widetilde{B}^{(3)}_{1,2,2}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ et $\widetilde{B}^{(3)}_{2,2,1}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ devraient être identiques, il en est de même pour $\widetilde{B}^{(3)}_{1,2,2}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ et $\widetilde{B}^{(3)}_{2,1,1}(\mathbf{u},\mathbf{v})$. Plus précisément, en

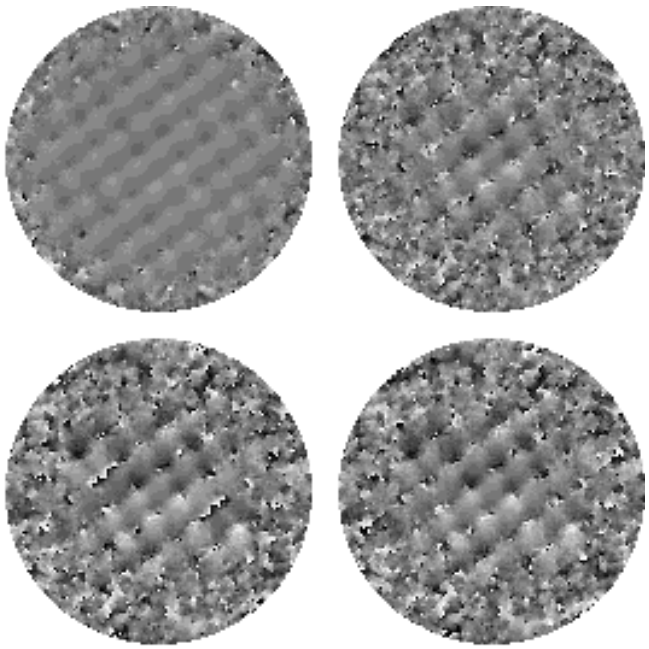


FIG. 3.8 – Phase d'un objet test reconstruite par la méthode du "bispectre à deux images" : phase reconstruite à partir de deux canaux sans trou du comptage de photons (en haut, à gauche), phases obtenue pour des données avec trou du comptage de photons à partir de $\tilde{B}_{1,1,2} + \tilde{B}_{2,2,1}$ (en bas, à gauche), à partir de $\tilde{B}_{1,2,2} + \tilde{B}_{2,1,1}$ (en bas, à droite), à partir de la somme de ces quantités (en haut, à droite). Les paramètres de la simulation sont : $D/r_0 = 20$, 2×1000 images avec, en moyenne, 296 photons.

tenant compte du défaut du détecteur :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left\{\langle \widetilde{B}^{(3)}_{1,1,2}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle\right\} &= \mathrm{E}\left\{\langle \widetilde{B}^{(3)}_{2,2,1}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle\right\} \\ &\simeq \left\langle \iiint i(\mathbf{x}+\mathbf{z})i(\mathbf{y}+\mathbf{z})i(\mathbf{z})h(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi(\mathbf{ux}+\mathbf{vy})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{y}\,\mathrm{d}\mathbf{z}\right\rangle \end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left\{\langle \widetilde{B}^{(3)}_{1,2,2}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle\right\} &= \mathrm{E}\left\{\langle \widetilde{B}^{(3)}_{2,1,1}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle\right\} \\ &\simeq \left\langle \iiint i(\mathbf{x}+\mathbf{z})i(\mathbf{y}+\mathbf{z})i(\mathbf{z})h(\mathbf{y})\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi(\mathbf{ux}+\mathbf{vy})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{y}\,\mathrm{d}\mathbf{z}\right\rangle. \end{aligned} \tag{3.64}$$

A partir de ces expressions pour le bispectre mesuré, il est immédiat d'obtenir les espérances des triples corrélations correspondantes :

$$\mathrm{E}\{\langle \widetilde{b}^{(3)}_{1,1,2}(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle\} = \mathrm{E}\{\langle \widetilde{b}^{(3)}_{2,2,1}(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle\} \simeq h(\mathbf{x}-\mathbf{y})\langle i^{(3)}(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle, \tag{3.65}$$

$$\mathrm{E}\{\langle \widetilde{b}^{(3)}_{1,2,2}(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle\} = \mathrm{E}\{\langle \widetilde{b}^{(3)}_{2,1,1}(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle\} \simeq h(\mathbf{y})\langle i^{(3)}(\mathbf{x},\mathbf{y})\rangle. \tag{3.66}$$

La forme du *trou* du comptage de photons étant en général mal déterminée, il est difficile de prévoir son influence sur la triple corrélation d'après les équations qui précèdent.

Néanmoins, je pense que la différence entre $\mathrm{E}\{\widetilde{B}_{.,.,.}(\mathbf{u},\mathbf{v})\}$ et $B(\mathbf{u},\mathbf{v})$ est faible, du moins pour $\|\mathbf{v}\| \ll r_0/\lambda$ et au moins jusqu'à une certaine fréquence de coupure. Seule l'expérience peut permettre de déterminer si ce biais est négligeable en pratique.

Afin d'améliorer le rapport signal à bruit, il faut regrouper les différentes estimations de $B(\mathbf{u},\mathbf{v})$. Il paraît légitime d'additionner les estimations qui ont la même espérance pour former :

$$\widetilde{B}_{1,1,2}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \widetilde{B}_{2,2,1}(\mathbf{u},\mathbf{v})$$
$$\widetilde{B}_{1,2,2}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \widetilde{B}_{2,1,1}(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

On peut aussi sommer toutes ces estimations pour former :

$$\widetilde{B}_{1,1,2}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \widetilde{B}_{2,2,1}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \widetilde{B}_{1,2,2}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \widetilde{B}_{2,1,1}(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

La figure 3.8 montre que ces trois estimateurs permettent de reconstruire la phase du spectre de Fourier de l'objet observé sans évidence de biais. Puisque $\tilde{B}_{1,1,2} + \tilde{B}_{2,2,1}$ et $\tilde{B}_{1,2,2} + \tilde{B}_{2,1,1}$ fournissent des mesures de qualité équivalentes, pour améliorer le rapport signal à bruit, j'intègre leur somme. En pratique (*i.e.* pour des données réelles) le bispectre calculé de cette manière permet de reconstruire la phase du spectre de Fourier jusqu'à une fréquence de coupure effective (au mieux D/λ) comparable à celle du spectre de puissance (estimé à partir des intercorrélations).

Comportement en présence d'un défaut de centrage

Pour le bispectre calculé à partir de deux images, un décalage $\mathbf{c}$ entre les origines des deux images (*cf.* l'équation (3.42)) se traduit par :

$$\mathrm{E}\{\widetilde{B}_{1,1,2}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \widetilde{B}_{2,2,1}(\mathbf{u},\mathbf{v})\} = 2\langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle \cos\left[2\pi(\mathbf{u}+\mathbf{v})\mathbf{c}\right] \quad (3.67)$$
$$\mathrm{E}\{\widetilde{B}_{1,2,2}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \widetilde{B}_{2,1,1}(\mathbf{u},\mathbf{v})\} = 2\langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle \cos\left[2\pi\mathbf{u}\mathbf{c}\right] \quad (3.68)$$

Comme cos[...] est un terme réel, la statistique (en particulier la moyenne et la variance) de la phase du bispectre mesurée par $\widetilde{B}_{1,1,2} + \widetilde{B}_{2,2,1}$, $\widetilde{B}_{1,2,2} + \widetilde{B}_{2,1,1}$ ou par leur somme n'est donc pas affectée par un tel défaut de centrage. Il n'en est évidemment pas de même pour le module du bispectre ainsi mesuré.

Cette propriété est particulièrement intéressante lorsque la correction des décalages entre les origines de deux canaux est insuffisamment précise. C'est, par exemple, le cas si le rapport signal à bruit dans l'intercorrélation est trop faible. Mais c'est aussi le cas lorsque l'objet observé est largement résolu, car cela se traduit par un élargissement du pic d'intercorrélation et donc une précision moindre dans la détermination de la position du maximum de corrélation.

Enfin, il est intéressant de noter que la phase du bispectre calculé à partir de trois images n'est pas insensible à une telle erreur de centrage.

3.4 Conclusion

Le *trou* du comptage de photons a été mis en évidence par Foy (1988b). Pour remédier à ce défaut dans les autocorrélations, Foy (1988b) a démontré qu'il est possible de "boucher" le trou par une gaussienne s'appuyant sur les bords du trou et dont les paramètres sont ajustés en minimisant les oscillations du spectre de puissance aux hautes fréquences spatiales. Plus récemment, Hofmann (1993) a étudié les effets du *trou* du comptage de photons dans le cadre de l'analyse bispectrale et a proposé de corriger ce défaut en calibrant la fonction $h(\mathbf{x})$ (*cf.* équation (3.27)) sur un objet de distribution d'intensité connue. Ces méthodes de correction nécessitent toutes deux d'échantillonner largement les images de telle sorte que le *trou* soit beaucoup plus petit que l'autocorrélation d'une tavelure ; cela se fait au détriment du champ accessible pour un format de détecteur donné. De plus, ces techniques reposent sur une modélisation *a priori* du trou ou sur des hypothèses sans doute mal vérifiées en pratique comme en témoigne la qualité des mesures obtenues et la limite en résolution imposée.

La possibilité de corriger le *trou* du comptage de photon par des intercorrélations a été suggérée, pour la première fois, par Foy (1988b). J'ai démontré de façon théorique mais aussi en pratique (Thiébaut, 1994a) que l'utilisation des intercorrélations plutôt que des autocorrélations permet de résoudre efficacement ce problème en interférométrie des tavelures classique. J'ai généralisé cette approche aux méthodes de Knox-Thompson et du bispectre. L'étude théorique que j'ai développée prédit que cette correction est valable tant que le flux incident est suffisamment faible pour que la statistique du nombre total de photons détectés ne soit pas perturbée. Néanmoins, mes simulations montrent que la correction reste valable même lorsque l'on s'écarte notablement des conditions de faible flux [1]. De toute façon, aucune autre contrainte ou hypothèse n'est nécessaire pour justifier mes résultats théoriques ce qui est un argument très fort en faveur de cette approche. En particulier, mes simulation démontrent que le sur-échantillonnage des images n'est pas nécessaire [2].

Un autre avantage des intercorrélations est qu'elles ne sont pas biaisées par le bruit de photons ; Aime et al. (1986) ont démontré cette propriété dans les cas de l'interférométrie des tavelures classique et de l'interférométrie des tavelures différentielle, Hofmann & Weigelt (1987) en ont fait la démonstration dans le cas de l'analyse bispectrale. D'une façon plus générale, il est bon de noter que les intercorrélations permettent d'éviter les problèmes liés aux corrélations du signal détecté ; c'est vrai pour le bruit de photon mais aussi pour les corrélations qui existent entre les pixels d'un détecteur de type CCD par exemple.

Toutefois, la correction du défaut du comptage de photons par les intercorrélations nécessite de diviser le flux disponible par deux (ou par trois). Cela entraine une dégradation du rapport signal à bruit ; suivant la méthode utilisée et à bas flux, le facteur d'atténuation est donné par la table suivante :

[1] Dans ces simulations, le défaut du comptage de photons fait perdre plus de 40 % des photons puisque le nombre moyen de photons par image passe de 500 à 296.

[2] Les images courte pose simulées sont exactement échantillonnées "à Shannon" soit 2 pixels par λ/D tandis que le *trou* fait 3×3 pixels !

RSB×...	méthode	nombre d'images simultanées
$1/2 \simeq 50\,\%$	spectre de puissance	2 images
$1/2 \simeq 50\,\%$	Knox-Thompson	2 images
$1/2^{3/2} \simeq 35\,\%$	bispectre	2 images
$1/3^{3/2} \simeq 19\,\%$	bispectre	3 images

J'ai montré comment améliorer cet état de chose en exploitant les symétries des quantitées mesurées ; cela demande une estimation correcte de la position relative de l'origine des différentes voies d'imagerie. Dans ce cas, la perte en qualité devient seulement :

RSB×...	méthode	nombre d'images simultanées
$\sqrt{2}/2 \simeq 71\,\%$	spectre de puissance	2 images
$\sqrt{2}/2 \simeq 71\,\%$	Knox-Thompson	2 images
$\sqrt{4}/2^{3/2} \simeq 71\,\%$	bispectre	2 images
$\sqrt{6}/3^{3/2} \simeq 47\,\%$	bispectre	3 images

A la limite, cette question du rapport signal à bruit est un faux problème : si on évite le trou du comptage de photons en utilisant les intercorrélations, il suffit d'intégrer suffisamment de données pour atteindre la fréquence de coupure effective recherchée ; tandis que, si on ne corrige pas ce défaut, la limite de résolution effective sera imposée par les biais qui en découlent.

Ces considérations sur le rapport signal à bruit montrent tout l'intérêt de l'intégration du bispectre à partir de deux images simultanées par rapport au bispectre mesuré à partir de trois images simultanées. En outre, l'optique et le détecteur que nécessitent l'acquisition de deux images simultanées est beaucoup moins complexe que s'il faut acquérir trois images simultanées.

Chapitre 4

Approches pour une déconvolution robuste

Les données réelles sont toujours des mesures entachées de bruit. Ce bruit peut être intrinsèque à la nature du signal observé (*e.g.* bruit de photons). Il peut aussi être le fait du système de mesure (*e.g.* courant d'obscurité, bruit de lecture). Lorsque le bruit qui affecte les mesures n'est pas négligeable, la simple inversion de la relation qui lie le signal observé aux quantités détectées ne suffit pas à fournir une estimation fiable du signal original. De plus, cette inversion n'est pas forcément réalisable. Soit parce que c'est mathématiquement impossible, soit parce que l'information collectée est incomplète. Par exemple, pour un système d'imagerie, la déconvolution de l'image observée par la réponse impulsionnelle peut donner un résultat complètement erroné non seulement à cause du bruit mais aussi parce que certaines informations sont définitivement perdues (*e.g.* les fréquences spatiales ne sont pas mesurées au-delà de la fréquence de coupure).

Le problème de la reconstruction d'image à partir des mesures effectuées est donc loin d'être trivial et il est d'autant plus difficile que la qualité du signal est médiocre et les informations lacunaires. Afin de mener à bien l'exploitation des mesures, j'adopte une démarche robuste. D'une part, je tiens compte de la qualité des observations afin d'éviter que les mesures les plus bruitées affectent de façon significative l'image restaurée. D'autre part, je cherche à compenser le manque d'information ou la mauvaise qualité de certaines mesures en incorporant dans le processus de reconstruction des connaissances *a priori* sur l'image reconstruite. Lorsque cette démarche s'avère insuffisamment robuste, compte tenu de la qualité des mesures, je réduit de façon contrôlée la quantité d'informations présentes dans l'image reconstruite et donc la quantité de mesures nécessaires à son obtention. Je fait cela soit en limitant la résolution dans l'image reconstruite, soit en simplifiant le modèle de l'objet observé.

Ces quelques principes sont très généraux ; afin d'illustrer plus clairement leur mise en œuvre, je montre dans ce chapitre comment j'ai renforcé la déconvolution. En dérivant cette approche pour la déconvolution, je montre comment résoudre de façon robuste le problème de la reconstruction d'image en interférométrie holographique et le problème de

la déconvolution en aveugle. Dans le chapitre suivant, je montre comment cette démarche peut être étendue à l'exploitation des mesures de l'interférométrie des tavelures.

4.1 Déconvolution

Nous avons vu que, dans le cas de l'imagerie traditionnelle de même que pour les méthodes de l'interférométrie des tavelures, les mesures effectuées sont convoluées par une fonction d'étalement de point. Ainsi, sans perdre en généralité, on peut écrire :

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) \simeq h(\mathbf{x}) * f(\mathbf{x}), \tag{4.1}$$

où $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ représente les quantités mesurées, $h(\mathbf{x})$ la fonction d'étalement de point et $f(\mathbf{x})$ les informations sur la distribution d'intensité de l'objet ; la position $\mathbf{x}$ peut avoir plus de 2 dimensions (*e.g.* 4 si $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ est la triple corrélation).

Afin de recouvrer les informations $f(\mathbf{x})$ concernant la distribution d'intensité de l'objet, il faut effectuer une déconvolution. Dans l'espace de Fourier, l'opération de convolution s'écrit comme une simple multiplication. Pour autant, la division du spectre de Fourier des mesures, $\widetilde{G}(\mathbf{u})$, par la fonction de transfert, $H(\mathbf{u})$, ne fournit pas une solution acceptable.

D'abord, la fonction de transfert a un support borné : elle est nulle en dehors de ce support ce qui interdit d'obtenir une estimation de $F(\mathbf{u})$ aux fréquences correspondantes par une simple division.

Ensuite, la division de $\widetilde{G}(\mathbf{u})$ par des valeurs faibles de $H(\mathbf{u})$ augmente la contribution du bruit de mesure à l'erreur sur l'estimation de $F(\mathbf{u})$ aux fréquences correspondantes. Ceci est d'autant plus vrai que $\widetilde{G}(\mathbf{u})$ est souvent beaucoup plus bruité aux fréquences où le module de la fonction de transfert est faible. De plus, au moins à cause du bruit qui affecte les mesures, $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ n'est pas rigoureusement égal à un produit de convolution.

Enfin, la fonction d'étalement de point peut être mal déterminée parce qu'elle est mesurée partiellement et avec un certain bruit. Par exemple, dans le cas de l'interférométrie des tavelures, la fonction d'étalement de point dépend fortement et de façon non uniforme des conditions de turbulence. Ainsi, la calibration de $h(\mathbf{x})$ sur une source de référence fournit une mesure $\widetilde{h}(\mathbf{x})$ qui peut ne représenter qu'imparfaitement la fonction d'étalement de point au moment de l'observation de l'objet (Christou et al., 1985; Perrier, 1989). Dans ce cas, seules les basses fréquences sont affectées de façon non linéaire par les variations de *seeing*.

Comme, en pratique, le problème de la déconvolution ne saurait être résolu par la simple division du spectre de Fourier des mesures par la fonction de transfert, il faut adopter une démarche plus robuste. Dans cette section, je vais montrer comment on peut poser et résoudre le problème de la déconvolution en tenant compte de la qualité des mesures pour l'objet et, s'il y a lieu, pour la référence. Afin de combler des lacunes dans la connaissance des quantités mesurées ou de renforcer la robustesse du processus j'expliquerai comment incorporer les connaissances *a priori* que l'on a des fonctions à reconstruire. Cette ap-

proche unifiée me permettra de dériver un certain nombre d'algorithmes de reconstruction d'images dont certains sont originaux ou bien d'envisager des améliorations de méthodes déjà existantes.

Le problème de la déconvolution ainsi posé n'est pas spécifique à l'interférométrie des tavelures : les solutions que je propose ont un vaste champ d'application dans le domaine du traitement du signal.

4.1.1 Maximum de vraisemblance

Comme les quantités détectées sont discrétisées, les mesures $\widetilde{g}(\mathbf{x})$, peuvent être modélisées par le produit de convolution discret [1] :

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}'} f(\mathbf{x}')h(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \sum_{\mathbf{x}'} h(\mathbf{x}')f(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{4.2}$$

où $f(\mathbf{x})$ est la quantité à recouvrer et $h(\mathbf{x})$ la fonction d'étalement de point.

Un moyen robuste d'obtenir une estimation de $f(\mathbf{x})$ consiste à trouver le modèle $g(\mathbf{x})$ le plus vraisemblable étant donné les mesures $\widetilde{g}(\mathbf{x})$. Cela revient à trouver les paramètres de $g(\mathbf{x})$ — *i.e.* $f(\mathbf{x})$ et éventuellement $h(\mathbf{x})$ — qui maximisent la probabilité $\Pr\{\widetilde{g}|g\}$ d'avoir effectivement mesuré $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ étant donné le modèle.

Mesures obéissant à une loi normale

Lorsque les mesures sont des variables aléatoires de loi normale, la probabilité de mesurer $\widetilde{g}$ est :

$$\Pr\{\widetilde{g}|g\} = \prod_{\mathbf{x}} \exp\left(-\frac{(\widetilde{g}(\mathbf{x})-g(\mathbf{x}))^2}{\sigma^2_{\widetilde{g}(\mathbf{x})}}\right) \tag{4.3}$$

où $\sigma^2_{\widetilde{g}(\mathbf{x})}$ est la variance de $\widetilde{g}(\mathbf{x})$. Maximiser $\Pr\{\widetilde{g}|g\}$ revient à minimiser $-\operatorname{Log}(\Pr\{\widetilde{g}|g\})$ soit la quantité :

$$\chi^2 = \sum_{\mathbf{x}} \frac{(\widetilde{g}(\mathbf{x})-g(\mathbf{x}))^2}{\sigma^2_{\widetilde{g}(\mathbf{x})}}, \tag{4.4}$$

où l'on constate que le poids d'une mesure est d'autant plus fort qu'elle est de bonne qualité (*i.e.* de faible variance) relativement aux autres mesures.

[1] Dans ce chapitre, les mesures étant échantillonnées, la position spatiale $\mathbf{x}$ est discrétisée. Les produits de convolution et de corrélation sont approximés par des sommes discrètes et la transformée de Fourier est approximée par la transformée de Fourier discrète. L'emploi de la transformée de Fourier discrète implique que les fonctions manipulées ont un certain nombre de propriétés notamment qu'elles sont périodiques. Au prix de certaines précautions au niveau du traitement, les versions "discrétisées" de la transformée de Fourier et des produits de convolution et de corrélation permettent de modéliser correctement les quantités mesurées.

Souvent $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ est une quantité moyennée, on peut alors utiliser la variance d'échantillon pour estimer $\sigma^2_{\widetilde{g}(\mathbf{x})}$. A mon avis, il faut alors écarter les mesures dont le rapport signal à bruit est faible. En effet, l'estimation de la variance de ces mesures est très bruitée et donc peu fiable ce qui risque de biaiser la pondération. Afin de tenir compte de façon simple des lacunes dans les mesures, je récris la quantité à minimiser comme la somme pondérée :

$$\varepsilon_{\text{Gauss}} = \sum_{\mathbf{x}} a(\mathbf{x})[g(\mathbf{x}) - \widetilde{g}(\mathbf{x})]^2, \tag{4.5}$$

avec :

$$a(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma^2_{\widetilde{g}(\mathbf{x})}} & \text{si } \widetilde{g}(\mathbf{x}) \text{ est mesuré} \\ \\ 0 & \text{si } \widetilde{g}(\mathbf{x}) \text{ n'est pas mesuré} \end{cases} \tag{4.6}$$

Si toutes les mesures ont la même variance, alors minimiser $\varepsilon_{\text{Gauss}}$ revient à minimiser :

$$\varepsilon_0 = \sum_{\mathbf{x}} [g(\mathbf{x}) - \widetilde{g}(\mathbf{x})]^2, \tag{4.7}$$

où l'on retrouve l'approche des moindres carrés ordinaires.

Bruit de photons

Les moindres carrés pondérés sont adaptés pour trouver la solution correspondant au maximum de vraisemblance si les mesures suivent une loi approximativement normale. Lorsque la quantité mesurée est directement l'image observée et que le bruit de photons domine les autres sources de bruit, la probabilité de mesurer $\widetilde{g}$ étant donné le modèle g devient :

$$\Pr\{\widetilde{g}|g\} = \prod_{\mathbf{x}} \frac{\exp(\widetilde{g}(\mathbf{x}) \operatorname{Log} g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}))}{\widetilde{g}(\mathbf{x})!} \tag{4.8}$$

puisque $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ est une variable aléatoire obéissant à une loi de Poisson de paramètre $g(\mathbf{x})$. Trouver le modèle le plus vraisemblable revient à minimiser $-\operatorname{Log}(\Pr\{\widetilde{g}|g\})$ ou encore :

$$\varepsilon_{\text{Poisson}} = \sum_{\mathbf{x}} [g(\mathbf{x}) - \widetilde{g}(\mathbf{x}) \operatorname{Log} g(\mathbf{x})] \tag{4.9}$$

en faisant varier les paramètres du modèle $g(\mathbf{x})$ (dans $\varepsilon_{\text{Poisson}}$, j'ai supprimé le terme $\operatorname{Log}(\widetilde{g}(\mathbf{x})!)$ puisqu'il est indépendent de $g(\mathbf{x})$).

4.1.2 Recherche de la solution

Nous avons vu comment la résolution du problème de la déconvolution en tenant compte de la nature statistique des mesures se ramène à trouver le modèle le plus vraisemblable étant donné les observations. Les paramètres du modèle sont obtenus en minimisant une quantité ε qui peut être vue comme une fonction d'erreur qui sanctionne l'écart du modèle aux observations.

A cause du produit de convolution, les dérivées de ε par rapport aux paramètres ne sont pas des équations linéaires. Il faut donc utiliser un algorithme de minimisation général pour obtenir la solution. Etant donné le nombre de paramètres à ajuster, la méthode des gradients conjugués (Press et al., 1990) est la méthode numérique qui s'impose pour minimiser ε (Lannes et al., 1987; Lane, 1992). L'emploi de cet algorithme nécessite de calculer le gradient de ε par rapport aux paramètres $f(\mathbf{x})$.

Pour simplifier, je note $d(\mathbf{x})$ le gradient de ε par rapport à $g(\mathbf{x})$:

$$d(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \varepsilon}{\partial g(\mathbf{x})} = \begin{cases} a(\mathbf{x})[g(\mathbf{x}) - \widetilde{g}(\mathbf{x})] & \text{(Gauss)} \\ 1 - \dfrac{\widetilde{g}(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} & \text{(Poisson)} \end{cases} \tag{4.10}$$

A partir de cette expression, le gradient de ε par rapport aux paramètres $f(\mathbf{x})$ s'obtient de la façon suivante :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial f(\mathbf{x})} = \sum_{\mathbf{x}'} d(\mathbf{x}') \frac{\partial g(\mathbf{x}')}{\partial f(\mathbf{x})},$$

d'après (4.2) :

$$\frac{\partial g(\mathbf{x}')}{\partial f(\mathbf{x})} = h(\mathbf{x}' - \mathbf{x}), \tag{4.11}$$

et finalement il vient :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial f(\mathbf{x})} = \sum_{\mathbf{x}'} d(\mathbf{x}') h(\mathbf{x}' - \mathbf{x}), \tag{4.12}$$

où l'on reconnait un produit de corrélation discret qui peut être obtenu rapidement par FFT (*Fast Fourier Transform*) :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial f(\mathbf{x})} = \sum_{\mathbf{x}'} d(\mathbf{x}') h(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \quad \stackrel{\text{TFD}}{\longrightarrow} \quad D(\mathbf{u}) H^*(\mathbf{u}) \tag{4.13}$$

où $D(\mathbf{u})$ et $H(\mathbf{u})$ sont respectivement les transformées de Fourier discrètes de $d(\mathbf{x})$ et de $h(\mathbf{x})$ (*cf.* annexe J).

4.1.3 Modélisation dans l'espace de Fourier

On peut transposer le problème de la déconvolution dans l'espace de Fourier. Cela peut être avantageux notamment si les mesures de variances ont été faites sur les spectres. Dans ce cas, on cherchera par exemple à minimiser :

$$\varepsilon_{\text{Fourier}} = \sum_{\mathbf{u}} b(\mathbf{u}) \left| F(\mathbf{u})H(\mathbf{u}) - \widetilde{G}(\mathbf{u}) \right|^2 \tag{4.14}$$

où la pondération $b(\mathbf{u})$ est choisie de façon similaire à $a(\mathbf{x})$ (*cf.* équation (4.6)). Un autre avantage de cette approche est qu'elle permet de sélectionner les points de mesure dans l'espace des fréquences spatiales. Ainsi, par exemple, comme les variations statistiques de la turbulence biaisent la mesure de la fonction de transfert aux basses fréquences, je mets $b(\mathbf{u})$ à zéro pour $|\mathbf{u}| \leq r_0/\lambda$; comme aucune information ne peut être mesurée au delà de la fréquence de coupure instrumentale, je mets aussi $b(\mathbf{u})$ à zéro pour $|\mathbf{u}| > D/\lambda$. De la même manière, dans le cadre de l'interférométrie à plusieurs télescopes (ou pour une pupille diluée), la modélisation dans l'espace de Fourier permet de tenir compte de la forme de la pupille.

4.1.4 Contraintes supplémentaires

Pour le moment, j'ai uniquement expliqué comment la qualité des mesures pouvait être prise en compte dans le processus de déconvolution. Cette approche doit encore être renforcée en y incorporant des contraintes supplémentaires.

Par exemple, dans le cas où $f(\mathbf{x})$ est la distribution d'intensité de l'objet, nous savons que toutes les valeurs de $f(\mathbf{x})$ sont positives. Je vais montrer comment tirer parti du maximum d'informations *a priori* sur les paramètres à estimer.

Contraintes relachées

Il est possible d'imposer des contraintes aux paramètres à estimer de la même manière que le modèle est astreint à représenter les mesures : en minimisant une fonction d'erreur qui sanctionne l'écart aux contraintes. Cette approche a d'abord été proposée par Lane (1991) pour résoudre le problème de l'estimation de la phase du spectre de Fourier lorsque seul le module est connu. De cette façon, il est possible d'appliquer les contraintes de positivité et de support en minimisant en même temps que ε la quantité :

$$\eta = \sum_{\mathbf{x}} \gamma(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})^2, \tag{4.15}$$

où $\gamma(\mathbf{x})$ est la fonction qui caractérise les points pour lesquels les contraintes sont violées :

$$\gamma(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(\mathbf{x}) < 0 \text{ ou } \mathbf{x} \notin \mathcal{S}_f, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.16}$$

où $\mathcal{S}_f$ est le support de f.

Les contraintes imposées de cette façon sont dites relachées puisqu'elles peuvent ne pas être exactement vérifiées. Cette approche m'amène à formuler deux critiques :

1. Lorsque ces contraintes sont parfaitement justifiées, le fait de les imposer de façon relachée fait perdre en robustesse par rapport au fait de les imposer strictement ; par exemple, une distribution d'intensité doit être partout positive sinon elle n'a aucun sens physique.
2. Minimiser la quantité $\varepsilon + \eta$ n'a aucune justification statistique.

Afin de renforcer les contraintes sanctionnées par η, on peut envisager de minimiser

$$\varepsilon + \alpha\eta,$$

en choisissant un poids α suffisamment important pour que l'écart aux contraintes (*i.e.* positivité et éventuellement support) soit négligeable dans la solution obtenue. Il reste que minimiser $\varepsilon + \alpha\eta$ pas plus que $\varepsilon + \eta$ n'a de justification statistique. Comme le choix de la valeur de α est arbitraire cela laisse un paramètre libre pour l'obtention de la solution. Différentes valeurs de ce paramètre pouvant conduire à des solutions différentes, cette incertitude est préjudiciable. Ces problèmes pourraient être évités s'il y avait un moyen d'imposer la contrainte de positivité strictement.

Contraintes strictes

Dans le cas de la déconvolution en aveugle, nous avons démontré le gain sensible que les contraintes strictes apportent par rapport aux contraintes relachées (Thiébaut & Conan, 1995). Dans ce même article, nous avons aussi discuté de la façon d'imposer diverses contraintes de manière stricte dans le cadre très général de la recherche d'une solution par la méthode des gradients conjugués.

En particulier, il est possible d'imposer strictement une contrainte ou une propriété que doit vérifier une fonction par une reparamétrisation ad-hoc du problème. Ainsi on ne cherchera plus à minimiser ε en jouant sur les valeurs $f(\mathbf{x})$ mais sur des paramètres p_k :

$$f(\mathbf{x}) = \mathcal{T}(\mathbf{x}, p_1, p_2, \ldots, p_{\mathrm{K}}) \tag{4.17}$$

où $\mathcal{T}$ est une transformation telle que les contraintes sur $f(\mathbf{x})$ soient toujours vérifiées quelques soient les valeurs $\{p_1, p_2, \ldots, p_{\mathrm{K}}\}$. La minimisation de ε par la méthode des gradients conjugués reste possible tant que l'on sait calculer le gradient par rapport aux nouveaux paramètres :

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial p_k} = \sum_{\mathbf{x}} \frac{\partial\varepsilon}{\partial f(\mathbf{x})} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial p_k}. \tag{4.18}$$

L'équation (4.13) donne l'expression de $\partial\varepsilon/\partial f(\mathbf{x})$, il reste à calculer $\partial f(\mathbf{x})/\partial p_k$ suivant la reparamétrisation choisie.

Positivité et support Il est très facile d'imaginer un changement de paramètres qui permet d'imposer la positivité. Par exemple, comme Biraud (1969) on peut prendre :

$$f(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})^2. \tag{4.19}$$

Pour appliquer une méthode de minimisation de type gradients conjugués, il suffit de convertir le gradient par rapport à $f(\mathbf{x})$ en gradient par rapport à $p(\mathbf{x})$:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p(\mathbf{x})} = 2p(\mathbf{x})\frac{\partial \varepsilon}{\partial f(\mathbf{x})}. \tag{4.20}$$

Une itération de la méthode des gradients conjugués consiste à trouver la nouvelle estimation $p^{(k+1)}(\mathbf{x})$ à partir des anciens paramètres $p^{(k)}(\mathbf{x})$ et du gradient conjugué $\psi^{(k)}(\mathbf{x})$ sous la forme

$$p^{(k+1)}(\mathbf{x}) = p^{(k)}(\mathbf{x}) + \lambda^{(k)}\psi^{(k)}(\mathbf{x}). \tag{4.21}$$

Le scalaire $\lambda^{(k)}$ est obtenu par une minimisation de ε à un paramètre. Par suite, et comme le gradient conjugué est une combinaison linéaire des gradients $\partial\varepsilon/\partial p^{(l)}(\mathbf{x})$, $\forall l \leq k$, toute estimation des paramètres est une combinaison linéaire de l'estimation de départ et des gradients successifs.

Par conséquent, si les paramètres sont initialisés avec certaines valeurs à zéro, par exemple $p^{(0)}_{\mathbf{x}_0} = 0$, alors le gradient par rapport à ces points particuliers vaut lui aussi zéro (*i.e.* $\partial\varepsilon/\partial p^{(0)}_{\mathbf{x}_0} = 0$) et il en est de même pour le premier gradient conjugué. On voit immmédiatement que cela restera vrai pour toutes les itérations (*i.e.* $p^{(k)}_{\mathbf{x}_0} = 0$, $\forall k$). Cette particularité permet d'imposer une contrainte de support stricte : il suffit de mettre à zéro les points en dehors du support pour les paramètres de départ $p^{(0)}(\mathbf{x})$. Par contre, il faut faire attention lors de l'initialisation des paramètres si on ne veut pas imposer implicitement cette contrainte de support.

Une autre façon d'imposer la contrainte de positivité stricte consiste à récrire $f(\mathbf{x})$ comme :

$$f(\mathbf{x}) = |p(\mathbf{x})|. \tag{4.22}$$

Le gradient par rapport aux nouveaux paramètres s'écrit :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p(\mathbf{x})} = \mathrm{sgn}(p(\mathbf{x}))\frac{\partial \varepsilon}{\partial f(\mathbf{x})}, \tag{4.23}$$

où la fonction $\mathrm{sgn}(x)$ retourne le signe de son argument :

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0. \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0, \end{cases} \tag{4.24}$$

Avec une telle définition de $\mathrm{sgn}(x)$, on rencontre le même problème (ou le même avantage) que précédemment. Afin de pouvoir choisir une image de départ avec des zéros sans contraindre implicitement un support, il suffit par exemple de redéfinir $\mathrm{sgn}(x)$ comme :

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ -1 & \text{si } x < 0, \end{cases} \tag{4.25}$$

Autres contraintes En fonction du problème à résoudre, d'autres contraintes que celles de positivité et de support peuvent être légitimement imposées. Par exemple, pour la déconvolution d'une image tavelée, la fonction d'étalement de point peut être modélisée par des aberrations de phase dans le plan pupille. Dans ce cas, les nouveaux paramètres seront la phase dans le plan pupille. Une telle description de la fonction d'étalement de point satisfait automatiquement la contrainte de positivité.

Il est souvent impossible de combiner plusieurs reparamétrisations pour imposer en même temps plusieurs types de contraintes strictes. Par exemple, je ne connais pas de changement de paramètres qui permette d'imposer la positivité à la fois de l'image recherchée et de son spectre. Ce qui serait utile en interférométrie des tavelures pour obtenir l'autocorrélation de la distribution d'intensité de l'objet, $o^{(2)}(\mathbf{x})$, à partir de la moyenne des autocorrélations des images courte pose, $\langle i^{(2)}(\mathbf{x})\rangle$. En effet, $o^{(2)}(\mathbf{x})$ et $O^{(2)}(\mathbf{u})$ sont toutes deux des fonctions positives par construction. Dans le chapitre suivant, je montrerai comment j'ai résolu le problème dans ce cas particulier en imposant une "contrainte d'autocorrélation" ce qui revient à reconstruire directement soit $o(\mathbf{x})$ soit $o(-\mathbf{x})$.

Discussion : contraintes strictes ou relachées ?

J'ai rencontré des cas de figure pour lesquels la contrainte de positivité stricte empêchait de trouver la bonne solution tandis que la contrainte de positivité relachée permettait de l'obtenir. Dans d'autres cas, la solution était obtenue beaucoup plus rapidement avec une contrainte relachée qu'avec une contrainte stricte. Pourtant, intuitivement, l'application d'une contrainte forte devrait aider à obtenir une bonne solution. A mon avis, ce problème est dû au fait que la contrainte de positivité stricte ne permet d'améliorer la solution qu'en passant par des solutions intermédiaires toutes positives. Cela peut bloquer l'algorithme de minimisation qui stagne alors au voisinage d'une solution médiocre. Peut être qu'une méthode de minimisation différente des gradients conjugués (le recuit simulé par exemple) permettrait de résoudre ce problème.

Par contre, je n'ai jamais remarqué ce problème lorsque je recherchais deux fonctions simultanément (*e.g.* une image et une fonction de transfert pour la déconvolution en aveugle par exemple). Dans ce cas, la contrainte de positivité stricte apporte systématiquement un gain en robustesse et en vitesse de convergence. Cela peut s'expliquer par la plus grande latitude qui est alors laissée à l'algorithme pour minimiser l'erreur en jouant sur deux fonctions. Cette liberté est suffisante pour que la contrainte de positivité stricte ne bloque pas le processus de minimisation et joue alors pleinement son rôle de renforcement.

Régularisation

Le fait d'imposer un maximum de contraintes lors de la déconvolution est en fait un moyen de régulariser ce problème (Lannes et al., 1987). En d'autres termes, lorsque le problème est mal conditionné (lacunes dans les mesures ou mesures de mauvaise qualité) il s'agit de restreindre le nombre de solutions possibles à un ensemble de solutions "acceptables". Ceci permet un contrôle minimum de la fiabilité de l'image restaurée.

Ainsi, la positivité permet de forcer le processus de déconvolution à fournir une solution qui ne soit pas physiquement inacceptable. On peut aussi voir le fait de minimimiser ε comme un moyen de forcer une *contrainte de convolution*. Cette contrainte est imposée de façon relachée puisque le produit de convolution, obtenu à partir de mesures, est, par conséquent, connu au bruit de mesure près.

Si en prenant en compte le maximum de mesures et de contraintes le problème reste mal conditionné, il faut envisager de réduire la quantité d'information présente dans l'image restaurée. Pour cela, il suffit de limiter la résolution effective de l'image reconstruite, par exemple en minimisant :

$$\varepsilon' = \varepsilon + \alpha \sum_{\substack{\mathbf{u} \\ \|\mathbf{u}\| > u_{\text{eff.}}}} |F(\mathbf{u})|^2 \tag{4.26}$$

où $u_{\text{eff.}}$ est la fréquence de coupure effective et α est un paramètre qui permet d'ajuster la contrainte. Lannes et al. (1987) fournissent une méthode pour estimer cette fréquence de coupure.

Telles que les pondérations sont définies, aucune contrainte n'est imposée sur la résolution des fonctions restaurées. Or on sait *a priori* que la fonction de transfert est nécessairement nulle au delà de la fréquence de coupure instrumentale. Il faut éviter la sur-résolution que cela implique par rapport aux mesures lors de la reconstruction de $f(\mathbf{x})$. Si les données sont de qualité suffisante, on peut se contenter d'ajuster l'échantillonnage de telle sorte que la fréquence de Nyquist coïncide avec la fréquence de coupure optique. Sinon, la définition de ε' (cf. équation (4.26)) permet de résoudre ce problème. Une autre solution consiste à filtrer $f(\mathbf{x})$ après la reconstruction.

4.1.5 Comparaison avec d'autres approches

Lannes et al. (1987) ont proposé d'effectuer la déconvolution au sens des moindres carrés pondérés ; ils ont choisi une pondération w_{RSB} qui est une fonction affine du rapport signal à bruit $\text{RSB}(\mathbf{u})$:

$$w_{\text{RSB}}(\mathbf{u}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{RSB}(\mathbf{u}) \geq \alpha'_t \\ \dfrac{\text{RSB}(\mathbf{u}) - \alpha_t}{\alpha'_t - \alpha_t} & \text{si } \alpha_t < \text{RSB}(\mathbf{u}) < \alpha'_t \\ 0 & \text{si } \text{RSB}(\mathbf{u}) \leq \alpha_t \end{cases} \tag{4.27}$$

où $\alpha_t \leq \alpha'_t$. Contrairement à leur approche dont la robustesse est tributaire du choix judicieux des seuils α_t et α'_t, la définition des pondérations comme l'inverse de la variance de la mesure a une justification statistique et conduit à la solution la plus vraisemblable.

Pour illustrer les avantages de la déconvolution pratiquée comme je l'ai décrit, j'ai appliqué différentes méthodes de déconvolution à des mesures de spectre de puissance de DF Tau et d'une étoile de référence, HD 283654. La figure 4.1 montre les différents résultats obtenus par ces méthodes. La méthode de Wiener donne un moyen d'estimer le filtre optimal à appliquer pour limiter l'influence du bruit ; l'autocorrélation reconstruite par cette méthode possède de nombreuses parties négatives, qui ne sont pas prises en compte par les contours, et montre de nombreux pics parasites. La méthode de Lucy-Richardson (Lucy, 1974; Richardson, 1972) assure la positivité de la solution et évite les effets de sur-résolution ; l'autocorrélation obtenue par cette méthode a nécessité 20000 itérations et reste très empâtée. L'algorithme de reconstruction par minimisation du χ^2 converge beaucoup plus rapidement que la méthode de Lucy-Richardson mais fournit une solution avec une composante parasite. Il y a deux causes qui peuvent expliquer l'apparition de cet artefact : d'abord le niveau de bruit important, ensuite la mauvaise calibration de la fonction de transfert à cause des fluctuations de *seeing*. Pour remédier au problème de la calibration, je propose de ne pas tenir compte des mesures aux fréquences inférieures à la fréquence de coupure atmosphérique (*cf.* chapitre 5). La dernière autocorrélation est obtenue de cette manière et ne laisse planer aucun doute quand à la nature binaire de DF Tau.

4.2 Holographie

La reconstruction d'image à partir des mesures de l'holographie des tavelures peut être considérée comme un cas particulier de la déconvolution. En effet, la méthode ne fournit qu'une mesure bruitée, $\widetilde{S}(\mathbf{u})$, de la fonction de transfert $S(\mathbf{u})$. D'autre part, à cause de la turbulence, la fonction de transfert instantanée présente souvent des lacunes qu'il faut combler en utilisant plusieurs couples $\{\widetilde{i}(\mathbf{x}), \widetilde{s}(\mathbf{x})\}$ de mesures de la distribution d'intensité instantanée et de la fonction de transfert instantanée. Le bruit important qui affecte ces mesures est une autre raison d'utiliser un grand nombre d'observations.

Je vais montrer comment l'approche classique pour reconstruire une image à partir de ces observations peut être renforcée en appliquant des principes similaires à ceux que j'ai mis en œuvre pour la déconvolution. Ainsi, suite à la critique de la reconstruction au sens des moindres carrés classiques, je propose de nouvelles approches pour exploiter au mieux les données fournies par les méthodes holographiques en interférométrie des tavelures. D'abord, j'obtiens une première amélioration en tenant compte de la positivité de la distribution d'intensité de l'objet. Ensuite, je reformule le problème comme un problème de déconvolution en aveugle relachant ainsi la contrainte que les mesures de la fonction de tranfert instantanée doivent être parfaites.

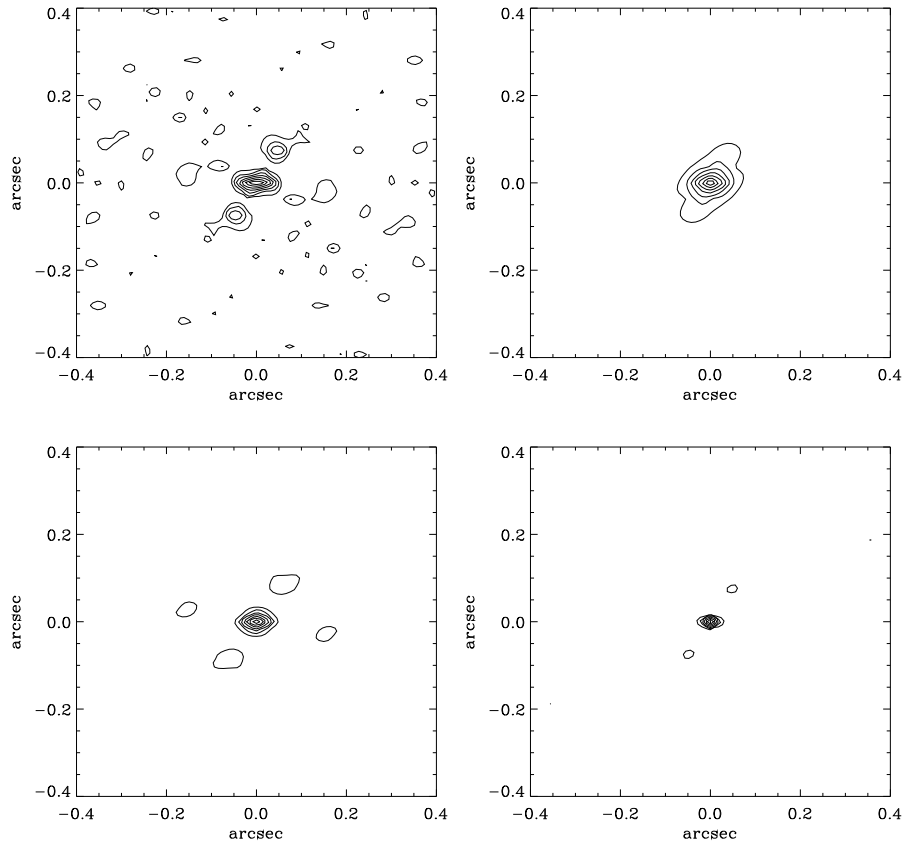


FIG. 4.1 – Reconstruction de l'autocorrélation de DF Tau par différentes méthodes de déconvolution. En haut et à gauche : déconvolution par la méthode de Wiener. En haut et à droite : déconvolution par la méthode de Lucy-Richardson. J'ai obtenu les deux résultats du bas par la méthode de maximum de vraisemblance en excluant les basses fréquences spatiales pour lesquelles la calibration de la fonction de transfert était affectée par les fluctuations des conditions de turbulence ; à gauche, j'ai seulement utiliser une contrainte de positivité ; à droite, j'ai rajouté une contrainte de support (les pixels du bord sont fixés à zéro).

4.2.1 Reconstruction au sens des moindres carrés

Primot et al. (1988) et Roddier (1988b) ont obtenu la meilleure estimation au sens des moindres carrés du spectre de Fourier de l'objet en minimisant la quantité

$$\varepsilon_{\mathrm{MC}} = \langle \sum_{\mathbf{u}} |\widetilde{S}(\mathbf{u})O(\mathbf{u}) - \widetilde{I}(\mathbf{u})|^2 \rangle, \tag{4.28}$$

par rapport aux paramètres $O(\mathbf{u})$. Le spectre de l'objet qui minimise $\varepsilon_{\mathrm{MC}}$ est :

$$O_{\mathrm{MC}}(\mathbf{u}) = \frac{\langle \widetilde{I}(\mathbf{u})\widetilde{S}^*(\mathbf{u}) \rangle}{\langle |\widetilde{S}(\mathbf{u})|^2 \rangle}. \tag{4.29}$$

Le spectre ainsi calculé est mal déterminé aux fréquences pour lesquelles le dénominateur $\langle |\widetilde{S}(\mathbf{u})|^2 \rangle$ est proche de zéro. Pour cette raison, l'équation (4.29) est parfois modifiée pour définir l'estimation du spectre de Fourier de la distribution d'intensité de l'objet comme :

$$O_{\mathrm{MC}}(\mathbf{u}) = \frac{\langle \widetilde{I}(\mathbf{u})\widetilde{S}^*(\mathbf{u}) \rangle}{\langle |\widetilde{S}(\mathbf{u})|^2 \rangle + \eta}. \tag{4.30}$$

où la constante $\eta > 0$ peut être reliée à une évaluation du niveau de bruit des mesures.

Néanmoins, l'interprétation de la quantité à minimiser, $\varepsilon_{\mathrm{MC}}$ (*cf.* équation (4.30)), me conduit faire trois remarques :

- la minimisation de $\varepsilon_{\mathrm{MC}}$ fournit une estimation robuste mais ne prend pas en compte la réalité physique de la distribution d'intensité de l'objet (*i.e.* positivité) ;
- l'expression de $\varepsilon_{\mathrm{MC}}$ ne se justifie que si les mesures de la fonction de transfert instantanée sont totalement fiables ou, au moins beaucoup plus fiables que les autres mesures ;
- le choix de $\varepsilon_{\mathrm{MC}}$ n'est pas guidé par la nature statistique des différents processus de mesure.

4.2.2 Moindres carrés contraints

La première, et la plus simple, amélioration de l'approche des moindres carrés ordinaires consiste à contraindre la distribution d'intensité de l'objet, $o(\mathbf{x})$ à être une fonction positive. Comme je l'ai déjà expliqué, il suffit pour cela d'effectuer un changement des paramètres à ajuster. Par exemple, je choisis :

$$o(\mathbf{x}) = |p(\mathbf{x})|, \tag{4.31}$$

où $p(\mathbf{x})$ sont les nouveaux paramètres. La solution qui minimise $\varepsilon_{\mathrm{MC}}$ est celle qui annule le gradient :

$$\frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{MC}}}{\partial p(\mathbf{x})} = d_{\mathrm{MC}}(\mathbf{x}) \operatorname{sgn}\{p(\mathbf{x})\}, \tag{4.32}$$

où pour plus de simplicité, je note $d_{\mathrm{MC}}(\mathbf{x})$ le gradient de $\varepsilon_{\mathrm{MC}}$ par rapport à $o(\mathbf{x})$:

$$d_{\mathrm{MC}}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{MC}}}{\partial o(\mathbf{x})}. \tag{4.33}$$

A cause de la contrainte de positivité, il n'y a pas de solution analytique de l'équation $\partial\varepsilon_{\mathrm{MC}}/\partial p(\mathbf{x}) = 0$; les paramètres doivent donc être obtenus par une méthode de minimisation générale de type gradients conjugués. Cela nécessite une expression analytique du gradient $d_{\mathrm{MC}}(\mathbf{x})$ qui s'obtient facilement dans l'espace de Fourier. La transformée de Fourier discrète (TFD) de $d_{\mathrm{MC}}(\mathbf{x})$ est (*cf.* annexe J) :

$$d_{\mathrm{MC}}(\mathbf{x}) \quad \stackrel{\mathrm{TFD}}{\longrightarrow} \quad D_{\mathrm{MC}}(\mathbf{u}) = N_{\mathrm{pix}} \left[\frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{MC}}}{\partial \mathrm{Re}\, O(\mathbf{u})} + \jmath \frac{\partial \varepsilon_{\mathrm{MC}}}{\partial \mathrm{Im}\, O(\mathbf{u})} \right], \tag{4.34}$$

où N_{pix} est le nombre de points d'échantillonnage dans l'espace image. La transformée de Fourier discrète du gradient est donc :

$$D_{\mathrm{MC}}(\mathbf{u}) = 2N_{\mathrm{pix}} \langle \widetilde{S}^*(\mathbf{u}) [\widetilde{S}(\mathbf{u}) O(\mathbf{u}) - \widetilde{I}(\mathbf{u})] \rangle. \tag{4.35}$$

Afin de réduire le temps de calcul à chaque itération, il suffit d'intégrer préalablement les quantités moyennes $\langle |\widetilde{S}(\mathbf{u})|^2 \rangle$, $\langle |\widetilde{I}(\mathbf{u})|^2 \rangle$ et $\langle \widetilde{I}(\mathbf{u}) \widetilde{S}^*(\mathbf{u}) \rangle$. Ainsi $\varepsilon_{\mathrm{MC}}$ devient :

$$\varepsilon_{\mathrm{MC}} = \sum_{\mathbf{u}} \left[\langle |\widetilde{S}(\mathbf{u})|^2 \rangle |O(\mathbf{u})|^2 - 2\,\mathrm{Re} \left\{ \langle \widetilde{I}(\mathbf{u}) \widetilde{S}^*(\mathbf{u}) \rangle O^*(\mathbf{u}) \right\} + \langle |\widetilde{I}(\mathbf{u})|^2 \rangle \right], \tag{4.36}$$

et la TFD de son gradient par rapport à $o(\mathbf{x})$ devient :

$$D_{\mathrm{MC}}(\mathbf{u}) = 2N_{\mathrm{pix}} \left[O(\mathbf{u}) \langle |\widetilde{S}(\mathbf{u})|^2 \rangle - \langle \widetilde{I}(\mathbf{u}) \widetilde{S}^*(\mathbf{u}) \rangle \right] \tag{4.37}$$

Comme $\sum_{\mathbf{u}} \langle |\widetilde{I}(\mathbf{u})|^2 \rangle$ est une constante — *i.e.* sa valeur ne dépend pas des paramètres du modèle — il est seulement nécessaire de calculer $\langle \widetilde{I}(\mathbf{u}) \widetilde{S}^*(\mathbf{u}) \rangle$ et $|\widetilde{S}(\mathbf{u})|^2$. Le gradient de $\varepsilon_{\mathrm{MC}}$ par rapport aux paramètres $p(\mathbf{x})$ est obtenu en combinant les équations (4.32) et (4.35).

Suivant la définition de la fonction $\mathrm{sgn}(x)$, il est possible d'inclure dans cette approche une contrainte de support stricte (*cf.* section 4.1).

4.2.3 Déconvolution de l'interspectre

L'approche des moindres carrés contraints est plus robuste que celle des moindres carrés ordinaires car elle incorpore la positivité de $o(\mathbf{x})$. Néanmoins, cette approche ne se justifie que si les mesures des fonctions d'étalement de point sont absolument fiables. Comme ces mesures sont en général bruitées, il vaudrait mieux trouver un moyen de reconstruire $o(\mathbf{x})$ sans faire cette hypothèse implicite. En relisant attentivement ce qui précède, on peut

observer qu'une estimation jusqu'à la limite de diffraction de la distribution d'intensité de l'objet n'est possible que si la quantité

$$\widetilde{G}(\mathbf{u}) = \langle \widetilde{I}(\mathbf{u})\widetilde{S}^*(\mathbf{u})\rangle \tag{4.38}$$

préserve l'information jusqu'à la fréquence de coupure instrumentale. Cette propriété se démontre simplement en calculant l'espérance de $\widetilde{G}(\mathbf{u})$:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{u}) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\{\widetilde{G}(\mathbf{u})\} \\ &= \langle \mathrm{E}\{\widetilde{I}(\mathbf{u})\}\mathrm{E}\{\widetilde{S}^*(\mathbf{u})\}\rangle \\ &= \langle S(\mathbf{u})\mathrm{E}\{\widetilde{S}^*(\mathbf{u})\}\rangle O(\mathbf{u}) \\ &= H(\mathbf{u})O(\mathbf{u}) \end{aligned} \tag{4.39}$$

avec :

$$H(\mathbf{u}) = \langle |S(\mathbf{u})|^2\rangle. \tag{4.40}$$

Pour ce calcul, j'ai supposé que les réalisations $\widetilde{I}(\mathbf{u})$ et $\widetilde{S}(\mathbf{u})$ sont des variables indépendentes et que les mesures des fonctions de transfert ne sont pas biaisées. $H(\mathbf{u}) = \langle |S(\mathbf{u})|^2\rangle$ est la fonction de transfert de l'interférométrie des tavelures traditionnelle dont nous savons qu'elle est différente de zéro jusqu'à la fréquence de coupure instrumentale. Par conséquent, l'intégration de $\widetilde{G}(\mathbf{u})$ préserve bien les informations à haute résolution.

Du point de vue des approches précédentes, $H(\mathbf{u})$ est mesurée par $\langle |\widetilde{S}(\mathbf{u})|^2\rangle$. A moins que ces mesures soient parfaitement exemptes de bruit, l'espérance de $\langle |\widetilde{S}(\mathbf{u})|^2\rangle$ vaut :

$$\mathrm{E}\{\langle |\widetilde{S}(\mathbf{u})|^2\rangle\} = H(\mathbf{u}) + \sigma^2_{|\widetilde{S}(\mathbf{u})|} \tag{4.41}$$

Cette équation met en évidence un biais sous-jacent à la définition de $\varepsilon_{\mathrm{MC}}$. Principalement, ce biais résulte en un filtrage excessif des hautes fréquences spatiales dans la reconstruction du spectre de Fourier de l'objet. Lorsque les mesures des fonctions d'étalement de point sont fournies directement par les images d'une source de référence non résolue, il est facile de corriger ce biais tant que le bruit de photons domine (*cf.* section 3.2). Par contre, dans le cas de la déconvolution par analyse de surface d'onde, il est très difficile d'obtenir une estimation ou une modélisation correcte de ce biais.

Pour éviter les effets de ce biais dans l'estimation de la distribution d'intensité de l'objet, je propose de reconstruire simultanément $h(\mathbf{x})$ et $o(\mathbf{x})$ en minimisant :

$$\varepsilon_{\mathrm{holo}} = \sum_{\mathbf{u}} |H(\mathbf{u})O(\mathbf{u}) - \langle \widetilde{I}(\mathbf{u})\widetilde{S}^*(\mathbf{u})\rangle|^2 \ ; \tag{4.42}$$

et en appliquant les contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} o(\mathbf{x}) & > & 0, \\ h(\mathbf{x}) & > & 0. \end{array} \right. \tag{4.43}$$

car la fonction d'étalement de point $h(\mathbf{x})$ étant un produit de corrélation moyen de fonctions positives, c'est une fonction positive. De plus, si les mesures $\widetilde{S}(\mathbf{u})$ ne sont pas biaisées — *i.e.* si $\mathrm{E}\{\widetilde{S}(\mathbf{u})\} = S(\mathbf{u})$ — alors on peut raisonnablement appliquer les contraintes supplémentaires pour la fonction $h(\mathbf{x})$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} h(-\mathbf{x}) & = & h(\mathbf{x}) \iff H(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}, \\ H(\mathbf{u}) & > & 0. \end{array} \right. \tag{4.44}$$

Cette dernière approche est équivalente à celle de la déconvolution en aveugle. Le cas échéant, la méthode des moindres carrés contraints et $\langle |\widetilde{S}(\mathbf{u})|^2 \rangle$ peuvent fournir une estimation de départ pour $o(\mathbf{x})$ et $H(\mathbf{u})$ respectivement.

Un autre avantage de la reconstruction par la déconvolution en aveugle est qu'elle permet de tolérer un biais dans les mesures des fonctions de transfert instantanées. Dans ce cas, la fréquence de coupure effective sera, au mieux, celle de $\langle S(\mathbf{u})\widetilde{S}^*(\mathbf{u}) \rangle$ c'est-à-dire D/λ.

4.3 Déconvolution en aveugle

Le problème de la déconvolution en aveugle consiste à déconvoluer un produit de convolution lorsque aucune des deux composantes du produit n'est connue ou mesurée (Stockham et al., 1975). Lane & Bates (1987) ont démontré que ce problème admettait une solution dans le cas multidimentionnel (*i.e.* au moins en dimension deux). Le premier algorithme capable de résoudre le problème pour des données réelles (*i.e.* bruitées) a été proposé par Ayers & Dainty (1988) ; cet algorithme est de type Gerchberg-Saxton (Gerchberg & Saxton, 1972). D'autres algorithmes basés sur la recherche itérative du maximum de vraisemblance pour un bruit poissonien ont été élaboré par Holmes (1992) et Schulz (1993) ; ces algorithmes sont de type Lucy-Richardson (Lucy, 1974; Richardson, 1972). Une méthode de résolution par les moindres carrés a été proposée par Lane (1992) en minimisant une fonction d'erreur qui rend compte des écarts au produit de convolution et à la positivité. Nous avons amélioré ce type d'approche en imposant des contraintes strictes (Thiébaut & Conan, 1995). Encore une fois, la résolution du problème par la minimisation d'une fonction d'erreur présente l'intérêt d'être très générale et de permettre de tenir compte de la statistique particulière des processus de mesure. Ce n'est pas le cas dans les approches de type Lucy-Richardson [2] lorsque les mesures ne suivent pas une loi de Poisson.

Les paramètres à estimer ne sont plus seulement $f(\mathbf{x})$ mais aussi la fonction d'étalement de point $h(\mathbf{x})$. Comme $f(\mathbf{x})$ et $h(\mathbf{x})$ jouent un rôle symétrique, il est immédiat d'obtenir

[2] appelées à tort *par maximum de vraisemblance* par opposition aux méthodes dites *par moindres carrés*.

les expressions des gradients à partir de l'équation (4.13) :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial f(\mathbf{x})} = \sum_{\mathbf{x}'} d(\mathbf{x}') h(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \quad \stackrel{\text{TFD}}{\longrightarrow} \quad D(\mathbf{u}) H^*(\mathbf{u}), \tag{4.45}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial h(\mathbf{x})} = \sum_{\mathbf{x}'} d(\mathbf{x}') f(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \quad \stackrel{\text{TFD}}{\longrightarrow} \quad D(\mathbf{u}) F^*(\mathbf{u}), \tag{4.46}$$

où $d(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \partial\varepsilon/\partial g(\mathbf{x})$ est le gradient de l'erreur par rapport à la modélisation du produit de convolution observé. A cause de cette symétrie, les paires de fonctions $\{f(\mathbf{x}),\ h(\mathbf{x})\}$ et $\{h(\mathbf{x}),\ f(\mathbf{x})\}$ sont des solutions de même qualité pour le problème de la déconvolution en aveugle. Afin de départager ces solutions, on peut par exemple utiliser des contraintes différentes sur $f(\mathbf{x})$ et sur $h(\mathbf{x})$. D'autres types de dégénérescences existent pour résoudre le problème de la déconvolution en aveugle. Les articles précédemment cités discutent en détail de ces incertitudes et, éventuellement, du moyen de les lever.

Contrairement à ce que l'on pourrait croire, la déconvolution en aveugle s'avère un procédé extrêmement robuste. Par exemple, nous avons pu restaurer de cette manière une image avec une dynamique de 1.5 magnitude à partir d'une seule image tavelée contenant $\sim 10^4$ photons, pour un rapport $D/r_0 = 10$ (Thiébaut & Conan, 1995). Pour des cas moins extrêmes, la déconvolution en aveugle est un outil qui trouve son intérêt pour traiter des images partiellement corrigées par l'optique adaptative ou encore les observations du HST (*Hubble Space Telescope*) avant sa réparation.

4.4 Conclusion

J'ai décrit comment résoudre de façon consistante avec la qualité des mesures le problème de la déconvolution et j'ai démontré le gain qu'il y a à tenir compte du maximum d'informations (*e.g.* mesures, connaissances *a priori*, ...). J'ai montré comment ces principes de base peuvent être appliqués à des problèmes apparentés à la déconvolution. Ainsi, la déconvolution et la déconvolution en aveugle apparaissent comme des cas extrêmes pour lesquels la fonction d'étalement de point est soit parfaitement connue soit complètement inconnue, à part peut être ses propriétés. De façon plus générale, lorsque la fonction d'étalement de point n'est pas parfaitement déterminée, il est très simple de modifier la méthode de déconvolution que je préconise pour tenir compte de cette information imparfaite. En effet, il suffit de choisir les deux composantes du produit de convolution comme paramètres du problème et d'ajouter à la fonction d'erreur une quantité mesurant les écarts des paramètres de la fonction d'étalement de point aux mesures correspondantes. De cette manière, j'ai proposé d'améliorer la restauration d'image pour les méthodes holographiques.

Chapitre 5

Exploitation des mesures de l'interférométrie des tavelures

Dans ce chapitre, en appliquant les principes développés pour la déconvolution, je vais montrer comment j'exploite les mesures fournies par l'interférométrie des tavelures.

Je vais d'abord expliquer comment j'obtiens le module du spectre de Fourier de l'objet de façon robuste malgré les variations des caractéristiques de la turbulence entre les observations de l'objet et de sa référence. En modifiant la description du modèle à ajuster, je montrerai qu'il est très simple de reconstruire directement une image de l'objet à partir des seules mesures de densité spectrale.

Dans le cadre de la méthode de Knox-Thompson ou de l'analyse bispectrale cette fois, je propose une méthode à la fois itérative et récursive de restauration de la phase du spectre de Fourier de l'objet. De même que les seules mesures de module permettent la reconstruction d'une image, je décris deux approches pour restaurer une image de l'objet à partir des seules mesures de phase.

Enfin, comme les seules mesures de module ou les seules mesures de phase ne permettent pas la restauration de la distribution d'intensité de l'objet sans ambiguïté, je propose d'utiliser les deux types de mesures simultanément.

La plupart des algorithmes que je propose sont aisément modifiables pour permettre une reconstruction même lorsqu'aucune mesure de la fonction de transfert n'est disponible.

5.1 Mesures du module

Les mesures de $\langle |I(\mathbf{u})|^2 \rangle$ et de la fonction de transfert $\langle |S(\mathbf{u})|^2 \rangle$ permettent d'estimer le spectre de puissance $|O(\mathbf{u})|^2$ de l'objet (Labeyrie, 1970). La déconvolution peut évidemment être effectuée de façon robuste comme je l'ai expliqué dans le chapitre précédent. Je vais développer une approche qui permet de résoudre le problème de la calibration de la fonction de transfert lorsque les conditions de turbulence évoluent entre les observations

de l'objet et de sa référence.

5.1.1 Estimation du spectre de puissance

J'ai déjà insisté sur le fait que les fluctuations des conditions de turbulence affectent la forme de la fonction de transfert d'une façon qui est néfaste seulement pour les basses fréquences spatiales (*i.e.* $\|\mathbf{u}\| \leq r_0/\lambda$). Aussi, je préconise d'effectuer la déconvolution par moindre χ^2 en minimisant une quantité $\varepsilon_{\text{module}}$ évaluée dans l'espace de Fourier sur les hautes fréquences spatiales :

$$\varepsilon_{\text{module}} = \sum_{\mathbf{u}} w(\mathbf{u})[F(\mathbf{u})\widetilde{H}(\mathbf{u}) - \widetilde{G}(\mathbf{u})]^2, \tag{5.1}$$

où :

$$\begin{array}{lll} F(\mathbf{u}) & \text{modélise} & |O(\mathbf{u})|^2 \\ \widetilde{G}(\mathbf{u}) & \text{mesure} & \langle |I(\mathbf{u})|^2 \rangle \\ \widetilde{H}(\mathbf{u}) & \text{mesure} & \langle |S(\mathbf{u})|^2 \rangle, \end{array}$$

et la pondération est choisie comme :

$$w(\mathbf{u}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|\mathbf{u}\| \leq \frac{r_0}{\lambda} \text{ ou si } \|\mathbf{u}\| > \frac{D}{\lambda} \\ \dfrac{1}{\sigma^2_{\widetilde{G}(\mathbf{u})}} & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.2}$$

Si aucune estimation de la variance $\sigma^2_{\widetilde{G}(\mathbf{u})}$ n'est disponible, l'approche des moindres carrés reste possible en prenant :

$$w(\mathbf{u}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|\mathbf{u}\| \leq \frac{r_0}{\lambda} \text{ ou si } \|\mathbf{u}\| > \frac{D}{\lambda} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.3}$$

Comme dans le cas de la déconvolution et pour renforcer le processus, on tiendra compte du fait que l'autocorrélation de la distribution d'intensité de l'objet est nécessairement positive en reparamétrisant le problème. Par exemple :

$$f(\mathbf{x}) = |p(\mathbf{x})|$$

où $p(\mathbf{x})$ sont les nouveaux paramètres et $f(\mathbf{x})$ est le modèle de l'autocorrélation $o^{(2)}(\mathbf{x})$ de la distribution d'intensité de l'objet.

Comme $w(\mathbf{u}) = 0$ pour $\mathbf{u} = (0, 0)$, il n'y a aucune contrainte sur l'énergie de $f(\mathbf{x})$ (*i.e.* $\sum_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ est un paramètre libre). Ainsi, un niveau de fond arbitrairement élevé pourra

apparaître dans $f(\mathbf{x})$. Cet effet est clairement indésirable. De plus, il est la source d'un autre problème. En effet, au lieu de se faire autour de la valeur zéro, les fluctuations d'intensité de $f(\mathbf{x})$ pour les points en dehors du support de $o^{(2)}(\mathbf{x})$ se feront autour de la valeur de ce fond. Cela réduit fortement l'intérêt d'imposer la positivité de $f(\mathbf{x})$. Cette dégénérescence doit donc absolument être supprimée.

Pour éviter l'apparition d'un fond dans $f(\mathbf{x})$, j'impose simplement une contrainte de support sur $f(\mathbf{x})$. Cette contrainte peut être appliquée facilement en mettant à zéro les points de la première estimation de $f(\mathbf{x})$ en dehors du support et en utilisant une définition de $\mathrm{sgn}(x)$ telle que $\mathrm{sgn}(0) = 0$.

5.1.2 Prise en compte du bruit de calibration

Pour tenir compte du bruit de mesure sur la fonction de transfert, on peut récrire la quantité à minimiser comme :

$$\varepsilon_{\text{module}} = \sum_{\mathbf{u}} w(\mathbf{u})[F(\mathbf{u})H(\mathbf{u}) - \widetilde{G}(\mathbf{u})]^2 + \sum_{\mathbf{u}} w'(\mathbf{u})[H(\mathbf{u}) - \widetilde{H}(\mathbf{u})]^2, \tag{5.4}$$

et chercher la solution en faisant varier les paramètres $p(\mathbf{x})$ et $p'(\mathbf{x})$ tels que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= |p(\mathbf{x})|, \\ h(\mathbf{x}) &= |p'(\mathbf{x})|. \end{aligned}$$

Il est intéressant de noter que, dans ce cas où à la fois $f(\mathbf{x})$ et $h(\mathbf{x})$ sont recherchés, le choix de supprimer la contrainte de mesure sur les basses fréquences peut se faire soit pour $\widetilde{G}(\mathbf{u})$ soit pour $\widetilde{H}(\mathbf{u})$. Afin de préserver une contrainte sur les énergies de $f(\mathbf{x})$ et de $h(\mathbf{x})$, il me parait logique de définir les pondérations comme :

$$w(\mathbf{u}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|\mathbf{u}\| > \frac{D}{\lambda} \\ \dfrac{1}{\sigma^2_{\widetilde{G}(\mathbf{u})}} & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.5}$$

$$w'(\mathbf{u}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|\mathbf{u}\| \leq \frac{r_0}{\lambda} \text{ ou si } \|\mathbf{u}\| > \frac{D}{\lambda} \\ \dfrac{1}{\sigma^2_{\widetilde{H}(\mathbf{u})}} & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.6}$$

Ainsi aucune contrainte de support n'est nécessaire.

Si aucune mesure de la fonction de transfert n'est utilisable, une approche de type déconvolution en aveugle peut être obtenue à partir des mêmes équations en prenant simplement $w'(\mathbf{u}) \equiv 0$.

J'impose une contrainte de symétrie implicite pour $f(\mathbf{x})$ et $h(\mathbf{x})$ en ne conservant que les parties réelles de leurs spectres respectifs, $F(\mathbf{u})$ et $H(\mathbf{u})$. Cette contrainte est légitime puisque $f(\mathbf{x})$ modélise une autocorrélation et $h(\mathbf{x})$ modélise une moyenne d'autocorrélations. Afin de préserver cette contrainte (qui revient à avoir deux fois moins de degrés de liberté), il faut initialiser l'algorithme avec des fonctions paires.

Comme $H(\mathbf{u})$ modélise $\langle|S(\mathbf{u})|^2\rangle$ elle doit forcément être une fonction positive dont le support est limité par la fréquence de coupure instrumentale. Afin d'imposer ces contraintes de positivité et de support sur $H(\mathbf{u})$, on peut reparamétriser $H(\mathbf{u})$ au lieu de $h(\mathbf{x})$. On perd alors la possibilité de contraindre de façon stricte $h(\mathbf{x})$ à être positive. Quelle que soit l'alternative choisie, il est toujours possible de forcer de manière relachée les contraintes qui ne sont pas prises en compte par le changement de paramètres.

5.1.3 Réduction du nombre de paramètres

Lorsque la fonction de transfert est mesurée, la minimisation de $\varepsilon_{\text{module}}$ défini par l'équation (5.4) impose d'ajuster les paramètres pour $f(\mathbf{x})$ et pour $h(\mathbf{x})$ qui modélisent respectivement $o^{(2)}(\mathbf{x})$ et $\langle s^{(2)}(\mathbf{x})\rangle$. Comme seule l'estimation de $o^{(2)}(\mathbf{x})$ nous intéresse et pour diminuer le nombre de paramètres libres j'ai envisagé deux approches différentes qui permettent de se limiter aux paramètres $f(\mathbf{x})$.

D'abord, j'ai remplacé $H(\mathbf{u})$ dans (5.4) par une expression telle que

$$\frac{\partial \varepsilon_{\text{module}}}{\partial H(\mathbf{u})} = 0$$

soit :

$$H(\mathbf{u}) = \frac{w'(\mathbf{u})\widetilde{H}(\mathbf{u}) + w(\mathbf{u})\widetilde{G}(\mathbf{u})F(\mathbf{u})}{w'(\mathbf{u}) + w(\mathbf{u})F^2(\mathbf{u})}. \tag{5.7}$$

Dans ce cas, l'expression de $\varepsilon_{\text{module}}$ peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon_{\text{module}} = \sum_{\mathbf{u}} w(\mathbf{u}) \left(\frac{F(\mathbf{u})\widetilde{H}(\mathbf{u}) - \widetilde{G}(\mathbf{u})}{1 + \frac{w(\mathbf{u})}{w'(\mathbf{u})}F^2(\mathbf{u})} \right)^2 . \tag{5.8}$$

Cette approche revient à n'appliquer à $h(\mathbf{x})$ que la contrainte sanctionnée par $\varepsilon_{\text{module}}$, en particulier $h(\mathbf{x})$ n'est pas contraint à être positif. De cette façon, seuls les paramètres qui définissent $f(\mathbf{x})$ sont ajustés. Malheureusement, j'ai remarqué que cette méthode génère des "fantômes" importants lorsque la contrainte sur les basses fréquences spatiales est supprimée. Pour le moment, je n'ai pas trouvé de moyen de stabiliser l'algorithme.

Etant donnée l'instabilité de l'algorithme précédent, et toujours pour réduire le nombre de paramètres, j'ai essayé d'exprimer $\varepsilon_{\text{module}}$ comme le χ^2 de la mesure

$$\widetilde{F}(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\widetilde{G}(\mathbf{u})}{\widetilde{H}(\mathbf{u})}$$

de $F(\mathbf{u})$ en évitant les divisions. Dans ce cas, l'expression de $\varepsilon_{\text{module}}$ devient :

$$\varepsilon_{\text{module}} = \sum_{\mathbf{u}} \left(\frac{F(\mathbf{u}) - \widetilde{F}(\mathbf{u})}{\sigma_{\widetilde{F}(\mathbf{u})}} \right)^2 . \tag{5.9}$$

Comme $\widetilde{G}(\mathbf{u})$ et $\widetilde{H}(\mathbf{u})$ sont des moyennes de variables aléatoires indépendantes, la variance de leur quotient peut être approximée par (*cf.* annexe I) :

$$\sigma^2_{\widetilde{F}(\mathbf{u})} \simeq \left(\frac{\widetilde{G}(\mathbf{u})}{\widetilde{H}(\mathbf{u})} \right)^2 \left(\frac{\sigma^2_{\widetilde{G}(\mathbf{u})}}{\widetilde{G}(\mathbf{u})^2} + \frac{\sigma^2_{\widetilde{H}(\mathbf{u})}}{\widetilde{H}(\mathbf{u})^2} \right). \tag{5.10}$$

Finalement, il est possible de récrire $\varepsilon_{\text{module}}$ comme :

$$\varepsilon_{\text{module}} = \sum_{\mathbf{u}} w''(\mathbf{u}) [F(\mathbf{u})\widetilde{H}(\mathbf{u}) - \widetilde{G}(\mathbf{u})]^2, \tag{5.11}$$

où la nouvelle pondération $w''(\mathbf{u})$ tient compte du bruit de mesure à la fois sur $\widetilde{G}(\mathbf{u})$ et sur $\widetilde{H}(\mathbf{u})$ et a pour expression :

$$w''(\mathbf{u}) = \frac{\widetilde{H}(\mathbf{u})^2}{\widetilde{G}(\mathbf{u})^2 \sigma^2_{\widetilde{H}(\mathbf{u})} + \widetilde{H}(\mathbf{u})^2 \sigma^2_{\widetilde{G}(\mathbf{u})}}. \tag{5.12}$$

A la limite, lorsque le rapport signal à bruit pour la référence est très supérieur à celui des mesures sur l'objet, on retrouve bien l'expression (5.1) pour $\varepsilon_{\text{module}}$. A l'usage, cette approche est beaucoup plus satisfaisante que la méthode précédente.

5.1.4 Discussion : faut-il pondérer ?

La résolution du problème par l'approche des moindres carrés pondérés a une justification statistique et permet d'obtenir la solution la plus vraisemblable. Mais de cette façon, la variance de la mesure de $\langle |I(\mathbf{u})|^2 \rangle$ étant d'autant plus forte que $|O(\mathbf{u})|^2$ est faible, le poids de cette mesure est d'autant plus faible que le spectre de puissance de l'objet est faible. Pourtant le fait que le spectre de puissance de l'objet observé soit, à la limite, nul pour certaines fréquences spatiales peut constituer une contrainte très forte. A cause de cela, on peut reconsidérer les avantages de la recherche du maximum de vraisemblance et choisir plutôt une approche par les moindres carrés classiques.

5.2 Reconstruction d'image à partir des seules mesures de module

Depuis les travaux de Fienup (voir par exemple Fienup, 1982) on sait qu'il est possible de déterminer la phase du spectre de Fourier de la distribution d'intensité d'un objet à

partir de son module de Fourier et de contraintes telles que la positivité et/ou le support. Ce genre de méthode laisse toutefois une incertitude quant à l'orientation et la position exacte de l'objet restauré : $o(\mathbf{x})$ aussi bien que $o(-\mathbf{x})$ peuvent être reconstruits à une translation près. En astronomie, par exemple, Perez-Ilzarbe & Nieto-Vesperinas (1991) ont appliqué ce type d'algorithme de restauration de phase à des observations d'étoiles doubles en interférométrie des tavelures traditionnelle.

Je vais montrer qu'en modifiant simplement le modèle des quantités à estimer dans l'approche de la section précédente, il est possible de restaurer directement une image au lieu du spectre de puissance (ou de l'autocorrélation) de l'objet.

Dans le cas de l'interférométrie des tavelures traditionnelle, la quantité mesurée est l'autocorrélation moyenne des images courte pose qui peut être modélisée par :

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}'} f^{(2)}(\mathbf{x}')h(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{5.13}$$

où $f^{(2)}$ est l'autocorrélation discrète de la distribution d'intensité de l'objet observé :

$$f^{(2)}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}'} f(\mathbf{x}')f(\mathbf{x}+\mathbf{x}'). \tag{5.14}$$

La transformée de Fourier discrète (TFD) de $f^{(2)}$ est :

$$\sum_{\mathbf{x}'} f(\mathbf{x}')f(\mathbf{x}'+\mathbf{x}) \quad \overset{\text{TFD}}{\longrightarrow} \quad F^{(2)}(\mathbf{u}) = |F(\mathbf{u})|^2, \tag{5.15}$$

celle du modèle est :

$$g(\mathbf{x}) \quad \overset{\text{TFD}}{\longrightarrow} \quad G(\mathbf{u}) = H(\mathbf{u})|F(\mathbf{u})|^2, \tag{5.16}$$

où $H(\mathbf{u})$ est la TFD de $h(\mathbf{x})$ qui est l'autocorrélation moyenne de la fonction d'étalement de point.

En utilisant ce modèle, je récris la quantité à minimiser comme :

$$\varepsilon_{\text{module}} = \sum_{\mathbf{u}} w(\mathbf{u}) \left[|F(\mathbf{u})|^2 H(\mathbf{u}) - \widetilde{G}(\mathbf{u})\right]^2 + \sum_{\mathbf{u}} w'(\mathbf{u}) \left[H(\mathbf{u}) - \widetilde{H}(\mathbf{u})\right]^2, \tag{5.17}$$

où cette fois-ci :

$$\begin{array}{lll} F(\mathbf{u}) & \text{modélise} & O(\mathbf{u}) \\ \widetilde{G}(\mathbf{u}) & \text{mesure} & \langle|I(\mathbf{u})|^2\rangle \\ \widetilde{H}(\mathbf{u}) & \text{mesure} & \langle|S(\mathbf{u})|^2\rangle, \end{array}$$

et les pondérations $w(\mathbf{u})$ et $w'(\mathbf{u})$ sont définies comme dans le chapitre précédent.

Afin de minimiser $\varepsilon_{\text{module}}$, je fais appel à la méthode des gradients conjugués. J'ai établi (*cf.* annexe J) l'expression de la transformée de Fourier discrète du gradient d'une quantité

réelle par rapport à des paramètres réels. Cela permet d'écrire les relations suivantes pour les gradients :

$$\frac{\partial \varepsilon_{\text{module}}}{\partial f(\mathbf{y})} \xrightarrow{\text{TFD}} 4N_{\text{pix}} w(\mathbf{u}) H(\mathbf{u}) F(\mathbf{u}) \left[|F(\mathbf{u})|^2 H(\mathbf{u}) - \widetilde{G}(\mathbf{u}) \right], \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{\text{module}}}{\partial h(\mathbf{y})} \xrightarrow{\text{TFD}} & 2N_{\text{pix}} w(\mathbf{u}) |F(\mathbf{u})|^2 \left[|F(\mathbf{u})|^2 H(\mathbf{u}) - \widetilde{G}(\mathbf{u}) \right] \\ & + 2N_{\text{pix}} w'(\mathbf{u}) \left[H(\mathbf{u}) - \widetilde{H}(\mathbf{u}) \right] \end{aligned} \tag{5.19}$$

où N_{pix} est le nombre total d'éléments d'échantillonnage. Si une reparamétrisation est utilisée pour tenir compte de contraintes strictes, il faut propager les expressions des gradients qui précèdent.

Il est possible de modifier simplement ce qui précède pour tenir compte des deux cas extrêmes pour lesquels la fonction de transfert est soit parfaitement déterminée soit complètement inconnue. Dans le premier cas, il suffit de remplacer, dans les équations, $H(\mathbf{u})$ par la fonction de transfert mesurée $\widetilde{H}(\mathbf{u})$ et de ne faire varier que le modèle $f(\mathbf{x})$ de la distibution d'intensité. Dans le second cas, il suffit de prendre $w'(\mathbf{u}) = 0, \forall\ \mathbf{u}$. Dans les cas intermédiaires, on peut limiter le nombre de paramètres à ajuster en remplaçant $H(\mathbf{u})$ par $\widetilde{H}(\mathbf{u})$ et $w(\mathbf{u})$ par $w''(\mathbf{u})$ (*cf.* équation (5.12)).

J'ai testé la possibilité de reconstruire (à une rotation de 180 deg près) une image à partir de la seule mesure du spectre de puissance et sans utiliser d'étoile de référence. La figure 5.1 montre les résultats que j'ai obtenus à partir de données simulées en mode comptage de photons (100 photons par image en moyenne) et en mode analogique. Les contraintes imposées étaient la positivité stricte pour l'image de l'objet et la fonction de transfert ajustée et la symétrie radiale pour cette dernière. Il se trouve, par hasard, que les deux images reconstruites étaient retournées. Ces résultats démontrent que la reconstruction d'image à partir des seules mesures de spectre de puissance et sans calibration de la fonction de transfert atmosphérique est possible dans les conditions de mes simulations. Cet algorithme de reconstruction d'image est original et il reste à qualifier ses performances ultimes en terme de sensibilité, de robustesse et de capacité à restaurer l'image d'un objet résolu (*i.e.* qui ne soit pas constitué de composantes non résolues).

5.3 Mesures de phase et calibration

Les méthodes de Knox-Thompson et du bispectre fournissent des mesures permettant de reconstruire la phase du spectre de Fourier de l'objet. Bien entendu, il est possible de reconstruire le spectre de l'objet à partir de sa transformée de Knox-Thompson ou à partir de son bispectre. Pour cela, il est nécessaire de calibrer la fonction de transfert correspondante : $\langle S^{(\text{KT})}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rangle$ ou $\langle S^{(3)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rangle$. Malheureusement, ces fonctions de transfert dépendent fortement de l'état de la turbulence et, comme pour le spectre de puissance, il est très difficile de les calibrer correctement. De plus, contrairement au spectre de

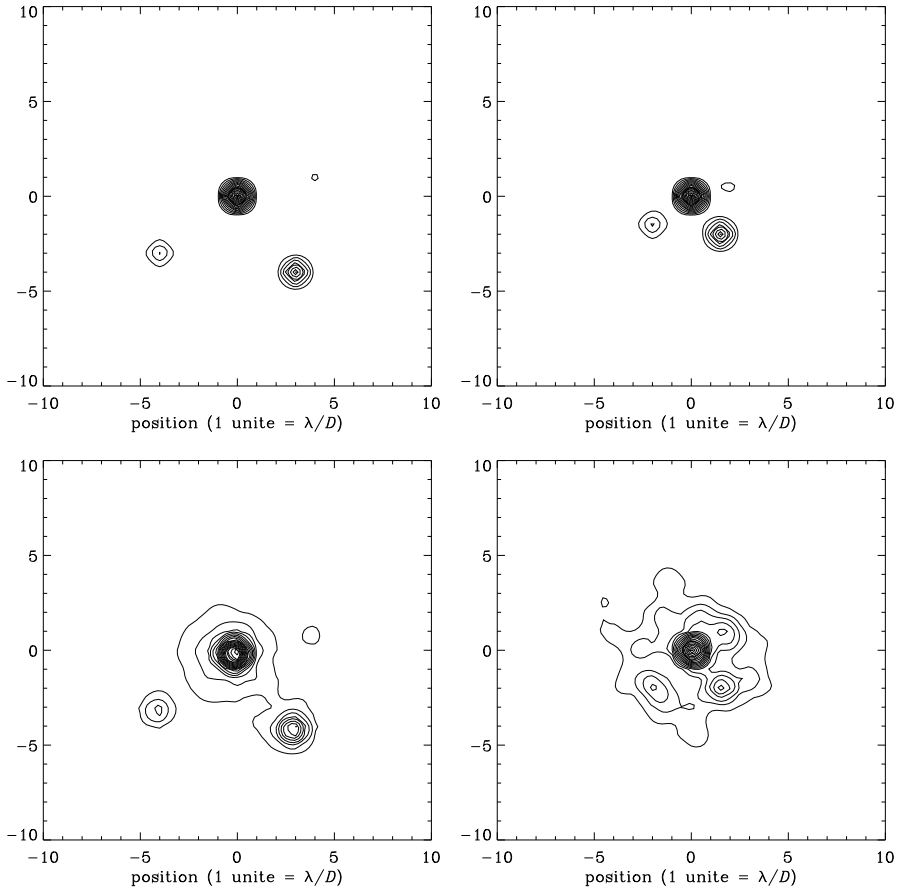


FIG. 5.1 – Reconstruction d'image à partir du spectre de puissance et sans étoile de référence. Objet original (en haut, à gauche) et l'image obtenue (en bas, à gauche) à partir du spectre de puissance pour 50 000 images en comptage, 100 photons par image en moyenne et $D/r_0 = 10$. Objet original (en haut, à droite) et l'image obtenue (en bas, à droite) à partir du spectre de puissance pour 1 000 images en mode analogique pour $D/r_0 = 20$. Les objets originaux (en haut) sont une étoile quadruple (différence de magnitude 1, 2 et 3 par rapport à la composante la plus brillante). Les images reconstruites (en bas) ont été tournées pour faciliter la comparaison. Toutes ces images ont été filtrées par la fonction de transfert du télescope.

puissance pour lequel le problème des erreurs de calibration de la fonction de transfert est circonscrit aux basses fréquences, les fluctuations du paramètre de Fried affectent la valeur effective de $\langle S^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ et de $\langle S^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ d'une manière beaucoup plus inextricable. Il reste que si les estimateurs $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ et $\langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ sont intégrés pendant un temps suffisamment long, la turbulence ne joue que sur le module des fonctions de transfert correspondantes, leurs phases étant dues aux éventuelles aberrations permanentes de l'instrument. Ainsi, la calibration par une source de référence non résolue des fonctions de transfert pour la méthode de Knox-Thompson et du bispectre permet au moins d'obtenir des mesures des phases :

$$\varphi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \arg\{O^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\} \tag{5.20}$$

pour la méthode de Knox-Thompson ou

$$\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \arg\{O^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\} \tag{5.21}$$

pour le bispectre.

A partir de ces mesures, il est possible de reconstruire la phase $\varphi(\mathbf{u})$ du spectre de Fourier de l'objet. Comme je l'ai déjà expliqué, pour améliorer la fiabilité de la reconstruction, il faut tenir compte de la qualité de ces mesures.

Les estimateurs débiaisés $\widetilde{K}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ et $\widetilde{B}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ de $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ et $\langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ ont des valeurs complexes que l'on intègre sur les données. En même temps que les parties réelle et imaginaire de ces quantités, j'intègre leurs variances et leur covariance, afin de pouvoir en déduire une estimation de la variance de leur phase. Ainsi, si, pour plus de clarté, je note (pour la méthode de Knox-Thompson par exemple)

$$\begin{aligned}
S_x &= \langle \mathrm{Re}\{I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\}\rangle, && (5.22)\\
S_y &= \langle \mathrm{Im}\{I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\}\rangle, && (5.23)\\
S_{x^2} &= \langle \mathrm{Re}\{I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\}\,\mathrm{Re}\{I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\}\rangle, && (5.24)\\
S_{xy} &= \langle \mathrm{Re}\{I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\}\,\mathrm{Im}\{I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\}\rangle, && (5.25)\\
S_{y^2} &= \langle \mathrm{Im}\{I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\}\,\mathrm{Im}\{I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\}\rangle, && (5.26)
\end{aligned}$$

alors la variance de la phase de $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ peut être approximée par (*cf.* (I.11) en annexe)

$$\sigma^2_{\arg\{\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle\}} \simeq \frac{M-1}{M}\;\frac{S_{x^2}S_y^2 - 2S_{xy}S_xS_y + S_{y^2}S_x^2}{\left[S_x^2+S_y^2\right]^2} \tag{5.27}$$

où M est le nombre d'images courte pose.

Afin de tenir compte des aberrations de phase permanentes, il est préférable d'effectuer une calibration pour obtenir $\arg\{O^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\}$ à partir des mesures du bispectre ou de la méthode de Knox-Thompson. Dans le cas où j'applique une calibration de la phase des fonctions de transfert, je tiens aussi compte du bruit de mesure pour la référence :

$$\begin{aligned}
\varphi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \arg\{\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle\} - \arg\{\langle S^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle\}, && (5.28)\\
\sigma^2_{\varphi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})} &= \sigma^2_{\arg\{\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle\}} + \sigma^2_{\arg\{\langle S^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle\}} && (5.29)
\end{aligned}$$

pour la méthode de Knox-Thompson et :

$$\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \arg\{\langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle\} - \arg\{\langle S^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle\}, \tag{5.30}$$

$$\sigma^2_{\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})} = \sigma^2_{\arg\{\langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle\}} + \sigma^2_{\arg\{\langle S^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle\}} \tag{5.31}$$

pour le bispectre.

5.4 Reconstruction de la phase

Depuis l'apparition de la méthode de Knox-Thompson et des techniques d'analyse bispectrale, les algorithmes permettant d'en extraire la phase du spectre de Fourier de l'objet ont considérablement évolué. Cela est en partie dû à l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs qui autorise la manipulation d'un plus grand nombre de paramètres simultanément.

5.4.1 Reconstruction de proche en proche

Le bispectre et la méthode de Knox-Thompson se prêtent bien à une inversion de proche en proche : elles fournissent une estimation du spectre à la fréquence $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ si le spectre à reconstruire est connu à la fréquence $\mathbf{u}$ pour la méthode de Knox-Thompson ou aux fréquences $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ pour le bispectre. Par itérations successives, il est ainsi possible de reconstruire tout le spectre de l'objet. Cela donne pour la phase du spectre de l'objet l'expression récurrente suivante :

$$\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \begin{cases} \varphi(\mathbf{u}) - \varphi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v}) & \text{pour Knox-Thompson,} \\ \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v}) - \varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v}) & \text{pour le bispectre.} \end{cases} \tag{5.32}$$

Cette approche n'exploite pas la redondance de l'information contenue dans les mesures de $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ ou $\langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ sur la phase du spectre de Fourier de l'objet. Du point de vue de la qualité de la reconstruction, il est avantageux de tenir compte de cette redondance en moyennant les estimations de la phase obtenues par des chemins d'intégration différents. Malheureusement, la reconstruction se heurte alors au problème de la dislocation de phase. En effet, la relation liant les phases $\varphi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ ou $\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ à celle du spectre de Fourier de l'objet n'est vraie que modulo 2π. Par conséquent, les phases estimées par des chemins de reconstruction différents peuvent différer d'un nombre entier de fois 2π. Cela n'a alors plus aucun sens de moyenner les différentes estimations d'une même phase.

Fontanella & Seve (1987) ont proposé un moyen simple de corriger cette dislocation de phase entre deux estimations $\varphi_1(\mathbf{u})$ et $\varphi_2(\mathbf{u})$. Pour cela ils moyennent $\varphi_1(\mathbf{u}) + 2k\pi$ et $\varphi_2(\mathbf{u})$ au lieu de $\varphi_1(\mathbf{u})$ et $\varphi_2(\mathbf{u})$; l'entier relatif k étant choisi de telle sorte que

$$|\varphi_1(\mathbf{u}) + 2k\pi - \varphi_2(\mathbf{u})| < \pi.$$

Ils ont utilisé cette technique pour reconstruire la phase à partir de la méthode de Knox-Thompson, mais leur approche est aussi applicable au bispectre.

Lohmann, Weigel & Wirnitzer se sont affranchis analytiquement de la dislocation de phase en récrivant la relation (5.32) pour les phaseurs (*i.e.* les exponentielles complexes de la phase) :

$$\mathrm{e}^{\jmath\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v})} = \mathrm{e}^{\jmath\varphi(\mathbf{u})}\mathrm{e}^{\jmath\varphi(\mathbf{v})}\mathrm{e}^{-\jmath\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})}. \tag{5.33}$$

Il est immédiat d'obtenir une formulation équivalente pour la méthode de Knox-Thompson.

Afin d'améliorer la qualité de la reconstruction en tenant compte du bruit des mesures, Freeman et al. (1988) ont montré l'avantage d'utiliser la somme pondérée

$$\varphi(\mathbf{u}) = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{\mathbf{u}',\mathbf{v}' \\ \mathbf{u}'+\mathbf{v}'=\mathbf{u}}} \frac{\varphi(\mathbf{u}') + \varphi(\mathbf{v}') - \varphi^{(3)}(\mathbf{u}',\mathbf{v}')}{\sigma^2_{\varphi^{(3)}(\mathbf{u}',\mathbf{v}')}}}{\displaystyle\sum_{\substack{\mathbf{u}',\mathbf{v}' \\ \mathbf{u}'+\mathbf{v}'=\mathbf{u}}} \frac{1}{\sigma^2_{\varphi^{(3)}(\mathbf{u}',\mathbf{v}')}}} \tag{5.34}$$

$\sigma^2_{\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})}$ étant la variance de la phase $\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ du bispectre. Ici encore, il est facile de transposer cette approche dans le cadre de la méthode de Knox-Thompson. Par contre une telle reconstruction ne résoud pas le problème de la dislocation de phase.

Le principal inconvénient des méthodes de reconstruction de proche en proche est que les erreurs d'estimation de la phase s'ajoutent et se propagent au fur et à mesure de la reconstruction. Même lorsque plusieurs chemins de reconstruction sont combinés, le bruit qui affecte la phase reconstruite augmente rapidement avec la fréquence spatiale. Le bispectre et la méthode de Knox-Thompson fournissant chacun une information redondante sur le spectre de Fourier de l'objet, une inversion globale de la phase de $I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ ou de $I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ devrait permettre une reconstruction beaucoup plus robuste.

5.4.2 Reconstruction globale de la phase

Lorsque la phase du bispectre est une variable aléatoire de loi normale, trouver la phase du spectre de Fourier de l'objet $\varphi(\mathbf{u})$ qui minimise

$$\chi^2 = \begin{cases} \sum_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \left[\frac{\varphi(\mathbf{u})-\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v})-\varphi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\sigma_{\varphi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})}} \right]^2 & \text{pour Knox-Thompson,} \\ \sum_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \left[\frac{\varphi(\mathbf{u})+\varphi(\mathbf{v})-\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v})-\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\sigma_{\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})}} \right]^2 & \text{pour le bispectre,} \end{cases} \tag{5.35}$$

revient à maximiser la probabilité d'avoir observé la phase mesurée, $\varphi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ ou $\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})$, étant donné le modèle, c'est-à-dire le spectre de l'objet. Un tel procédé fournit

la phase du spectre de l'objet la plus vraisemblable qui soit compatible avec les données mesurées. Même si la statistique de la phase mesurée n'est pas correctement décrite par une loi normale, la solution qui minimise le χ^2 est en général une estimation robuste du modèle.

Il faut néanmoins noter que le problème ainsi formulé nécessite de "dérouler" la phase mesurée, $\varphi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ ou $\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})$; c'est-à-dire de déterminer les multiples de 2π qu'il faut ajouter à cette phase pour éviter le phénomène de dislocation de phase. Marron et al. (1990) ont proposé un algorithme permettant de dérouler la phase du bispectre d'image monodimensionnelles. Cet algorithme a été étendu au cas bidimensionnel par Takajo & Takahashi (1991). Le déroulement de la phase du bispectre est une opération compliquée et sans doute hasardeuse en présence de bruit. Elle peut se justifier parce que le problème du moindre χ^2 est un problème de moindres carrés généralisé dont la solution est très facile à obtenir par une simple inversion de matrice.

Inversion globale par les gradients conjugués

Pour éviter l'opération de "déroulement" de la phase du bispectre, Haniff (1991) a proposé de rechercher la phase du spectre de Fourier de l'objet qui minimise le χ^2 exprimé comme

$$\chi^2 = \sum_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \left[\frac{\mathrm{Mod}_\pi\{\varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - \varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\}}{\sigma_{\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})}} \right]^2 , \tag{5.36}$$

où $\mathrm{Mod}_\pi\{\}$ est la fonction qui retourne son argument modulo 2π dans l'intervalle $\pm\pi$. Une quantité similaire pourrait être minimisée pour reconstruire la phase à partir de $\varphi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

Le problème ainsi formulé n'est plus un problème de moindres carrés généralisés. Il faut donc pour le résoudre utiliser une méthode générale de minimisation. Etant donné le nombre de paramètres à ajuster, la méthode des gradients conjugués est la plus appropriée pour minimiser χ^2. La méthode de Haniff fournit la meilleure estimation de la phase du spectre de l'objet au sens du χ^2 tout en étant insensible à l'enroulement de la phase du bispectre. Cette méthode s'avère beaucoup plus robuste vis-à-vis du bruit que les méthodes décrites précédemment notamment celles qui nécessitent de dérouler la phase du bispectre. Le principal inconvénient de cette méthode est le temps de calcul nécessaire à la recherche du minimum.

Inversion globale récursive et itérative

Afin d'obtenir une estimation de la phase du spectre de Fourier l'objet de façon toute aussi fiable mais plus rapide que par la méthode de Haniff, j'ai mis au point un algorithme de reconstruction récursif et itératif.

Pour cela, je cherche à minimiser la quantité :

$$Q^{(\mathrm{KT})} = \sum_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \frac{\left| \mathrm{e}^{\jmath[\varphi(\mathbf{u})-\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v})]} - \mathrm{e}^{\jmath\varphi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})} \right|^2}{\sigma^2_{\varphi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})}} \tag{5.37}$$

pour la méthode de Knox-Thompson, ou la quantité :

$$Q^{(3)} = \sum_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \frac{\left| \mathrm{e}^{\jmath[\varphi(\mathbf{u})+\varphi(\mathbf{v})-\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v})]} - \mathrm{e}^{\jmath\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})} \right|^2}{\sigma^2_{\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})}} \tag{5.38}$$

pour le bispectre. Lorsque les écarts du modèle aux mesures sont petits[1], c'est-à-dire lorsque

$$\varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \simeq \varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi) \quad \text{pour Knox-Thompson,}$$

$$\varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \simeq \varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi) \quad \text{pour le bispectre,}$$

alors $Q \simeq \chi^2$ avec $Q \equiv Q^{(\mathrm{KT})}$ ou $Q \equiv Q^{(3)}$. Trouver la phase $\varphi(\mathbf{u})$ qui minimise Q fournit donc une estimation robuste de la phase du spectre de Fourier de l'objet.

Au lieu de minimiser directement Q, par une méthode de type gradients conjugués par exemple, je résous de façon itérative

$$\frac{\partial Q}{\partial \varphi(\mathbf{u})} = 0 \tag{5.39}$$

Pour le bispectre, cela donne

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Q^{(3)}}{\partial \varphi(\mathbf{u})} = 0 \\ \iff \quad &\mathrm{Im}\left\{ \sum_{\mathbf{u}'} \frac{\mathrm{e}^{\jmath\theta(\mathbf{u},\mathbf{u}')}}{\sigma^2_{\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{u}')}} + \sum_{\mathbf{u}'} \frac{\mathrm{e}^{\jmath\theta(\mathbf{u}',\mathbf{u})}}{\sigma^2_{\varphi^{(3)}(\mathbf{u}',\mathbf{u})}} + \sum_{\substack{\mathbf{u}',\mathbf{u}'' \\ \mathbf{u}'+\mathbf{u}''=\mathbf{u}}} \frac{\mathrm{e}^{-\jmath\theta(\mathbf{u}',\mathbf{u}'')}}{\sigma^2_{\varphi^{(3)}(\mathbf{u}',\mathbf{u}'')}} \right\} = 0 \end{aligned} \tag{5.40}$$

où

$$\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - \varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v}).$$

En mettant $\mathrm{e}^{\jmath\varphi(\mathbf{u})}$ en facteur, on obtient

$$\frac{\partial Q}{\partial \varphi(\mathbf{u})} = 0 \iff \mathrm{Im}\left\{ \mathrm{e}^{\jmath\varphi(\mathbf{u})} z(\mathbf{u}) \right\} = 0 \tag{5.41}$$

[1] ce qui est vrai au voisinage de la "bonne" solution et si l'on a pris soin de ne pas prendre en compte les mesures trop bruitées

où

$$\begin{aligned} z(\mathbf{u}) &= \sum_{\mathbf{u}'} \frac{\mathrm{e}^{\jmath\varphi(\mathbf{u}')}\mathrm{e}^{-\jmath\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{u}')}\mathrm{e}^{-\jmath\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{u}')}}{\sigma^2_{\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{u}')}} \\ &\quad + \sum_{\mathbf{u}'} \frac{\mathrm{e}^{\jmath\varphi(\mathbf{u}')}\mathrm{e}^{-\jmath\varphi(\mathbf{u}'+\mathbf{u})}\mathrm{e}^{-\jmath\varphi^{(3)}(\mathbf{u}',\mathbf{u})}}{\sigma^2_{\varphi^{(3)}(\mathbf{u}',\mathbf{u})}} \\ &\quad + \sum_{\substack{\mathbf{u}',\mathbf{u}'' \\ \mathbf{u}'+\mathbf{u}''=\mathbf{u}}} \frac{\mathrm{e}^{-\jmath\varphi(\mathbf{u}')}\mathrm{e}^{-\jmath\varphi(\mathbf{u}'')}\mathrm{e}^{\jmath\varphi^{(3)}(\mathbf{u}',\mathbf{u}'')}}{\sigma^2_{\varphi^{(3)}(\mathbf{u}',\mathbf{u}'')}}. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Une solution évidente à (5.41) est

$$\mathrm{e}^{\jmath\varphi(\mathbf{u})} = \frac{z^*(\mathbf{u})}{|z(\mathbf{u})|}. \tag{5.43}$$

Il suffit de remplacer la phase de Fourier de l'objet par sa nouvelle estimation dans le membre de gauche de l'équation (5.43) et par son estimation précédente dans le membre de droite pour obtenir un algorithme récursif de reconstruction de la phase. En notant φ_k l'estimation de φ à l'itération numéro k, on obtient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\jmath\varphi_{k+1}(\mathbf{u})} &\propto \sum_{\mathbf{u}'} \frac{\mathrm{e}^{-\jmath\varphi_k(\mathbf{u}')}\mathrm{e}^{\jmath\varphi_k(\mathbf{u}+\mathbf{u}')}\mathrm{e}^{\jmath\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{u}')}}{\sigma^2_{\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{u}')}} \\ &\quad + \sum_{\mathbf{u}'} \frac{\mathrm{e}^{-\jmath\varphi_k(\mathbf{u}')}\mathrm{e}^{\jmath\varphi_k(\mathbf{u}'+\mathbf{u})}\mathrm{e}^{\jmath\varphi^{(3)}(\mathbf{u}',\mathbf{u})}}{\sigma^2_{\varphi^{(3)}(\mathbf{u}',\mathbf{u})}} \\ &\quad + \sum_{\substack{\mathbf{u}',\mathbf{u}'' \\ \mathbf{u}'+\mathbf{u}''=\mathbf{u}}} \frac{\mathrm{e}^{\jmath\varphi_k(\mathbf{u}')}\mathrm{e}^{\jmath\varphi_k(\mathbf{u}'')}\mathrm{e}^{-\jmath\varphi^{(3)}(\mathbf{u}',\mathbf{u}'')}}{\sigma^2_{\varphi^{(3)}(\mathbf{u}',\mathbf{u}'')}}. \end{aligned} \tag{5.44}$$

Le facteur de normalisation est calculé de telle sorte que le module de $\mathrm{e}^{\jmath\varphi_{k+1}(\mathbf{u})}$ soit égal à l'unité. La nouvelle estimation du phaseur fournie par cet algorithme est donc simplement égale à la somme pondérée des solutions pour chaque point du bispectre en prenant l'estimation précédente comme phase aux fréquences spatiales autres que celles considérées.

Le même raisonnement s'applique à la méthode de Knox-Thompson ; dans ce cas la nouvelle estimation de la phase $\varphi_{k+1}(\mathbf{u})$ est fournie par :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\jmath\varphi_{k+1}(\mathbf{u})} &\propto \sum_{\mathbf{u}'} \frac{\mathrm{e}^{\jmath\varphi_k(\mathbf{u}+\mathbf{u}')}\mathrm{e}^{\jmath\varphi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{u}')}}{\sigma^2_{\varphi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{u}')}} \\ &\quad + \sum_{\substack{\mathbf{u}',\mathbf{u}'' \\ \mathbf{u}'+\mathbf{u}''=\mathbf{u}}} \frac{\mathrm{e}^{\jmath\varphi_k(\mathbf{u}')}\mathrm{e}^{-\jmath\varphi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u}',\mathbf{u}-\mathbf{u}')}}{\sigma^2_{\varphi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u}',\mathbf{u}'')}}. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Afin de reformuler cette approche d'une façon qui tienne compte de l'état de la connaissance de la phase de l'objet, j'introduis une fonction égale à l'estimation du phaseur du spectre de l'objet lorsque cette estimation est disponible et égale à zéro sinon. A l'itération numéro k, cette fonction rend compte de l'estimation φ_k de la phase φ du spectre de l'objet :

$$\xi_k(\mathbf{u}) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\jmath\varphi_k(\mathbf{u})} & \text{si } \varphi_k(\mathbf{u}) \text{ est connu} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.46}$$

et je définis le phaseur pondéré de la phase mesurée, $\varphi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ ou $\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})$, comme

$$\xi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{\mathrm{e}^{\jmath\varphi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})}}{\sigma^2_{\varphi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})}} \tag{5.47}$$

pour la méthode de Knox-Thompson, et comme

$$\xi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{\mathrm{e}^{\jmath\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})}}{\sigma^2_{\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})}}. \tag{5.48}$$

pour le bispectre. Une nouvelle estimation de la fonction $\xi_k(\mathbf{u})$ est alors obtenue par :

$$\xi_{k+1}(\mathbf{u}) \propto \sum_{\mathbf{u}'} \xi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{u}')\xi_k(\mathbf{u}+\mathbf{u}') + \sum_{\mathbf{u}'} \xi^{(\mathrm{KT})*}(\mathbf{u}-\mathbf{u}')\xi_k(\mathbf{u}') \tag{5.49}$$

pour la méthode de Knox-Thompson ou par :

$$\begin{aligned} \xi_{k+1}(\mathbf{u}) \propto & \sum_{\mathbf{u}'} \xi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{u}')\xi_k^*(\mathbf{u}')\xi_k(\mathbf{u}+\mathbf{u}') + \sum_{u'} \xi^{(3)}(\mathbf{u}',\mathbf{u})\xi_k^*(\mathbf{u}')\xi_k(\mathbf{u}'+\mathbf{u}) \\ & + \sum_{\substack{\mathbf{u}',\mathbf{u}'' \\ \mathbf{u}'+\mathbf{u}''=\mathbf{u}}} \xi^{(3)*}(\mathbf{u}',\mathbf{u}'')\xi_k(\mathbf{u}')\xi_k(\mathbf{u}'') \end{aligned} \tag{5.50}$$

pour le bispectre. Le facteur de normalisation est calculé de telle sorte que le module de $\xi_{k+1}(\mathbf{u})$ soit égal à l'unité. Bien entendu, dans tout ce qui précède, les sommes discrètes sont à prendre pour les points qui sont définis.

Il suffit d'initialiser l'algorithme par les phaseurs à la fréquence $(0,0)$, dans le cas de la méthode de Knox-Thompson, et aux fréquences spatiales $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$, dans le cas du bispectre, pour que le phaseur du spectre de l'objet soit reconstruit de proche en proche. De plus, à chaque itération **tous** les phaseurs sont estimés de façon à être à la fois compatibles avec les mesures et avec les autres phaseurs. Ainsi les estimations sont affinées d'une itération à l'autre.

Afin de valider ma méthode, j'ai calculé le bispectre de 100 interférogrammes simulés d'une étoile quadruple pour des conditions de turbulence correspondant à un rapport $D/r_0 \simeq 10$. La figure 5.2 montre la reconstruction progressive de la phase du spectre

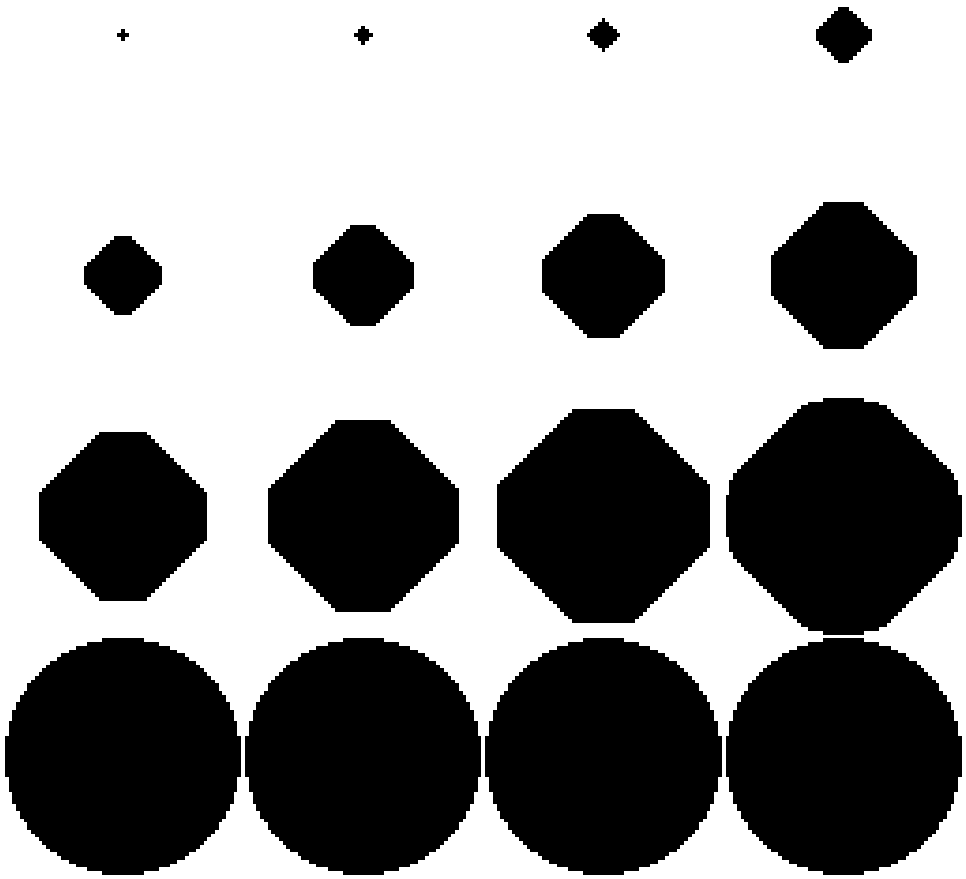


FIG. 5.2 – Evolution du support de la phase estimée au fur et à mesure des itérations.

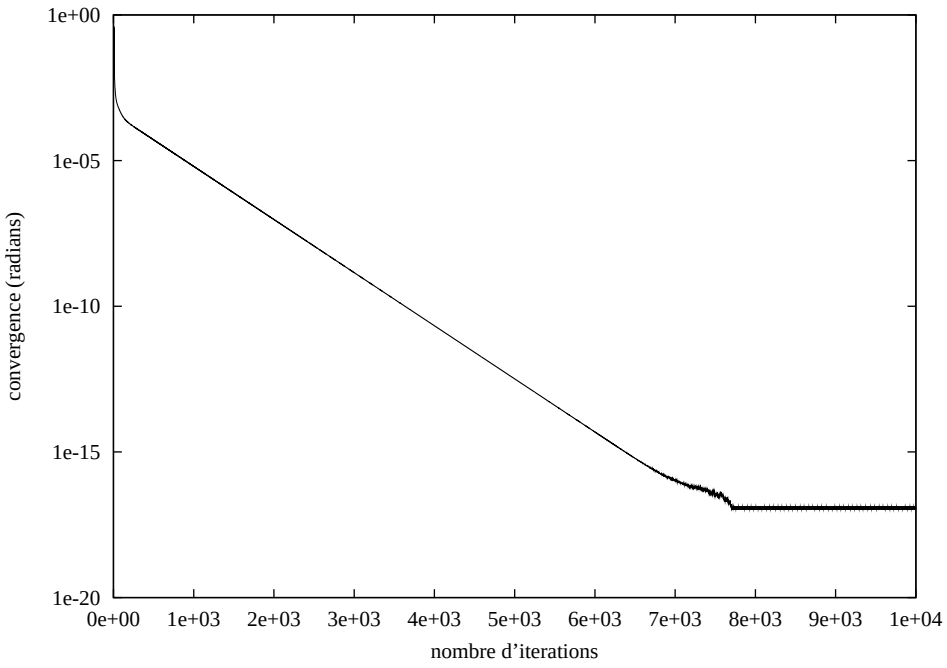


FIG. 5.3 – Convergence de l'algorithme de reconstruction de la phase.

de l'objet échantillonné sur 64×64 points ; en 13 itérations, l'algorithme fournit une estimation de la phase jusqu'à la fréquence de coupure. La courbe de la figure 5.3 montre la convergence de l'algorithme ; le palier à $\simeq 2 \times 10^{-16}$ radians d'écart standard est atteint en $\simeq 8 \times 10^3$ itérations et correspond aux erreurs d'arrondi du calculateur. Cette précision est largement meilleure que ne l'autorise en général la qualité des mesures effectuées. En pratique, 100 à 200 itérations sont largement suffisantes pour obtenir une estimation valable de la phase.

Méthode de Matson

Dans le cas du bispectre, Matson (1991) a obtenu une méthode itérative très similaire en substituant les phaseurs aux phases dans un algorithme de résolution itératif du problème des moindres carrés pondérés pour les phases. Hormis la justification de l'algorithme, il y a une différence notable dans la façon de tenir compte des points du bispectre qui font intervenir deux fois la même fréquence spatiale. En effet,

$$I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{u}) = I(\mathbf{u})I(\mathbf{u})I^*(2\mathbf{u})$$

peut s'inverser, si on connait $I(2\mathbf{u})$, en

$$I(\mathbf{u}) = \pm\sqrt{\frac{I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{u})}{I^*(2\mathbf{u})}}.$$

Ce qui donne pour les phaseurs :

$$\mathrm{e}^{\jmath\varphi(\mathbf{u})} = \pm\mathrm{e}^{\jmath[\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{u})+\varphi(2\mathbf{u})]/2}.$$

Sans connaissance a priori de $I(\mathbf{u})$ il est impossible de déterminer laquelle des deux solutions est la bonne. Matson, en choisissant arbitrairement et systématiquement l'une des deux expressions, biaise la reconstruction. Cela peut être critique si le rapport signal à bruit du bispectre mesuré est médiocre ou si le nombre de sous-plans utilisés est faible. Dans mon approche, en ne factorisant qu'une fois $\mathrm{e}^{\jmath\varphi(\mathbf{u})}$ dans l'expression de $\partial Q/\partial\varphi(\mathbf{u}) = 0$ j'utilise (schématiquement) la phase $\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{u})$ comme

$$\mathrm{e}^{\jmath\varphi_{k+1}(\mathbf{u})} = \mathrm{e}^{\jmath\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{u})}\mathrm{e}^{-\jmath\varphi_k(\mathbf{u})}\mathrm{e}^{\jmath\varphi_k(2\mathbf{u})}$$

évitant ainsi cet écueil.

Par ailleurs, dans l'approche de Matson (1991), la phase n'est pas reconstruite progressivement. Une phase uniforme peut par exemple être choisie pour initialiser son algorithme. Cela est aussi possible dans la méthode que je propose. Dans ce cas, la convergence est inchangée mais la phase reconstruite peut être très différente. Dans mes simulations, la différence s'expliquait toujours par une translation dans le plan image — à laquelle le bispectre est insensible.

5.5 Reconstruction d'image à partir des mesures de phase

Jusqu'à présent, j'ai montré comment reconstruire de façon robuste le module, $|O(\mathbf{u})|$, du spectre de Fourier de la distribution d'intensité de l'objet à partir des mesures de l'interférométrie des tavelures traditionnelle, d'une part, et, d'autre part, la phase, $\varphi(\mathbf{u})$, de ce spectre à partir des mesures de la méthode de Knox-Thompson ou du bispectre. Afin d'obtenir la distribution d'intensité de l'objet, la première méthode qui vient à l'esprit consiste à recombiner ces estimations pour obtenir le spectre de l'objet : $O(\mathbf{u}) = |O(\mathbf{u})|\mathrm{e}^{\jmath\varphi(\mathbf{u})}$. Une transformation de Fourier inverse suffit alors pour obtenir $o(\mathbf{x})$. C'est une possibilité qui ne tient pas compte des propriétés de $o(\mathbf{x})$ dont nous avons vu qu'elles sont assez contraignantes pour permettre d'améliorer la qualité de la reconstruction.

5.5.1 Reconstruction à partir de la phase du spectre de l'objet

Lorsque l'on tient compte de la positivité de la distribution d'intensité de l'objet, il est possible de reconstruire cette fonction uniquement d'après le module de son spectre de Fourier (*cf.* section 5.2). On peut imaginer une démarche similaire consistant à effectuer cette reconstruction à partir de la phase du spectre de Fourier.

Afin de démontrer cette possibilité, je décris ici une méthode très élémentaire permettant de reconstruire $o(\mathbf{x})$ en ne connaissant que la phase de son spectre de Fourier. Cette méthode est à rapprocher des méthodes de type Gerchberg-Saxton (Gerchberg & Saxton, 1972). Elle consiste à imposer la positivité de $o(\mathbf{x})$ dans l'espace image et à imposer à la

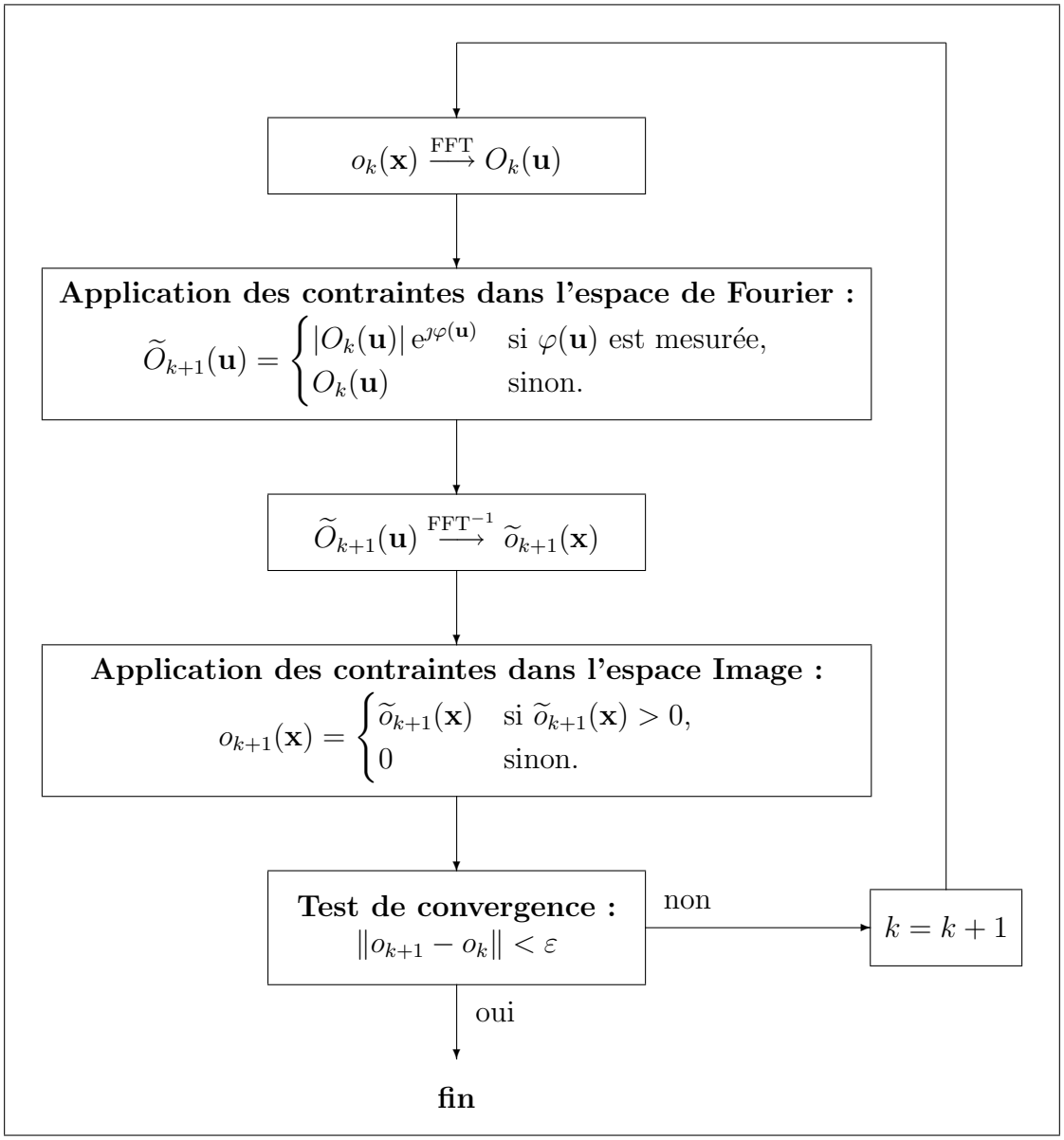


FIG. 5.4 – Reconstruction de l'image d'un objet à partir de sa phase de Fourier.

phase de $O(\mathbf{u})$ à être $\varphi(\mathbf{u})$ dans l'espace de Fourier. Le principe de l'algorithme est décrit par l'organigramme de la figure 5.4.

Afin de stabiliser l'algorithme (et surtout pour pouvoir raisonnablement comparer la nouvelle estimation, $o_{k+1}(\mathbf{x})$, à l'estimation précédente, $o_k(\mathbf{x})$) il est utile d'appliquer une normalisation. Par exemple, on peut choisir de normaliser les fonctions $o_k(\mathbf{x})$ de telle sorte que leur énergie soit égale à l'unité ; dans cas l'application des contraintes dans l'espace image devient

$$o_{k+1}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{\widetilde{o}_{k+1}(\mathbf{x})}{\displaystyle\sum_{\substack{x' \\ \widetilde{o}_{k+1}(\mathbf{x}')>0}} \widetilde{o}_{k+1}(\mathbf{x}')} & \text{si } \widetilde{o}_{k+1}(\mathbf{x}) > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La figure 5.5 montre que cette méthode rudimentaire peut donner un résultat acceptable lorsque la qualité de la phase reconstruite est relativement bonne. Néanmoins, la sensibilité en terme de rapport entre la composante reconstruite la moins brillante et la composante reconstruite la plus brillante ne peut guère excéder 0.15, soit une différence de magnitude de l'ordre de 2.

5.5.2 Reconstruction directe à partir des mesures de phase

Glindemann & Dainty (1993) ont proposé une méthode de reconstruction d'image à partir de la phase du bispectre qui est beaucoup plus satisfaisante que celle, assez rudimentaire, que je viens de décrire. Ils recherchent la distribution d'intensité de l'objet en lui imposant d'être positive et en imposant à la phase de son bispectre d'être le plus possible en accord avec la phase du bispectre observé. Cette solution est obtenue en minimisant la quantité

$$\varepsilon_{\text{phase}} = \sum_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \left[\frac{\text{Mod}_\pi\{\varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - \varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\}}{\sigma_{\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})}} \right]^2 + \alpha \sum_{\substack{\mathbf{x} \\ o(\mathbf{x})<0}} o(\mathbf{x})^2 \tag{5.51}$$

Le premier terme de $\varepsilon_{\text{phase}}$ assure l'accord de la phase de Fourier de $o(\mathbf{x})$ avec la phase du bispectre mesurée, le second terme permet d'imposer la contrainte de positivité. Le paramètre α ($\alpha > 0$) permet de renforcer ou de relacher la contrainte de positivité. La fonction $o(\mathbf{x})$ qui minimise ε est recherchée par un algorithme de type gradients conjugués.

J'ai modifié la méthode de Glindemann & Dainty (1993) de telle sorte que la positivité soit imposée de façon stricte par un changement de paramètres et en récrivant ε pour qu'une

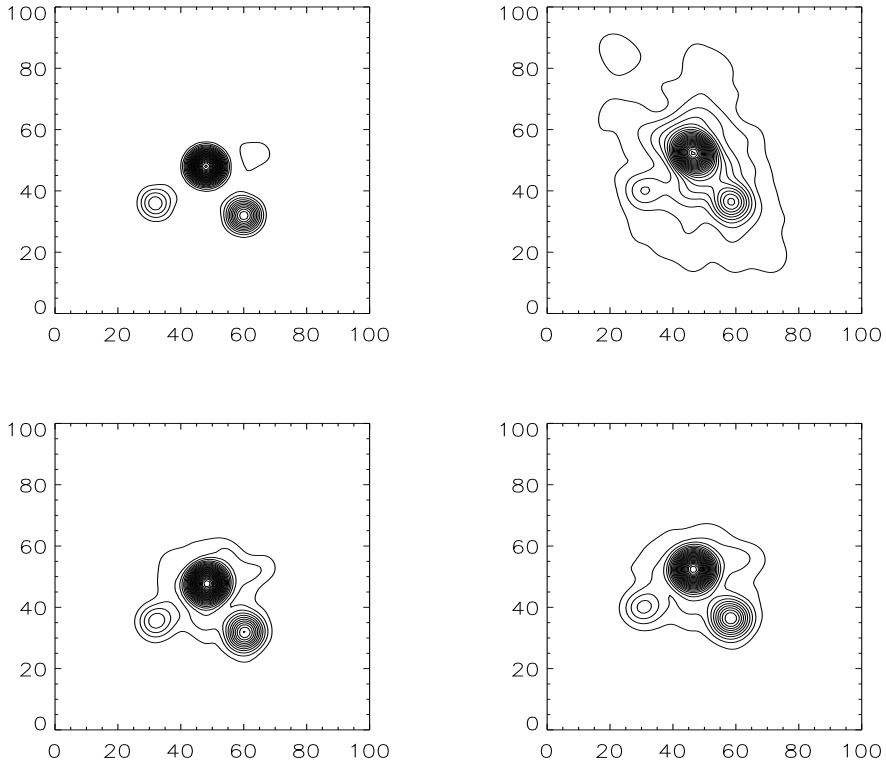


FIG. 5.5 – Reconstruction d'image à partir des mesures de phase du bispectre et sans étoile de référence. De haut en bas et de droite à gauche : (a) objet original (constitué de 4 étoiles avec des différences de magnitude de 1, 2 et 3 par rapport à la composante la plus brillante) ; (b) reconstruction par la méthode de type Gerchberg-Saxton ; (c) reconstruction par la méthode de Glindemann & Dainty ; (d) idem mais avec contrainte de positivité stricte. Les paramètres de la simulation sont : $D/r_0 \simeq 10$, 100 images courtes poses, pas de bruit de photons.

approche similaire soit applicable dans le cadre de la méthode de Knox-Thompson :

$$\varepsilon_{\text{phase}} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \frac{\left|\mathrm{e}^{\jmath\varphi(\mathbf{u})}\mathrm{e}^{\jmath\varphi(\mathbf{v})}\mathrm{e}^{-\jmath\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v})} - \mathrm{e}^{\jmath\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})}\right|^2}{\sigma^2_{\varphi^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})}} & \text{pour le bispectre} \\ \displaystyle\sum_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \frac{\left|\mathrm{e}^{\jmath\varphi(\mathbf{u})}\mathrm{e}^{-\jmath\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v})} - \mathrm{e}^{\jmath\varphi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})}\right|^2}{\sigma^2_{\varphi^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})}} & \text{pour Knox-Thompson} \end{cases} \tag{5.52}$$

Je donne la dépendance du gradient de $\varepsilon_{\text{phase}}$ avec le spectre de la distribution d'intensité dans la section suivante. L'emploi des phaseurs est une question de choix, cela influe peu sur la valeur de l'erreur (*cf.* section 5.4).

5.5.3 Discussion

La reconstruction de la distribution d'intensité de l'objet est possible à partir des mesures de la phase de son spectre de Fourier. Néanmoins, il faut noter que le problème tel qu'il est posé présente une dégénérescence importante : la distribution d'intensité de l'objet convoluée par n'importe quelle fonction symétrique (c'est-à-dire dont la phase du spectre de Fourier est nulle) et positive constitue une solution tout aussi acceptable du point de vue de l'algorithme.

Pour des systèmes asymétriques constitués de plusieurs étoiles non résolues, Glindemann & Dainty (1993) ont observé que cette dégénérescence n'a pas d'incidence majeure sur la qualité de l'image reconstruite. Par contre, à partir du moment où l'objet observé est relativement symétrique, la phase de son spectre de Fourier ne fournit plus assez d'information pour permettre une reconstruction.

5.6 Reconstruction d'image à partir des mesures de module et de phase

A partir du module du spectre de Fourier, il est, au mieux, possible de reconstruire une image avec une incertitude d'orientation de $\pm 180°$. A partir des seules informations de phase, il est possible de reconstruire une image qui risque d'être la solution recherchée filtrée par une fonction symétrique positive quelconque.

Il parait évident que pour lever ces dégénérescences il faut exploiter en même temps les informations de module et de phase. Pour cela je minimise la quantité

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{phase}} + \varepsilon_{\text{module}} \tag{5.53}$$

où

- $\varepsilon_{\text{phase}}$ sanctionne l'erreur de modélisation des mesures de phase, son expression est donnée par l'équation (5.52) ;
- $\varepsilon_{\text{module}}$ sanctionne l'erreur de modélisation des mesures de module. L'expression de $\varepsilon_{\text{module}}$ est donnée, par exemple, par l'équation (5.17) et peut être modifiée en suivant la discussion de la section 5.1.3.

Si $f(\mathbf{x})$ est la fonction à reconstruire [2], alors, pour minimiser ε par la méthode des gradients conjugués, il faut combiner les gradients des fonctions d'erreur par rapport au spectre de puissance (ou au module) et à la phase du spectre de Fourier $F(\mathbf{u})$ de $f(\mathbf{x})$. L'expression de la transformée de Fourier discrète du gradient $\partial\varepsilon/\partial f(\mathbf{x})$ est obtenue par (*cf.* annexe J.4) :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial f(\mathbf{x})} \quad \xrightarrow{\text{TFD}} \quad N_{\text{pix}} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \text{Re}\, F(\mathbf{u})} + \jmath \frac{\partial \varepsilon}{\partial \text{Im}\, F(\mathbf{u})} \right], \tag{5.54}$$

[2] ou une des fonctions à reconstruire si la distribution d'intensité de l'objet et une fonction d'étalement de point sont recherchées

où N_{pix} est le nombre de points d'échantillonnage. Afin de faire apparaître le module et la phase de $F(\mathbf{u})$, le deuxième membre de cette relation peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathrm{Re}\,F(\mathbf{u})}+\jmath\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathrm{Im}\,F(\mathbf{u})} &= \frac{\partial\varepsilon_{\text{module}}}{\partial|F(\mathbf{u})|^2}\left[\frac{\partial|F(\mathbf{u})|^2}{\partial\mathrm{Re}\,F(\mathbf{u})}+\jmath\frac{\partial|F(\mathbf{u})|^2}{\partial\mathrm{Im}\,F(\mathbf{u})}\right]\\ &\quad+\frac{\partial\varepsilon_{\text{phase}}}{\partial\arg F(\mathbf{u})}\left[\frac{\partial\arg F(\mathbf{u})}{\partial\mathrm{Re}\,F(\mathbf{u})}+\jmath\frac{\partial\arg F(\mathbf{u})}{\partial\mathrm{Im}\,F(\mathbf{u})}\right].\end{aligned} \tag{5.55}$$

Le gradient du module au carré par rapport aux parties réelle et imaginaire s'obtient par :

$$|F(\mathbf{u})|^2=\mathrm{Re}\{F(\mathbf{u})\}^2+\mathrm{Im}\{F(\mathbf{u})\}^2 \implies \begin{cases}\dfrac{\partial|F(\mathbf{u})|^2}{\partial\mathrm{Re}\,F(\mathbf{u})} &= 2\,\mathrm{Re}\,F(\mathbf{u})\\[2ex] \dfrac{\partial|F(\mathbf{u})|^2}{\partial\mathrm{Im}\,F(\mathbf{u})} &= 2\,\mathrm{Im}\,F(\mathbf{u})\end{cases} \tag{5.56}$$

tandis que le gradient de la phase par rapport aux parties réelle et imaginaire s'obtient par :

$$\arg F(\mathbf{u})=\tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}\,F(\mathbf{u})}{\mathrm{Re}\,F(\mathbf{u})} \implies \begin{cases}\dfrac{\partial\arg F(\mathbf{u})}{\partial\mathrm{Re}\,F(\mathbf{u})} &= -\dfrac{\mathrm{Im}\,F(\mathbf{u})}{|F(\mathbf{u})|^2}\\[2ex] \dfrac{\partial\arg F(\mathbf{u})}{\partial\mathrm{Im}\,F(\mathbf{u})} &= \dfrac{\mathrm{Re}\,F(\mathbf{u})}{|F(\mathbf{u})|^2}\end{cases} \tag{5.57}$$

Finalement, en combinant ces gradients, il vient :

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathrm{Re}\,F(\mathbf{u})}+\jmath\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathrm{Im}\,F(\mathbf{u})}=2F(\mathbf{u})\frac{\partial\varepsilon_{\text{module}}}{\partial|F(\mathbf{u})|^2}+\jmath\frac{F(\mathbf{u})}{|F(\mathbf{u})|^2}\frac{\partial\varepsilon_{\text{phase}}}{\partial\arg F(\mathbf{u})}, \tag{5.58}$$

qui permet d'obtenir le gradient $\partial\varepsilon/\partial\mathrm{Re}\,f(\mathbf{x})$ par une simple transformée de Fourier discrète inverse.

A la fin de ce chapitre, je montre des images reconstruites en combinant de cette façon les informations de module et de phase.

5.7 Modélisation de la structure spatiale de l'objet

De mon point de vue, l'obtention d'une image à haute résolution angulaire est surtout utile parce qu'elle permet l'**identification** de la structure spatiale de l'objet observé. Pour éviter que les effets du bruit ne dominent la reconstruction et à cause de la fréquence de coupure instrumentale, j'ai montré que cette image doit être filtrée ce qui revient en général à atténuer les hautes fréquences. Si la méthode de restauration d'image est maîtrisée, la valeur de la fréquence de coupure effective est connue. Lorsque le rapport signal à bruit

est trop défavorable et/ou les lacunes trop importantes, la reconstruction d'une image peut être hasardeuse et difficile à maîtriser autrement qu'en dégradant considérablement la résolution. Pour ces raisons (*i.e.* reconstruction d'une image à haute résolution angulaire impossible ou, de toute façon, reconstruction d'une image nécessairement filtrée), les **mesures quantitatives** (paramètres astrométriques ou photométriques) ne doivent pas être effectuées sur l'image reconstruite mais plutôt sur son spectre de Fourier non filtré ou, mieux, directement sur les quantités mesurées en interférométrie des tavelures. Ainsi, je préconise d'ajuster les paramètres du modèle de l'objet étudié de la même manière que je reconstruis une image en ajustant les intensités de ses pixels. Le formalisme est identique pour ces deux démarches puisque la reconstruction d'image telle que je l'ai décrite s'apparente à un ajustement de modèle dont les paramètres sont les intensités des pixels.

Etant donné le nombre de paramètres décrivant une image ($> 10^4$ pour une image de 128×128 pixels), la reconstruction d'image est une gageure difficile à tenir comparée à l'ajustement d'un modèle plus synthétique avec beaucoup moins de paramètres. Aussi l'échec d'une opération de reconstruction d'image ne signifie pas pour autant que la qualité des données est insuffisante pour en permettre l'exploitation. Néanmoins, il se pose alors le problème de déterminer le modèle adéquat sans image pour identifier l'objet observé ! Pour des objets ayant une structure simple, une binaire par exemple, l'interprétation du spectre de puissance permet souvent d'identifier la nature de l'objet même si le rapport signal à bruit est insuffisant pour la reconstruction d'une image. C'est en partie pour cela que j'ai écrit un programme d'ajustement de modèle général qui permet de représenter l'objet observé par un nombre arbitraire de composantes de structure simple (*e.g.* diracs, laplaciennes, ...) ; les paramètres de ce modèle sont obtenus en minimisant la fonction d'erreur $\varepsilon_{\text{module}}$ (Devaney et al., 1994).

5.8 Résultats

5.8.1 Simulations

Afin de tester la validité de mes algorithmes pour le traitement des données en comptage de photons, j'ai simulé des données en tenant compte des effets du *trou* du comptage. Les effets de la turbulence sont simulés pour un rapport $D/r_0 = 20$ ce qui correspond à des conditions excellentes pour un télescope de classe 4 m et à des conditions passables pour un télescope de classe 2 m. J'ai considéré deux cas de figure : un cas "fort flux" et un cas "faible flux" avec respectivement 500 et 100 photons par image courte pose en moyenne. Ces flux correspondent à des magnitudes visibles de l'ordre de 14 dans le cas fort flux et 16 dans le cas faible flux en supposant un rendement total de l'optique et du détecteur de 20%. Dans le cas où deux (trois) images simultanées sont utilisées, il faut que la source considérée soit deux (trois) fois plus brillante. Les observations sont constituées de 1 000 et 40 000 images (ou paires, ou triplet d'images) respectivement dans le cas fort et faible flux. Afin de tester la sensibilité des algorithmes en termes de dynamique, l'objet observé (*cf.* figure 5.6) est un système quadruple avec des différences de magnitude de 1, 2 et 3 par

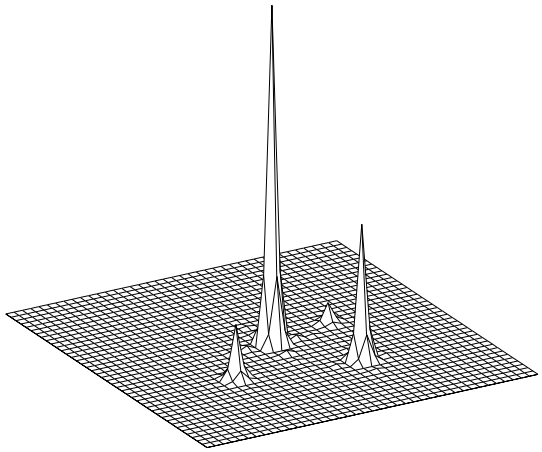


FIG. 5.6 – Objet original dont je me suis servi pour mes simulations en comptage de photons. Les différences de magnitude sont 1, 2 et 3 par rapport à la composante la plus brillante.

rapport à la composante la plus brillante. J'ai simulé le défaut du comptage de photon en supprimant les occurrences de plusieurs photo-événements sur le même pixel ou sur des pixels voisins dans la même image. Cet effet fait chuter de le nombre de photons détectés par image de 500 à 296 et de 100 à 83 ; le *trou* dans l'autocorrelation fait 3×3 pixels.

Toutes les reconstructions que je présente dans cette section sont obtenues en minimisant $\varepsilon = \varepsilon_{\text{module}} + \varepsilon_{\text{phase}}$ où $\varepsilon_{\text{module}}$ et $\varepsilon_{\text{phase}}$ représentent respectivement les erreurs de modélisation par rapport aux mesures du spectre de puissance et par rapport à la phase du bispectre mesuré.

La figure 5.7 montre qu'à cause du défaut du détecteur, le bispectre calculé de façon classique ne permet de reconstruire qu'une image qui n'a pas grand chose à voir avec l'objet observé. Il faut tout de même noter que dans mes simulations le *trou* fait 3×3 pixels et que les images ne sont pas sur-échantillonnées. En sur-échantillonnant fortement les images, on peut espérer améliorer un peu (pas beaucoup !) les choses.

Dans le chapitre 3, je propose de s'affranchir des effets du *trou* du comptage de photons en intégrant le spectre de puissance, la transformée de Knox-Thompson et le bispectre calculés à partir des intercorrélations d'images simultanées. J'ai montré que cette approche permet effectivement de mesurer le module et la phase du spectre de Fourier de l'objet, éventuellement, jusqu'à la limite de diffraction instrumentale si la quantité d'observations est suffisante. J'ai testé la possibilité de reconstruire une image en combinant les mesures de module et de phase obtenues de cette façon. Ainsi la figure 5.8 valide l'approche consistant à intégrer le bispectre en combinant une série de **trois** images courte pose simultanées. La figure 5.9 montre que la reconstruction d'image est effectivement

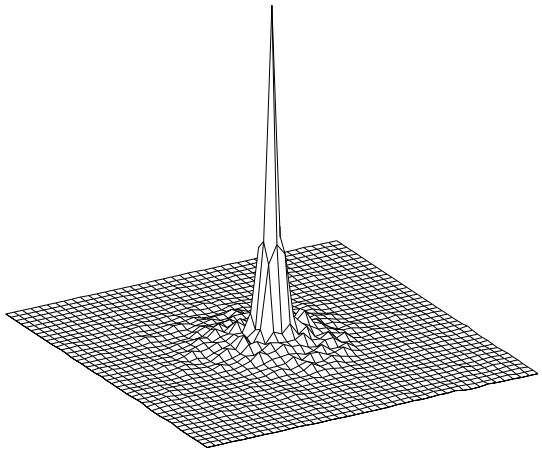


FIG. 5.7 – Objet reconstruit à partir du bispectre classique en présence du défaut du comptage de photons.

possible en combinant une série de seulement **deux** images simultanées. Le fait que, dans la figure 5.9, la composante la plus faible ne soit pas reconstruite dans le cas "faible flux" alors qu'elle l'est dans le cas "fort flux" démontre qu'en intégrant le "bispectre à deux images" les limites en sensibilité sont bien fixées par la quantité d'information utilisée. En augmentant le nombre d'images (ou pour un flux incident plus fort), il reste possible d'améliorer la qualité de l'image obtenue. *Cela n'est pas possible si le défaut des détecteurs à comptage de photons n'est pas corrigé.*

5.8.2 Capella

Capella (αAurigae) est une étoile double brillante ($m_V \simeq 0.08$, séparation $\simeq 0''.050$) dont les éphémérides sont bien connues. C'est une binaire de prédilection pour tester les méthodes de l'interférométrie des tavelures aussi bien à fort flux qu'en comptage de photons (avec une densité !).

Reconstruction à partir de données CCD

Lorsque j'ai effectué mon service national comme scientifique du contingent à la division d'optique physique de M. Séchaud à l'ONERA (Châtillon), une partie de mon travail a consisté à comparer les résultats que peuvent fournir l'interférométrie des tavelures à ceux de de la déconvolution par analyse de surface d'onde (Primot et al., 1990). Pour cela, j'ai notamment traité des données de Capella. Pour les besoins de la cause, je ne me suis servi d'aucune calibration de la fonction de transfert qui aurait pu être obtenue à partir

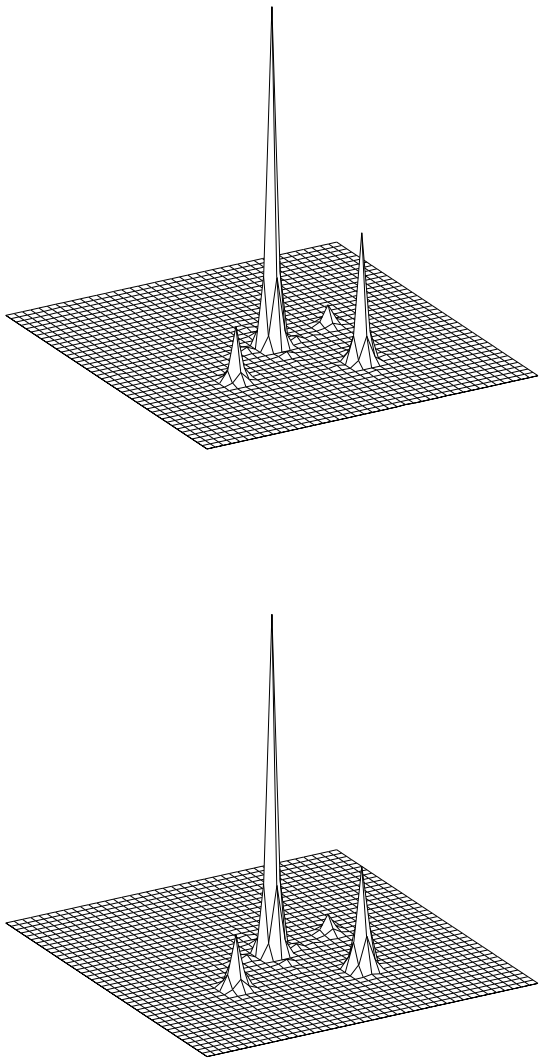


FIG. 5.8 – Reconstruction d'image obtenue à partir du bispectre à **trois** images. Sans le *trou* du comptage de photons (en haut) et avec le *trou* du comptage de photons (en bas) ; 11 sous-plans du bispectre ont été intégrés sur $3 \times 1\,000$ images avec 500 (en haut) et 296 (en bas) photons par image en moyenne, les conditions de turbulence sont telles que $D/r_0 = 20$.

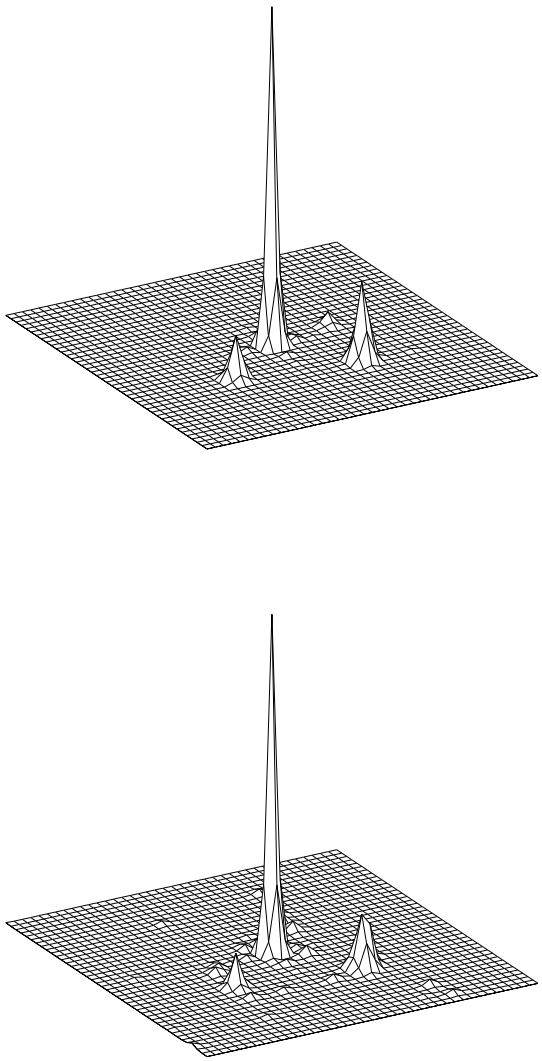


FIG. 5.9 – Reconstruction d'image obtenue à partir du bispectre à **deux** images. Les effets d'un *trou* du comptage de photons de 3×3 pixels sont simulés, 11 sous-plans du bispectre ont été intégrés sur $2 \times 1\,000$ images avec 296 photons par image en moyenne (en haut) et $2 \times 40\,000$ images avec 83 photons par image en moyenne (en bas) ; les conditions de turbulence sont telles que $D/r_0 = 20$.

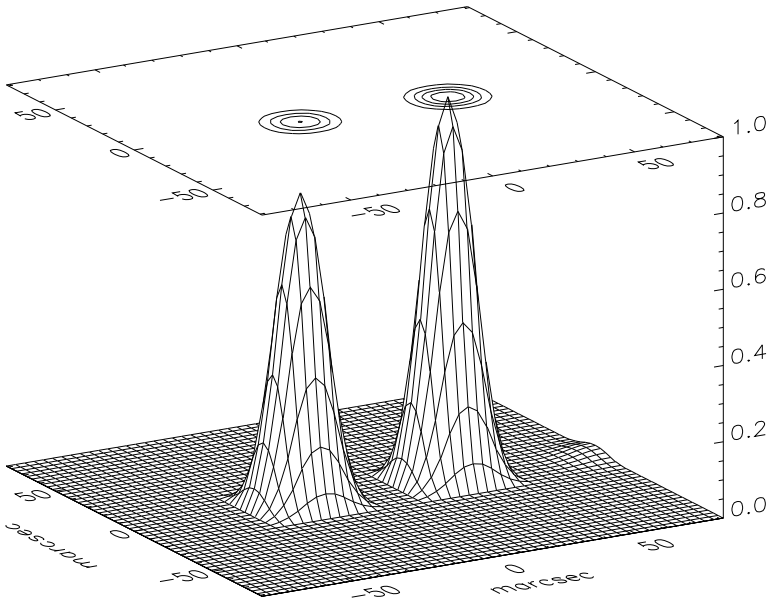


FIG. 5.10 – Reconstruction d'une image de Capella à partir du bispectre et sans étoile de référence (Thiébaut, 1994b, données ONERA).

des mesures de l'analyseur de surface d'onde. J'ai intégré 19 sous-plans du bispectre ainsi que le spectre de puissance moyen de 200 interférogrammes de Capella observée Michau et al. (1991) et Marais et al. (1991) au télescope de 4.2 m William Herschel à la Palma (Canaries) pendant la nuit du 8 novembre 1990. Uniquement à partir de ce bispectre et en appliquant la méthode de reconstruction que j'ai proposée (Thiébaut, 1994b), j'ai reconstruit l'image de Capella de la figure 5.10.

La séparation et la différence de magnitude ($\simeq 0.4$) dans l'image reconstruite de Capella sont en accord avec les mesures effectuées, à la longueur d'onde des observations (Hα), par Michau et al. (1991) et Marais et al. (1991). Alors que les mesures de l'analyseur de surface d'onde n'ont pas été utilisées l'image reconstruite est au moins aussi bonne que celle obtenue par la méthode de déconvolution par analyse de surface d'onde. Cela est vraisemblablement dû à la robustesse de mon approche : d'une part, parce que je tiens compte de la qualité des mesures pour traiter correctement les effets du bruit et, d'autre part, par ce que j'ai tenu compte d'informations *a priori* sur la distribution d'intensité de l'objet (*i.e.* la positivité). Cette comparaison met en évidence le gain qu'il y aurait à incorporer de telles contraintes dans la méthode de déconvolution par analyse de surface d'onde et plus généralement dans les méthodes holographiques en interférométrie des tavelures (*cf.* section 4.2.1).

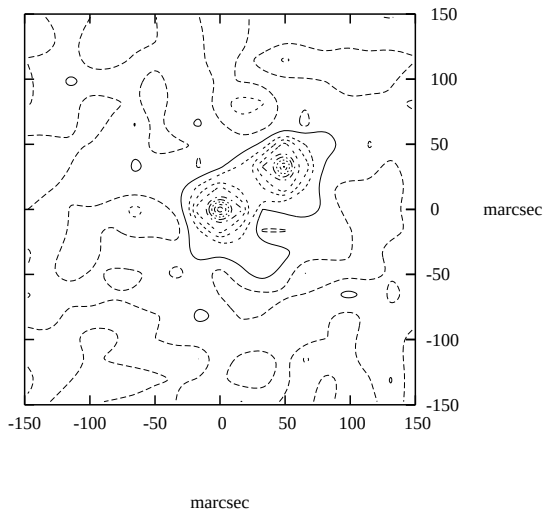


FIG. 5.11 – Image de Capella à partir de données en comptage de photons. Cette image a été reconstruite à partir de la phase du bispectre, sans étoile de référence et avec contrainte de positivité relachée.

Reconstruction à partir de données en comptage

Je dispose aussi de données de Capella observée avec la caméra CP40 en comptage de photons au télescope de 3.60 m du CFH, le 12 novembre 1991. Pendant cette mission, seuls 2 canaux sur 4 de la caméra étaient opérationnels ; les données sont constituées de 6108 trames de 20 ms (soit 2 minutes d'observation !) avec 331 et 194 photons en moyenne par trame pour les deux canaux. Grâce à la correction, j'ai ajusté le grandissement à 16.4 marcsec par pixel corrigé. La figure 5.11 montre l'image que j'ai reconstruite à partir du bispectre intégré sur ces données ; j'ai utilisé 10 sous-plans du bispectre pour cette reconstruction et, n'ayant pas de référence pour calibrer les effets de la turbulence, j'ai recontruit cette image de telle sorte que la phase de son bispectre soit en accord avec la phase du bispectre mesuré (Glindemann & Dainty, 1993). *La qualité de la reconstruction montre que le fait d'intégrer le bispectre à partir d'une séries de paires d'images simultanées comme je l'ai proposé pour corriger les effets du* trou *en comptage de photons permet effectivement de reconstruire une image à la limite de diffraction* : à la date des observations la séparation de Capella est de 53.5 marcsec pour $\lambda/D = 31.5$ marcsec ($\lambda = 550$ nm et PA $= 27.6 \pm 180$ deg). Il faut noter que les coefficients de correction de la distorsion sont, dans ce cas, ceux que j'ai calculés pour une mission précédente (*i.e.* CFHT, novembre 1989) ; la distorsion est donc relativement stable d'une mission à l'autre.

5.9 Conclusion

Il ne faut pas perdre de vue que compte tenu du faible rapport signal à bruit des observations seule l'inversion globale des mesures telle que je l'ai appliquée m'a permis de reconstruire des images qui ne soient pas dominées par des artefacts.

Les algorithmes de reconstruction d'image que j'ai présentés dans ce chapitre ne constituent pas un échantillon exhaustif. Néanmoins ils ont tous en commun de découler de la même approche qui consiste à trouver une solution qui soit la plus compatible possible avec les mesures et des propriétés *a priori* de la solution recherchée. Cette approche nécessite d'opérer de façon globale et la solution est obtenue en minimisant une fonction d'erreur qui sanctionne les écarts du modèle aux observations et aux contraintes *a priori*. Les avantages de cette approche sont sa robustesse vis-à-vis du bruit de mesure et sa capacité d'opérer à partir de mesures lacunaires.

Les algorithmes que j'ai utilisés ou mis au point se généralisent très simplement à toute modélisation de l'objet observé. Au lieu de reconstruire une image de cet objet, des approches tout-à-fait similaires permettent d'ajuster un modèle plus synthétique avec beaucoup moins de paramètres.

Chapitre 6

Résultats Astrophysiques

Dans les chapitres précédents, j'ai décrit mon approche pour la réduction des observations en interférométrie des tavelures aux longueurs d'onde du visible. L'élaboration de la chaîne de traitement correspondant à cette démarche me permet, partant des données brutes, d'obtenir des images ou des mesures de paramètres astrométriques et photométriques. Ce travail de fond a nécessité un investissement en temps important et trouve aujourd'hui son aboutissement dans l'exploitation astrophysique des observations. Dans ce chapitre je présente les résultats, dont certains sont très préliminaires, que j'ai obtenus à partir de données CP40 et qui concernent des objets froids : étoiles pré-séquence principale (T Tau, DF Tau et Z CMa) et géante rouge évoluée de type Mira (χ Cygni).

6.1 T Tauri

T Tau est le représentant, bien que atypique, de la classe des étoiles T Tauri (pour une revue des propriétés de ces objets, voir par exemple Appenzeller & Mundt, 1989). Ces objets sont considérés comme étant des étoiles de faible masse et qui n'ont pas encore atteint la séquence principale. Les réactions thermonucléaires n'étant pas encore amorcées, la source d'énergie de ces étoile est gravitationnelle. Pour bon nombre d'étoiles de ce type, il y a des preuves observationnelles de la présence d'un disque d'accrétion.

Nous avons détecté une composante étendue ($\sim 14 \times 6$ U.A.) en Hα autour de la composante visible de T Tau (Thiébaut et al., 1994, *cf.* annexe D). Et nous avons discuté de l'interprétation de cette composante étendue (Devaney et al., 1994, *cf.* annexe C) à partir du spectre de puissance de T Tau dans un article en annexe. L'explication la plus séduisante est que cette émission trace la base du jet observé dans les raies interdites [SII] entre T Tau et l'objet Herbig-Haro HH1555 à 30" à l'ouest de T Tau.

Aujourd'hui, je suis en mesure de montrer une image à la limite de diffraction de l'environnement proche de T Tau en Hα (cf. figure 6.1). J'ai obtenu cette image à partir des mesures du spectre de puissance et du bispectre à deux canaux en minimisant une fonction d'erreur qui sanctionne les écarts aux mesures et à la positivité (*cf.* section 5.6).

J'ai imposé une fréquence de coupure égale à celle du télescope (*i.e.* le 3.60 m du CFH) soit 0″.038.

Ces observations de T Tau ont été faites au télescope de 3.60 m du CFH pendant la nuit du 2 novembre 1989 (2 h 24 TU). T Tau et la référence choisie SAO 93887 ont été observées environ 20 minutes chacune, soit respectivement 42870 et 49081 trames de 20 ms. La bande passante spectrale pour les observations est 6560 ± 20 Å. Après l'application des prétraitements, il reste en moyenne 46 et 89 photons par trame pour les deux canaux Hα pour T Tau et 37 et 66 photons pour SAO 93887. A 656 nm, la limite de diffraction est $\lambda/D \simeq 37.6$ marcsec, le grandissement a été ajusté par la correction de la distorsion à $\lambda/2D \simeq 18.7$ marcsec ce qui correspond à un pixel de ~ 2.6 UA au voisinage de T Tau.

Pour l'interprétation astrophysique de la composante étendue de T Tau en Hα, le lecteur est prié de se rapporter à notre article (Devaney et al., 1994, *cf.* annexe C). Par rapport au spectre de puissance, l'image de la figure 6.1 confirme la présence d'une structure étendue orientée, en gros, Nord-Sud et ne permet pas d'exclure une discontinuité à ~ 5 U.A. au Sud de T Tau. C'est cette discontinuité qui est responsable des franges que présente le spectre de puissance (voir la figure 6.2 et, pour comparaison, la figure 6.3). Néanmoins, cette structure est tout juste résolue par l'instrument et il faudra sans doute des observations avec un plus grand télescope pour confirmer cette discontinuité.

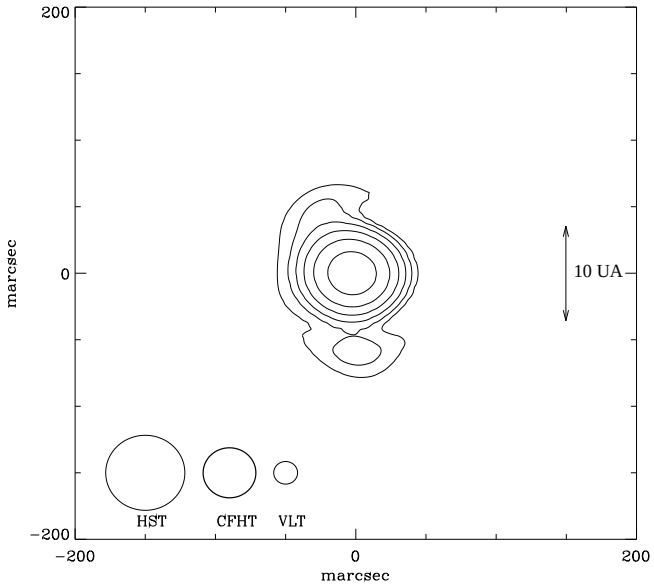


Fig. 6.1 – Image restaurée de l'environnement proche de T Tau en Hα. Les cercles indiquent la largeur à mi-hauteur de la réponse impulsionnelle à la limite de diffraction de différents télescopes à cette longueur d'onde. Les isocontours sont à 2%, 4%, 8%, 16%, 32% et 64% du maximum d'intensité ; la composante centrale, non résolue, a été supprimée.

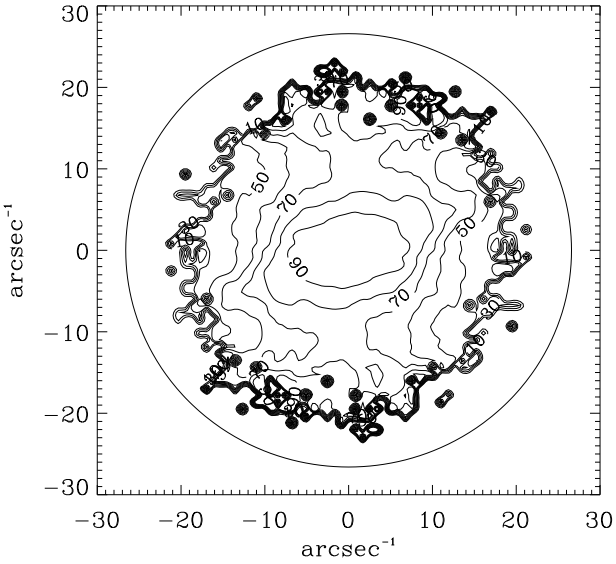


FIG. 6.2 – Spectre de puissance observé de T Tau en Hα. Le cercle extérieur délimite la fréquence de coupure instrumentale. La partie centrale correspondant aux basses fréquences ($\leq 1.7\,\mathrm{arcsec}^{-1}$) affectées par les variations de *seeing* n'est pas prise en compte pour l'échelonnement des courbes de niveau.

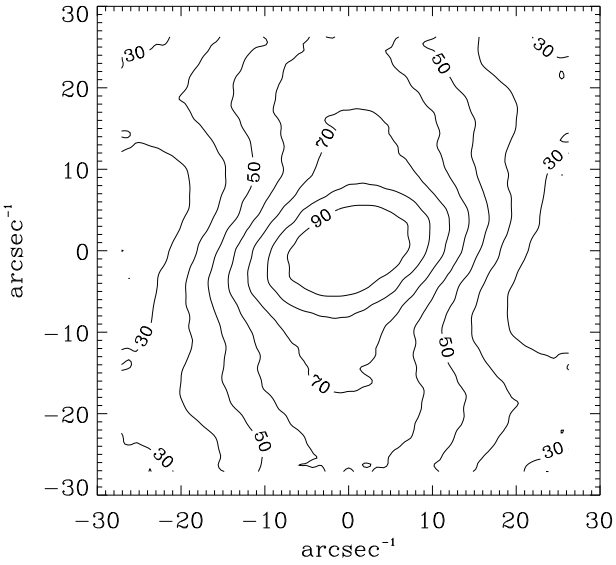


FIG. 6.3 – Spectre de puissance de l'image restaurée de T Tau en Hα.

6.2 DF Tau

DF Tau est une étoile de type T Tauri classique (WHα $\simeq$ 54 Å). Son spectre photométrique est bien modélisé par un disque d'accrétion et une étoile de type spectral M0 (Bertout et al., 1988) ou M0.5 (Beckwith et al., 1990). Il faut noter que, dans le modèle de disque d'accrétion de Beckwith et al. (1990), le paramètre q de la loi de puissance pour la température du disque ($T(r) = T(r_0)(r/r_0)^{-q}$ où r est la distance au centre) était libre et qu'ils ont obtenu une valeur de $q = 0.75$ correspondant à un chauffage du disque par viscosité mécanique comme l'ont imposé Bertout et al. (1988). Les paramètres du modèle de disque d'accrétion pour DF Tau sont (d'après BBB : Bouvier & Bertout 1989 et BSBG : Beckwith et al. 1990) :

réf.	type	A_V	$L_*/L_\odot$	$M_*/M_\odot$	$R_*/R_\odot$	$\dot{M}/1\ M_\odot\,\mathrm{an}^{-1}$	L_{acc}/L_*
BBB	M0	1.2	3.02	0.8	3.8	3.5×10^{-7}	0.73
BBB	M0	1.2	3.02	0.8	3.8	6.5×10^{-7}	1.39
BSCG	M0.5	1.96	2.97	0.53		1.1×10^{-6} †	1.55

† calculé en prenant $R_* = 3.8 R_\odot$.

où A_V est l'extinction en magnitudes visuelles, L_*, M_*, R_* sont la luminosité, la masse et le rayon de l'étoile centrale, $\dot{M}$ est le taux d'accrétion et L_{acc} la puissance fournie par l'accrétion.

D'autre part, Bouvier & Bertout (1989) ont observé des variations de luminosité de DF Tau avec une périodicité de 8.5 jours. Ils attribuent ces variations à la rotation d'un *point chaud* à la surface de l'étoile là où la matière du disque est accrétée. Dans ce cas, l'accrétion se fait le long des lignes d'un champ magnétique dans le plan du disque et le point a une luminosité pratiquement égale à celle de la couche limite (Bertout et al., 1988). D'après ce modèle, ils déduisent une inclinaison de 65° pour l'axe de rotation de l'étoile et du disque.

Enfin, DF Tau a été détectée comme étant une binaire dans l'infrarouge (bande K) par occultation lunaire (Chen et al., 1990). Beckwith et al. (1990) notent que, dans leur échantillon de 86 étoiles pré-séquence principale, les étoiles ayant un compagnon proche (dont DF Tau) ont des disques d'accrétion systématiquement moins massifs ($< 0.006 M_\odot$ pour DF Tau contre $\sim 0.03 M_\odot$ pour la plupart des autres étoiles de l'échantillon ayant un disque). Ceci peut s'expliquer par le fait que la formation du compagnon concurrence celle du disque (ils se partagent une quantité de matière et de moment cinétique donnés) ou par l'influence gravitationnelle du compagnon qui limite le rayon maximum du disque d'accrétion.

J'ai détecté les deux composantes de DF Tau dans le visible à partir de données acquises au télescope de 3.60 m du CFH (novembre 1989) et au télescope de 6 m du SAO (*Special Astrophysical Observatory*, Russie, septembre 1991). Ces observations combinées avec les occultations lunaires mettent en évidence un mouvement relatif des deux composantes du système [1] (*cf.* figure 6.4) :

[1] J'ai fait l'hypothèse que la composante la plus brillante à la longueur d'onde des mesures de Chen et

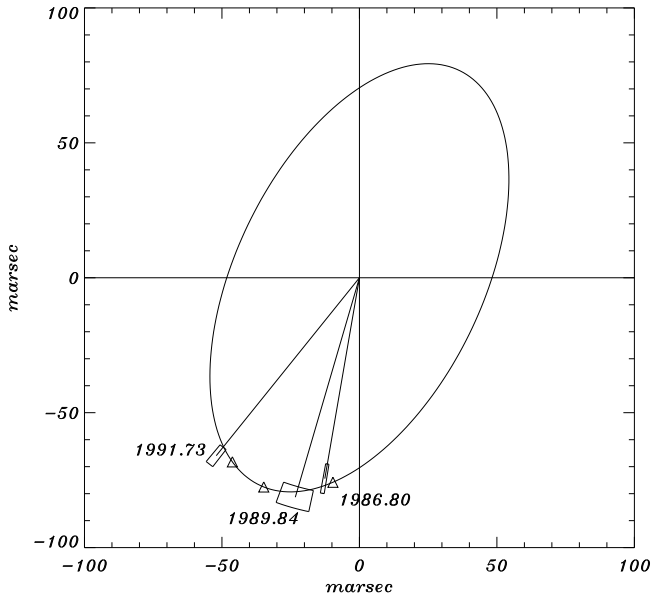


FIG. 6.4 – Evolution dans le temps de l'orientation du système de DF Tau. Les mesures de 1986.80, 1989.84 et 1991.73 correspondent respectivement aux observations par occultation lunaire de Chen *et al.* (1990) et à nos observations au télescope de 3.60 m du CHF et au télescope de 6 m du SAO.

date	λ	ρ	θ	source
1986.80	2.2 μm	$0''.076 \pm 0''.003$	$170.4° \pm 0.5°$	Chen et al. (1990)
1989.84	656 nm	$0''.085 \pm 0''.004$	$164.0° \pm 4.0°$	T3.60 m du CFH
1991.73	700 nm	$0''.084 \pm 0''.004$	$141.7° \pm 1.0°$	T6 m du SAO

Etant donné la faible séparation sur le ciel, il est peu probable que la proximité apparente de ces deux étoiles soit fortuite : le système est vraisemblablement lié. Les paramètres orbitaux d'une binaire sont au nombre de 8 :

P : période
a : demi-grand axe
e : excentricité
ω : longitude du périastre
t_0 : date du périastre
i : inclinaison de l'orbite
Ω : position du nœud ascendant
d : distance

A une date t, la position apparente (ρ, θ) du système est obtenue en projetant la position

al. (1990), 2.2 μm, était la moins brillante à la longueur d'onde de nos observations, 0.7 μm ; les différences de magnitude sont $\Delta m_{\rm R} = 1.0 \pm 0.1$ et $\Delta m_{\rm K} = 0.41 \pm 0.03$ (Chen et al., 1990).

vraie (r, ν) sur le ciel (cf. figure 6.5) :

$$\rho = \frac{r}{d}\sqrt{\cos^2(\nu+\omega) + \cos^2 i \sin^2(\nu+\omega)}, \tag{6.1}$$

$$\cos(\theta - \Omega) = \frac{\cos(\nu+\omega)}{\sqrt{\cos^2(\nu+\omega) + \cos^2 i \sin^2(\nu+\omega)}}, \tag{6.2}$$

$$\sin(\theta - \Omega) = \frac{\cos i \sin(\nu+\omega)}{\sqrt{\cos^2(\nu+\omega) + \cos^2 i \sin^2(\nu+\omega)}}. \tag{6.3}$$

La séparation vraie, r, et l'anomalie vraie, ν, sont données par :

$$r = a\,(1 - e\,\cos E), \tag{6.4}$$

$$\tan\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\tan\frac{E}{2}, \tag{6.5}$$

où E est la solution de l'équation de Kepler :

$$E - e\,\sin E = 2\,\pi\,\frac{t - t_0}{P}. \tag{6.6}$$

A partir des seules observations de l'orbite apparente il n'est donc pas possible de déterminer la distance d et seule la valeur angulaire a/d du demi-grand axe est accessible. Une mesure spectroscopique de vitesse radiale, par exemple, permet de lever cette indétermination.

Sans faire d'hypothèse supplémentaire, les mesures de (ρ, θ) à 3 dates différentes dont je dispose pour DF Tau sont insuffisantes (il en faut au moins 4) pour en extraire les 7 paramètres qui peuvent être déterminés par l'observation de l'orbite apparente. Néanmoins, je n'ai pas résisté à la tentation d'essayer d'obtenir certains de ces paramètres. Pour ce faire, j'ai choisi de négliger l'excentricité e. Cela se justifie parce que ce paramètre est rarement assez important pour que le demi-petit axe, b, diffère significativement du demi-grand axe (*e.g.* $b = a/\sqrt{1+e^2} \simeq 0.95 \times a$ pour $e = 0.5$). Cette approximation revient à considérer que l'orbite vraie est un cercle et permet de supprimer 2 paramètres du modèle (*i.e.* l'excentricité e et la longitude du périastre ω qui peut être arbitrairement choisie). Il reste que, les mesures de positions de DF Tau ne concernant qu'une petite portion de l'orbite (moins d'un dixième) et compte tenu des incertitudes qui affectent ces mesures, la détermination des 5 paramètres restant ne sera pas précise.

En choisissant $\omega \equiv 0°$ et $e = 0$, t_0 devient la date de passage à la longitude Ω du nœud ascendant et les équations du mouvement vrai se simplifient pour donner :

$$r = a, \tag{6.7}$$

$$\nu = 2\pi\frac{t - t_0}{P}; \tag{6.8}$$

celles du mouvement apparent deviennent :

$$\rho = \frac{a}{d}\sqrt{\cos^2\nu + \cos^2 i \sin^2\nu}, \tag{6.9}$$

$$\cos(\theta - \Omega) = \frac{\cos\nu}{\sqrt{\cos^2\nu + \cos^2 i \sin^2\nu}}, \tag{6.10}$$

$$\sin(\theta - \Omega) = \frac{\cos i \sin\nu}{\sqrt{\cos^2\nu + \cos^2 i \sin^2\nu}}. \tag{6.11}$$

A l'aide de l'algorithme de Levenberg-Marquart (Press et al., 1990) d'ajustement de modèle au sens des moindres carrés non linéaires, j'ai obtenu les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} e &\equiv 0 \\ \omega &\equiv 0^\circ \\ P &= 37 \pm 13 \text{ ans} \\ a/d &= 85 \pm 3 \text{ marcsec} \\ t_0 &= 1990 \pm 1 \text{ ans} \\ i &= 238^\circ \pm 13^\circ \\ \Omega &= 155^\circ \pm 7^\circ \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Kepler :

$$\frac{M_1 + M_2}{M_\odot} = \left(\frac{a}{1\,\text{U.A.}}\right)^3 \left(\frac{P}{1\,\text{an}}\right)^{-2}, \tag{6.12}$$

ces mesures me permettent de donner une estimation de la masse $M_1 + M_2$ du système : en prenant une distance $d \simeq 140$ pc pour le Taureau, j'obtiens :

$$M_1 + M_2 = 1.2^{+2.0}_{-0.6}\ M_\odot.$$

Cette estimation concorde avec la masse $2 \times M_* = 1.6\,M_\odot$ du modèle de Bertout et al. (1988) ou avec la masse de $\sim 1\,M_\odot$ que l'on peut déduire à partir des mesures photométriques de Cohen & Kuhi (1979) et de Beckwith et al. (1990) et des isochrones des modèles d'évolution pré-séquence principale que l'on trouve dans Cohen & Kuhi (1979).

La valeur de l'inclinaison que j'obtiens est supérieure à 180° car le mouvement apparent de la composante secondaire est rétrograde. Cette inclinaison, ramenée au plus petit angle que forment la ligne de visée et l'axe de rotation, vaut $i - 180^\circ = 58^\circ \pm 13^\circ$. Cette valeur est en accord avec l'inclinaison de 65° obtenue par Bouvier & Bertout (1989). Si les deux étoiles sont effectivement liées, elles se sont sans doute formées à partir de l'effondrement du même nuage proto-stellaire, on s'attend donc bien à ce que les axes de rotation du disque et de l'orbite de la binaire coïncident.

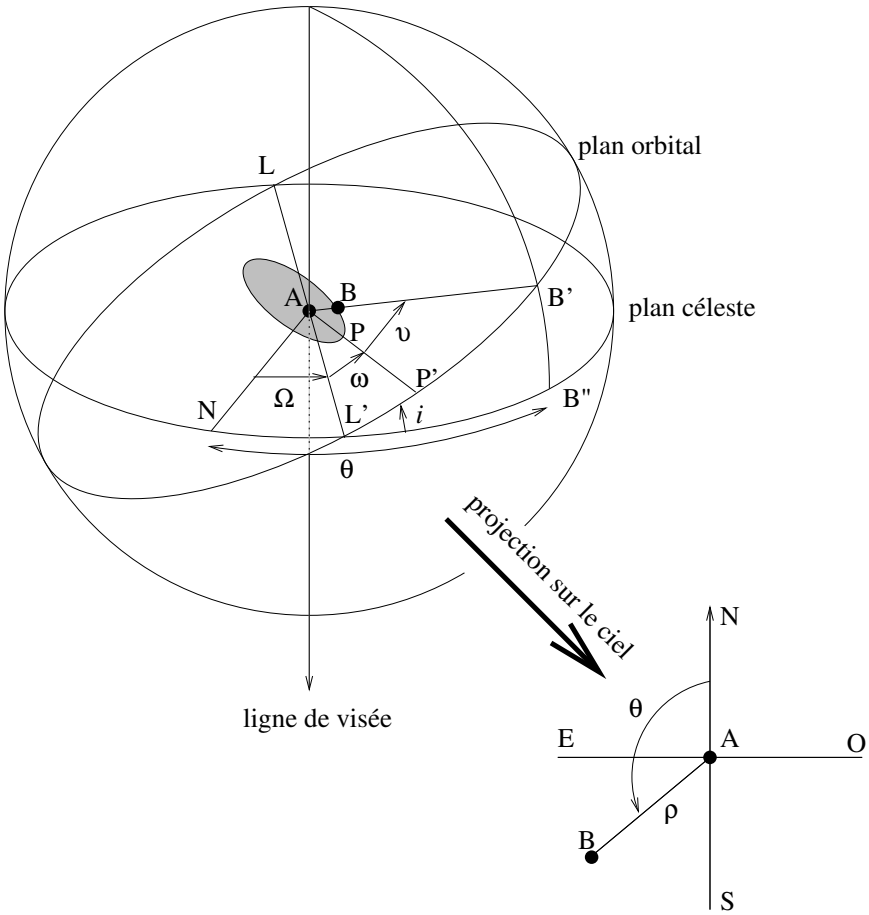


FIG. 6.5 – Paramètres de l'orbite d'une binaire et sa projection sur le ciel. A est la composante primaire, B la composante secondaire, L' est le nœud ascendant, N indique la direction du Nord.

La validité de mes estimations est démontrée par leur accord avec les quelques paramètres fournis par les observations photométriques. Ne serait-ce que pour vérifier mon hypothèse que l'excentricité est faible, mais aussi pour améliorer la qualité de mes estimations des paramètres de l'orbite, de nouvelles observations de DF Tau sont clairement nécessaires. Si ces observations sont effectuées dès à présent, la portion de l'orbite observée sera doublée. D'autre part, la vitesse relative des deux composantes projetée sur la ligne de visée vaut :

$$v_{//} = \frac{2\pi a}{P} \sin i \cos \nu = \cos \nu \times 9 \pm 3 \,\mathrm{km\,s^{-1}} \tag{6.13}$$

avec une résolution de 50 000, la spectroscopie pourrait donc fournir une mesure de cette vitesse (en 1995, $\cos \nu \sim 0.7$) ce qui permettrait d'obtenir **la première détermination directe de la masse d'une étoile pré-séquence principale**.

Afin d'affiner le modèle de DF Tau (disque d'accrétion et deux composantes stellaires), des mesures photométriques pour les différentes composantes sont nécessaires. Nous pouvons effectuer ces mesures dans le visible avec notre caméra CP40. Une collaboration avec d'autres groupes est nécessaire pour obtenir des mesures dans l'infrarouge en interférométrie des tavelures ou avec l'optique adaptative[2].

6.3 Z Canis Majoris

Z Canis Majoris (Z CMa) est une étoile de type FU Orionis. Les objets de ce type sont interprétés comme étant des étoiles jeunes (plus jeunes que les étoile de type T Tauri et peut-être les précurseurs de ces dernières) dont la luminosité est dominée par celle du disque d'accrétion.

A partir de données acquises au T3.60 m du CFH en novembre 1989, j'ai découvert la contrepartie visible du compagnon dit *infrarouge* observé par Koresko et al. (1991) et Haas et al. (1993). A la longueur d'onde des observations (700 nm), j'ai estimé les paramètres suivants pour ce système double :

orientation :	$\theta =$	$126° \pm 5°$
séparation :	$\rho =$	$0\farcs110 \pm 0\farcs010$
différence de magnitude :	$\Delta m_{\mathrm{R}} =$	2.5 ± 0.2

Les paramètres de positions sont en accord avec les mesures de Koresko et al. (1991) — $\theta = 120° \pm 4°$, $\rho = 0\farcs100 \pm 0\farcs007$ — et celles de Haas et al. (1993) — $\theta = 122° \pm 2°$, $\rho = 0\farcs100 \pm 0\farcs010$.

Koresko et al. (1991) ont pu séparer les deux composantes de Z CMa (Z CMa NO et Z CMa SE) pour plusieurs longueurs d'onde dans l'infrarouge de 1.27 μm à 4.8 μm et obtenir de cette façon un spectre à très basse résolution de l'émission de chacune des

[2]Pour un télescope de 3.60 m, la séparation de $\simeq 0\farcs085$ permet de distinguer la contribution à la luminosité des deux composantes de DF Tau jusqu'à une longueur d'onde de 1.4 μm (voire $\sim 3\,\mu$m en ajustant un modèle ce qui permet une sur-résolution)

composantes. Pour expliquer la forme de ces spectres ainsi que les mesures photométriques pour tout le système en UBVRI et dans l'infrarouge lointain jusqu'au sub-millimétrique, ils ont proposé un modèle à trois composantes de cet objet complexe :

- l'émission de Z CMa SE est dominée par un disque d'accrétion de type FU Orionis ; cette composante rend compte du flux visible et UV du système ;
- Z CMa NO est modélisé par une sphère optiquement épaisse de poussières éjectées ou accrétées par un objet central massif ; cette composante explique le spectre dans l'infrarouge proche ;
- un disque d'accrétion suffisamment grand ($\geq$ 400 UA) pour englober le système ; en plus du chauffage par la viscosité, un chauffage de ce disque par Z CMa SE peut expliquer le spectre relativement plat de ce disque qui domine dans l'infrarouge lointain.

Haas et al. (1993) ont observé une variabilité de la luminosité des deux composantes de Z CMa de 1986.72 à 1990.93 en H et en K. L'indépendance des variations de Z CMa SE et Z CMa NO renforce, à leur avis, l'interprétation par Koresko et al. (1991) de ces deux composantes comme étant d'origine stellaire. Ces fluctuations seraient liées à des sursauts d'accrétion. Récemment, Roddier et al. (1994) ont observé Z CMa avec leur système d'optique adaptative à 1.28 μm et 1.65 μm. A cette dernière longueur d'onde, ils ont trouvé que le compagnon auparavant le plus brillant était maintenant le plus faible.

Afin de déterminer les contraintes qu'apportent nos mesures par rapport au schéma proposé par Koresko et al. (1991), j'ai tenté de reproduire leur modélisation de la distribution spectrale d'énergie de l'UV au proche infrarouge.

Pour modéliser Z CMa SE, j'ai utilisé le modèle de disque d'accrétion décrit par Bertout et al. (1988). J'ai seulement considéré le chauffage du disque par la viscosité et négligé la contribution de l'étoile à ce chauffage. J'ai aussi simplifié la modélisation de l'étoile centrale que je représente par un corps noir de rayon R_*. Dans la mesure où, pour un objet de type FU Orionis, la luminosité de l'étoile est faible par rapport à celle du disque, ces approximations devraient avoir peu d'effet sur les paramètres du disque modélisé. Par contre, contrairement à la prescription de Bertout et al. (1988) pour la modélisation d'un disque d'accrétion autour d'une étoile de type T Tauri, j'ai dû prendre l'épaisseur de la couche limite entre le disque et l'étoile comme un paramètre ajustable. Comme Koresko et al. (1991), j'ai incorporé au spectre de Z CMa SE les mesures en UBV de Herbst et al. (1987). Par contre, j'ai recalculé le flux de Z CMa SE en R d'après le rapport de flux des deux composantes déduit de nos observations et d'après le flux total mesuré par Herbst et al. (1987) dans cette bande. Pour tenir compte de l'extinction par le milieu interstellaire, j'ai appliqué un rougissement avec $A_V = 0.81$ magnitude (Claria, 1974). J'ai adopté une distance de 1150 pc pour Z CMa (Claria, 1974). Les paramètres que j'ai obtenus pour ce modèle sont sensiblement les mêmes que Koresko et al. (1991), la puissance fournie par l'accrétion L_{acc} valant le double de la luminosité du disque :

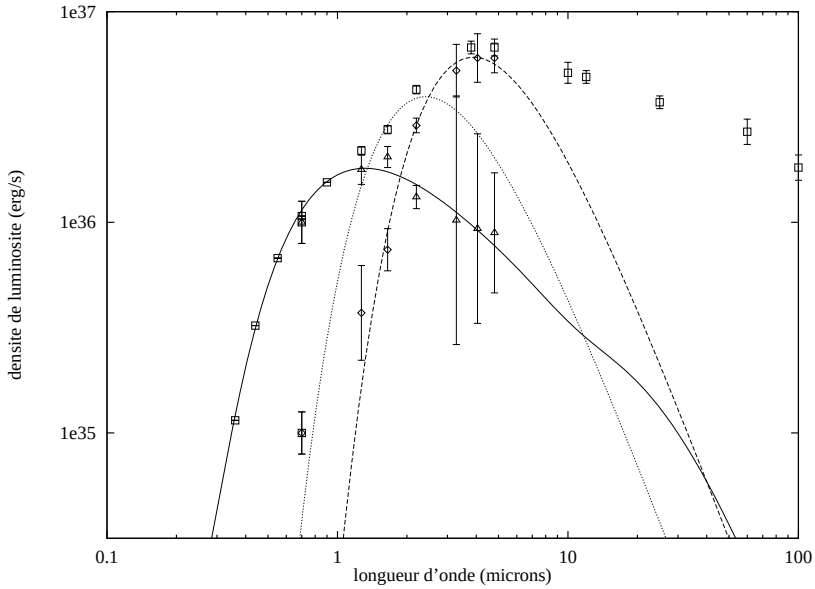


FIG. 6.6 – Distribution spectrale de l'énergie (*i.e.* $4\pi d^2 \lambda F_\lambda$) émise par le système Z CMa. Les mesures de Koresko et al. (1991) sont représentées par des triangles △ pour la composante SE et par des losanges ◇ pour la composante NO. Le spectre total est représenté par des carrés □ (Koresko et al., 1991, *IRAS Point Source Catalog* pour l'infrarouge lointain et Herbst et al., 1987, en UBVRI). Mes mesures en R sont représentées par les symboles ⧄ et ⧅. En trait plein, le modèle de disque d'accrétion pour la composante SE. En tireté, le spectre de la sphère de poussières proposée par Koresko et al. (1991) pour expliquer le flux dans l'infrarouge proche de la composante NO. En pointillés, le spectre du corps noir qui prend en compte nos mesures en R pour la composante NO.

$$\begin{aligned}
\text{rayon de l'étoile centrale :} \quad & R_* = 13 \pm 1\, R_\odot \\
\text{luminosité de l'étoile centrale :} \quad & L_* = 80 \pm 60\, L_\odot \\
\text{puissance accrétée :} \quad & L_{\rm acc} = 1280 \pm 60\, L_\odot \\
\text{épaisseur de la couche limite :} \quad & \delta = 1.5 \times 10^{-5} \pm 0.3 \times 10^{-5}\, R_*
\end{aligned}$$

La figure 6.6 montre le bon accord de ce modèle avec les mesures. La luminosité de l'étoile centrale est négligeable comparée à celle du disque, ce qui valide mes approximations. La puissance fournie par l'accrétion est liée au taux d'accrétion $\dot{M}$:

$$L_{\rm acc} = \frac{G M_* \dot{M}}{R_*}. \tag{6.14}$$

Avec les paramètres que j'obtiens : $\dot{M} \sim 5 \times 10^{-4} (M_\odot/M_*)\, M_\odot\, {\rm an}^{-1}$ à comparer à $\dot{M} \sim 8 \times 10^{-4} (M_\odot/M_*)\, M_\odot\, {\rm an}^{-1}$ chez Koresko et al. (1991).

Comme Koresko et al. (1991), j'ai tenté de reproduire la distribution d'énergie de Z CMa NO par celle d'un corps noir (*i.e.* la sphère de poussières). Sans tenir compte de la mesure que nous apportons à 0.7 μm, un corps noir de luminosité $2410 \pm 40\, L_\odot$

et de rayon $1730 \pm 30\,R_\odot$ correspondant à une température de 970 K représente bien les mesures de 0.9 μm à 4.8 μm (*cf.* figure 6.6). Cette luminosité est un peu plus importante que celle mesurée par Koresko et al. (1991) car j'ai tenu compte de l'extinction. Le corps noir qui représente le mieux les mesures de 0.7 μm à 4.8 μm (donc y compris la valeur déduite de nos observations) est beaucoup plus chaud ($\simeq$ 1600 K) et a une luminosité de $1670 \pm 50\,L_\odot$ et un rayon de $534 \pm 14\,R_\odot$. Quelle que soit la température du corps noir, cette modélisation représente très mal les observations (*cf.* figure 6.6).

Il apparait donc que les mesures que j'obtiens à 0.7 μm remettent en question la modélisation de Z CMa NO proposée par Koresko et al. (1991). J'ai envisagé diverses autres possibilités pour tenter de reproduire les observations :

- Les mesures sont parfaitement compatibles avec mon modèle de disque d'accrétion que j'ai décrit pour Z CMa SE — L_* négligeable, $L_{\rm acc} = 3789 \pm 34\,L_\odot$, $R_{\rm min} = 395 \pm 5\,R_\odot$ et $\delta = 1.4 \times 10^{-3} \pm 5 \times 10^{-5}\,R_\odot$ — avec un taux d'accrétion de $\sim 5 \times 10^{-2}(M_\odot/M_*)\,M_\odot\,{\rm an}^{-1}$; mais ce modèle doit être rejeté car il implique une durée de vie de la phase d'accrétion de seulement $\sim 20(M_*/M_\odot)^2$ an (Koresko et al., 1991).

- Etant donné la dimension ($\sim$ 8 U.A.) du rayon de l'objet infrarouge proposé par Koresko et al. (1991) pour expliquer Z CMa NO, j'ai testé un modèle dans lequel un disque d'accrétion émerge d'une sphère de poussière optiquement épaisse (par exemple éjectée par l'étoile centrale), le nuage de poussière étant suffisament grand pour masquer l'étoile centrale (qui de toute façon contribue peu au flux) et surtout la couche limite (qui rayonne la moitié de la puissance fournie par l'accrétion). Les paramètres que j'obtiens pour ce modèle sont : $L_{\rm disque} = 940 \pm 80\,L_\odot$, $L_{\rm sphère} = 700 \pm 300\,L_\odot$ et $R_{\rm sphère} = 240 \pm 70\,R_\odot$. J'ai rejeté ce modèle car il reproduit très imparfaitement les mesures.

- Clairement, il faudrait des observations à haute résolution angulaire pour d'autres longueurs d'onde du visible afin d'être à même de tester un modèle dans lequel Z CMa NO est représentée par deux sources (corps noirs ?) distinctes.

La détection dans le visible (à 0.7 μm) du compagnon de Z CMa repose donc le problème de l'interprétation de la nature de cette source. Sans avoir trouvé d'alternative convainquante au modèle de Koresko et al. (1991), je peux toutefois remettre leur modèle en question.

D'autre part, à partir de nos données en comptage, je ne détecte pas de trace du grand disque ($\sim 400 \times 100$ UA) de poussières prévu par Koresko et al. (1991) et observé avec l'optique adaptative (Rigaut et al., 1991) par Malbet et al. (1993) autour de Z CMa dans l'infrarouge (en L' et en M). Le fait que le disque ne soit pas visible à 700 nm peut s'expliquer par la taille des grains de poussière : trop gros pour diffuser efficacement la lumière dans le visible. Toutefois, des observations récentes dans l'infrarouge en interférométrie des tavelures (Haas et al., 1993; Teissier, 1993) et avec l'optique adaptative n'ont pas permis de confirmer l'existence de ce disque.

6.4 χ Cygni

χ Cygni est une étoile géante rouge évoluée de type Mira de période assez longue ($P \simeq 405$ jours) et qui présente la particularité de présenter un spectre de type M à son maximum d'intensité et de type S à son minimum d'intensité. Nous avons observée χ Cygni pratiquement à son maximum d'intensité au télescope de 4.20 m WHT (Canaries) en mai 1993 et en juillet 1993. Ces données sont en cours de réduction. Néanmoins il apparaît déjà que la structure spatiale de χ Cygni est très différente suivant la longueur d'onde (raies d'émission Hα et Hβ et bandes d'absorption du TiO). La figure 6.7 montre que, dans la bande d'absorption du TiO à 496 nm, χ Cygni est largement résolue (largeur à mi-hauteur $\sim 0''.160$ soit ~ 20 U.A. à la distance de 125 pc de χ Cygni) et marginalement asymétrique contrairement à Mira (o Ceti) qui présente une asymétrie importante ($\sim 15-30\%$, Karovska et al., 1991).

Les observations d'une étoile de type Mira dans des raies d'absorption plus ou moins fortes du TiO permettent de sonder la structure verticale de l'atmosphère étendue de l'étoile (Labeyrie et al., 1977; Bonneau et al., 1982). C'est un moyen de mesurer le profil tri-dimensionnel de température et, en inversant l'équation de transfert du rayonnement, d'obtenir un modèle semi-empirique de l'atmosphère de ce type d'étoile. Cette possibilité permet de suppléer aux modèles théoriques qui font l'hypothèse d'une atmosphère plan-parallèle (Tsuji, 1987) ou légèrement sphérique (Plez et al., 1992) fortement remise en question compte tenu du diamètre de ce type d'étoile ($\sim$ quelques 10 U.A.).

Par ailleurs, ces observations me permettront de suivre l'évolution de la structure spatiale de χ Cygni avec la phase du cycle. Et donc d'étudier les modes de pulsation et de mettre en évidence des zones de chocs et peut être de formation potentielle des grains.

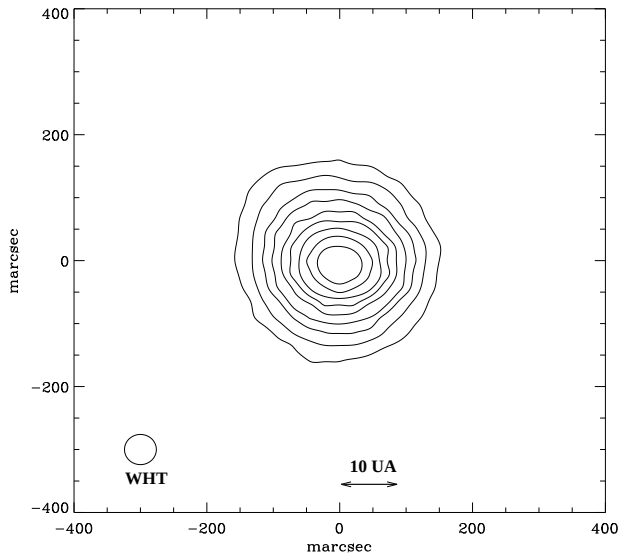


FIG. 6.7 – Image de χ Cygni dans une bande d'absorption du TiO à 496 nm.

Annexes

Annexe A

Speckle interferometry with a photon-counting detector

E. Thiébaut, 1994, A&A 284, 340–348

1994A&A...284..340T

Astron. Astrophys. 284, 340–348 (1994)

ASTRONOMY AND ASTROPHYSICS

Speckle interferometry with a photon-counting detector*

E. Thiébaut

DASGAL/URA 235, Observatoire de Meudon, France

Received 17 August 1993 / Accepted 5 October 1993

Abstract. This paper deals with solutions to overcome or to correct for the defects of photon-counting detector – intensified CCD (ICCD) in particular – for the purpose of speckle interferometry. Among others, we show how to cope with strong image distortion in the photon-counting case and with the so-called photon-counting hole. The latter is due to the incapacity to detect any pair of close photon-events in the short exposure images. Our photon-counting detector, the CP40 camera (Blazit 1987; Foy 1988a), consists in an ICCD and centroiding electronics. Nevertheless, other photon-counting detectors present a defect similar to the photon-counting hole due to the limited shortest time delay between two consecutive photon-events. A model for the photon-counting hole is proposed which allows to predict its effect on the mean autocorrelation of short-exposure images. Compensation for this defect is obtained using Fourier transform of mean symmetrised cross-correlation instead of autocorrelation for the estimate of the power spectrum.

Key words: techniques: interferometric – methods: data analysis – instrumentation: detectors

1. Introduction

The angular resolution of long exposure images obtained at large ground-based telescopes is seldom better than 0.7 arcsecond for the best sites. This limitation is due to atmospheric turbulence which severely reduces the coherence of the light wavefront. Labeyrie (1970) has demonstrated by means of speckle interferometry that the speckle pattern shown by short exposure highly magnified images (so-called speckle interferograms) contains diffraction-limited information on the spatial structure of the observed object. But, only the power spectrum of the object brightness can be derived from classical speckle interferometry. Nevertheless, as noticed by many astronomers, when one is able to get a good estimate of this power spectrum then it is straightforward to obtain an image of the object by means of more sophisticated means such as the Knox and Thompson method (Knox & Thompson 1974; Knox 1976) or bispectrum analysis (Lohmann et al. 1983; Wirnitzer 1985). Therefore, we have chosen to focus this paper on the only case of classical speckle interferometry and to show the considerable gain in the quality of the estimated power spectrum that one can get with a careful processing of photon-counting data.

From our point of view, a good estimate of the object power spectrum is essentially an unbiased estimate, the quality of which can be expressed in terms of the effective cut-off frequency. The leading idea being that bias severely and definitively limits data quality; on the other hand, an unbiased estimate can be improved by using more data. Most of the artifacts responsible for the bias are due to the photon-counting detector which is not perfect. Thus, the first step of data processing consists in removing the artifacts or correcting for them. Then, the data are ready to be processed by speckle interferometric techniques.

In the first section, we will explain how to perform speckle interferometry of photon-counting data. In the second section, we will present our instrumentation (i.e. the CP40 camera and the associated O.C.A. specklegraph) with its specificity. Then, we will review the problems that one may encounter with photon-counting ICCDs and the solutions which we have found. In particular, we will describe some techniques to compensate for the image distortion of photon-counting data and we will demonstrate the possibility to correct for the photon-counting hole defect using cross-correlation. Finally, we will show that the resulting visibilities are much improved with the data processing we propose.

2. Speckle interferometry of photon-counting data

The observed short exposure image $i(x)$ is the convolution (denoted $*$) of the object brightness distribution $o(x)$ by the instantaneous point spread function $s(x)$ of the combined telescope and atmosphere (Labeyrie 1970):

$$i(x) = s(x) * o(x) \quad \overset{\text{FT}}{\rightleftharpoons} \quad I(u) = S(u)O(u), \tag{1}$$

where FT stands for the Fourier transform, x is the spatial position and u the spatial frequency. A function name in upper-case

* Based on observations collected at the the 3.60m CFHT, operated jointly by the Canadian SRC, the French CNRS and the University of Hawaii

© European Southern Observatory • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1994A&A...284..340T

letter denotes Fourier transform of the function whose name is the corresponding lower-case letter. Classical speckle interferometry consists in averaging the power spectrum of the short exposure images:

$$\left\langle |I(u)|^2 \right\rangle = \left\langle |S(u)|^2 \right\rangle |O(u)|^2 . \quad (2)$$

The so-called speckle transfer function, $\left\langle |S(u)|^2 \right\rangle$, can be estimated from the mean power spectrum of an unresolved reference source close to the observed object. Then division of $\left\langle |I(u)|^2 \right\rangle$ by this transfer function yields the object power spectrum $|O(u)|^2$. Since the Fourier transform of the autocorrelation function is the power spectrum, it is equivalent to computing the mean autocorrelation of the short exposure images:

$$\langle i(x) \otimes i(x) \rangle = \left\langle \sum_y i(y) i(x+y) \right\rangle \overset{\text{FT}}{\rightleftharpoons} \left\langle |I(u)|^2 \right\rangle , \quad (3)$$

where discrete summation is used instead of integration because of the finite sampling of the images. It should be noticed that the detector point spread function which is not explicitly mentioned in Eq. 1 is, however, taken into account in the speckle transfer function measured as described above.

Because of the evolution time of the atmospheric turbulence and its wavelength dependency, high angular resolution astronomical observations in the visible must be carried out with a very short exposure time (about 10 ms) and narrow spectral bandwidth (Roddier 1988). Moreover, the observed sources may be very faint. These constraints necessitate the use of photon-counting detectors for speckle interferometry in astronomy. Several types of detectors are sensitive and fast enough for this purpose: among other, intensified CCDs (ICCD), the PAPA camera, the MAMA camera, resistive or wedge-and-strip anode detectors (see review in Cuby 1988) and Electron-Bombarded CCDs (EBCCD, see Richard et al. 1988 or Cuby et al. 1990). In the photon-counting case, the short exposure image $i_p(x)$ is made of N individual photons at positions x_k:

$$i_p(x) = \sum_{k=1}^{N} \delta(x - x_k). \quad (4)$$

$i_p(x)$ is the result of a Poisson process, the mean of which is given by the image brightness distribution $i(x)$. Thus $i_p(x)$ obeys the probability law:

$$\Pr\{i_p(x) = n\} = \frac{\mathrm{e}^{-i(x)} i(x)^n}{n!}. \quad (5)$$

Dainty & Greenaway (1979) have shown that an unbiased estimate of the the mean power spectrum of the image brightness is obtained by subtracting the number of photons, N, in each image from its power spectrum. The unbiased estimate of the mean autocorrelation of the image brightness is then:

$$\langle i(x) \otimes i(x) \rangle = \langle i_p(x) \otimes i_p(x) - N\delta(x) \rangle \quad (6)$$

$$\overset{\text{FT}}{\rightleftharpoons} \quad \left\langle |I(u)|^2 \right\rangle = \left\langle |I_p(u)|^2 - N \right\rangle . \quad (7)$$

When processing photon-counting data for the purpose of speckle interferometry, it is usually more efficient to use photon-differencing methods to compute the estimate of the mean autocorrelation of the image brightness (Blazit 1976). Then Eq. 6 becomes:

$$\langle i(x) \otimes i(x) \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{N} \delta(x - x_{kl}) \right\rangle , \quad (8)$$

with $x_{kl} = x_l - x_k$ and where the condition $l \neq k$ stands to avoid the bias due to photon statistics.

Theoretically, speckle interferometry appears to be a straightforward technique for measuring the high angular resolution power spectrum of an object brightness. The main constraint being that the reference must be close to the observed object (less than 1° apart) because the speckle transfer function strongly depends on the direction of observation. In the practical case, because the statistics of atmospheric turbulence varies with time, multiple consecutive observations of the object and its reference must be carried out, during a few minutes each. Furthermore, photon-counting detectors are not perfect. The correction for their defects increase the complexity of the processing of photon-counting data. In particular, Eq. 8 is no longer valid as discussed in Sect. 5.

3. The instrumentation

Our instrumentation consists in a 4-channel specklegraph and in a 4-channel detector. The specklegraph provides the wavelength selection and the magnification of the image. The detector is a photon-counting ICCD.

3.1. The O.C.A. 4-channel specklegraph

The O.C.A. specklegraph is equipped with a Courtès monochromator allowing the selection of two bandwidths simultaneously, each with different central wavelengths and widths. The two filtered beams are then split in the image plane, so that, for each of the two wavelengths, two independent photon realizations of the same brightness distribution are observed. An optical layout of this 4-channel specklegraph is shown in Foy (1988a). The splitting of the images is intended to avoid the loss of signal in the central region of autocorrelations (or at high spatial frequencies in the Fourier space), as explained below.

3.2. The CP40 photon-counting detector

The CP40 (Blazit 1987; Foy 1988a) is an ICCD photon-counting detector. The image intensifier is a stack of a first generation electrostatic intensifier in front of a second generation microchannel intensifier. The electrostatic image intensifier provides the quantum efficiency and the spatial resolution of the camera while the microchannel image intensifier provides sufficient gain for allowing the detection of individual photons. The intensified image is divided into 4 quadrants by a fibre optics splitter. Each of the quadrants is read by a Thomson 384×288

© European Southern Observatory • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1994A&A...284..340T

CCD chip. The four video signals are sent through fibre optics cables to a photon centroiding processor which first digitises these signals and then computes on-line the centre of gravity of the photon-events. The short exposure time is equal to the frame read-out time which is 20 ms (this can be reduced down to 5 ms using a rotating shutter). The maximum flux per second is $\sim 10^5$ photons, limited by the SCSI controller of the acquisition system. The dark count rate is $\simeq 16$ events per frame (i.e. short exposure image) for the whole detector. The channels are numbered 0, 1, 2 and 3; channels 0 and 2 provide images at the same wavelength, so do channels 1 and 3.

4. Image distortion

The electrostatic image intensifier and especially the microchannel image intensifier of photon-counting ICCD produce an important cushion-shape distortion of the image. It is important to correct for this geometrical distortion because its effect is not isoplanatic and, consequently, is not removed by the deconvolution process.

4.1. Calibration of the distortion

On the CP40 camera, the image distortion is calibrated by imaging a regular grid of 30×30 spots onto the camera photocathode. The distortion is corrected by a two-dimensional polynomial whose coefficients are fitted using the grid spot positions. Each grid spot position is estimated by the centre of gravity of the spot into a long exposure image of the calibration grid. But, because the distortion is not a linear transformation, the measurement of a spot centre of gravity in the distorted image is corrupted. The correction calculated like this is only a first approximation. In order to improve the correction for the distortion, we recompute its coefficients by applying the following algorithm:

1. the centres of gravity of the spots are computed in the grid image corrected for the distortion using the previously estimated distortion correction polynomial,
2. the corresponding positions in the distorted image are estimated using a root finding routine to reverse the distortion correction polynomial,
3. a new set of coefficients is fitted using these positions.

These steps are repeated until convergence which generally occurs after 3 or 4 iterations. Using a third order polynomial for the correction leads to a residual distortion of 0.2 pixel RMS. Higher order polynomial would not improve the precision of the correction. Actually, the optical fibres between the two stages of the intensifier and in the optical reducer which feeds the CCDs are not perfectly packed, thus generating discontinuities in the image. A polynomial distortion correction can not correct for that. Finally, if the polynomial coefficients are properly modified, arbitrary image rotation can be applied by using the distortion correction. In the same manner, the number of samples in the corrected image can be decreased, but this is seldom desirable.

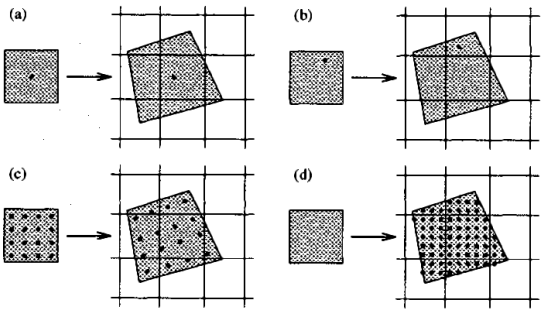


Fig. 1a–d. Schematic illustration of the distortion correction (the raw pixel is on the left hand side of the figures and its shape after correction is represented with the pixel matrice of the corrected image on the right hand side): **a** elementary correction, **b** correction with random sub-pixel, **c** weighted correction with raw sub-pixels, **d** weighted correction with corrected sub-pixels

4.2. Elementary correction for the distortion

The simplest way to correct for the image distortion is to tabulate a correction for which each pixel of the distorted image (a raw pixel) corresponds to a single pixel in the corrected image (a corrected pixel). Figure 1a shows how the position of this corrected pixel is settled: the central position of the raw pixel is corrected by applying the polynomial correction and then rounded back to the pixel precision to give the position of the corresponding pixel in the corrected image. But, with this kind of correction, one corrected pixel corresponds to a variable number of raw pixels. These variations produces an important discretisation bias, unless the pixel size in the corrected image is chosen to be much more important than the pixel size in the distorted image. This bias appears as structures which look like finger-prints in integrated frames (cf. Fig. 2), and stripes near the centre of autocorrelation of the frames. These stripes corrupt middle frequencies in the power spectrum. As this effect is not isoplanatic, it is undesirable and one should avoid it.

4.3. Random sub-pixel correction for the distortion

To solve this major drawback, we apply a *random sub-pixel correction* for each photon-event. Two uniform random numbers between −0.5 and +0.5 (one for each coordinate of the photon-event) are used to generate a random sub-pixel position which is added to the actual position of the photon-event. This position is then corrected by applying the polynomial correction and rounding it back to the pixel precision (cf. Fig. 1b). Statistically, this approach is believed to be correct but relies on the assumption that a photon-event detected within a raw pixel may have occurred at any position inside this raw pixel with a uniform probability. In other words, the non-uniformity of the camera sensitivity over one pixel due to the distortion must be negligible. On the other hand, this kind of correction generates some noise. In the mean power spectrum of the images, this

© European Southern Observatory • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1994A&A...284..340T

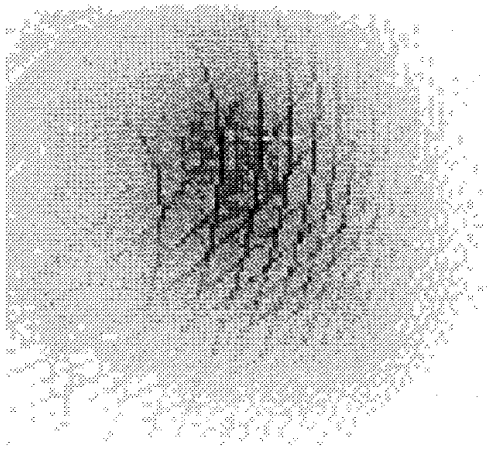


Fig. 2. Elementary correction for the distortion applied to integrated frames: the discretisation bias generates finger-prints like structures

noise increases with the spatial frequency and dominates over other sources of noise at high frequencies, thus lowering the effective cut-off frequency. The random correction is however of interest for a quick investigation of data for speckle interferometry purposes. At least, the noise generated by this method can be reduced by integrating several autocorrelations or cross-correlations of the same data set with a different random seed each time.

4.4. Weighted correction for the distortion

Another possibility is to apply a correction in which a single raw pixel corresponds to several weighted pixels (typically 3×3) in the corrected image. This kind of correction can be tabulated. The correction for a given raw pixel is computed by subdividing the raw pixel into sub-pixels for which the polynomial correction is applied and rounded. Then, the number of these sub-pixels corresponding to a given corrected pixel gives its according weight. Figure 1c shows this procedure using $4 \times 4 = 16$ raw sub-pixels. The accuracy of the method depends on the number of sub-pixels (currently, we use 256 sub-pixels for each distorted pixel). Strictly speaking, as with the random sub-pixel correction, the method is valid as long as the non-uniformity of the camera sensitivity over one pixel can be neglected. If this is not the case, one can correct for the distortion contribution of this non-uniformity by taking into account the spatial first derivatives of the polynomial correction. For the CP40, we have computed that non-uniformity due to the distortion between the opposite sides of a CCD pixel is less than 0.1% in the centre of the field and is less than 1% at the edges of the field. Consequently, we estimate that this correction is not useful. In all cases, the discontinuities in the image due to the fibre optic coupling can not be compensated by a polynomial correction for the distortion. Flat field measurement provides correction for the non-uniformity of the sensitivity of the camera between pixels. Another solution to take into account the non-uniformity of the camera sensitivity due to the distortion was used by Foy et al. (1993a) with the same detector (i.e. the CP40 camera). Their solution is illustrated in Fig. 1d and consists in subdividing the corrected pixel itself instead of the raw pixel. But, in order to facilitate the computation of the weights, they have assumed that the shape of the corrected raw pixel is a quadrilateral, the corners of which are given by applying the distortion correction to the corner positions of the raw pixel. After correction, they have found a residual non-uniformity ($\simeq 0.2\%$ RMS) between the pixels, partly due to their assumption.

When one uses such a correction for the distortion, the number of photon-events is approximatively multiplied by $3 \times 3 = 9$, so that the number of operations involved in photon-differencing methods is multiplied by 81. Thus, when using this method it may not be advantageous (depending on the number of photons per frame and the number of pixels per frame) to use such correlation techniques instead of fast Fourier transforming.

5. The photon-counting hole

Once detected by the photo-cathode and amplified by the two-stage intensifier tube, a single photon produces about 10^5 photons on the CCDs. The spread of this photon burst reduces the photo-cathode resolution ($\simeq 15\ \mu$m). Moreover, because the response of the image intensifiers is far from linear, the detection of simultaneous overlapping photon-events is not possible with ICCDs. The loss of such pairs of photon-events produces a hole (the so-called photon-counting hole) in the centre of the autocorrelation function of the images (see Fig 3a and ba). Other detectors like the PAPA or the MAMA camera and resistive or wedge-and-strip anode detectors have a dead-time which limits the shortest delay between the detection of two photon-events, the EBCCD may solve this problem.

5.1. Photon-counting hole model

A very simple model for this photon-counting defect allows us to predict the shape of this hole. We denote $\mathscr{D}_x$ the box used by the electronic centroiding device or numerical algorithm for the detection of a photon-event occurring at position x. At least, $\mathscr{D}_x$ should not be smaller than the support of a photon-event on the detector. Because of the finite sampling, even if this support is smaller than one pixel, $\mathscr{D}_x$ covers at least one pixel. Around the position x, no other photon-event can be detected at the same time in $\mathscr{D}_x$. Then, instead of the short exposure image $i_{\mathrm{P}}(x)$ which is the result of a Poisson process, the mean of which is the short exposure brightness distribution $i(x)$, the image $i_{\mathrm{D}}(x)$ given by the detector obeys the probability law:

$$\Pr\{i_{\mathrm{D}}(x) = 0\} = 1 - \Pr\{i_{\mathrm{D}}(x) = 1\} \tag{9}$$

$$\Pr\{i_{\mathrm{D}}(x) = 1\} = \Pr\{i_{\mathrm{P}}(x) = 1\} \prod_{y \in \mathscr{D}_x \setminus \{x\}} \Pr\{i_{\mathrm{P}}(y) = 0\}\,, \tag{10}$$

© European Southern Observatory • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1994A&A...284..340T

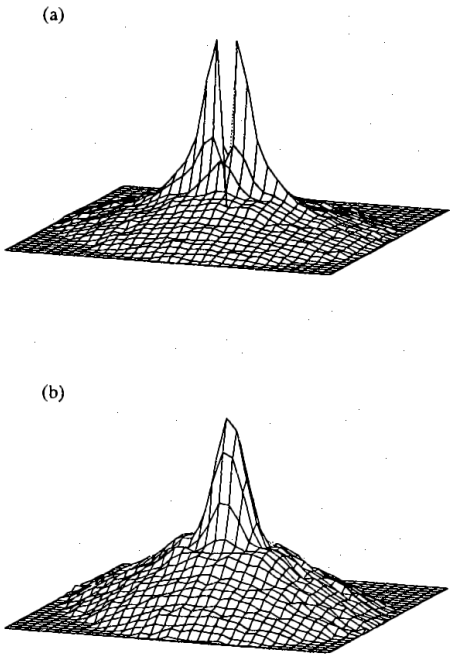


Fig. 3a and b. Speckle spike into the autocorrelation **a** and into the cross-correlation **b**

which assumes that the photon-counting device (or algorithm) is able to detect one event when *exactly one* photon-event occurs at position x and no photon-event occurs at $y \in \mathscr{D}_x \backslash \{x\} \Leftrightarrow \{y \in \mathscr{D}_x, y \neq x\}$. As the photon-counting detector works under very low flux, Eq. 10 would also be valid if the centroiding device is able to detect one event when *at least one* photon-event occurs at position x and no photon-event occurs at $y \in \mathscr{D}_x \backslash \{x\}$. In other words, at low fluxes the probability to get more than one photon at the same position is negligible compared to the probabilities to get zero or one photon. But we will see that it does not mean that such occurrence can be forgotten.

Putting Eq. 5 into Eq. 10 yields:

$$\Pr\{i_{\mathrm{D}}(x) = 1\} = i(x) \exp\left\{ - \sum_{y \in \mathscr{D}_x} i(y) \right\}. \tag{11}$$

In order to calculate the expected value of the autocorrelation of $i_{\mathrm{D}}(x)$, it is useful to introduce the probability law of the product $i_{\mathrm{D}}(y) i_{\mathrm{D}}(x+y)$. Noting that $i_{\mathrm{D}}(y) i_{\mathrm{D}}(x+y)$ can be 1 only if one event occurs at position y, one event occurs at position $x+y$ and no other event occurs around y and around $x+y$ (i.e. within $\mathscr{D}_y \cup \mathscr{D}_{x+y} \backslash \{y, x+y\}$), the probability law is:

$$\Pr\{i_{\mathrm{D}}(y) i_{\mathrm{D}}(x+y) = 0\} = 1 - \Pr\{i_{\mathrm{D}}(y) i_{\mathrm{D}}(x+y) = 1\} \tag{12}$$

$$\Pr\{i_{\mathrm{D}}(y) i_{\mathrm{D}}(x+y) = 1\} = \Pr\{i_{\mathrm{D}}(y) = 1\} \Pr\{i_{\mathrm{D}}(x+y) = 1\} \prod_{z \in \mathscr{D}_y \cup \mathscr{D}_{x+y} \backslash \{y, x+y\}} \Pr\{i_{\mathrm{D}}(z) = 0\}. \tag{13}$$

We also assume that $\mathscr{D}_x$ is the same over all the field, which is expressed by the shift invariance property:

$$y \in \mathscr{D}_x \Longleftrightarrow y - x \in \mathscr{D}_0. \tag{14}$$

Then Eq. 13 can be rewritten as:

$$\Pr\{i_{\mathrm{D}}(y) i_{\mathrm{D}}(x+y) = 1\} = g(y, x+y) i(y) i(x+y), \tag{15}$$

where, taking into account the invariance property of $\mathscr{D}_x$ (Eq. 14) and the probability law of $i_{\mathrm{D}}(x)$ (Eq. 9 and Eq. 11), the expression of $g(y, x+y)$ is:

$$g(y, x+y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in \mathscr{D}_0 \\ \exp\left\{ - \sum_{z \in \mathscr{D}_y \cup \mathscr{D}_{x+y}} i(z) \right\} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{16}$$

The expected value of the autocorrelation of the instantaneous detected frame is obtained by averaging two stochastic processes (i.e. the Poisson process and the turbulence process), putting Eq. 15 into Eq. 3 yields:

$$\langle i_{\mathrm{D}}(x) \otimes i_{\mathrm{D}}(x) \rangle = \sum_y \langle g(y, x+y) i(y) i(x+y) \rangle. \tag{17}$$

If the flux is sufficiently low to have $\sum_{y \in \mathscr{D}_x} i(y) \ll 1$ at every position x, then $g(y, x+y)$ simplifies to:

$$g(y, x+y) \simeq \begin{cases} 0 & \text{if } x \in \mathscr{D}_0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \text{ when } \sum_{y \in \mathscr{D}_x} i(y) \ll 1 \tag{18}$$

leading to the mean autocorrelation of the detected images:

$$\langle i_{\mathrm{D}}(x) \otimes i_{\mathrm{D}}(x) \rangle \simeq \begin{cases} 0 & \text{if } x \in \mathscr{D}_0 \\ \langle i(x) \otimes i(x) \rangle & \text{otherwise} \end{cases} \tag{19}$$

Thus, the mean autocorrelation of a frame is equal to the mean autocorrelation of the image brightness distribution except for $x \in \mathscr{D}_0$ where its value is zero. This is the so-called photon-counting hole. As a result, there is no photon bias in the autocorrelation of $i_{\mathrm{D}}(x)$. If the assumption leading to Eq. 19 can not be made (i.e. if the photon rate is too high), Eq. 17 predicts that inside $\mathscr{D}_0$ the mean autocorrelation is zero, while outside $\mathscr{D}_0$ the mean autocorrelation of the detected images is equal to the mean autocorrelation of the images brightness times an attenuation factor.

As assumed by Foy (1988b), the photon-counting defect can be modelled by multiplying the true mean autocorrelation by a hole function $h(x)$:

$$\langle i_{\mathrm{D}}(x) \otimes i_{\mathrm{D}}(x) \rangle = h(x) \langle i(x) \otimes i(x) \rangle, \tag{20}$$

© European Southern Observatory • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1994A&A...284..340T

where, when the photon flux is sufficiently low, $h(x)$ can be approximated by:

$$h(x) \simeq \begin{cases} 0 & \text{if } x \in \mathscr{D}_0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (21)$$

Even if the photon rate is too high to made the assumption leading to Eq. 18, $h(x)$ is zero inside $\mathscr{D}_0$. Multiplication by the *hole function* becomes a convolution in the Fourier domain. Since $h(x)$ is zero inside $\mathscr{D}_0$, it is not possible to reverse the process without additional information or assumption. This is the drama of the photon-counting hole.

In order to recover the resolution of the photo-cathode, the CP40 camera optics was designed to make each photon-event cover several CCD pixels ($\simeq 3 \times 3$ pixels), then centroiding electronics is used to locate the event with possible sub-pixel accuracy ($\simeq 0.25$ pixel, a so-called *logical pixel*). In our case, the photon-counting hole is therefore a 3 pixels width square. In fact, once the distortion is corrected, the shift-invariance of $\mathscr{D}_x$ is not preserved but the photon-counting hole is still a deep depression in the autocorrelation function as shown in Fig. 3a.

5.2. Cross-correlation versus autocorrelation

Due to the photon-counting hole, the power spectrum derived from the autocorrelation of frames shows large oscillations at high frequencies (see Fig. 3a). This effect considerably limits the effective cut-off frequency for speckle interferometry. The loss of information at high spatial frequency can be avoid with our specklegraph, since we can compute the cross-correlation function of the two channels recorded at the same wavelength.

Let $i_{\mathrm{D1}}(x)$ and $i_{\mathrm{D2}}(x)$ be two short exposure images recorded at the same time and wavelength by two different channels of our detector. Since $i_{\mathrm{D1}}(x)$ and $i_{\mathrm{D2}}(x)$ are two independent realisations of the same stochastic process, they both obey the probability law given by Eq. 9 and Eq. 11. Consequently, the expected value of the product $i_{\mathrm{D1}}(y)i_{\mathrm{D2}}(x+y)$ is:

$$\mathrm{E}\{i_{\mathrm{D1}}(y)i_{\mathrm{D2}}(x+y)\} = i(y)i(x+y)\exp\left\{-\sum_{z\in\mathscr{D}_y\cup\mathscr{D}_{x+y}} i(z)\right\}. \quad (22)$$

In the photon-counting case, the photon rate is very low and the exponential term is close to unity, Eq. 22 can be approximated by:

$$\mathrm{E}\{i_{\mathrm{D1}}(y)i_{\mathrm{D2}}(x+y)\} \simeq i(y)i(x+y). \quad (23)$$

In this case, the mean of the cross-correlation is approximatively equal to the mean of the brightness autocorrelation:

$$\langle i_{\mathrm{D1}}(x) \otimes i_{\mathrm{D2}}(x)\rangle \simeq \langle i(x) \otimes i(x)\rangle\,. \quad (24)$$

Figure 3b shows that the photon-counting hole no longer corrupts the cross-correlation, the first Airy ring is nicely visible which guarantees the presence of high resolution information. It is worth noting that there is no bias term in Eq. 24, therefore, the cross-correlation of frames between two channels is an unbiased estimate of the autocorrelation. The ability of cross-spectrum techniques to compensate for the photon noise bias was demonstrated, in the case of speckle interferometry and differential speckle interferometry, by Aime et al. (1986) and, in the case of speckle masking (i.e. bispectral analysis), by Hofmann & Weigelt (1987).

5.3. Symmetrisation of cross-correlation

Because of the photon noise, unlike autocorrelation, cross-correlation is not a symmetric function. The two mean cross-correlations $\langle i_{\mathrm{D1}}(x) \otimes i_{\mathrm{D2}}(x)\rangle$ and $\langle i_{\mathrm{D2}}(x) \otimes i_{\mathrm{D1}}(x)\rangle$ are two different estimates of $\langle i(x) \otimes i(x)\rangle$. The signal to noise ratio for the measurement of the mean autocorrelation of the brightness distribution can be increased by a factor $\sqrt{2}$ if these two estimates are averaged. This is equivalent to extracting the symmetrical part (even part) of one of these mean cross-correlations. In the perfect case, the odd part of the cross-correlation is only due to the photon noise. In fact, windowing of the speckle pattern due to the finite field of view also contributes to the odd part of the cross-correlation. The real part of the cross-correlation spectrum is the Fourier transform of the even part of the cross-correlation, so it estimates the power spectrum of the images; the imaginary part is due to photon noise and to bias.

Unfortunately, there is a shift of the image between the two channels. This shift is not constant: it depends on the position of the grating of the specklegraph (i.e. the selected wavelength), on the voltages of the intensifiers and also on time because of a drift of the electronics which read the CCDs. One has to correct for this shift, say κ_0, before extracting the even part of the cross-correlation or, equivalently, the real part of the cross-correlation spectrum. In order to estimate the shift, the centre of symmetry of the cross-correlation must be settled.

It is advantageous to correct for the shift in the Fourier domain because arbitrary precision is possible, while only pixel precision is possible in the image domain. For sake of simplicity, we denote $c_0(x)$ the mean cross-correlation and $C_0(u)$ its Fourier transform:

$$\begin{aligned} & c_0(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle i_{\mathrm{D1}}(x) \otimes i_{\mathrm{D2}}(x)\rangle \\ \stackrel{\mathrm{FT}}{\rightleftharpoons} \quad & C_0(u) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle I_{\mathrm{D1}}(u) I^*_{\mathrm{D2}}(u)\rangle\,, \end{aligned} \quad (25)$$

and we also denote c_κ the shifted version of c_0 (with a shift κ):

$$\begin{aligned} & c_\kappa(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} c_0(x-\kappa) \\ \stackrel{\mathrm{FT}}{\rightleftharpoons} \quad & C_\kappa(u) \stackrel{\mathrm{def}}{=} C_0(u)\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi\kappa u}, \end{aligned} \quad (26)$$

where the exact sign of the argument of the complex exponential depends on the definition chosen for the Fourier transform. Then, if κ is the estimate of the position of the centre, the corresponding best measure for the power spectrum is the real part of the mean cross-correlation spectrum:

$$\mathrm{Re}\{C_\kappa(u)\} = \cos(2\pi\varepsilon u)\left\langle |I(u)|^2 \right\rangle + \sin(2\pi\varepsilon u)\mathrm{Noise}, \quad (27)$$

© European Southern Observatory • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1994A&A...284..340T

Table 1. Attenuation of the estimate of the power spectrum when the centre of cross-correlation is misestimated

position error ε (in pixel)	attenuation at $u = 0.25$ pixel^{-1}
0.1	1%
0.2	5%
0.3	11%
0.4	19%
0.5	29%

where $\varepsilon = \kappa - \kappa_0$ is the error in the estimate of the position of the centre. The worse is the estimate of the centre position, the more the measurement of the power spectrum is corrupted by noise and bias and attenuated by the factor $\cos(2\pi\varepsilon u)$. This effect reduces the signal to noise ratio and also may lead to spurious artifacts in the estimate of the object power spectrum as the shift may vary between observations of the reference and of the object. Table 1 shows that the attenuation at half the Nyquist frequency (i.e. for $u = 0.25$ pixel^{-1}) is important unless the error in the estimated position of the centre is less than a tenth of a pixel. Sub-pixel precision in the estimation of the centre is therefore absolutely necessary. Figure 4a and b shows the residual $\cos(2\pi\varepsilon u)$Noise in the imaginary parts of $C_\kappa(u)$ for different positions error (i.e. $\varepsilon \simeq 0.4$ pixel and $\varepsilon \leq 0.1$ pixel), the remaining central structure is due to windowing bias.

In order to get the required accuracy in the measurement of the position of the cross-correlation centre, we have tested several methods. Minimising the total squared values of the imaginary part of the cross-correlation spectrum should be a good approach if only noise contributes to this part. In our case, the bias due to windowing was clearly too important and the method was not appropriate (even when the spectrum was band-filtered to limit the effects of this bias). Unfortunately, the centre of gravity of the speckle spike in the cross-correlation gives a position which is not reliable because it depends too much on the size chosen for the support of the spike. The brightest pixel in the cross-correlation gives the position of the centre with an accuracy of one pixel. This position was found to be more reliable than the one given by the other methods, but unless oversampling is very large, its precision is not sufficient.

Thanks to the sampling theorem, it is possible to find the position of this maximum with a precision limited only by the noise. We have used a conjugate gradient routine for finding the shift κ which maximises the value of the mean cross-correlation at its centre. This value is $c_\kappa(0)$ and is obtained using Eq. 26. This method gives an estimate of the position of the centre of the mean cross-correlation which is accurate and reliable as well. Best results are obtained when noise outside the telescope cut-off frequency is filtered in $\langle I_{D1}(u) I^*_{D2}(u) \rangle$.

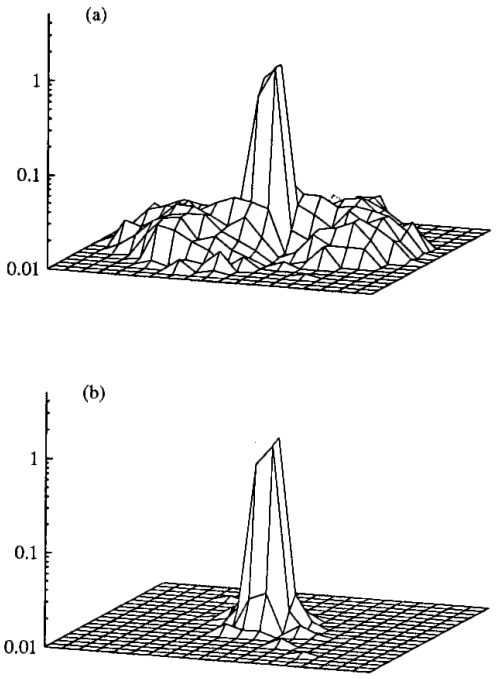


Fig. 4a and b. Absolute value of the imaginary parts of the spectra of cross-correlations centered on its maximum with an error of 0.4 pixel **a** and with an error less than 0.1 pixel **b**

5.4. Experimental results

The results presented here are all based on observations of the unresolved star SAO 93 887 at the 3.6 m CFH telescope on November the 2nd, 1989. We have only used the channels number 1 and 3 of the CP40 camera corresponding to the Hα wavelength. The total exposure time was 16 min (i.e. 48000 frames of 20 ms exposure time) and the photon rate was $\simeq 51$ photons per short exposure frame per channel.

Figure 5 compares the spectra of cross-correlation when symmetrisation is made with 1 pixel precision, and when it is made with 0.1 pixel precision using the resampling method. Figure 5 clearly shows the gain due to the use of an accurate position of the centre, the position error was $\simeq 0.4$ pixel and mainly results in a limitation of the effective cut-off frequency at $\simeq 60\%$ of the diffraction limit for the deconvolution process as shown in Fig. 6b.

In order to get the effective cut-off frequency when performing deconvolution of the power spectrum, we have used a data set of 48 000 frames with $\simeq 51$ photon-events each from the unresolved star SAO 93 887. Two different – and statistically independent – data sets were made from this single set: the evenly numbered frames on the one hand and the oddly numbered frames on the other hand. We expect that the fluctuations of the turbulence statistics between the so-build data sets are the

© European Southern Observatory • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1994A&A...284..340T

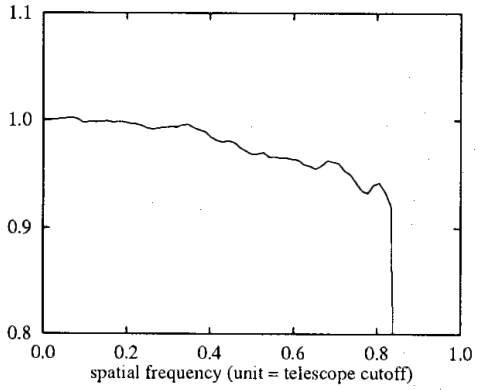


Fig. 5. Radial profile of the ratio of the power spectrum estimated from symmetrisated cross-correlation with 1 pixel accuracy divide by the power spectrum estimated from symmetrisated cross-correlation with 0.1 pixel accuracy (for frequencies higher than 85% of the telescope cut-off, the data are too noisy and the corresponding points are not showed)

same. Each data set provides a different estimate of the power spectrum, because the remnance between consecutive frames is negligible. One estimate is used as the reference for the other estimate leading to a deconvolved power spectrum which should be flat. The fact that the used object is unresolved is important to insure that there is no degradation of the signal-to-noise ratio due to the modulation of the two power spectra by the object power spectrum. Figure c shows that the effective cut-off frequency is less than 50% when the deconvolved power spectrum is derived from the autocorrelation. This effective cut-off frequency is considerably increased when compensating for the photon-counting hole defect. It should be noticed that, since the degradations shown in Fig. 6a and Fig. 6b is due to bias, it cannot be improved by using more data, this is not the case when the bias is removed as in Fig. 6c.

5.5. Other methods for compensating for the photon-counting hole

Hofmann (1993) has proposed another way to correct for the photon-counting hole effect. His method necessitates large oversampling so that the photon-counting hole is much smaller than the correlation length of the autocorrelation (i.e. the diameter of the speckle spike). In this case, he assumes that $\langle i(x) \otimes i(x) \rangle$ is almost constant within the photon-counting hole. Then, it is possible to compensate for the photon-counting defect if the hole function, $h(x)$, can be measured. Either $H(u)$ is estimated on the power spectrum $\left\langle |I_{\mathrm{D}}(u)|^2 \right\rangle$ outside the cut-off-frequency, or $h(x)$ is calibrated by using another data set from an artificial light source.

Foy (1988b, 1993b) has interpolated the values of the autocorrelation within the photon-counting hole by fitting a gaussian on the residual speckle spike around the hole. This also neces-

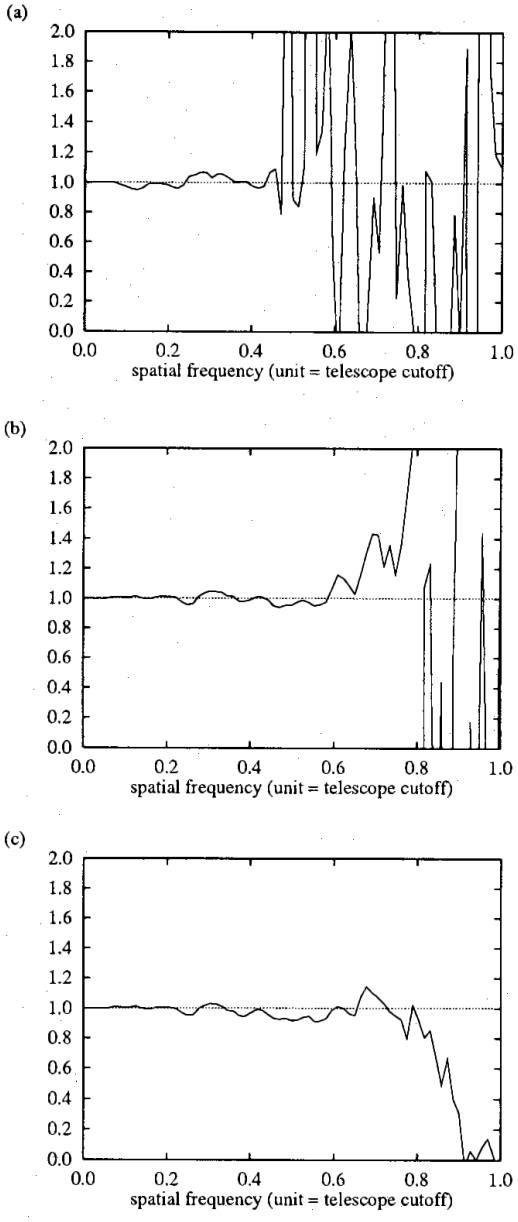


Fig. 6a–c. Radial profile of the power spectrum of the evenly numbered frames divided by the power spectrum of the oddly numbered frames. From top to bottom, the power spectrum is estimated **a** from the autocorrelation, **b** from the cross-correlation centered with a precision of 1 pixel, **c** from the cross-correlation centered with a precision of 0.1 pixel

© European Southern Observatory • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1994A&A...284..340T

sitates that the photon-counting hole is much smaller than the correlation length of the autocorrelation.

Both these methods compensate for the photon-counting hole directly on the autocorrelation and, so, necessitate only one image channel. This leads to a gain of $\sqrt{2}$ in the signal to noise ratio of the measured power spectrum compared to our method based on symmetrised cross-correlation. On the other hand, these techniques yield approximative interpolation of the speckle spike within the photon-counting hole, resulting in an effective cut-off frequency smaller than the diffraction limit. Moreover, the needed large oversampling of images reduces the field of view accordingly.

As far as we know, the multi-channel ability of the instrumentation which we use is unique. Usually, detectors only provide one image channel. In this case, it is possible to use cross-correlation of consecutive frames in order to compensate for the photon-counting hole defect. This necessitates the time delay between consecutive frames to be much shorter than the evolution time of the atmospheric turbulence.

6. Other artifacts

The most important factors leading to degradation of data quality are the distortion and the photon-counting hole, but there are other artifacts which may be specific to our instrumentation.

Due to reflections of the beam between the splitting prism of the specklegraph and the entrance window of the camera, the edges of the image field are corrupted by more or less bright reflections (depending on the wavelength). Moreover, the speckle pattern motion due to atmospheric tilt and telescope oscillations may produce some clipped frames. Thus we have to window the CCD in order to remove reflection and we reject those frames whose centre of gravity is too close to the edges of the window.

In addition to the so-called photon-counting hole, the centroiding electronics may produce some doubling of photon-events. These spurious photons are easily detected as they appear as pairs of photons closer than 2 pixels. At first we have chosen to remove these pairs of spurious photons. But it is more appropriate to only delete one of the two photons or to replace them by one photon at the middle position. We now use the later solution.

7. Conclusion

We have described in details how an important defect of photon-counting detectors such as the photon-counting hole can be compensated for by using symmetrised cross-correlations instead of autocorrelations. The efficiency of this approach was demonstrated with real data. Since it does not require large oversampling of the speckle pattern, it allows to use wider field of view, compared to the methods used by Foy (1988b) and proposed by Hofmann (1993). An other advantage of using cross-correlations is that correlations between the pixels of a single CCD are avoided.

The classical speckle interferometry provides excellent means for checking the data quality after the compensation of the photon-counting defect. Then, the data are ready to be processed by more sophisticated speckle interferometric techniques. For instance, with our instrumentation, the correction for the photon-counting hole by the use of the cross-correlation can be extended to the Knox-Thompson method for reconstruction of images. In a future paper, we will present reconstructed images using this technique. For triple correlation techniques, we need to devote three different channels (instead of two) for imaging at the same wavelength.

We have also explained several methods to correct for the image distortion in the photon-counting case, avoiding discretisation bias. Some of these techniques can be used with other detectors than photon-counting detectors.

Acknowledgements. I thank R. Foy for his constant support and R. Foy, M. Tallon and N. Devaney for stimulating discussions and their careful reading of this paper.

References

Aime C., Petrov R. G., Martin F. et al., 1986, Opt. Eng. 25, p. 716
Blazit A., 1976, Thesis, University of Paris (France)
Blazit A., 1987, PhD thesis, University of Nice (France)
Cuby J.-G., 1988, Ann. Phys. 13, p. 1
Cuby J.-G., et al., 1990, SPIE 1235, p. 294
Dainty J. C., Greenaway A. H., 1979, J. Opt. Soc. Am. 69, p. 786
Foy R., Barranne A., Bentolila C., et al., 1993 (to be submitted)
Foy R., Blazit A., Bonneau D., Foy F.-C., 1993 (to be submitted)
Foy R., 1988, The Photon-Counting Camera CP40. In: Robinson L.B. (eds.) Instrumentation for Ground-Based Optical Astronomy, Present and Future. Springer-Verlag, New York, p. 589
Foy R., 1988, Speckle Imaging Review. In: Robinson L.B. (eds.) Instrumentation for Ground-Based Optical Astronomy, Present and Future. Springer-Verlag, New York, p. 345
Hofmann K.-H., Weigelt G., 1987, Appl. Opt. 26, p. 2011
Hofmann K.-H., 1993, J. Opt. Soc. Am. A 10, p. 329
Knox K. T., 1976, J. Opt. Soc. Am. A 66, p. 1236
Knox K. T., Thompson B. J., 1974, ApJ 193, L45
Labeyrie A., 1970, A&A 6, p. 85
Lohmann A. W., Weigelt G., Wirnitzer B., 1983, Appl. Opt. 22, p. 4028
Richard J.-C., et al., 1990, SPIE 1338, p. 241
Roddier F., 1988, Physics Reports 170, p. 97
Wirnitzer B., 1985, J. Opt. Soc. Am. A 2, p. 14

This article was processed by the author using Springer-Verlag LaTeX A&A style file version 3.

© European Southern Observatory • Provided by the NASA Astrophysics Data System

Annexe B

Strict a priori constraints for maximum likelihood blind deconvolution

E. Thiébaut & J.-M. Conan, 1995, J. Opt. Soc. Am. A. 12, 485–492.

Strict *a priori* constraints for maximum-likelihood blind deconvolution

E. Thiébaut

Observatoire de Lyon, 9, avenue Charles André, 69561 Saint Genis Laval Cedex, France

J.-M. Conan

Office National d'Etude et de Recherche Aérospatiale, B.P. 72, 92322 Châtillon Cedex, France, and Laserdot, Route de Nozay, 91460 Marcoussis, France

Received January 19, 1994; revised manuscript received August 22, 1994; accepted September 12, 1994

We present a maximum-likelihood approach to improve blind deconvolution of an image. Blind deconvolution is performed through the minimization of an error function by use of the conjugate gradient method, as suggested by Lane [J. Opt. Soc. Am. A **9,** 1508 (1992)]. We show how to implement strict constraints, such as image positivity, using a reparameterization. As an example, the point-spread function can be described by phase aberrations in the case of speckle imaging. The improvement brought by the use of strict rather than loose constraints is demonstrated on both simulated and real data. Different noise levels and object types are considered.

1. BLIND DECONVOLUTION

A. History

Generally an observed image $g(\mathbf{x})$ can be described as a convolution of the object brightness distribution $f(\mathbf{x})$ by a point-spread function (PSF) $h(\mathbf{x})$ accounting for the acquisition chain and the transfer medium:

$$g(\mathbf{x}) = h * f(\mathbf{x}) \overset{\text{FT}}{\rightarrow} G(\mathbf{u}) = H(\mathbf{u})F(\mathbf{u}), \tag{1}$$

where $\mathbf{x}$ and $\mathbf{u}$ are the two-dimensional position and spatial frequency, respectively, $\overset{\text{FT}}{\rightarrow}$ stands for Fourier transformation, and the uppercase letters denote the Fourier transforms of the corresponding lowercase letters.

For recovery of the object brightness distribution $f(\mathbf{x})$ the usual procedure consists in deconvolving $g(\mathbf{x})$ (e.g., by means of Lucy–Richardson's method[1,2]), but this requires knowledge of the PSF $h(\mathbf{x})$. When no reliable measurement of $h(\mathbf{x})$ is available, one can wonder whether it is possible to obtain both $f(\mathbf{x})$ and $h(\mathbf{x})$ given their convolution product $g(\mathbf{x})$. This problem is known as blind deconvolution.[3] Lane and Bates[4] have demonstrated the theoretical feasibility of blind deconvolution in the multidimensional case (at least two dimensions are needed): they deduce from the so-called zero sheet of $g(\mathbf{x})$ the zero sheets of $f(\mathbf{x})$ and $h(\mathbf{x})$ that uniquely characterize the original image and the PSF. Using their algorithm, they successfully deconvolved simulated data. However, in practice, they encountered difficulties that were due to numerical rounding errors and to the noise that corrupts the data.

Ayers and Dainty[5] have suggested a practical method capable of blind deconvolution of noisy data. They used a Gerchberg–Saxton-like algorithm[6] for which knowledge of the positivity and of the convolution product of the two functions to be estimated is used as a constraint. However, such a method becomes unstable for a fairly large amount of noise.

Davey *et al.*[7] have improved the method of Ayers and Dainty by the use of Wiener filtering. They have also used support constraints instead of positivity constraints in the image plane, permitting the reconstruction of complex-valued, as well as real-valued, images.

Holmes[8] has performed blind deconvolution of images following Poisson statistics using a maximum-likelihood approach. His algorithm consists of two simultaneous Lucy–Richardson-like deconvolutions[1,2] to obtain f and h. Strict positivity is therefore ensured. Holmes has also investigated the effect of further explicit constraints such as symmetry or band-limited constraints for the PSF.

In the case of turbulence-degraded images Schulz[9] has improved the approach of Holmes.[8] He has implemented additional constraints such as phase aberration to describe the PSF. He has also used several short-exposure images with different PSF's but the same object—the so-called multiframe blind deconvolution.

To our knowledge, one of the most robust approaches was suggested by Lane[10]: he has performed blind deconvolution by minimizing a penalizing function that measures the deviation of $h * f$ from the observed convolution produce g and the violation of positivity and possibly of support constraints for f and h.

B. Our Approach

When we were dealing with substantially noisy data, it appeared to us that it was crucial to gain in robustness by combining the rigor of Holmes' maximum-likelihood approach[8] and the flexibility of Lane's method.[10]

The first problem to consider in order to apply blind deconvolution to real data is the noise that contaminates the measurements. As one does not want to fit this noise, then, rather than searching for an exact solution $h * f = g$, one must tolerate any model $h * f$ consistent with the observed image g. Thus the maximum-

0740-3232/95/030485-08$06.00 ©1995 Optical Society of America

486 J. Opt. Soc. Am. A/Vol. 12, No. 3/March 1995 E. Thiébaut and J.-M. Conan

likelihood formalism will give the framework of our approach (Section 2 below).

In order to be able to solve the blind deconvolution problem numerically, one usually uses a suitable discrete basis of functions to represent f, h, and g (e.g., pixel intensities). In this case, if the same basis is used for f, h, and g, there are more parameters to fit than available measurements: the problem is ill conditioned and needs to be regularized. The solution consists in reducing the number of free parameters and/or taking into account more information. For instance, since a brightness distribution is a positive function, any solution with some negative values is unphysical. Therefore, one has, at least, the *a priori* information that f and h are positive. Although the improvement brought by positivity cannot be interpreted in terms of reduction of the number of degrees of freedom, it may be sufficient to ensure the unicity of the solution.[5] The maximum-likelihood formalism permits us to incorporate *a priori* constraints through the probabilities of f and h. Following Lane,[10] the *a priori* constraints can be loosely enforced by means of a penalizing function (Section 3 below). We expect, however, better behavior of the blind deconvolution algorithm if the *a priori* constraints are strictly enforced, as explained in Section 4. In the case of turbulence-degraded short-exposure images we reduce the number of degrees of freedom for the blind deconvolution process by the use of a phase aberration description for the PSF, as explained in Subsection 4.B.2.

Finally, we illustrate in Section 5 the efficiency of our additional constraints on simulated data and on real data.

2. MAXIMUM LIKELIHOOD WITH *A PRIORI* CONSTRAINTS

A. General Formalism

We suggest solving the blind deconvolution problem by a maximum-likelihood approach: we maximize the probability $\Pr(h * f \mid g)$ of the model $h * f$ given the measurements g and some *a priori* information on f and h. The Bayes theorem leads to

$$\Pr(h * f \mid g) = \frac{\Pr(g \mid h * f)\Pr(f)\Pr(h)}{\Pr(g)}. \tag{2}$$

Since $\Pr(g)$ does not depend on the model, maximizing $\Pr(h * f \mid g)$ with respect to f and h is equivalent to minimizing

$$\epsilon = -\log[\Pr(g \mid h * f)] - \log[\Pr(f)] - \log[\Pr(h)].$$

For the sake of simplicity, we rewrite ϵ as

$$\epsilon = \epsilon_g + \epsilon_f + \epsilon_h, \tag{3}$$

where

$$\epsilon_g = -\log \Pr(g \mid h * f)], \tag{4}$$

$$\epsilon_f = -\log \Pr(f)], \tag{5}$$

$$\epsilon_h = -\log \Pr(h)]. \tag{6}$$

The minimization of ϵ_g constrains the model $f * h(\mathbf{x})$ to be consistent with the observed image $g(\mathbf{x})$; this ensures robustness with respect to the noise. The two other quantities, ϵ_f and ϵ_h, permit us to incorporate *a priori* knowledge about the object brightness distribution and the PSF as shown below.

B. Conjugate Gradient Minimization

As we stated in Subsection 2.A above, the blind deconvolution is performed through the minimization of an error function ϵ. Following Lane,[10] we have performed this minimization using the conjugate gradient method. The choice of conjugate gradient is dictated by its efficiency in terms of both convergence and memory allocation when the number of parameters is of the order of the number of pixels in the image. The drawback of the conjugate gradient approach is that it requires the analytical expression of the gradient of the error to be minimized with respect to the parameters. Using the following set of equations, one can easily derive those gradients.

For convenience, we denote the gradient of ϵ with respect to a sampled function $f(\mathbf{x}_i)$ by

$$d_f{}^{\epsilon}(\mathbf{x}_i) \doteq \frac{\partial \epsilon}{\partial f(\mathbf{x}_i)}, \tag{7}$$

where $\mathbf{x}_i$ stands for the discrete spatial coordinates (in the same manner we will denote the discrete spatial frequency by $\mathbf{u}_j$). As we demonstrate in Appendix A below, the discrete Fourier transform $D_f{}^{\epsilon}(\mathbf{u}_j)$ of $d_f{}^{\epsilon}(\mathbf{x}_i)$ is simply

$$D_f{}^{\epsilon}(\mathbf{u}_j) = \frac{1}{N^2}\left\{\frac{\partial \epsilon}{\partial\ \mathrm{Re}[F(\mathbf{u}_i)]} + j\,\frac{\partial \epsilon}{\partial\ \mathrm{Im}[F(\mathbf{u}_i)]}\right\}, \tag{8}$$

where Re and Im stand for the real and imaginary parts, respectively, and N^2 is the number of samples. The discrete Fourier transform of the gradient of ϵ with respect to the components of a convolution product can then be rewritten as

$$D_f{}^{\epsilon}(\mathbf{u}_j) = H^*(\mathbf{u}_j) D_{h*f}{}^{\epsilon}(\mathbf{u}_j), \tag{9}$$

$$D_h{}^{\epsilon}(\mathbf{u}_j) = F^*(\mathbf{u}_j) D_{h*f}{}^{\epsilon}(\mathbf{u}_j). \tag{10}$$

C. Definition of ϵ_g

When the statistical nature of the noise is known, it is easy to define ϵ_g following Eq. (4). For instance, if the observed image is the result of a Poisson process, then

$$\epsilon_g = \sum_i h * f(\mathbf{x}_i) - \sum_i g(\mathbf{x}_i)\log[h * f(\mathbf{x}_i)], \tag{11}$$

where we have omitted the term $\sum_i \log[g(\mathbf{x}_i)!]$ since it does not depend on the model. Otherwise, if the noise follows a Gaussian law, then

$$\epsilon_g = \frac{1}{2}\sum_i \left[\frac{h * f(\mathbf{x}_i) - g(\mathbf{x}_i)}{\sigma(\mathbf{x}_i)}\right]^2, \tag{12}$$

where $\sigma(\mathbf{x}_i)$ is the standard deviation of $g(\mathbf{x}_i)$.

If the statistics of the noise is unknown, one can default to the least-squares approach with

$$\epsilon_g = \sum_i [h * f(\mathbf{x}_i) - g(\mathbf{x}_i)]^2. \tag{13}$$

In this case robustness with respect to the noise is preserved, although the solution obtained will no longer cor-

respond to the maximum likelihood unless the noise is a uniform Gaussian one. For the sake of generality and simplicity, we will restrict ourselves to this definition of ϵ_g hereinafter. Thanks to Parseval's theorem, ϵ_g is also given by

$$\epsilon_g = N^2 \sum_j |F(\mathbf{u}_j)H(\mathbf{u}_j) - G(\mathbf{u}_j)|^2. \tag{14}$$

The exact expression of Parseval's theorem for a discrete Fourier transform depends on the definition used for the discrete Fourier transform (the reader is referred to Appendix A below for our choice of conventions). The discrete Fourier transform of the gradient of the convolution error ϵ_g with respect to f then reads as

$$D_f{}^{\epsilon g}(\mathbf{u}_j) = 2H^*(\mathbf{u}_j)[F(\mathbf{u}_j)H(\mathbf{u}_j) - G(\mathbf{u}_j)]. \tag{15}$$

3. LOOSE *A PRIORI* CONSTRAINTS

If the *a priori* constraints are exactly verified (e.g., positivity), then, in order to preserve the maximum-likelihood approach, one should define the probabilities of f and h as, e.g.,

$$\Pr(f) = \begin{cases} 0 & \text{if } f \text{ violates the constraints} \\ 1/\Omega_f & \text{otherwise} \end{cases}, \tag{16}$$

where $1/\Omega_f$ ensures that $\sum \Pr(f) = 1$. Such probabilities cannot, however, be incorporated by means of ϵ_f or ϵ_h as defined in Eqs. (5) and (6). Nevertheless, following Lane,[10] one can take into account the *a priori* knowledge by defining ϵ_f and ϵ_h as penalizing functions that measure the deviation from the constraints. Following the least-squares approach, we can achieve this by defining ϵ_f and ϵ_h as the quadratic sum of pixel intensities at which the constraints are violated:

$$\epsilon_f = \sum_i \xi_f(\mathbf{x}_i) f(\mathbf{x}_i)^2, \tag{17}$$

$$\epsilon_h = \sum_i \xi_h(\mathbf{x}_i) h(\mathbf{x}_i)^2, \tag{18}$$

where, e.g.,

$$\xi_f(\mathbf{x}_i) = \begin{cases} 0 & \text{if } f(\mathbf{x}_i) \text{ violates the constraints} \\ \alpha_f & \text{otherwise} \end{cases}, \tag{19}$$

in which α_f is a positive parameter used to set the weight of the constraints. If one wants to enforce positivity and support, the *a priori* constraints are violated if $f(\mathbf{x}_i) < 0$ or if $\mathbf{x}_i \notin$ support of f.

Usually, there is an instrumental cutoff frequency, beyond which $H(\mathbf{u})$ is known to be zero. In the same manner in which a support constraint can be enforced for the PSF, we can add a band-limited constraint by redefining ϵ_h as

$$\epsilon_h = \sum_i \xi_h(\mathbf{x}_i) h(\mathbf{x}_i)^2 + \sum_j \zeta_h(\mathbf{u}_j) |H(\mathbf{u}_j)|^2, \tag{20}$$

with

$$\zeta_h(\mathbf{u}_i) = \begin{cases} \beta_h & \text{if } \|\mathbf{u}_j\| > u_c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \tag{21}$$

where u_c is the cutoff frequency and β_h is a weight used to adjust the strength of the band-limited constraint.

Extrapolating the values of $F(\mathbf{u}_j)$ beyond u_c is known as superresolution and should be avoided.[11] This can be achieved with a definition of ϵ_f similar to Eq. (20). Moreover, in severe noise conditions, the problem may remain ill conditioned despite the enforcement of all the above constraints. According to Lannes *et al.*,[11] the effective cutoff frequency of the reconstructed image may need to be lowered (e.g., with a band-limited constraint). In other words, only a smoothed version of f can be recovered with confidence.

Furthermore, as noted by Holmes,[8] the use of band-limited constraints avoids the trivial and undesirable solution $\{f(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})\} = \{g(\mathbf{x}), \delta(\mathbf{x})\}$, where $\delta(\mathbf{x})$ is the Dirac function.

4. STRICT *A PRIORI* CONSTRAINTS

The enforcement of constraints as described in Section 3 above presents at least two disadvantages. First, as the constraints are loosely enforced, some deviation from these constraints is tolerated that is inadequate for properties known to be exactly verified (e.g., positively). In order to limit the discrepancy with respect to exact constraints, one can choose higher weights (α_f, α_h, β_h, ...) for the loose *a priori* constraints. This leads to the second disadvantage: since the penalizing functions do not directly derive from probabilities, there is no rigorous way to set the values of those weights and the maximum-likelihood approach is broken. Furthermore, since the solution depends on the choice of the weights for the loose constraints, the corresponding algorithm is not robust.

To overcome these disadvantages and to gain in robustness, we suggest changing the parameterization of both f and h so that constraints such as positivity are implicitly guaranteed. This turns out to be equivalent to incorporating the exact probability given in Eq. (16) in the maximum-likelihood formalism.

Finally, there are still many pairs of positive functions of which the convolution product is compatible with $g(\mathbf{x})$. For instance, if $\{f(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})\}$ is the expected solution, $\{h(\mathbf{x}), f(\mathbf{x})\}$, $\{\lambda f(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})/\lambda\}$ (with $\lambda > 0$), and $\{f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), h(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)\}$ (where $\mathbf{x}_0$ is an arbitrary shift) are solutions as well. These degeneracies prevent one from distinguishing between the object brightness distribution and the PSF and from measuring their energy and position. To fix these degeneracies (except for the position), we use a different representation for f and h and we force the PSF to have unit energy.

A. Strict Constraints for the Object Brightness Distribution

Following Biraud's approach,[12] in order to have a positive object brightness distribution, we rewrite $f(\mathbf{x}_i)$ as

$$f(\mathbf{x}_i) = \psi_f(\mathbf{x}_i)^2. \tag{22}$$

Then the gradient of the error function ϵ with respect to the new set of parameters is

$$d_{\psi f}{}^{\epsilon}(\mathbf{x}_i) = 2\psi_f(\mathbf{x}_i) d_f{}^{\epsilon}(\mathbf{x}_i), \tag{23}$$

where $d_f{}^{\epsilon}(\mathbf{x}_i)$ comes from the inverse discrete Fourier transform of Eq. (9).

488 J. Opt. Soc. Am. A/Vol. 12, No. 3/March 1995 E. Thiébaut and J.-M. Conan

Other reparameterizations that ensure the positivity of $f(\mathbf{x})$ are possible {e.g., $f(\mathbf{x}) = \exp[\psi_f(\mathbf{x})]$ and $f(\mathbf{x}) = |\psi_f(\mathbf{x})|$}. We have limited ourselves to the reparameterization given in Eq. (22). Moreover, we can use this reparameterization to enforce a strict support constraint: it is sufficient to start with an estimate of the object brightness distribution whose pixel values are set to zero outside the support [this property comes from the expression of the gradient in Eq. (23) and from the fact that the conjugate gradient is a linear combination of the successive gradients]. This can be a disadvantage if, by accident, some pixel intensities become zero, but this is highly unlikely.

B. Strict Constraints for the Point-Spread Function

1. Energy and Positivity

A PSF is positive and has unit total energy. The following reparameterization ensures such properties for h:

$$h(\mathbf{x}_i) = \frac{\psi_h(\mathbf{x}_i)^2}{\sum_{i'} \psi_h(\mathbf{x}_{i'})^2} \cdot \tag{24}$$

Then the gradient of the error function ϵ with respect to the new set of parameters is

$$d_{\psi h}{}^{\epsilon}(\mathbf{x}_i) = 2\,\frac{\psi_h(\mathbf{x}_i)[1 - h(\mathbf{x}_i)]}{\sum_{i'} \psi_h(\mathbf{x}_{i'})^2}\, d_h{}^{\epsilon}(\mathbf{x}_i)\,. \tag{25}$$

With such a reparameterization, ϵ_h in Eq. (20) reduces to the band-limited term.

2. Phase Aberrations

Blind deconvolution is of interest in the case of speckle imaging, in which the PSF can be described by phase aberrations in the pupil plane.[9,13] When we use the discrete Fourier transform approximation, the PSF becomes

$$h(\mathbf{x}_i) = \left| \sum_j P(\mathbf{u}_j) \exp\left\{ j\left[\frac{2\pi \mathbf{u}_j \mathbf{x}_i}{N} - \phi(\mathbf{u}_j) \right] \right\} \right|^2, \tag{26}$$

where $P(\mathbf{u}_j)$ is the normalized amplitude transmission of the optical system. Using the phase $\phi(\mathbf{u}_j)$ as a new parameter substantially reduces the number of degrees of freedom. Therefore the robustness of the blind deconvolution process is much improved. The positivity of $h(\mathbf{x}_i)$ is guaranteed by Eq. (26). Moreover, as noted by Schulz,[9] such a definition for the PSF prevents it from being a Dirac delta function.

The gradient of $h(\mathbf{x}_i)$ with respect to $\phi(\mathbf{u}_j)$ is then

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}_i)}{\partial \phi(\mathbf{u}_j)} = 2\,\mathrm{Im}[a^*(\mathbf{x}_i) A(\mathbf{u}_j) \exp(\, j2\pi \mathbf{u}_j \mathbf{x}_i / N)], \tag{27}$$

where $a(\mathbf{x}_i)$ and its discrete Fourier transform $A(\mathbf{u}_j) = P(\mathbf{u}_j)\exp[-j\phi(\mathbf{u}_j)]$ are the amplitude distributions in the focal plane and the pupil plane, respectively.

The gradient of the error function ϵ with respect to $\phi(\mathbf{u}_j)$ is related to the gradient of ϵ with respect to $h(\mathbf{x}_i)$ by

$$d_{\phi}{}^{\epsilon}(\mathbf{u}_j) = -2\,\mathrm{Im}[A^*(\mathbf{u}_j) \sum_i d_h{}^{\epsilon}(\mathbf{x}_i) a(\mathbf{x}_i) \times \exp(-j2\pi \mathbf{u}_j \mathbf{x}_i / N)], \tag{28}$$

where the summation over the discrete positions is equivalent to a discrete Fourier transformation of $d_h{}^{\epsilon}(\mathbf{x}_i) a(\mathbf{x}_i)$.

In this particular case a widely used basis to describe phase aberrations is the Zernike polynomials. If this basis is to be used, the free parameters $\phi(\mathbf{u}_j)$ become the Zernike coefficients and one must change the expression of the gradients accordingly. Such a parameterization gives better control on the number of free parameters.

5. APPLICATIONS

We applied blind deconvolution algorithms to both simulations and real data. This permitted us to compare the efficiency of loose and strict constraints: we have observed that the use of strict rather than loose positivity leads to better results (as shown in Subsection 5.A below) and to faster convergence (roughly 3×10^3 iterations instead of roughly 10^4).

Therefore we suggest building a blind deconvolution algorithm essentially based on strict constraints. When no reparameterization accounting for several simultaneous strict constraints can be found, loose and strict constraints may be combined. This leads to the following scheme:

(1) The least-squares definition of ϵ_g is used following Eq. (13).
(2) Strict positivity is enforced for f, according to Eq. (22).
(3) If the PSF can be described by phase aberrations, h is given by Eq. (26); otherwise, strict positivity is enforced according to Eq. (24).
(4) A further loose band-limited constraint [e.g., Eq. (20)] with unit weight is sometimes used.
(5) The routine `frprmn` in Ref. 14 is used to perform the conjugate gradient minimization of ϵ, and we stop the algorithm when the value of ϵ remains constant.

This is the scheme that we have used to obtain the results presented below (except for the loose positivity result in Fig. 1). With our 30-Mflops workstation the blind deconvolution of a 128×128 image took approximately 1 h. We have checked the robustness of the algorithms by comparing the results obtained from several random starting estimates.

A. Blind Deconvolution of Partially Corrected Images

Partially corrected long-exposure images obtained with an adaptive optics system are very smooth on account of the poor correction.[15] However, the PSF of such a system shows a small sharp coherent core on top of a wide low-resolution halo. The high-resolution information contained in the coherent core is preserved, though it is usually very weak. In this case blind deconvolution is well suited to correct for the effects of this PSF in order to retrieve a high-resolution image of the object.

We have simulated[16] a long-exposure image of a resolved astronomical object obtained through an adaptive optics system providing only a partial correction. We took roughly the COME-ON-PLUS characteristics[17]: 4-m telescope, 36-mode correction, 30-Hz servo-loop bandwidth, 40-m s^{-1} wind speed, and 0.9-arcsec seeing at 0.5 μm. At the imaging wavelength, 0.7 μm, such a sys-

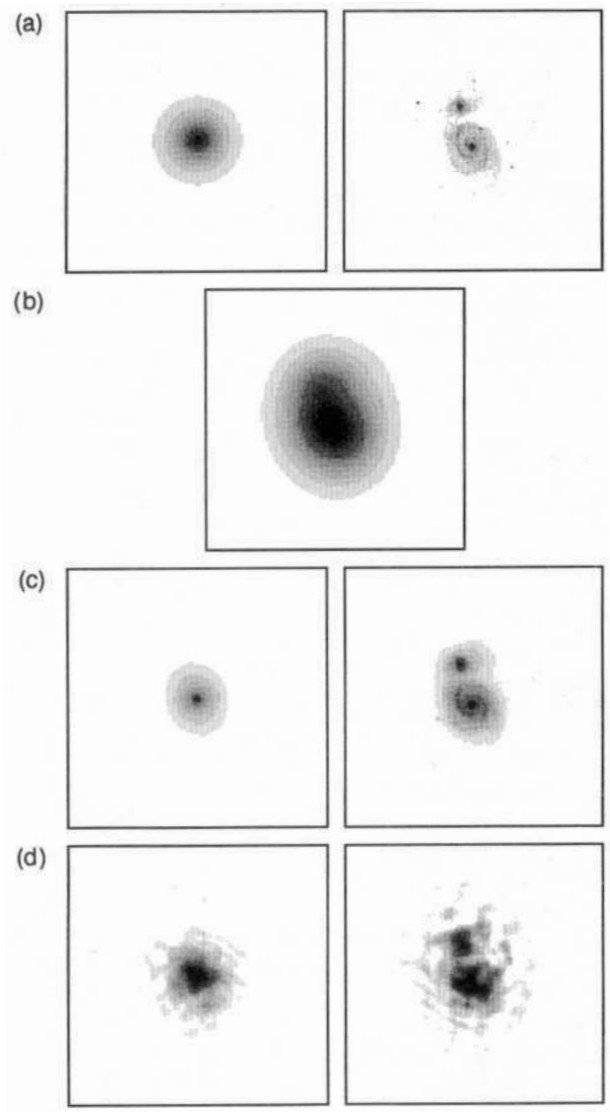


Fig. 1. Blind deconvolution of a partially corrected noise-free image: (a) original PSF (left) and object (right), (b) noise-free degraded image, (c) reconstructed PSF (left) and object (right) with strict positivity constraints, (d) reconstructed PSF (left) and object (right) with loose positivity constraints.

tem gives a poor correction: 1.4% Strehl ratio, assuming noise-free wave-front sensing. The field of view is 2.3 arcsec. The blind deconvolution results in the absence of noise in the degraded image are shown in Fig. 1; in this case the error function is simply $\epsilon = \epsilon_g$, given in Eq. (13), and a strict positivity constraint was used for f and h [see Eqs. (22) and (24)]. We know that such a PSF is actually a convolution product itself[15]—the telescope PSF convolved with some residual PSF. In order to speed up the blind deconvolution process, we chose g and a large Gaussian as initial guesses for f and h, respectively. With such guesses the final estimate of f is usually the object brightness distribution still convolved with the telescope PSF. The recovered object shown in Fig. 1 is indeed smoother than the original one. A blind deconvolution using loose instead of strict positivity constraints for f and h leads to a poor estimate of the object, as shown in Fig. 1.

Figure 2 shows a more realistic case in which the photon noise was taken into account. The numbers of photons in the long-exposure images are 2×10^8 and 10^5. With a visual magnitude of 12.5, which is bright enough for wave-front sensing without alteration of the correction in our case, these two cases correspond to a 1-min exposure time with a 0.1-μm bandwidth and a 1-s exposure time with a 3-nm bandwidth, respectively. We have assumed 40% optical transmission and 10% quantum efficiency. In addition to strict positivity constraints, a loose band-limited constraint was used for both f and h. The effective cutoff frequency was chosen according to the noise level: it was set to 1/3 in the 2×10^8 photons case and to 1/6 in the 10^5 photons case.

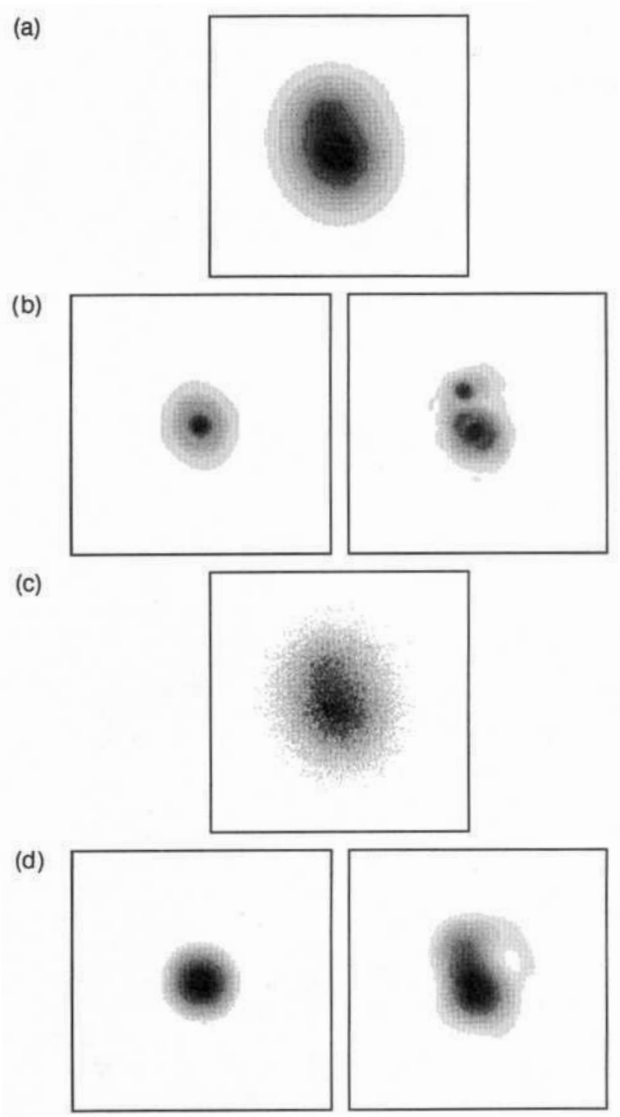


Fig. 2. Blind deconvolution of a partially corrected image with photon noise. The original PSF and object are those shown in Fig. 1. (a) Photon-limited degraded image with 2×10^8 photons, (b) reconstructed PSF (left) and object (right) with strict positivity and loose band-limited constraints (u_c was set to 1/3 of the telescope cutoff frequency), (c) photon-limited degraded image with 10^5 photons, (d) reconstructed PSF (left) and object (right) with the same constraints as those for (b) (with u_c set to 1/6 of the telescope cutoff frequency).

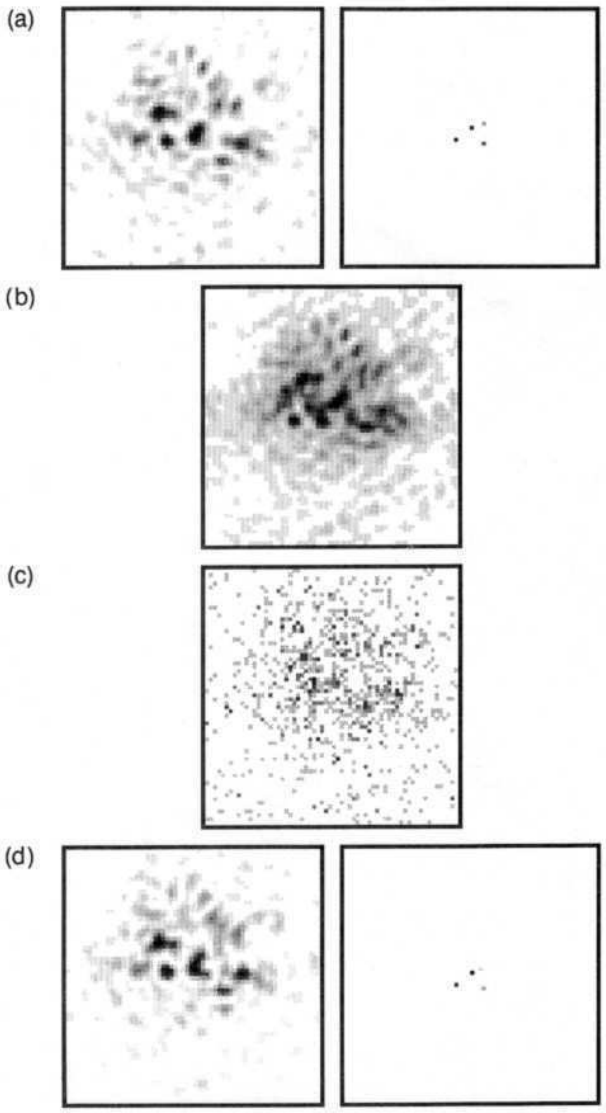


Fig. 3. Blind deconvolution of turbulence-degraded photon-limited data: (a) original PSF (left) and object brightness distribution (right), (b) noise-free degraded image, (c) photon-limited degraded image with 10^4 photons, (d) reconstructed PSF (left) and object (right) with strict positivity for the object and phase aberration description for the PSF.

B. Simulated Photon-Limited Speckle Data

We have simulated photon-limited speckle data in order to test the robustness of our approach. The turbulent phase screen leading to the instantaneous PSF of the telescope and the atmosphere was generated with the midpoint algorithm of Lane *et al.*[18]; the D/r_0 ratio was 10. The object is a quadruple star with magnitude differences 0.31, 0.75, and 1.5 with respect to the brightest component. The separation between the brightest and faintest stars is 75% of the diffraction limit. In other words, superresolution was needed for us to distinguish these two stars. Although one must generally avoid superresolution in order to obtain reliable results, this example shows that superresolution may be achieved when the regularization is sufficient. The object was constrained only to be strictly positive; in particular, no support constraint was used, and the first estimate of the object was uniform noise over all the field. We used phase aberrations to describe the PSF, and the starting phase was uniform noise between $-\pi$ and $+\pi$ over the pupil. Figure 3 shows the result of blind deconvolution applied to this simulation when the number of photons was 10^4. For fluxes of this value or higher the result does not depend very much on the starting estimates. We were still able to apply blind deconvolution to the same object with fewer photons (down to 10^3), but the validity of the result then depends on the starting estimates; robustness is lost. Besides, we expect an even more robust algorithm if ϵ_g is defined according to Eq. (11), derived from Poisson statistics.

C. Blind Deconvolution of Real Data: Capella

Capella (α Aurigae) is a bright binary star ($m_V \simeq 0.08$, separation $\simeq 55 \times 10^{-3}$ arcsec at the acquisition date). Two hundred intensified CCD short-exposure images of Capella were acquired at the 4.2-m William Herschel telescope on La Palma, Canarias (Spain) during the night of November 8, 1990, for the purpose of deconvolution by wave-front sensing.[19,20] We used one of these speckled images to test our approach on real data. After background and pixel correlation correction this image was blindly deconvolved in two steps:

(1) In order to get rid of the atmosphere-plus-telescope PSF we blindly deconvolved the raw image with a PSF described by phase aberrations (the central obstruction of the telescope was taken into account).

(2) Then we again used blind deconvolution in order to separate the detector PSF and the object brightness distribution.

Figure 4 shows the speckle image of Capella, the estimated atmosphere-plus-telescope PSF, the detector PSF, and the reconstructed object. The magnitude difference in the reconstructed image of Capella is 0.04, which compares favorably with the value estimated by Michau *et al.*[19] and Marais *et al.*[20] This demonstrates the ability of our algorithm to process real data.

6. CONCLUSION

The maximum-likelihood formalism permits us to derive a flexible algorithm for blind deconvolution that incorporates *a priori* knowledge necessary for robustness. This algorithm is based on the minimization of an error function and may be easily modified to fit the nature of available data. We have demonstrated the gain brought by the use of strict rather than loose *a priori* constraints for properties known to be exactly verified: it improves substantially the robustness with respect to noise and may preserve the maximum-likelihood approach.

We have demonstrated the ability of our method to restore diffraction-limited astronomical images from simulated and real turbulence-degraded images. Ultimately, our approach can be modified to include measurement of the PSF and, therefore, to solve more general deconvolution problems than simply that of blind deconvolution.[21]

APPENDIX A

Let ϵ be a real function of the set of values $\{f(0), \ldots, f(N-1)\}$ that defines a sampled monodimensional real function. The gradient of ϵ can be

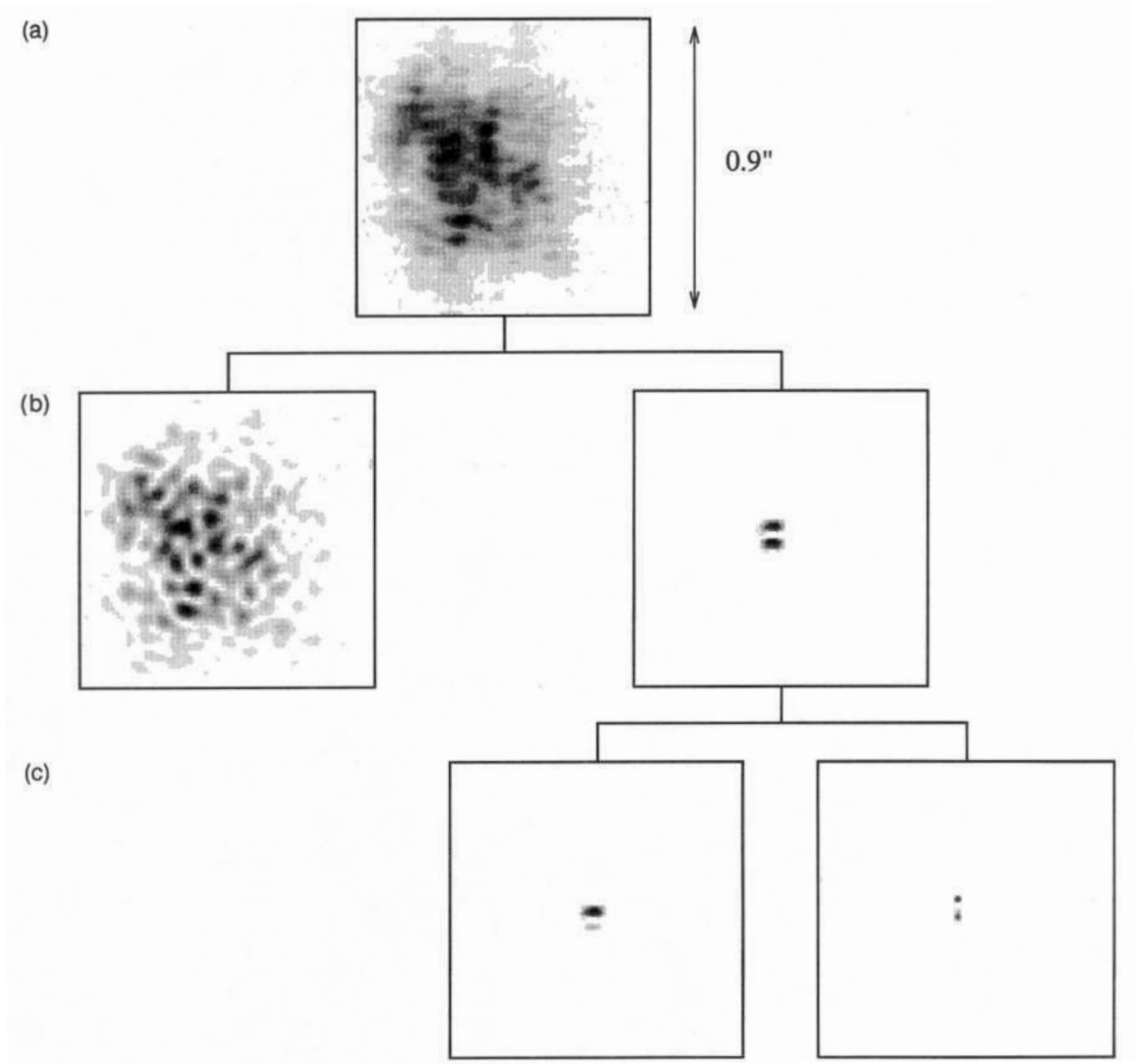


Fig. 4. Blind deconvolution of turbulence-degraded image of Capella: (a) observed short-exposure degraded image, (b) reconstructed turbulence-plus-telescope PSF (left) and object convolved with detector response (right) with strict positivity for the object and phase aberration description for the PSF, (c) reconstructed detector PSF (left) and Capella (right) with strict positivity for the object and for the detector PSF; a further loose band-limited constraint was used for the latter.

written

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial f(x)} = \sum_{u=0}^{N-1} \frac{\partial \epsilon}{\partial\ \mathrm{Re}[F(u)]} \frac{\partial\ \mathrm{Re}[F(u)]}{\partial f(x)} + \frac{\partial \epsilon}{\partial\ \mathrm{Im}[F(u)]} \frac{\partial\ \mathrm{Im}[F(u)]}{\partial f(x)}, \tag{A1}$$

where $F(u)$ with $u = 0, \ldots, N-1$ is the discrete Fourier transform of the sampled function. The two sets of values, $\{f(0), \ldots, f(N-1)\}$ and $\{F(0), \ldots, F(N-1)\}$, are related by

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u)\exp(j2\pi ux/N) \tag{A2}$$

$$\xrightarrow{\text{DFT}} F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp(-j2\pi ux/N); \tag{A3}$$

the above equations, which give a (possible) definition of the discrete Fourier transform and the corresponding inverse Fourier transform, also hold if $f(x)$ is a complex sampled function. In our case, as $f(x)$ is a real sampled function, Eq. (A1) becomes

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial f(x)} = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \frac{\partial \epsilon}{\partial\ \mathrm{Re}[F(u)]} \cos\left(j2\pi \frac{ux}{N}\right) - \frac{\partial \epsilon}{\partial\ \mathrm{Im}[F(u)]} \sin\left(j2\pi \frac{ux}{N}\right), \tag{A4}$$

which gives

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial f(x)} = \mathrm{Re}\left(\sum_{u=0}^{N-1} \left\{ \frac{\partial \epsilon}{\partial\ \mathrm{Re}[F(u)]} + j \frac{\partial \epsilon}{\partial\ \mathrm{Im}[F(u)]} \right\} \times \frac{\exp[\, j2\pi(ux/N)]}{N} \right). \tag{A5}$$

Since $F(u)$ is Hermitian, the term in braces is also Hermitian and its inverse discrete Fourier transform is therefore

real. Equation (A5) finally simplifies to

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial f(x)} = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \left\{ \frac{\partial \epsilon}{\partial\, \mathrm{Re}[F(u)]} + j \frac{\partial \epsilon}{\partial\, \mathrm{Im}[F(u)]} \right\} \times \exp\left(j 2\pi \frac{ux}{N} \right). \tag{A6}$$

This is equivalent to computing an inverse discrete Fourier transform (apart from the factor $1/N$). The two-dimensional case can be straightforwardly extrapolated: in this case the factor is $1/N^2$, where N^2 is the total number of samples.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank R. Cannon, R. Foy, G. Rousset, and L. Mugnier for stimulating discussions and their careful reading of this paper. The data of Capella were gracefully provided by V. Michau and T. Marais. We also want to thank the anonymous reviewers for their constructive remarks.

REFERENCES

1. L. B. Lucy, "An iterative technique for the rectification of observed distribution," Astrophys. J. **79,** 745–754 (1974).
2. W. H. Richardson, "Bayesian-based iterative method of image restoration," J. Opt. Soc. Am. **62,** 55–59 (1972).
3. T. G. Stockham, T. M. Cannon, and I. R. B. Ingebreston, "Blind deconvolution through digital signal processing," Proc. IEEE **63,** 678–692 (1975).
4. R. G. Lane and R. H. T. Bates, "Automatic multidimensional deconvolution," J. Opt. Soc. Am. A **4,** 180–188 (1987).
5. G. R. Ayers and J. C. Dainty, "Iterative blind deconvolution and its applications," Opt. Lett. **13,** 547–549 (1988).
6. R. W. Gerchberg and W. O. Saxton, "A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures," Optik (Stuttgart) **35,** 237–246 (1972).
7. B. L. K. Davey, R. G. Lane, and R. H. T. Bates, "Blind deconvolution of noisy complex-valued image," Opt. Commun. **69,** 353–356 (1989).
8. T. J. Holmes, "Blind deconvolution of speckle images quantum-limited incoherent imagery: maximum-likehood approach," J. Opt. Soc. Am. A **9,** 1052–1061 (1992).
9. T. J. Schulz, "Multiframe blind deconvolution of astronomical images," J. Opt. Soc. Am. A **10,** 1064–1073 (1993).
10. R. G. Lane, "Blind deconvolution of speckle images," J. Opt. Soc. Am. A **9,** 1508–1514 (1992).
11. A. Lannes, S. Roques, and M. J. Casanove, "Resolution and robustness in image processing: a new regularization principle," J. Opt. Soc. Am. **4,** 189–199 (1987).
12. Y. Biraud, "A new approach for increasing the resolving power by data processing," Astron. Astrophys. **1,** 124–127 (1969).
13. F. Roddier, "The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy," in *Progress in Optics,* E. Wolf, ed. (North-Holland, Amsterdam, 1981), Vol. 19, pp. 281–376.
14. W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes* (Cambridge U. Press, Cambridge, UK, 1990).
15. J.-M. Conan, P.-Y. Madec, and G. Rousset, "Image formation in adaptive optics partial correction," in *International Commission for Optics Conference on Active and Adaptive Optics,* Garching, Germany, August 1993 (European Southern Observatory, Garching, Germany, 1993), pp. 181–186.
16. G. Rousset, P. Y. Madec, and D. Rabaud, "Adaptive optics partial correction simulation for two telescope interferometry," in *European Southern Observatory Symposium on High Resolution Imaging,* Garching, Germany, October 1991, J. M. Beckers and F. Merkle, eds. (European Southern Observatory, Garching, Germany, 1991), pp. 1095–1104.
17. G. Rousset, J.-L. Beuzit, N. Hubin, E. Gendron, C. Boyer, P.-Y. Madec, P. Gigan, J.-C. Richard, M. Vittot, J.-P. Gaffard, F. Rigaut, and P. Léna, "The COME-ON-PLUS adaptive optics system: results and performance," in *International Commission for Optics Conference on Active and Adaptive Optics,* Garching, Germany, August 1993, F. Merkle, ed. (European Southern Observatory, Garching, Germany, 1993), pp. 64–70.
18. R. G. Lane, A. Glindemann, and J. C. Dainty, "Simulation of a Kolmogorov phase screen," Waves Random Media **2,** 209–224 (1992).
19. V. Michau, T. Marais, J. Laurent, J. Primot, J.-C. Fontanella, M. Tallon, and J. Fuensalida, "High-resolution astronomical observations using deconvolution from wave-front sensing," in *Propagation Engineering IV,* L. R. Bissonette and W. B. Miller, eds., Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. **1487,** (1991), paper 24.
20. T. Marais, V. Michau, G. Fertin, J. Primot, and J.-C. Fontanella, "Deconvolution from wave-front sensing on a 4 m telescope," in *European Southern Observatory Symposium on High Resolution Imaging,* Garching, Germany, October 1991, J. M. Beckers and F. Merkle, eds. (European Southern Observatory, Garching, Germany, 1991), pp. 589–597.
21. E. Thiébaut, "Imagerie astrophysique à la limite de diffraction des grands télescopes. Application à l'observation des objets froids," Ph.D. dissertation (Paris VII University, Paris, France, 1994).

Annexe C

The Hα environment of T Tauri resolved by speckle interferometry

M. N. Devaney, E. Thiébaut, R. Foy, A. Blazit D. Bonneau J. Bouvier B. de Batz & Ch. Thom, 1994, soumis Ã A&A.

1995A&A...300..181D

Astron. Astrophys. 300, 181-188 (1995)

ASTRONOMY AND ASTROPHYSICS

The Hα environment of T Tauri resolved by speckle interferometry*

M.N. Devaney[1,2], E. Thiébaut[2,5], R. Foy[2,5], A. Blazit[3], D. Bonneau[3], J. Bouvier[4], B de Batz[2], and Ch. Thom[6]

[1] Instituto de Astrofisica de Canarias, Tenerife, Spain
[2] Observatoire de Paris-Meudon, Département DASGAL, CNRS URA 335, France
[3] Observatoire de la Côte d'Azur, Département A. Fresnel, CNRS URA 1361, France
[4] Observatoire de Grenoble, CNRS URA 708, France
[5] Observatoire de Lyon, CNRS URA 300, France
[6] Institut Géographique National, LOEMI, France

Received 7 June 1994 / Accepted 8 December 1994

Abstract. T Tauri, the prototype of a class of low-mass pre-main sequence stars, was observed with the 3.6m Canada-France-Hawaii telescope (CFHT) and the CP40 photon-counting camera in November 1989. The data have been analysed using techniques of Speckle Interferometry to obtain diffraction-limited information on the spatial extent of T Tauri in narrow passbands centered on the Hα line and the nearby red continuum. The object appears unresolved in the continuum passband, while it is resolved in Hα. The Hα emission is fitted with a model consisting of two strongly flattened two-dimensional gaussians. In this model ≈ 80% of the flux lies in a component (A) which is only marginally resolved, and ≈ 20% lies in a component (B) with a semi-major axis FWHM of ≈ 0.″09. After subtraction of continuum, 2/3 of the Hα emission is spatially unresolved and 1/3 is resolved. The position angle [1] of component B is 192° ± 5°, which approximates the direction of the perpendicular to the jet known in the [OI] and [SII] lines; this jet extends 30″ westwards up to the Herbig-Haro object HH1555. The corresponding linear size of the Hα emitting region B is ∼ 6 by 15 AU FWHM assuming a distance of T Tauri of d=140pc. We argue that this emission arises either from the interaction between a weakly collimated wind with a circumstellar flaring disc, or from the basis of the westward jet which is seen on a larger scale.

Key words: stars: individual: T Tauri – stars: pre-main sequence – ISM: jets and outflows – techniques: interferometric

1. Introduction

T Tau is the prototype of a class of objects which display characteristics leading to their interpretation as pre-main sequence stars (for a review of their properties see Bertout 1989). Among these characteristics is an excess both in the IR and in the UV, which may be explained by the presence of a circumstellar disk which is accreting material onto the surface of the star (Bertout et al. 1988).

Dyck et al. (1982) discovered an infrared companion with a separation of 0.″6 and a position angle of either 0 or 180° using one-dimensional speckle interferometry in the K,L′ and M bands. VLA measurements at 2cm and 6cm showed T Tau to be a double radio source with the brightest component situated 0.″6 South of the fainter component (Schwartz et al. 1984), and a bridge linking the two components (Schwartz et al. 1986). The North component was identified with the optical source (T Tau N) by Hanson et al. (1983). The infrared companion of Dyck et al. is subsequently identified with the strong radio component and designated T Tau S. Nisenson et al. (1985) reported a faint (from Δm = 5.3 mag. at 450 nm to Δm = 3.53 mag. at 673 nm) optical companion 0.″27 north of T Tau N. This source was not detected by Gorham et al. (1992), who also have questioned the detection from one-dimensional speckle interferometry in the K band by Maihara & Kataza (1991), with ($\Delta m_K \sim 3.5$ mag.).

Ghez et al. (1991) carried out high-resolution imaging of this system at several near-IR wavelengths. They measured the spectral energy distributions of both the optically bright and the IR components and found that the flat IR spectrum of the T Tau system is the sum of the spectra of these two components which may be individually modelled as follows; the optical component as a 8.8 $L_\odot$ K0 star surrounded by a disk that follows a power law temperature distribution, while the IR component is best fitted by a physical accretion disk model with an accretion rate of $6 \times 10^{-6} M_\odot\,\mathrm{yr}^{-1}$ and with negligible stellar contribution.

Send offprint requests to: M.N. Devaney

* Based on observations collected at the Canada-France-Hawaii Telescope operated by the National Research Council of Canada, the Centre National de la Recherche Scientifique de France and the University of Hawaii.

[1] Position angles derived from the observations described here are known modulo 180°.

© European Southern Observatory • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1995A&A...300..181D

In the visible, T Tau is associated with an extended emission nebula, "Burnham's nebula", which has a spectrum characteristic of Herbig-Haro objects and whose structure suggests the presence of a precessing jet (Schwartz 1990). There is also a reflection nebula, NGC 1555, about 30″ W of the star, containing a bright knot displaying HH emission (Bührke et al. 1986). Highly blueshifted [SII] emission between the star and the knot HH1555 indicates the presence of a connecting jet. This emission has only been detected at distances $\geq 2''$ from the star and thus may be connected with either T Tau N *or* T Tau S.

It is clearly desirable to obtain high resolution images in the visible of this system in order to help constrain the models. Measurement of the light scattered by the accretion disk would allow derivation of physical, chemical and geometrical properties of the dust grains while mapping the Hα emission could enable us to detect either the inner radius of the accretion disk or shocked emission near the star.

In this paper we present results which we have derived for T Tau from speckle interferometry observations carried out at the CFHT. The diffraction limit of the 3.6m CFHT is 38 marcsec (milliarcseconds) at the wavelength of Hα, corresponding to a physical size of 5.2 AU assuming a distance of 140pc to T Tau (Elias 1978). In Sect. 2 we describe the observations, which have been processed following the method described in Sect. 3. Results are given in Sect. 4, where the contribution of the components to the total flux is estimated. These results are discussed in Sect. 5 in terms of the current models of T Tau stars.

2. The observations

The observations reported here were carried out at the CFHT, using the OCA two-colour speckle graph (Foy 1988a). It includes a spectrograph to allow simultaneous observation in passbands centred at two wavelengths. A beamsplitter is employed to divide the light in each passband into two beams. These four beams (or 'channels') are intensified and imaged onto four CCDs which are read out at 50Hz. In this detector (the 'CP40', Blazit (1986) and Foy (1988b)), each intensified photon event covers several CCD pixels, and centroiding electronics is used to locate the event with possible sub-pixel accuracy. However, the centroiding is unable to distinguish photon events which occur within a few pixels of one another, and this leads to the loss of high-resolution information. Speckle interferometry requires calculation of the spatial autocorrelation function (ACF) of each frame; the centroiding errors lead to a hole near the centre of the ACF, or equivalently, a loss of power mostly at high spatial frequencies in the power spectrum of the frame. This problem was studied by Foy (1988a) and, more recently by Hofmann (1993) and Thiébaut (1994). It may be avoided with the speckle graph employed here, since one may cross-correlate the two channels recorded at the same wavelength, rather than autocorrelating a single channel. Since the two channels provide independent photon realisations of the same speckle pattern, the speckle information is retained while the problems caused by photon centroiding are avoided.

The observations of T Tau were carried out at UT 2:24 on the 2nd November, 1989, at wavelengths of 6560Å (Hα) and 6710Å (red continuum) with passbands of 40Å and 260Å respectively. Unfortunately, one of the red continuum channels was not functional during this run, and the data analysis in this passband is hampered by the photon centroiding problems described above.

Twenty minutes of data were obtained on both T Tau, and a reference star, SAO93887. The separation between T Tau and the reference is $\sim 10'$. The seeing during the observations was excellent; the re-centered long-exposure image of T Tau has a FWHM of 0.″5, while that of the reference has a FWHM of $\sim 0.''55$.

The pixel scale was determined from observation of the binary star ADS4265 to be 10.9 ± 0.2 marcsec per pixel after correction for distortion (Thiébaut 1994), and 18.4 marcsec per pixel after resampling.

3. Data analysis

The technique of speckle interferometry allows the recovery of diffraction-limited information on the spatial structure of images (Labeyrie 1970). Short-exposure images of the object being observed are recorded and their average crosscorrelation or autocorrelation (if only one data channel is available) is calculated. Equivalently, the spatial-frequency power spectrum may be determined. The latter quantity, $|\tilde{I}(\boldsymbol{u})|^2$ is related to the power spectrum of the object, $|\tilde{O}(\boldsymbol{u})|^2$ by the relation

$$\langle|\tilde{I}(\boldsymbol{u})|^2\rangle = \langle|\tilde{S}(\boldsymbol{u})|^2\rangle|\tilde{O}(\boldsymbol{u})|^2 \quad (1)$$

where $\langle\,\rangle$ indicates averaging over many frames. The quantity $\langle|\tilde{S}(\boldsymbol{u})|^2\rangle$ is the Speckle Transfer Function (STF), and it has been shown that it is non-zero at frequencies up to the diffraction-limit of the telescope (Korff 1973).

We obtain the image power spectrum from CP40 data by Fourier transforming the average cross-correlation of the data from two channels. The cross correlation is an unbiased estimator of the autocorrelation (Thiébaut 1994). In particular, there is no photon bias. Before calculation of the cross-correlations, the data must be pre-processed, principally to remove image distortion due to the electrostatic intensifier stage of the camera (for details of the data processing see Thiébaut 1994). The software allows selection of frames for cross-correlation based on the following criteria;

- Image centroid near the centre of the CCD – otherwise the speckle cloud will be truncated at the edge of the detector leading to a bias in the power spectrum
- Image width below a threshold – allows rejection of frames corresponding to poor seeing and consequent low signal-to-noise
- Image flux between two thresholds – to reject both spurious flashes of light and frames with too few photons

The power spectrum of the object may be recovered (or 'calibrated') if the STF is known, and this may be obtained by

© European Southern Observatory • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1995A&A...300..181D

observation of a point source, δ, since in this case $|O(\boldsymbol{u})| = 1$ at all frequencies and so

$$\langle|\tilde{I}_\delta(\boldsymbol{u})|^2\rangle = \langle|\tilde{S}(\boldsymbol{u})|^2\rangle \tag{2}$$

Simple division of the image power spectrum by the STF leads to a poor estimate of the object power spectrum. This is due to the presence of frequencies at low signal to noise ratio in the measured transfer function (e.g. near the telescope cut-off frequency). It is common practice to employ a Wiener filter. Here, the signal-to-noise ratio of the object power spectrum has been improved by using the radial average power spectrum of the reference star, which, within the uncertainty set by the noise, is symmetrical up to the cut-off frequency of the telescope. We have derived object parameters from the power spectra by fitting model spectra as follows.

If $M(\boldsymbol{r})$ is the model object in image space and its power spectrum is $|\tilde{M}(\boldsymbol{u})|^2$, then the model fitting is carried out by minimizing a least-square error, ε, where

$$\varepsilon = \sum_{\boldsymbol{u}} W(\boldsymbol{u}) \left[\langle|\tilde{I}_\delta(\boldsymbol{u})|^2\rangle|\tilde{M}(\boldsymbol{u})|^2 - \langle|\tilde{I}(\boldsymbol{u})|^2\rangle\right]^2 \tag{3}$$

and $W(\boldsymbol{u})$ is a weighting function. Notice that the above minimization avoids the necessity to divide by the noisy reference spectrum. The weighting function is defined as follows:

$$W(\boldsymbol{u}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \|\boldsymbol{u}\| > \text{diffraction limit} \\ 0 & \text{if } \|\boldsymbol{u}\| < \text{seeing limit} \\ 0 & \text{if S/N of the object power too low} \\ 0 & \text{if S/N of the reference power too low} \\ \sigma^{-2}(\boldsymbol{u}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

where $\|\boldsymbol{u}\| \equiv \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ is the modulus of the spatial frequency, $\sigma^2(\boldsymbol{u})$ is the variance of the observed power spectrum, $\langle|\tilde{I}(\boldsymbol{u})|^2\rangle$, and S/N is the signal to noise ratio. Low frequencies, those below the 'seeing limit' r_0/λ, are avoided in the fitting as they are most affected by any change in seeing between the object and reference observations (Christou et al. 1985). The least-squares minimization is carried out using a conjugate gradient algorithm (Press et al. 1988).

Reconstruction of a diffraction-limited *image* of the object requires the retrieval of phase information and techniques exist to do so (Knox & Thompson 1974; Weigelt & Wirnitzer 1983). Application of these will be considered in a future paper.

4. Results

4.1. The object power spectrum

Figure 1 shows a contour plot of the calibrated power spectrum of T Tauri in Hα. Several features are worth noting:

- The emission contains a resolved component – otherwise it would be constant up to the diffraction limit.
- The resolved component is not symmetrical; it appears more resolved approximately in the N-S direction.
- There is also unresolved emission evidenced by the shallow power spectrum at high frequencies.
- There is possibly a horizontal fringe lying around 0.75 of the diffraction cut-off. One should emphasize that the variance of both the object spectrum and of the reference spectrum increase in the same area, so that the meaningfulness of this feature has to be confirmed by further observations or by improved data processing. This pattern may be due either to a very close binary or to the centres of the resolved and unresolved emissions not coinciding. In both hypotheses, the separation is smaller than $\sim 0''.05$.

As stated previously, only one continuum channel was operational and so the radially averaged calibrated power spectrum presented in Fig. 2 is derived from the autocorrelation of the single working channel. Then the power spectrum has been calibrated using the autocorrelation of the reference star observed in the same channel. Due to the coincidence losses, a cut-off is imposed at ~ 0.5 times the diffraction limit. However, the continuum emission appears unresolved up to this limit; using model fitting (with a gaussian) we can impose an upper limit of $\sim 0''.020$ (~ 3 AU) on the size of the continuum emission. Alternatively, the resolved component of the disk emission in our continuum bandpass is too faint to be detected.

Eighteen models with four different masks have been computed to fit the 2-D power spectrum in Fig. 1. They are listed in Table 1 and Table 2, where fit errors ε values in column 2 have been normalized to the simplest model, which is a single point source. This set of models calls for the following comments.

4.2. The simplest models

Table 1 shows that increasing the number of degrees of freedom N of the model, i.e. its complexity, does not improve significantly the quality of the fit. From this point of view, our models number 7 and 11 fit the observed power spectrum with a very low fit error ε with only 7 independent parameters. These models account for the Hα extension either by an elongated component or by a marginally resolved double component. In both models the brigthest component, A, encircles 84% ± 3% of the total flux; it is marginally resolved and elongated. Component B is very elongated (or is a secondary feature) along a P.A. of 12° (modulo 180°). We note that the orientation of the major axis of component A is close to that of the x-axis of the CCD's, so that non-identified residual artefacts due to the readout could account for such a high frequency feature. Therefore and because it is only marginally resolved we do not discuss it further in the rest of the paper.

Models with additional free parameters restore the same overall structure for T Tau. Parameters characterizing component A are remarkably stable from model to model. As an example, model 13 comprises 3 point sources; it confirms the trend shown in models 7 and 11: two points are very close together on an axis close to that of the major axis of component A of model 7 or 11, whereas the third point source is located southward (modulo 180°). Any attempt to symmetrize the central component results in a change in the orientation of the more

© European Southern Observatory • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1995A&A...300..181D

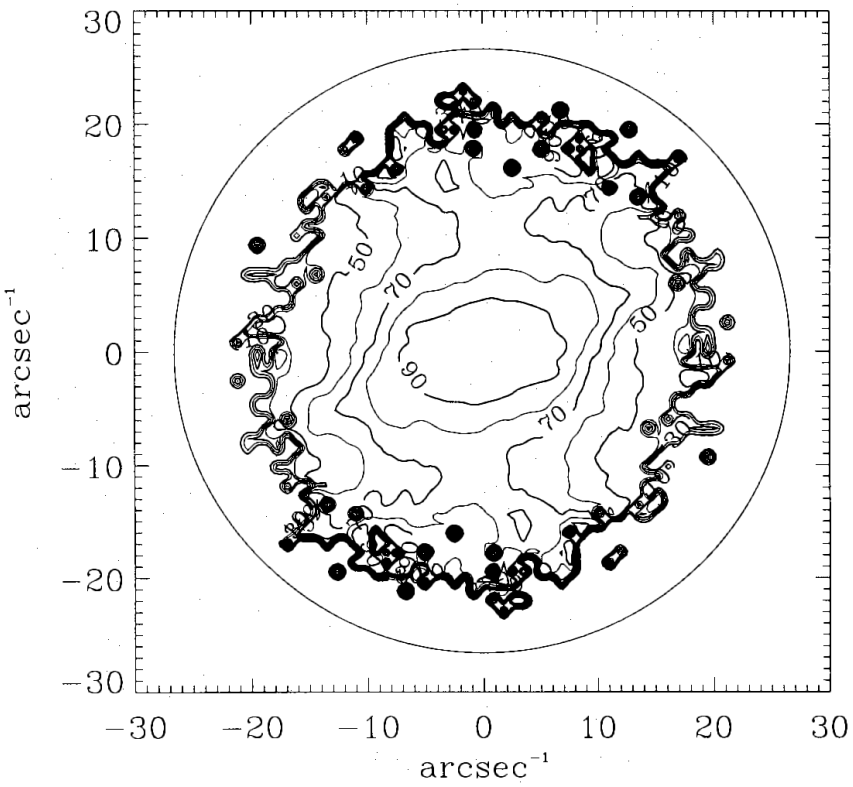


Fig. 1. Contour map of the power spectrum of the T Tau brightness distribution at Hα calibrated by dividing by the radial averaged power spectrum of a reference star, SAO93887. The bold contours are at 10, 30, 50, 70 and 90%; unlabelled intermediate levels have thin contours. The outer circle gives the telescope cut-off frequency. The bump due to the seeing mismatch at low frequencies has been removed. North is up, East is left

extended, or more remote, component (see e.g. models 5 and 6). In model 14 we have added a third centred two-dimensional gaussian profile; it is worthwhile to note that this third component when included in the fit has the same position angle as component B, and that the 4% flux is taken from this component of model 7 and not from the central component. This means that the radial profile of the extended component B could be fitted by a profile which is more extended than a single gaussian.

Model 18 shows that a fourth centred two-dimensional gaussian profile encircles almost no flux, but that it forces the extension to deviate towards SSE at large distances from the central component.

All models have flux contributions which are symmetrical in the North-South direction, and may be asymmetrical in the East-West direction. We plan to fix the 180° ambiguity of this asymmetry by calculating the phases.

4.3. The fringe pattern

Figure 1 shows a horizontal fringe pattern at $\sim$ 20 arcsec^{-1}, which would mean that there is some double structure in the image plane: either a point source lies very close to T Tau (i.e. closer than $\sim$ 50 marcsec), or one of the two components above is slightly shifted with respect to the other. One should point out that none of the models in Table 1 with decentred component(s) has a markedly smaller residual than any of the axisymmetric models. In fact the variances of the uncalibrated power spectra both of the object and of the reference are higher at the location of this fringe pattern than at the same spatial frequencies in other directions. Since the variances are used to weight the signal in the model fitting, the fringe pattern area has a comparatively lower weight, and it is not surprising that the minimization does not favour a model with a double structure. Observations at higher signal-to-noise ratio are required before we can draw conclusions.

© European Southern Observatory • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1995A&A...300..181D

Table 1. Parameters resulting from model fitting to the Hα calibrated power
spectrum. Data points are selected for $2.1 < \|u\| < 26.6\,\mathrm{arcsec}^{-1}$ and S/N > 1.

Model: model number
N: number of free parameters
ε: fit error normalised to the simplest model error (%)
F: relative flux (%)
FWHM: full width at half maximum (marsec, a FWHM of 0 means unresolved). No entry means point source.
PA: position angle (°) of major axis
$\Delta\alpha, \Delta\delta$: position offset relative to T Tau N (marcsec)

Model	N	ε	F	FWHM	PA	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
1	1	100.0	100				
2	3	36.0	100	18			
3	4	30.8	100	22 × 14	74		
4	3	41.6	80				
			20			26	5
5	4	27.3	69				
			31	62 × 46	39		
6	5	26.9	81	12			
			19	97 × 57	21		
7	7	18.5	81	18 × 0	83		
			19	106 × 43	12		
8	5	27.0	32	39			
			68			16	8
9	6	21.2	25	66 × 0	-1		
			75			24	8
10	7	21.2	75	0			
			25	66 × 0	-1	24	8
11	7	18.5	87	19 × 5	84		
			13	46		8	42
12	9	18.3	81	18 × 0	83		
			19	100 × 22	5	18	9
13	6	22.3	70				
			21			21	2
			9			3	43
14	11	18.2	80	19 × 0	84		
			16	106 × 35	18		
			4	192 × 32	18		
15	10	18.3	83	19 × 0	84		
			15	112 × 42	6		
			2			-6	38
16	11	17.8	87	20 × 9	79		
			8	223 × 0	3	35	19
			5			7	50
17	9	17.2	74				
			8			26	22
			12			-23	6
			6			1	54
18	15	18.2	81	19 × 0	84		
			16	106 × 35	18		
			4	192 × 32	-18		
			0	274 × 18	-26		

4.4. The sensitivity to the mask

We have checked that the models are not sensitive to the weighting function. Increasing the low frequency obscuration from 2.1 to 3.0 arcsec^{-1} leads to the fits 7.1 and 14.1 instead of models 7 and 14 respectively. Differences are not significant. Increasing the signal-to-noise threshold from 1 to 2 leads to fits 7.2 and 14.2. Model 7.2 does not differ from model 7, but the intermediate component in model 14 almost disappears, so that it becomes similar to model 7. Finally we have checked with model 7.3 that model 7 is not significantly altered when the high frequency region of the power spectrum is cut.

This analysis has shown the robustness of the model fitting. Considering the noise level in our data, the simplest model which fits satisfactorily the power spectrum of T Tau at Hα comprises two asymmetric centred gaussians. Most of the flux is contained in component A, the dimensions of which are less than the diffraction limit of the 3.6 m CFH telescope at the wavelength of Hα. The extended component is orientated close to the North-South direction.

The model fitting indicates that ∼ 80% of the total flux observed through the 40Å-wide Hα filter arises from the unresolved component, and the remaining ∼ 20% from the extended structure. In order to derive the Hα flux ratio between the unresolved and extended component, we have to correct for the amount of continuum emission included in the Hα filter. The fraction of Hα to total flux measured through the filter is obtained from:

$$\frac{F^e(\mathrm{H}\alpha) + F^u(\mathrm{H}\alpha)}{F_{tot}} = \frac{EW(\mathrm{H}\alpha)}{EW(\mathrm{H}\alpha) + \Delta\lambda} \tag{4}$$

where the superscripts e and u refer to the extended and unresolved components, respectively, EW(Hα) is the Hα equivalent width, and $\Delta\lambda$ the width of the filter. EW(Hα) varies strongly with time. Cohen & Kuhi (1979), Cabrit & al. (1990), and Lago & Gameiro (1994) report respectively EW(Hα)=38Å, EW(Hα)=55Åand EW(Hα)=68±5 Å. We adopt the average of the two last estimates, because they are obtained at epochs close to the date of our observation. Then EW(Hα)=61±5Å. With $\Delta\lambda$=40Å, this yields:

$$[F^e(\mathrm{H}\alpha) + F^u(\mathrm{H}\alpha)]/F_{tot} = 0.60 \pm 0.02 \tag{5}$$

The extended features are not seen in the continuum and radiate 20± 5% of the integrated flux measured through the Hα filter, i.e.

$$[F^e(\mathrm{H}\alpha)]/F_{tot} = 0.20 \pm 0.05 \tag{6}$$

Combining Eqs. 5 and 6, we derive

$$[F^u(\mathrm{H}\alpha)]/F_{tot} = 0.40 \pm 0.07 \tag{7}$$

We thus find that the unresolved component is twice as bright as the extended component at Hα.

© European Southern Observatory • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1995A&A...300..181D

Table 2. Parameters resulting from model fitting to the Hα image power spectra with data points selection criteria different from Table 1.

Model	N	ε	F	FWHM	PA	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
$3.0 < \|u\| < 26.6$ arcsec^{-1} and S/N > 1							
7.1	7	14.9	82	19 × 0	83		
			18	100 × 39	11		
14.1	11	14.8	82	19 × 0	84		
			9	111 × 22	21		
			9	100 × 41	-7		
$2.1 < \|u\| < 26.6$ arcsec^{-1} and S/N > 2							
7.2	7	17.0	81	18 × 0	83		
			19	106 × 42	12		
14.2	11	17.0	81	18 × 0	83		
			0	1 × 13	13		
			19	106 × 44	12		
$2.1 < \|u\| < 13.3$ arcsec^{-1} and S/N > 1							
7.3	7	8.3	82	18 × 0	73		
			18	104 × 45	8		

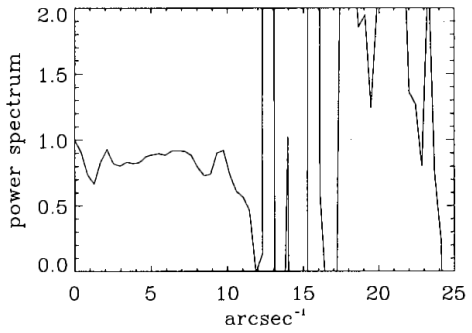


Fig. 2. Radially averaged calibrated power spectrum obtained by Fourier transforming the continuum channel autocorrelation. The noise above 11 cycles per arcsecond is due to the photon coincidence losses

5. Discussion

The geometry of the T Tau system, embedded in the Burnham nebula, is complex. It comprises at least two, possibly three, components: the visible component T Tau N, the infrared component T Tau S, and another optical component reported by Nissenson et al. (1985). The later one is not detected from our data, which means that the magnitude difference at $\sim$ 6600Å has to be larger than 5 magnitudes. Clues to the geometry of the system have been gained from various observational studies and are summarized below to provide a framework within which we shall interpret our results.

From the rotational period and projected velocity of T Tau N, Herbst et al. (1986) concluded that the inclination of the rotational axis to the line of sight is small, between 8 and 13°. Further evidence that we see the T Tau system close to pole-on comes from the detection of a bipolar molecular outflow whose redshifted and blueshifted lobes are superimposed in projection on the plane of the sky (Edwards & Snell 1982). Furthermore, CO interferometric measurements suggest the existence of a Keplerian disk seen at an inclination of 26° around the T Tau system (Weintraub et al. 1989).

A large scale jet has been reported around T Tau N (Bührke et al. 1986; Böhm & Solf 1994); it extends from 2″ to 30″ West of the star, and is terminated by a Herbig-Haro object, HH-1555, at a position angle of 90° (Bührke et al. 1986). Except for a couple of [SII] knots and the bright terminal HH object, the jet is not directly seen in CCD images but revealed by long-slit spectroscopy which shows strong blueshifted [SII] emission along the line joining the central star to HH-1555, 30″ West of it. The [SII] lines are blueshifted by an amount ranging from -40km s^{-1}to -150km s^{-1}, indicating that the jet emanating from the central object is moving towards the observer. Following Böhm & Solf (1994), it is most likely that the large scale jet originates from T Tau N, and not from T Tau S. There is no report of a redshifted counterjet East of T Tau, which is interpreted in terms of absorption by the circumstellar disc close to T Tau N, and by the Burnham nebula beyond it.

T Tau S is suspected to be the dominant object which drives the interaction of the system with its environment (Schwartz et al. 1986). It is not detected in the visible, both because its temperature is low and because it is embedded in strongly absorbing material (Reike & Lebofsky 1985). Moreover, the field of our experiment is less than twice the distance between the two components North and South. This produces a large vignetting in the direction of T Tau S, and consequently an apparent increase in the already huge magnitude difference in the visible. Böhm & Solf (1994) argue that a bipolar outflow of shock-ionized gas, seen in the [SII]λ6731 and [OI]λ6300 lines and extending approximately in the North-South direction, originates from T Tau S. The positional coincidence between this flow and the radio emission "bridge" joining T Tau N and T Tau S seen at 2 cm and 6 cm (Schwartz et al. 1986) supports the interpretation of the radio continuum emission being related to the mass loss process from T Tau S, and not from T Tau N (Böhm & Solf 1994).

The strong Hα emission of young stellar objects (YSOs) is thought to arise mostly within a few stellar radii of the central star (e.g., Hartmann et al. 1990; Calvet et al. 1992). This may be the origin of the Hα flux radiated by the unresolved component which we have observed, but cannot account for the 6×15 AU Hα structure we detect around the central star. Nor can this feature be accounted for by the scattered light from the circumstellar disc, since T Tau N is unresolved in the continuum adjacent to Hα. The partial knowledge we have of the geometry of the system allows us to dismiss a number of interpretations for this extended Hα component. For instance, it is so close to T Tau N that it is undoubtedly linked to that star. It cannot be the Hα counterpart of the radio continuum bridge nor of the [SII] North-South jet emanating from T Tau S. Nor can we interpret this Hα extension as a small-scale jet emanating from T Tau N and oriented along a North-South direction because of the already well-established existence of a westward jet originating from T Tau N. It would be extremely difficult to understand how

© European Southern Observatory • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1995A&A...300..181D

the same object could drive two outflow systems in orthogonal directions.

Hence another mechanism has to be invoked to interpret the Hα extension. We note that the observed elongation with a position angle close to 0° is consistent with the projection onto the plane of the sky of the inner regions of a disk tilted by 8 to 26 ° on the sky with its axis pointing to the West, in agreement with the likely geometry of the system described above. Hence, since it cannot be a jet, the Hα extended structure most likely corresponds to an emission region located along the surface of the circumstellar disk. Various physical processes may be responsible for such an emission region:

- It might correspond to a disk "chromosphere" that develops above the disk surface as a result of the irradiation of the optically thin disk layers by the central star. According to Malbet & Bertout (1992), however, this process would not lead to a high enough temperature rise above the disk plane to account for the observed Hα emission.
- The Hα extension could correspond to the base of the large-scale jet which is observed to the West at a larger distance from the star. That the large-scale jet does extend down to close to the central object is supported by the double-peaked structure of the [OI] forbidden line profile observed in T Tau's spectrum. Such double-peaked forbidden line profiles, with an emission peak close to the stellar rest velocity and the other strongly blueshifted relative to the star, are fairly common in classical T Tauri stars (Appenzeller et al. 1984; Edwards et al. 1987). Kwan & Tademaru (1988) and Edwards et al. (1989) argued that the blueshifted emission peak arises from a spatially unresolved, high-velocity jet close to the central star. In the case of T Tauri N, the blueshifted [OI] peak thus most likely originates from the base of the westward jet close to the star.
  If the Hα extension arises from the same region, its North-South elongation may be interpreted as a projection effect. Since the geometry of the system suggests that the jet axis is close to the line of sight (see above), we may be looking at the jet's cross-section projected onto the sky. Assuming a roughly cylindrical jet, the major axis of the Hα extension would then be a measure of the jet's diameter close to the star. A difficulty with this interpretation is the large aspect ratio ($\gtrsim$2.5:1) of the Hα extension which would imply a tilt of 66° between the cylindrical jet axis and the line of sight while independent evidence discussed above favors a much smaller angle (8-26°). A large aspect ratio could result, however, even for a slightly tilted disk, if material outflowing along the jet's axis occulted the emitting area behind the jet.
- Because of difficulties in understanding how the wind could remain warm at a large distance from the star so as to produce forbidden line emission, Hartmann & Raymond (1989) suggested that forbidden lines may form alternatively in a shock between the expanding wind and the surface of a flaring disk. In this framework, the extended Hα structure would trace the shock region at the upper surface of T Tau's disc. In this case the large aspect ratio can be accounted for by the fact that the eccentricity of the projection of a flaring disc is higher than that of a flat disc.

6. Conclusions

We have spatially resolved the Hα emission associated with the pre-main sequence star T Tauri. Our resolution in the continuum is limited by the failure of one of our continuum channels, but model-fitting implies that the continuum emission is not resolved by our observation. The simplest model which fits satisfactorily the power spectrum at Hα is the sum of a barely resolved component and an extended component with a position angle close to the direction of the infrared companion T Tau S. Possible interpretations for the extended Hα component are a disc chromosphere heated by a source more efficient than the central star, or the base of the westward, highly collimated large-scale jet, or the trace of a weakly collimated wind interacting with a flaring disc. Diffraction-limited observations of T Tauri at other wavelengths, in particular in the [OI] and [SII] forbidden lines, would help to decide between these possibilities. The equivalent width of these lines is 5 to 10 times smaller than our current bandwidth, so that the signal from a possible extended component responsible for the emission line is blurred in the photon noise of the point source observed in the continuum included within the bandwidth. The next generation of speckle cameras should be able to provide high enough spectral resolution to allow observations within these narrow lines (Foy et al. 1992; Tallon et al. 1994)

Acknowledgements. We wish to thank M.-T. Lago and F. Gameiro for having given us equivalent width measurements of Hα prior to publication, and Ch. Leinert for his comments to improve the manuscript.

References

Appenzeller I., Jankovics I., Östreicher R. 1984, A&A 141, 108
Bertout C. 1989, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 27, 351
Bertout C., Basri G., Bouvier J. 1988, ApJ 330, 350
Böhm K.-H., Solf J. 1994, ApJ 430, 277
Blazit A., 1986, in: Image Detection and Quality, Proc. SPIE, 702, 259
Bührke T., Brugel E.W., Mundt R. 1986, A&A 163, 83
Cabrit S., Edwards S., Strom S.E., Strom K.M. 1990, ApJ 354, 687
Calvet N., Hartmann L.W., Hewett R. 1992, ApJ 386, 239
Cohen M., Kuhi L.V. 1979, ApJS 41, 743
Christou, J.C., A.Y.S. Cheng, J.D. Freeman, C. Roddier, 1985, AJ 90, 2644
Dyck H.M., Simon T., Zuckerman B. 1982, ApJ 255, L103
Edwards S., Snell R.L. 1982, ApJ 261, 151
Edwards S., Cabrit S., Strom S.E., Heyer I., Strom K.M., Anderson E. 1987, ApJ 321, 473
Edwards S., Cabrit S., Ghandour L.O., Strom S.E. 1989, in: Low-Mass Star Formation and Pre-Main Sequence Objects, ed. B. Reipurth, p.385
Elias, J.H., 1978, ApJ 224, 857
Foy, R., 1988a, in: Robinson L.B.(ed.) Instrumentation for Ground-Based Optical Astronomy, Present and Future, p589
Foy, R., 1988b, in: Robinson L.B.(ed.) Instrumentation for Ground-Based Optical Astronomy, Present and Future, p345

© European Southern Observatory • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1995A&A...300..181D

Foy, R., Foy, F.-C., Quatrehomme, F., et al., 1992, in "Wavefront Supported Post-Facto Image Correction", NOT Mini-Workshop ed. T. Andersen, p.31
Ghez A.M., Neugebauer G., Gorham P.W., Haniff C.A. 1991, AJ 102, 2066
Gorham P.W., Ghez A.M., Haniff C.A. 1992, AJ 103, 953
Hanson, R.B., Jones, B.F., Lin, D.N.C. 1983, ApJ, 270, L27
Hartmann L.W., Raymond J.C. 1989, ApJ 337, 903
Hartmann L.W., Calvet N., Avrett E.H., Loeser R. 1990, ApJ 349, 168
Herbst W. et al. 1986, ApJ 310, L71
Hofmann, K.-H., 1993, J. Opt. Soc. Am. A. 10, 2
Knox K.T., Thompson B.J. 1974, AJ 193, L45
Korff D. 1973, J. Opt. Soc. Am. 63, 971
Kwan J., Tademaru E. 1988, ApJ 332, L41
Labeyrie A. 1970, A&A 6, 85
Lago M.-T., Gameiro F. 1994, private communication
Maihara T., Kataza H. 1991, A&A 249, 392
Malbet, F., Bertout, C. 1992, ApJ 383, 814
Nisenson P., Stachnik R.V., Karovska M., Noyes R. 1985, ApJ 297, L17
Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., 1988, 'Numerical Recipes in C', Cambridge University Press
Reike, G.H., Lebofsky, M.J. 1985, ApJ 288, 618
Schwartz, R.D. 1990, in: Mirzoyan L.V. et al (eds) Flare Stars in Star Clusters, Associations and the Solar Vicinity, IAU Colloquium No. 137, p. 221
Schwartz P.R., Simon Th., Zuckermann B., Howell R.R. 1984, ApJ 280, L23
Schwartz, P.R., Simon, Th., Campbell, R. 1986, ApJ 303, 233
Tallon, M., Baranne, A., Belkine, I., et al., 1994, in "Science with the VLT", ESO workshop, ed. J. Walsh & S. D'Odorico, in press
Thiébaut E., 1994, A&A 284, 340
Weigelt G., Wirnitzer B. 1983, Opt. Lett. 8, 389
Weintraub D.A., Masson C.R., Zuckerman B. 1989, ApJ 344, 915

This article was processed by the author using Springer-Verlag LaTeX A&A style file version 3.

© European Southern Observatory • Provided by the NASA Astrophysics Data System

Annexe D

The extended Hα component of T Tau

E. Thiébaut, M. N. Devaney, R. Foy, B. de Batz, A. Blazit, D. Bonneau, J. Bouvier & Ch. Thom, 1994, in "Very high angular resolution imaging", IAU Symposium N° 158, J. G. Robertson & W. J. Tango Ed., 391–394.

1994IAUS..158..391T

THE EXTENDED Hα COMPONENT OF T TAU*

E. THIÉBAUT, N. DEVANEY**, R. FOY and B. DE BATZ
Observatoire de Paris-Meudon, DASGAL – FRANCE
A. BLAZIT and D. BONNEAU
Observatoire de la Côte d'Azur, Département A. Fresnel – FRANCE
J. BOUVIER
Observatoire de Grenoble – FRANCE
and
CH. THOM
Institut Géographique National, SLOG/LOEMI – FRANCE

January 20, 1993

Abstract. We report the observation of T Tau by visible speckle interferometry at the CFHT. The observations were carried out at two wavelengths simultaneously. Each image was split into two, allowing improved data processing. The 4-channel photon-counting detector CP40 was used. We have discovered that 30% of the total energy at Hα is emitted by an extended elliptical component, with a FWHM of 70 marcsec. In the neighbouring continuum, T Tau is not resolved by the 3.60 m CFHT. We briefly discuss the astrophysical consequences of this new result.

Key words: Speckle Interferometry – T Tau

Introduction: Why Observe T Tau In The Visible ?

T Tau is the prototype of pre-main sequence stars. Its infrared excess is partly interpreted by the cool companion discovered by speckle interferometry 0.6" south of the optical star (Dyck et al., 1982). The remaining IR excess as well as the UV excess (Bertout, 1989) are interpreted in terms of a circumstellar disk accreting material onto the stellar surface (Bertout et al., 1988); this model is supported by near infrared high angular resolution imaging (Ghez et al., 1991). High angular resolution in the visible could constrain this model. For example, when the amount of light scattered by the accreting disk is measured, physical, chemical and geometrical properties of the dust grains can be derived. Also the inner disc size could be derived at Hα .

Journal Of Observations

T Tau and the reference source SAO-93887 (10' apart) were observed at the 3.60 m CFHT on November 2nd, 1989, with a 20 minute exposures each. FWHM of recentered integrated images are ∼0.5". Simultaneous observations were carried out in the Hα emission line at 656±2 nm and in the continuum at 671±3 nm. The flux is typically 50 photons per channel per frame. The magnification provided a scale of 12 marcsec per pixel.

* Based on observations collected at the CFHT.
** present address: Instituto de Astrofisica de Canarias – SPAIN

J.G. Robertson and W.J. Tango (eds.), Very High Angular Resolution Imaging, 391–394.
© 1994 *IAU. Printed in the Netherlands.*

© International Astronomical Union • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1994IAUS..158..391T

The Instrumentation

The 4-Channel Specklegraph

The O.C.A. specklegraph is equipped with a Courtès monochromator allowing the selection of two bandwidths simultaneously, each with different central wavelengths and widths. The two filtered beams are split both in the pupil plane and in the image plane, so that for each of the two wavelengths two independent photon realisations of the same distribution are observed. An optical layout of this 4-channel specklegraph is shown in Foy (1988a). The splitting of the images is intended to avoid the loss of signal in the central region of autocorrelations (or at high spatial frequencies in the Fourier space), as explained below.

The CP40 Photon-Counting Detector

The CP40 (Blazit, 1987; Foy, 1988b) is an ICCD photon-counting detector. The intensified image is divided into 4 quadrants by a fiber optics splitter. Each of the quadrants is read by a Thomson 384×288 CCD chip. The four video signals are sent through fiber optics cables to a photon centroding processor which first digitilizes these signals and then computes on-line the center of gravity of the photon-events. The frame read-out time is 20 ms. The maximum flux per second is $\sim 10^5$ photons, limited by the computer board. The dark count rate is ∼16 events per frame for the whole detector.

Preprocessing Of The Data: The Artefacts

Data preprocessing aims at:

- *removing spurious photon-events*: Spurious photon-events are generated by the photon-centroiding processor. They can be removed easily since they appear as very close pairs of photons (less than 2 pixels apart).
- *correcting for the distortion*: Distortion is mainly due to the light intensifiers. We have used a two-dimensional third order polynomial, the coefficients of which have been determined by fitting to the integrated image of a calibration array of bright spots.
- *windowing the frames*: The purpose of windowing is to remove optical reflections at one edge of the field.
- *removing truncated frames*: In some frames, the speckle image can be truncated at the edge of the window, because of image wander due to either atmospheric tilts or telescope guiding errors.

Data Processing: Crosscorrelation Versus Autocorrelation

Classical speckle interferometry derives the modulus of the object spectrum from integrated autocorrelations of frames (Labeyrie, 1970). Due to the photon detection process, photon-events occuring at adjacent pixels within a single frame cannot be detected. This results in a lack of signal at the center of the autocorrelation (the so called *trou du centreur*), and in a bias of the object power spectrum, leading in particular to the loss of the high spatial frequency range (Foy, 1988a).

© International Astronomical Union • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1994IAUS..158..391T

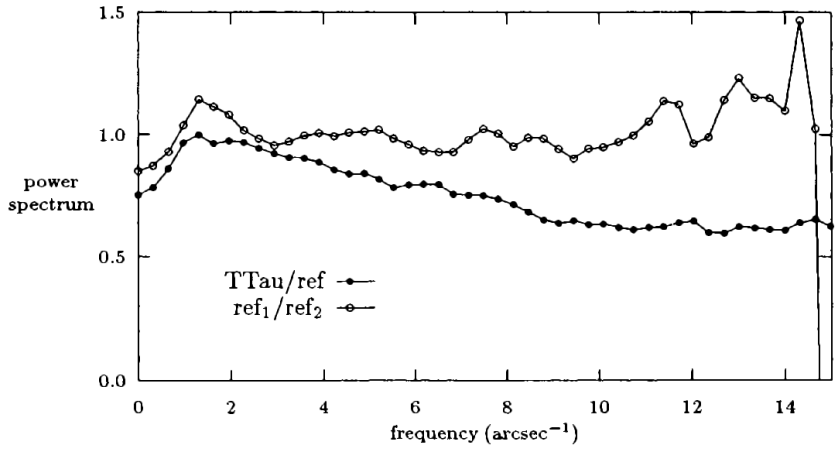


Fig. 1. Average radial power spectrum profiles at Hα .

In order to correct for the severe degradation of the signal due to the *trou du centreur*, we compute instead integrated crosscorrelations of the two images formed at the same wavelength. Compared to the results derived from autocorrelations, the gain in signal-to-noise ratio as well as the increase of the practical cut-off frequency achieved is striking when one uses crosscorrelations.

Results: The Morphology Of The Hα Component Of T Tau

In The Hα Emission Line

We have been able to use croscorrelations for the Hα observations of T Tau. For the purpose of comparison, we also computed the power spectrum of the reference, which was obtained using the first half of the data from SAO-93887 as the *object* and the second half as the *reference*. Fig. 1 shows average radial profiles of T Tau and SAO-93887 power spectra. The decrease of T Tau power spectrum at high frequency shows that T Tau at Hα is resolved. The bump at low frequency is due to the incomplete correction for r_0 variations between the observation of T Tau and of SAO-93887. These results could be interpreted as:

- *an unresolved component* which radiates 70% of the total energy of T Tau in our Hα bandwidth. The emission line and the continuum contribute equally to this energy. On can set an upper limit of $\sim$ 20 marcsec to the extension of this component.
- *an extended component* which radiates the remaining 30% of the energy. The 2D power spectrum is not symetrical: in two perpendicular directions the FWHM's are 75$\pm$5 marcsec $\times$ 57$\pm$6 marcsec. The position angle of the major axis is 94$\pm$10°.

© International Astronomical Union • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1994IAUS..158..391T

The energy distribution could be more complex than this simple morphological model. Near the télescope cut-off frequency, an horizontal structure appears at the top and the bottom of the 2D power spectrum of T Tau. At such a high spatial frequency, unidentified artefacts could produce such a feature. If it is real, it could be interpreted either in terms of a companion very close to T Tau (typically 40 marcsec), or in terms of a shift between the position of T Tau and the position of the center of gravity of the extended Hα component.

In The Continuum

The failure of one of the channels of the CP40 prevents us from processing the data with crosscorrelations in the continuum. This imposes us a practical cut-off frequency at 30% of the diffraction limit. Up to this cut-off frequency, T Tau appears to be unresolved. Thus, an upper limit of its diameter is ∼ 40 marcsec in the continuum.

New Constraints To The Model Of T Tau

T Tau is 140 pc away. The physical size of its extended Hα component is therefore ∼ 11×8 AU. This very large extension does not comfort models which claim that the Hα emission originates in rather high density regions, in the interaction zone between the accreting disk and the stellar surface (see the review by Bertout, 1989). Nevertheless, if the Hα extension is not centered on the star, our result does not conflict with the model of an inner accreting disk located very close to the stellar surface.We note that the interpretation of these frequencies in terms of an hypothetical close companion should be confirmed in the continuum as well. Further observations are required to improve the visibilities at high spatial frequencies.

We believe that the extended Hα structure may be the inner part of the jet observed from 2" to 30" till the Herbig-Haro object HH-1555 (Bührke et al., 1986).

We note also that the elongation of the Hα component is roughly perpendicular to the North-South axis, which is also the direction of the cool companion of T Tau.

The lack of detection of any significant amount of scattered light favours large dust grain sizes. Again, further observations are required to set useful constraints.

We have observed several other T Tau stars, which are currently being processed.

We have shown that visible speckle interferometry observations of T Tau stars brings unique constraints on our understanding of these objects.

References

Bertout, C.: 1989, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **27**, 351
Bertout, C., Basri, G.: 1988, Astrophys. J. **370**, 350
Blazit, A.: 1987, Thèse, Université de Nice
Bührke, T., Brugel, E.W., Mundt, R.: 1986, Astron. Astrophys. **163**, 83
Dyck, H.M., Simon, T., Zuckerman, B.: 1982, Astrophys. J. **255**, L103
Foy, R.: 1988a, in *Instrumentation for Ground-Based Optical Astronomy, Present and Future*, ed. L.B. Robinson (New- York: Springer-Verlag), p. 345
Foy, R.: 1988b, idem, p. 589
Ghez, A.M., Neugebauer, G., Gorham., P.W.: 1991, Astron. J. **102**, 2066
Labeyrie, A.: 1970, Astron. Astrophys. **6**, 85

© International Astronomical Union • Provided by the NASA Astrophysics Data System

Annexe E

Speckle imaging with the bispectrum and without reference star

E. Thiébaut, 1994, in "Very high angular resolution imaging", IAU Symposium N° 158, J. G. Robertson & W. J. Tango Ed., 209–211.

1994IAUS..158..209T

SPECKLE IMAGING WITH THE BISPECTRUM AND WITHOUT REFERENCE STAR

E. THIEBAUT
Observatoire de Meudon - FRANCE

January 20, 1993

Abstract. A technique for reconstructing diffraction-limited image of an object from speckle images without reference star is applied to both simulated and real data. The object spectrum is estimated by blind deconvolution using the power spectrum of the speckle images and the phase is restored from the bispectrum.

Key words: Bispectrum - Image Reconstruction - Blind Deconvolution

1. Presentation Of The Method

1.1. Image Formation

The observed image $i(\boldsymbol{x})$ is the convolution (noted $*$) of the object intensity distribution $o(\boldsymbol{x})$ by the point spread function $s(\boldsymbol{x})$ of the combined telescope and atmosphere (Roddier, 1981):

$$i(\boldsymbol{x}) = s(\boldsymbol{x}) * o(\boldsymbol{x}). \tag{1}$$

Fourier transformation leads to:

$$I(u) = S(u)O(u). \tag{2}$$

When recorded with an exposure time much shorter than the evolution time of atmospheric phase perturbations, the highly magnified observed image shows a pattern of speckles. It has been established for a long time (Labeyrie, 1970) that such speckled images contain diffraction-limited information on the spatial structure of the observed object.

1.2. The Power Spectrum

The mean power spectrum of speckle images can be written as (Dainty et al., 1978):

$$\left\langle |I(u)|^2 \right\rangle = \left\langle |S(u)|^2 \right\rangle |O(u)|^2 \simeq |\langle I(u) \rangle|^2 + N_S T(u) |O(u)|^2 , \tag{3}$$

where $N_S \simeq 2.30 D/r_0$ is the mean number of speckles per image and $T(u)$ the normalized transfer function of the telescope.

1.3. The Bispectrum

The bispectrum of the speckle images is:

$$\left\langle I^{(3)}(u,v) \right\rangle = \langle I(u) I(v) I^*(u+v) \rangle = \left\langle S^{(3)}(u,v) \right\rangle O^{(3)}(u,v). \tag{4}$$

J.G. Robertson and W.J. Tango (eds.), Very High Angular Resolution Imaging, 209–211.
© 1994 *IAU. Printed in the Netherlands.*

© International Astronomical Union • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1994IAUS..158..209T

The phase $\beta(u,v)$ of $\left\langle I^{(3)}(u,v)\right\rangle$ tends to be unaffected by atmospheric perturbations and may be uncorrupted by telescope aberrations (Roddier, 1988). Hence $\beta(u,v)$ can be approximated by the object bispectrum phase, thus:

$$e^{\jmath\beta(u,v)} \simeq e^{\jmath\theta(u)}e^{\jmath\theta(v)}e^{-\jmath\theta(u+v)}, \tag{5}$$

where $\theta(u)$ is the phase of the object spectrum.

1.4. Phase Reconstruction

The bispectrum subplanes $\left\langle I^{(3)}(u,v_0)\right\rangle$, with $\|v_0\| \leq r_0/\lambda$, are used to reconstruct a weighted-least-squares estimation of the object spectrum phasor $e^{\jmath\theta(u)}$. This is done by an iterative method based on the one described by Matson (1991). Basically, the new estimation $e^{\jmath\theta_{k+1}(u)}$ for $e^{\jmath\theta(u)}$ is given by:

$$e^{\jmath\theta_{k+1}(u)} \propto \sum_{v_0} \frac{e^{\jmath\beta(u,v_0)}e^{-\jmath\theta_k(v_0)}e^{\jmath\theta_k(u+v_0)}}{\sigma^2_\beta(u,v_0)}, \tag{6}$$

where the previously estimated phasor $e^{\jmath\theta_k(u)}$ is set to zero if not already known so as to cancel its contribution to the weighted sum. The expression of the bispectrum phase variance $\sigma^2_\beta(u,v)$ is given in Ayers (1988).

1.5. Image reconstruction

The power spectrum $\left\langle |I(u)|^2\right\rangle$ combined with the phasor $e^{\jmath\theta(u)}$ given by the bispectrum can be written as the convolution of the estimated object $\widetilde{O}(u)$ by some transfer function $H(u)$:

$$\sqrt{\left\langle |I(u)|^2\right\rangle}e^{\jmath\theta(u)} \simeq H(u)\widetilde{O}(u). \tag{7}$$

Following Lane (1992), this complex spectrum is blindly deconvoluted with positivity (and possibly support) constraints for $\widetilde{o}(x)$ and $h(x)$. A further constraint of symmetry is used for $h(x)$ (i.e. $H(u)$ real). Moreover, Eq. 3 leads to a (possible) first estimation of the smoothed object power spectrum:

$$\left|\widetilde{O_0}(u)\right|^2 = \left\langle |I(u)|^2\right\rangle - |\langle I(u)\rangle|^2 . \tag{8}$$

Simulation of 100 speckle images (free from Poisson noise) of a complex triple object were used to test the reconstruction process. Effects of turbulence were simulated with $D/r_0 \simeq 10$, and 19 subplanes were used to reconstruct the phase of the object. Using conjugate gradient minimization, the final estimation of the object is obtained after $\sim$ 100 iterations. This final estimation nicely fits the smoothed original object.

2. Results: Capella

A set of 200 speckle images of Capella (αAurigae) were used to reconstruct an image of this object (data courtesy of ONERA – FRANCE). These observations

© International Astronomical Union • Provided by the NASA Astrophysics Data System

1994IAUS..158..209T

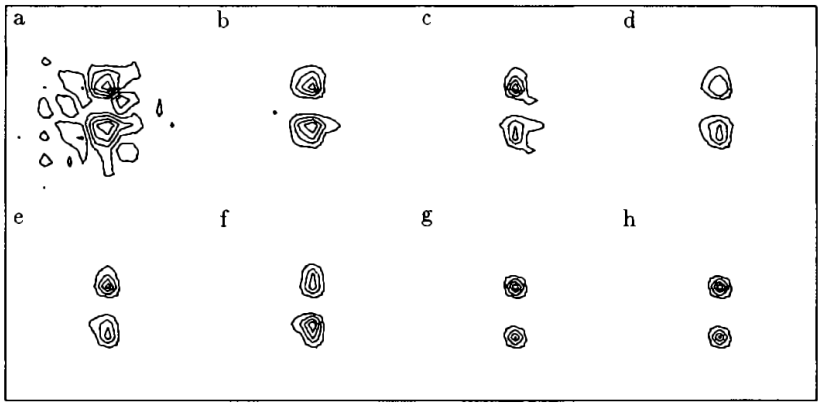


Fig. 1. Improvement of the image of Capella by applying the constraint of positivity with an increasing number of iterations: (a) starting estimation, (b) 1st iteration, (c) 5th iteration, (d) 10th iteration, (e) 20th iteration, (f) 30th iteration, (g) 40th iteration, (h) 50th iteration.

were performed at the 4.2 m William Herschel Telescope on La Palma during the night November 8, 1990 for the purpose of wave front sensor *a posteriori* deconvolution (Michau et al., 1991). Capella is a bright binary star ($m_V \simeq 0.08$, separation $\simeq$ 55 marcsec at the acquisition date). The results shown in Fig. 1 are obtained from 19 bispectrum subplanes, they are at least as good as deconvolution with wavefront sensor (Michau et al., 1991).

References

G. R. Ayers, 1988, *Correlation techniques for imaging through atmospheric turbulence*, thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London, London

J. C. Dainty and A. H. Greenaway, 1978, *Estimation of spatial power spectra in speckle interferometry*, J. Opt. Soc. Am., Vol. 69, No. 5, pp. 786-790

A. Labeyrie, 1970, *Attainment of diffraction-limited resolution in large telescopes by Fourier analyzing speckle patterns in star images*, Astron. Astrophys., Vol. 6, pp. 85-87

R. G. Lane, 1992, *Blind deconvolution of speckle images*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 9, No. 9, pp. 1508-1514

C. L. Matson, 1991, *Weighted-least-squares phase reconstruction from the bispectrum*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 8, No. 12, pp. 1905-1913

V. Michau, T. Marais, J. Laurent, J. Primot, J.-C. Fontanella, M. Tallon, J. Fuensalida, 1991, *High-resolution astronomical observations using deconvolution from wavefront sensing*, SPIE's International Symposium on Optical Engineering and Photonics in AerospaceSensing, Orlando, FL (USA)

F. Roddier, 1981, in *Progress in Optics*, ed. E. Wolf (North-Holland Publishing Company, Amsterdam) Vol. 19, pp. 281-376

F. Roddier, 1988, *Interferometric imaging in optical astronomy*, Physics Report

© International Astronomical Union • Provided by the NASA Astrophysics Data System

Annexe F

Self-referenced holography methods in french observatories

R. Foy, F.-C. Foy, F. Quatrehomme, E. Thiébaut, A. Blazit, D. Bonneau, I. Tallon-Bosc, M. Tallon, A. Baranne & Ch. Thom, 1992, in "Wavefront supported post-facto image correction" Nordic Optical Telescope mini-workshop, T. Andersen Ed., Risø (Denmark).

Annexe G

The fiberless multisplit spectrograph SFM

R. Foy, A. Baranne, C. Bentolila, A. Blazit, F.-C. Foy, R. Leblondet, D. Revest, F. Thévenin, E. and Thiébaut & Ch. Thom, 1994, Exp. Astron. 5, 329–354.

Annexe H

Propriétés de la transformée de Knox-Thompson et du bispectre

Pour appliquer les méthodes de Knox-Thompson et du bispectre, on intégre des sous-plans de $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ et de $\langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ (*cf.* section 1.6). A partir des propriétés de support et de symétrie de $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ et de $\langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$, je montre quels sont les points de mesure (*i.e.* les couples de fréquences spatiales $(\mathbf{u},\mathbf{v})$) indépendants qu'il faut sélectionner pour reconstruire complètement le spectre de Fourier de l'objet.

H.1 Support

Si les spectres de Fourier des images courte pose ont le même support borné $\mathcal{S}$ alors le support de $I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ est :

$$\mathcal{S}^{(\mathrm{KT})} = \{(\mathbf{u},\mathbf{v}),\ \mathbf{u}\in\mathcal{S},\ \text{et}\ (\mathbf{u}+\mathbf{v})\in\mathcal{S}\} \tag{H.1}$$

tandis que celui du bispectre est :

$$\mathcal{S}^{(3)} = \{(\mathbf{u},\mathbf{v}),\ \mathbf{u}\in\mathcal{S},\ \mathbf{v}\in\mathcal{S}\ \text{et}\ (\mathbf{u}+\mathbf{v})\in\mathcal{S}\} \tag{H.2}$$

Pour un télescope, les images instantanées présentent une fréquence de coupure spatiale finie $u_{\mathrm{c}} = D/\lambda$; dans ce cas, les supports du spectre des images, de $I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ et du bispectre sont respectivement :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \{\mathbf{u},\ \|\mathbf{u}\|\le u_{\mathrm{c}}\} && \text{(H.3)}\\
\mathcal{S}^{(\mathrm{KT})} &= \{(\mathbf{u},\mathbf{v}),\ \|\mathbf{u}\|\le u_{\mathrm{c}},\ \text{et}\ \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\le u_{\mathrm{c}}\} && \text{(H.4)}\\
\mathcal{S}^{(3)} &= \{(\mathbf{u},\mathbf{v}),\ \|\mathbf{u}\|\le u_{\mathrm{c}},\ \|\mathbf{v}\|\le u_{\mathrm{c}},\ \text{et}\ \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\le u_{\mathrm{c}}\}. && \text{(H.5)}
\end{aligned}$$

Les figures H.1 et H.2 montrent respectivement les supports de $I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ et de $I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ dans le cas d'images monodimensionnelles ayant une fréquence de coupure u_{c}.

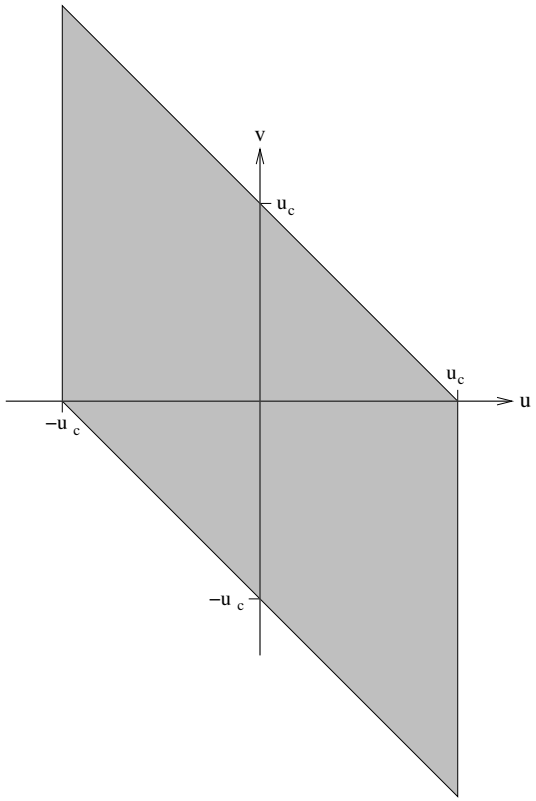


FIG. H.1 – Représentation du support de la transformée de Knox-Thompson d'images monodimensionnelles.

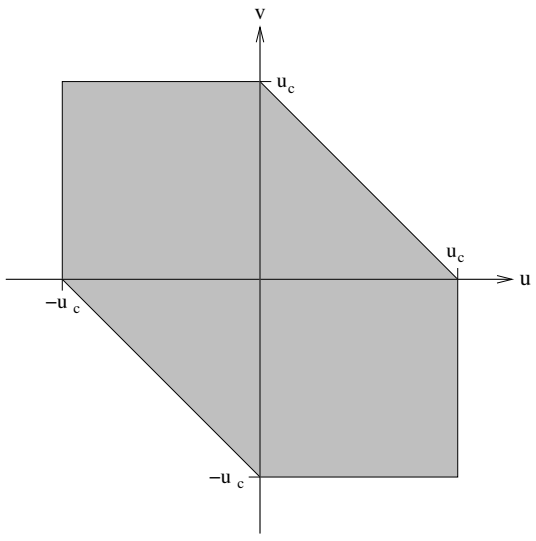


FIG. H.2 – Représentation du support du bispectre d'images monodimensionnelles.

En deux dimensions, la transformée de Knox-Thompson et le bispectre sont des fonctions d'un espace à quatre dimensions. Afin d'en faciliter la représentation, la position spatiale discrète $\mathbf{u}$ peut être associée de façon isomorphe à un indice monodimensionnel u comme suit :

$$\mathbf{u} = (u_{\mathrm{x}}, u_{\mathrm{y}}) \quad \sim \quad u = u_{\mathrm{x}} + (2u_{\mathrm{N}} + 1)u_{\mathrm{y}}, \tag{H.6}$$

où u_{N} est l'indice de la fréquence spatiale de Nyquist, soit la moitié du nombre de points d'échantillonnage dans une direction, et

$$(u_{\mathrm{x}}, u_{\mathrm{y}}) \in \{-u_{\mathrm{N}}, 1 - u_{\mathrm{N}}, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, u_{\mathrm{N}} - 1, u_{\mathrm{N}}\}^2 \tag{H.7}$$

sont les coordonnées discrètes de $\mathbf{u}$. En associant de cette façon la fréquence spatiale échantillonnée $\mathbf{u}$ et l'indice u, d'une part, et $\mathbf{v}$ et l'indice v, d'autre part, on peut récrire la transformée de Knox-Thompson et le bispectre comme des fonctions à deux variables [1] (*i.e.* les deux indices u et v). Grâce à ce changement de variables, il est possible de représenter en deux dimensions le support du bispectre d'images bidimensionnelles (*cf.* figure H.3). Cette relation univoque qui associe un vecteur (de coordonnées discrètes sur un support borné $\mathcal{S}$) à un indice possède la propriété de linéarité suivante :

$$\text{si } (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in \mathcal{S} \text{ alors} \qquad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \quad \sim \quad (u + v) \tag{H.8}$$

Si cette condition est vérifiée, la transformée de Knox-Thompson et le bispectre peuvent s'écrire très simplement :

$$\langle I^{(\mathrm{KT})}(u, v)\rangle = \langle I(u)I^*(u + v)\rangle, \tag{H.9}$$
$$\langle I^{(3)}(u, v)\rangle = \langle I(u)I(v)I^*(u + v)\rangle, \tag{H.10}$$

où, bien entendu, $I(u) \sim I(\mathbf{u})$. La possibilité de pouvoir représenter de façon unique un vecteur de coordonnées discrètes sur un support borné par un indice entier est vraie pour un nombre quelconque de dimensions.

H.2 Symétries

Si les images $i(\mathbf{x})$ sont des fonctions réelles, leurs spectres sont hermitiques et leur transformée de Knox-Thompson possède les deux propriétés de symétrie suivantes :

$$I^{(\mathrm{KT})}(-\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{v}) = I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \tag{a}$$
$$I^{(\mathrm{KT})}(-\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = I^{(\mathrm{KT})*}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \tag{b}$$

[1] De la même manière il serait possible de combiner u et v en seul indice mais cela ne nous intéresse pas car u et v jouent un rôle différent lorsque les mesures sont regroupées par sous-plan.

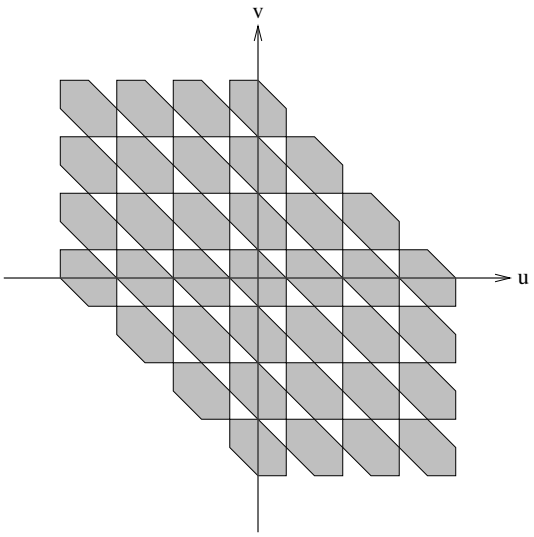


FIG. H.3 – Représentation du support du bispectre d'images bidimensionnelles.

Dans le cas le plus général (*i.e.* même si $i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$), il est aisé de vérifier que le bispectre présente les deux propriétés de symétrie suivantes :

$$I^{(3)}(\mathbf{v},\mathbf{u}) = I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \text{(i)}$$
$$I^{(3)}(\mathbf{u},-\mathbf{u}-\mathbf{v}) = I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v}). \quad \text{(ii)}$$

Pour des images réelles, le bispectre vérifie aussi :

$$I^{(3)}(-\mathbf{u},-\mathbf{v}) = I^{(3)*}(\mathbf{u},\mathbf{v}). \quad \text{(iii)}$$

Ces relations de symétrie font que la redondance dans la transformée de Knox-Thompson et dans le bispectre est très élevée : un point particulier de $I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ permet d'en obtenir trois autres, tandis qu'un point de $I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ permet d'en obtenir onze autres par symétrie. Le support de $I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ peut ainsi être découpé en quatre domaines non redondants qui suffisent chacun à déterminer complètement la transformée de Knox-Thompson. De même, le support du bispectre peut être subdivisé en douze domaines non redondants. La figure H.4 montre ce découpage pour la méthode de Knox-Thompson et pour le bispectre ; les relations de symétrie entre les domaines non redondants pour la méthode de Knox-Thompson et pour le bispectre sont données par la figure H.5 et la figure H.6. Lorsque $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ ou $\langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ sont mesurés, il suffit de ne les intégrer que sur l'un de ces domaines non redondants. Etant donné le volume important du support de $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ et de $\langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ pour des images bidimensionnelles, cette propriété doit absolument être exploitée.

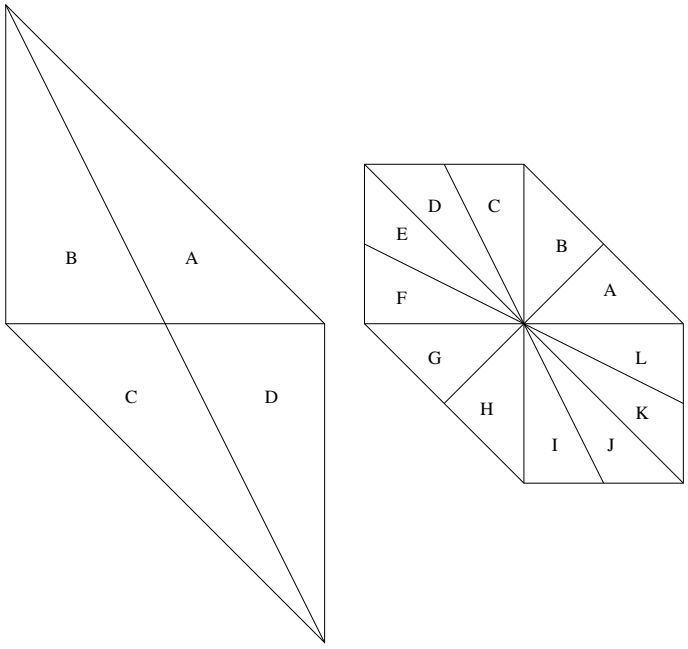


FIG. H.4 – Découpage des supports de la transformée de Knox-Thompson et du bispectre en domaines non redondants.

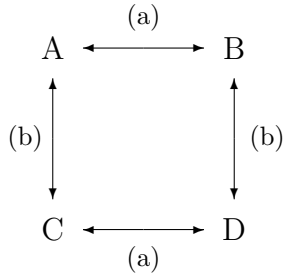


FIG. H.5 – Relations de symétrie pour le support de la transformée de Knox-Thompson.

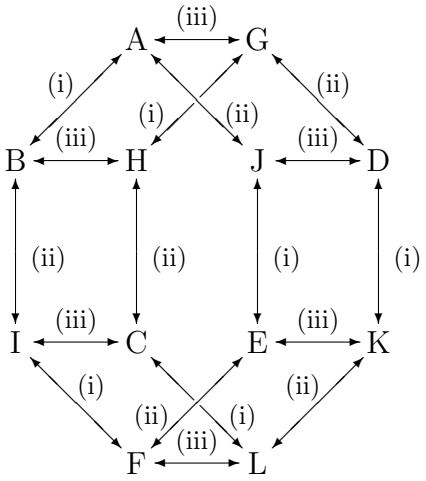


FIG. H.6 – Relations de symétrie entre les domaines non-redondants du support du bispectre.

H.3 Volume du bispectre

Le volume du bispectre non-redondant, c'est-à-dire le nombre minimum de points qui suffit à déterminer tout le bispectre, est dans le cas d'images monodimensionnelles échantillonnées sur $2u_{\mathrm{N}}$ points :

$$\mathrm{Vol}^{(3)}{}_{1\mathrm{D}} = \begin{cases} \dfrac{1}{4}(u_{\mathrm{N}}+2)^2 & \text{si } u_{\mathrm{N}} \text{ est pair,} \\ \dfrac{1}{4}(u_{\mathrm{N}}+1)(u_{\mathrm{N}}+3) & \text{si } u_{\mathrm{N}} \text{ est impair,} \end{cases} \tag{H.11}$$

soit de l'ordre de $\frac{1}{4}{u_{\mathrm{N}}}^2$ points quand u_{N} est grand. Pour des images bidimensionnelles échantillonnées sur $2u_{\mathrm{N}} \times 2u_{\mathrm{N}}$ points, le volume du bispectre non-redondant est :

$$\mathrm{Vol}^{(3)}{}_{2\mathrm{D}} \begin{cases} \dfrac{1}{4}(3{u_{\mathrm{N}}}^4 + 6{u_{\mathrm{N}}}^3 + 10{u_{\mathrm{N}}}^2 + 8u_{\mathrm{N}} + 4) & \text{si } u_{\mathrm{N}} \text{ est pair,} \\ \dfrac{1}{4}(3{u_{\mathrm{N}}}^4 + 6{u_{\mathrm{N}}}^3 + 10{u_{\mathrm{N}}}^2 + 6u_{\mathrm{N}} + 3) & \text{si } u_{\mathrm{N}} \text{ est impair,} \end{cases} \tag{H.12}$$

soit de l'ordre de $\frac{3}{4}{u_{\mathrm{N}}}^4$ points quand u_{N} est grand. Si tout le bispectre est mesuré, par exemple parce que la triple corrélation des images est intégrée pour obtenir le bispectre, il faut compter en gros 12 fois plus de points. La table H.1 permet de ce faire une idée du volume de stockage nécessaire pour enregistrer le bispectre (non-redondant) d'images bidimensionnelles.

dimension des images	volume du bispectre
32×32	220 ko
64×64	3 Mo
128×128	50 Mo
256×256	780 Mo
512×512	12 Go

TAB. H.1 – Volume minimum nécessaire pour stocker une composante (partie réelle ou partie imaginaire codée en réel sur 4 octets) du bispectre d'images bidimensionnelles.

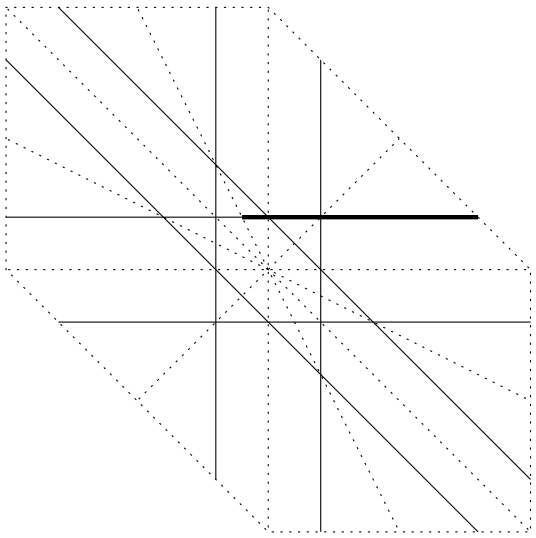


FIG. H.7 – Images d'un sous-plan par les symétries du bispectre. Cette figure montre le support d'un sous-plan (trait fort), l'ensemble de ses images par les symétries du bispectre (trait fin) ainsi que les limites des domaines non-redondants (trait pointillé).

H.4 Supports des sous-plans

Ayant choisi l'approche consistant à intégrer des sous-plans de $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ et de $\langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ pour $\|\mathbf{v}\| < r_0/\lambda$, il me reste à définir l'ensemble des points de mesure. Cela n'est pas immédiat et demande de la rigueur. En effet, il s'agit de mesurer $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ et $\langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ en un maximum de points ayant le meilleur rapport signal à bruit possible. Il ne faut donc pas oublier de points de mesure. Mais il faut aussi éviter d'intégrer ces quantités pour des couples de fréquences conjugués par le jeu des symétries, soit au sein d'un sous-plan, soit entre deux sous-plans différents.

Le nombre de points d'un sous-plan à prendre en compte constitue ce que j'appelle le support du sous-plan. La représentation équivalente des fréquences spatiales $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ et $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ par les indices $u = u_x + (2u_{\mathrm{N}} + 1)u_y$ et $v = v_x + (2u_{\mathrm{N}} + 1)v_y$ déjà introduite dans la section H.1 va me permettre de formaliser cette sélection.

H.4.1 cas de la méthode de Knox-Thompson

En tenant compte des symétries de $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$, un sous-plan pour la méthode de Knox-Thompson est constitué des points

$$\left\{\begin{array}{rcccl} -v_k/2 & \leq & u & \leq & 2u_{\mathrm{N}}(u_{\mathrm{N}}+1)-v_k \\ \|u\| & \leq & u_{\mathrm{N}} & & \end{array}\right. \tag{H.13}$$

où $\|u\| \equiv \sqrt{u_x^2+u_y^2}$ et qui vaut pour $v_k \geq 0\ \forall\ k$. Dans toute la suite, je me limiterai à $v_k \geq 0$.

La représentation bidimensionnelle du support de $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ pour des images bidimensionnelles ne vaut que si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}+\mathbf{v}_k$ appartiennent bien au support borné $\mathcal{S}$. En plus des conditions (H.13), les coordonnées de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}_k$ doivent vérifier :

$$\left\{\begin{array}{rcccl} -u_{\mathrm{N}} & \leq & u_x+v_{kx} & \leq & u_{\mathrm{N}} \\ -u_{\mathrm{N}} & \leq & u_y+v_{ky} & \leq & u_{\mathrm{N}} \end{array}\right. \tag{H.14}$$

Il est judicieux de classer les sous-plans par ordre croissant du module de leur générateur afin de pouvoir sélectionner des points de mesure de rapport signal à bruit décroissant lorsque l'on augmente le nombre de sous-plans.

H.4.2 cas du bispectre

Les images par les symétries du bispectre d'un sous-plan particulier montrent immédiatement (*cf.* figure H.7) que le support du sous-plan généré par $v_k \geq 0$ est constitué des couples (u,v) tels que :

$$\left\{\begin{array}{rcccl} -v_k/2 & \leq & u & \leq & 2u_{\mathrm{N}}(u_{\mathrm{N}}+1)-v_k \\ \|u\| & \leq & u_{\mathrm{N}} & & \\ \|u+v\| & \leq & u_{\mathrm{N}} & & \end{array}\right. \tag{H.15}$$

Contrairement à la méthode de Knox-Thompson, la figure H.7 montre que le support non redondant d'un sous-plan du bispectre chevauche plusieurs (3) domaines non redondants. Tous ces points sont à prendre en compte, mais il faut éliminer de cette sélection les points redondants entre deux sous-plans différents. Il est important de noter que l'ensemble des points défini par (H.15) ne vaut que si le générateur du sous-plan est associé à $v_k \geq 0$.

La figure H.8 montrent où se situent les points mesurant la même valeur du bispectre entre deux sous-plans générés par v_1 et v_2. Il y a au maximum deux points conjugués entre les deux sous-plans. Par exemple, l'intersection avec le sous-plan $v = v_1$ des symétriques $u = v_2$ et $v = v_2 - u$ du sous-plan $v = v_2$ permet de déterminer ces points qu'il faut éliminer des mesures. Il suffit d'éliminer d'un nouveau sous-plan généré par v_n les points redondants avec les sous-plans générés par v_k avec $k < n$ ce qui revient à définir l'ensemble

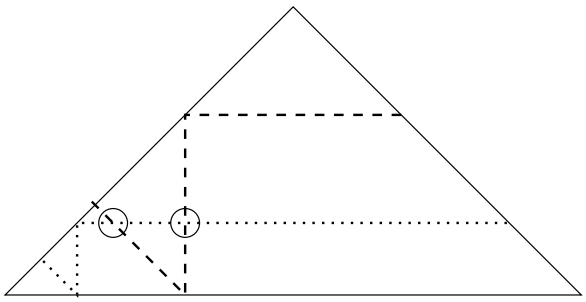


FIG. H.8 – Points redondants entre deux sous-plans du bispectre.

des points de mesure d'un nouveau sous-plan par :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -v_n/2 & \leq & u & \leq \quad 2u_{\mathrm{N}}(u_{\mathrm{N}}+1)-v_n \\ \|u\| & \leq & N & \\ \|u+v_n\| & \leq & N & \\ u & \neq & \pm v_k & \forall k=0,1,\ldots,n-1 \\ u & \neq & \pm v_k - v_n & \forall k=0,1,\ldots,n-1 \end{array}\right. \tag{H.16}$$

qui vaut pour $v_k \geq 0 \; \forall \; k$. Comme pour la méthode de Knox-Thompson, il reste à s'assurer que $\mathbf{u}+\mathbf{v}_k$ appartient bien au support borné $\mathcal{S}$ soit :

$$\left\{\begin{array}{rcccl} -u_{\mathrm{N}} & \leq & u_x+v_{kx} & \leq & u_{\mathrm{N}} \\ -u_{\mathrm{N}} & \leq & u_y+v_{ky} & \leq & u_{\mathrm{N}} \end{array}\right. \tag{H.17}$$

H.5 Conclusion

La principale difficulté lorsque l'on veut mettre en œuvre l'intégration de sous-plans du bispectre réside dans la détermination des points de mesures : pour être rigoureux, il faut supprimer les redondances. Une autre solution serait de tenir compte de cette redondance par une pondération appropriée des mesures. Comme les sous-plans ne se recoupent pas pour la méthode de Knox-Thompson, la sélection des points de mesure est plus simple.

A part la définition de l'ensemble des points de mesure et, bien entendu, l'expression des quantités mesurées, la méthode de Knox-Thompson et celle du bispectre sont très similaires. Tous les programmes de traitement des données que j'ai écrit sont capables d'intégrer ou d'exploiter les mesures tant dans le cadre de la méthode de Knox-Thompson que dans celui de l'analyse bispectrale.

Annexe I

Moments statistiques sous changement de variables

I.1 Moyenne et covariances

Etant donné $\{x_1, \ldots, x_N\}$ un système de N variables aléatoires dont on connait les premiers moments statistiques qui sont :

$$m_i = \langle x_i \rangle \tag{I.1}$$
$$c_{i,j} = \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle = \langle (x_i - m_i)(x_j - m_j) \rangle . \tag{I.2}$$

En effectuant le changement de variables $X_k = f_k(\mathbf{x})$, où $\mathbf{x}$ est le vecteur de composantes $\{x_1, \ldots, x_N\}$, on voudrait exprimer les moyennes M_k et les covariances $C_{k,l}$ des nouvelles variables à partir des moments m_i et $c_{i,j}$. Des expressions approchées peuvent être obtenues en développant f_k au voisinage des valeurs moyennes :

$$\begin{aligned} X_k = & \quad X_k|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}} \\ & + \sum_i (x_i - m_i) \left. \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}} \\ & + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (x_i - m_i)(x_j - m_j) \left. \frac{\partial^2 X_k}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}} \\ & + o\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|^2 \right), \end{aligned} \tag{I.3}$$

où $\mathbf{m}$ est le vecteur moyen de composantes $\{m_1, \ldots, m_N\}$. L'expression approchée de l'espérance $M_k \stackrel{\text{def}}{=} \langle X_k \rangle$ se déduit directement de l'équation précédente :

$$M_k \simeq X_k|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j c_{i,j} \left. \frac{\partial^2 X_k}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}} . \tag{I.4}$$

Afin de calculer les covariances des nouvelles variables, il faut introduire l'expression approchée de l'espérance du produit $X_k X_l$:

$$\begin{aligned}\langle X_k X_l \rangle &\simeq X_k|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}} X_l|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}} + \sum_i \sum_j c_{i,j} \left[\frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_l}{\partial x_j} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{m}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j c_{i,j} \left[X_k \frac{\partial^2 X_l}{\partial x_i \partial x_j} + X_l \frac{\partial^2 X_k}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{m}} . \end{aligned} \tag{I.5}$$

Finalement, il vient l'expression approchée de la variance et des covariances

$$C_{k,l} \stackrel{\text{def}}{=} \langle (X_k - M_k)(X_l - M_l) \rangle$$

des nouvelles variables :

$$C_{k,l} \simeq \sum_i \sum_j c_{i,j} \left[\frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_l}{\partial x_j} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{m}} . \tag{I.6}$$

Ces relations sont notamment utiles lorsque l'on effectue des mesures. Dans ce cas, une estimation du bruit est fournie par les expressions approchées de la variance.

I.2 Représentation polaire d'un complexe

Lorsque les quantités mesurées sont des variables complexes, et que seul le module ou seule la phase nous intéresse, les calculs qui précèdent nous permettent d'évaluer la variance du module ou de la phase à partir des mesures de covariance des parties réelle et imaginaire. En notation d'Euler, un complexe, $z = x + \jmath y$, est représenté par sa phase, $\varphi = \tan^{-1}(y/x)$, et par son module, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Les dérivées partielles du module et de la phase relativement aux parties réelles et imaginaires sont :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{-y}{x^2+y^2} \\
\frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{x}{x^2+y^2} \\
\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial x} &= \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial x} &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} &= \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial y} &= \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial y} &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned} \tag{I.7}$$

En utilisant ce qui précède, on en déduit les expressions approchées pour les moyennes du module et de la phase :

$$m_\rho \simeq \sqrt{m_x^2 + m_y^2} + \frac{c_{x,x} m_y^2 - 2c_{x,y} m_x m_y + c_{y,y} m_x^2}{2\left(m_x^2 + m_y^2\right)^{3/2}}, \tag{I.8}$$

$$m_\varphi \simeq \tan^{-1}\left(m_y/m_x\right) + \frac{\left(c_{x,x} - c_{y,y}\right) m_x m_y - c_{x,y}\left(m_x^2 - m_y^2\right)}{\left(m_x^2 + m_y^2\right)^2}. \tag{I.9}$$

Ces deux expressions mettent en évidence les corrections à apporter aux estimations des valeurs mesurées. On obtient de même les expressions approchées des variances du module et de la phase :

$$\sigma_\rho^2 \simeq \frac{c_{x,x} m_x^2 + 2c_{x,y} m_x m_y + c_{y,y} m_y^2}{m_x^2 + m_y^2}, \tag{I.10}$$

$$\sigma_\varphi^2 \simeq \frac{c_{x,x} m_y^2 - 2c_{x,y} m_x m_y + c_{y,y} m_x^2}{\left(m_x^2 + m_y^2\right)^2}. \tag{I.11}$$

Une expression identique pour la variance de la phase a été obtenue par un raisonnement graphique par Ayers (1987). Cette expression donne une valeur approchée d'autant meilleure que le rapport signal à bruit est bon. En faisant l'approximation que les fluctuations de z peuvent être modélisées par la somme de m_z et d'un complexe de module constant et de phase aléatoire de loi uniforme, Freeman et al. (1988) ont obtenu un résultat différent : leur variance de la phase est égale à la variance du module divisée par le module carré. C'est le résultat que l'on retrouve lorsque l'on néglige la covariance entre les parties réelle et imaginaire dans l'équation (I.11). Dans le cas des quantités complexes intégrées en interférométrie des tavelures (*e.g.* $\langle I^{(\mathrm{KT})}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$ ou $\langle I^{(3)}(\mathbf{u},\mathbf{v})\rangle$), rien ne permet de prévoir que cette covariance est effectivement négligeable. Aussi, il me semble préférable d'utiliser l'expression (I.11) qui reste valable dans l'approximation des faibles variances et sans autre hypothèse.

I.3 Rapport de deux variables aléatoires

Si on s'intéresse au rapport x/y de deux variables aléatoires, alors, dans la limite des faibles variances, la variance de x/y vaut :

$$\sigma_{x/y}^2 \simeq \frac{1}{\langle y\rangle^2}\sigma_x^2 + \frac{\langle x\rangle^2}{\langle y\rangle^4}\sigma_y^2 - 2\frac{\langle x\rangle}{\langle y\rangle^3}c_{x,y}. \tag{I.12}$$

De plus, si les deux variables x et y sont indépendantes, il vient :

$$\sigma_{x/y}^2 \simeq \left(\frac{\langle x\rangle}{\langle y\rangle}\right)^2 \left(\frac{\sigma_x^2}{\langle x\rangle^2} + \frac{\sigma_y^2}{\langle y\rangle^2}\right). \tag{I.13}$$

C'est cette dernière expression que j'utilise lorsque je veux mesurer le rapport signal à bruit du spectre de puissance après déconvolution — *i.e.* division du spectre de puissance observé par le spectre de puissance de la référence.

Annexe J

Transformée de Fourier discrète

La transformation de Fourier a une importance capitale dans le cas de l'imagerie puisqu'elle transforme un produit de convolution en un simple produit. Dès lors que l'on envisage un traitement numérique, les données (les images) que l'on manipule sont des mesures effectuées sur un nombre discret et fini de points. Il paraît donc souhaitable de définir une version "discrétisée" de la transformation de Fourier pour laquelle la transformée d'une fonction échantillonnée à support borné soit, elle aussi, une fonction échantillonnée à support borné — c'est-à-dire représentée par un nombre fini discret de valeurs. Une telle transformation existe et s'appelle la transformation de Fourier discrète (TFD). Dans une certaine mesure elle possède des propriétés similaires à celles de la transformation de Fourier.

Dans cette annexe, je donne simplement les définitions que j'ai choisies pour la TFD (d'autres définitions sont possibles) ainsi que les expressions que cela implique pour les produits de convolution et de corrélation discrets. Pour une étude extensive de la transformée de Fourier discrète et de ces applications, le lecteur trouvera son bonheur dans le livre de Bracewell (1978). A la fin de cette annexe, je démontre l'expression de la transformée de Fourier discrète du gradient.

J.1 Définitions

Une fonction monodimentionnelle échantillonnée sur N points est représentée par l'ensemble des valeurs $f_0, \ldots, f_{N-1}$. La transformée de Fourier discrète de f_x est l'ensemble $F_0, \ldots, F_{N-1}$ défini comme :

$$F_u = \sum_{x=0}^{N-1} f_x \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi ux/N}, \tag{J.1}$$

pour $u = 0, \ldots, N-1$. La relation (J.1) s'inverse pour donner la transformée de Fourier discrète inverse (TFD^{-1}) de F_u :

$$f_x = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F_u \mathrm{e}^{\jmath 2\pi ux/N}. \tag{J.2}$$

Ces définitions de la TFD résultent d'un choix personnel. Elles ne sont pas les seules possibles : le signe de l'argument de l'exponentielle complexe peut être inversé et la normalisation par $1/N$ peut être effectuée lors de la TFD. Il est aussi possible de normaliser la TFD et la TFD^{-1} par $1/\sqrt{N}$.

En deux dimensions, pour des images échantillonnées sur $N_1 \times N_2$ points, les relations qui définissent la TFD deviennent :

$$f_{x,y} = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{u=0}^{N_1-1} \sum_{v=0}^{N_2-1} F_{u,v} \mathrm{e}^{\jmath 2\pi ux/N_1} \mathrm{e}^{\jmath 2\pi uy/N_2} \tag{J.3}$$

$$\xrightarrow{\text{TFD}} F_{u,v} = \sum_{x=0}^{N_1-1} \sum_{y=0}^{N_2-1} f_{x,y} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi ux/N_1} \mathrm{e}^{-\jmath 2\pi uy/N_2} \tag{J.4}$$

J.2 Produit de convolution discret

Un produit de convolution discret peut être défini pour approximer le produit de convolution. Ainsi :

$$g_x = \sum_{x'} f_{x'} h_{x-x'} \tag{J.5}$$

$$= \sum_{x'} f_{x-x'} h_{x'} \tag{J.6}$$

est le produit de convolution discret des fonctions échantillonnées f_x et h_x. Pour qu'un tel produit soit commutatif, il faut que les fonctions échantillonnées soient périodiques et de période N (*i.e.* le nombre de points d'échantillonnage). Par exemple pour f_x cette propriété s'exprime par :

$$f_{x+N} = f_x. \tag{J.7}$$

g_x vérifie les même propriétés de symétrie.

La périodicité nécessaire pour définir le produit de convolution est en fait sous-jacente aux transformations de Fourier discrètes. Il est facile de le vérifier à partir de la définiton de la TFD^{-1} par exemple.

La transformée de Fourier discrète du produit de convolution discret s'exprime très simplement :

$$g_x = \sum_{x'} f_{x'} h_{x-x'} = \sum_{x'} f_{x-x'} h_{x'} \quad \xrightarrow{\text{TFD}} \quad G_u = F_u H_u. \tag{J.8}$$

Il faut noter que ce résultat dépend de la définition de la TFD : pour une définition différente, un facteur multiplicatif peut apparaître dans la relation.

J.3 Produit de corrélation discret

Avec les mêmes contraintes (*i.e.* périodicité) que pour le produit de convolution, un produit de corrélation discret peut être défini pour approximer le produit de corrélation :

$$g_x = \sum_{x'} f^*_{x'} h_{x'+x} \tag{J.9}$$

$$= \sum_{x'} f^*_{x'-x} h_{x'} \tag{J.10}$$

est le produit de corrélation discret des fonctions échantillonnées f_x et h_x.

La transformée de Fourier discrète du produit de corrélation discret est :

$$g_x = \sum_{x'} f^*_{x'} h_{x'+x} = \sum_{x'} f^*_{x'-x} h_{x'} \quad \overset{\text{TFD}}{\longrightarrow} \quad G_u = F^*_u H_u. \tag{J.11}$$

Pour une autocorrélation, on obtient l'équivalent dans le cas discret du théorème de Wiener-Kintchine :

$$\sum_{x'} f^*_{x'} f_{x'+x} = \sum_{x'} f^*_{x'-x} f_{x'} \quad \overset{\text{TFD}}{\longrightarrow} \quad |F_u|^2. \tag{J.12}$$

J.4 Transformée de Fourier discrète du gradient

Dans les algorithmes de reconstruction d'image que j'ai développés, la solution est obtenue en minimisant une fonction d'erreur par la méthode des gradients conjugués. Dans ce type de problème, l'expression de la transformée de Fourier discrète du gradient de l'erreur peut permettre de simplifier considérablement les calculs.

Soit Q une quantité **réelle** dépendant des paramètres $f_0, \ldots, f_{N-1}$ qui définissent une fonction **réelle** échantillonnée. Le gradient de Q par rapport aux paramètres f_x peut être récrit comme :

$$\frac{\partial Q}{\partial f_x} = \sum_{u=0}^{N-1} \left[\frac{\partial Q}{\partial \mathrm{Re}\, F_u} \frac{\partial \mathrm{Re}\, F_u}{\partial f_x} + \frac{\partial Q}{\partial \mathrm{Im}\, F_u} \frac{\partial \mathrm{Im}\, F_u}{\partial f_x} \right],$$

où F_u est la TFD de f_x définie plus haut. Comme f_x est une fonction échantillonnée réelle,

l'expression de F_u est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, F_u &= \sum_{x=0}^{N-1} f_x \cos \frac{2\,\pi\,u\,x}{N}, \\ \mathrm{Im}\, F_u &= -\sum_{x=0}^{N-1} f_x \sin \frac{2\,\pi\,u\,x}{N}. \end{aligned}$$

Par conséquent, le gradient devient

$$\frac{\partial Q}{\partial f_x} = \sum_{u=0}^{N-1} \left[\frac{\partial Q}{\partial \mathrm{Re}\, F_u} \cos \frac{2\,\pi\,u\,x}{N} - \frac{\partial Q}{\partial \mathrm{Im}\, F_u} \sin \frac{2\,\pi\,u\,x}{N} \right],$$

qui peut encore se mettre sous la forme

$$\frac{\partial Q}{\partial f_x} = \mathrm{Re} \left\{ \sum_{u=0}^{N-1} \left[\frac{\partial Q}{\partial \mathrm{Re}\, F_u} + \jmath \frac{\partial Q}{\partial \mathrm{Im}\, F_u} \right] \mathrm{e}^{\jmath 2\pi u x/N} \right\}. \tag{J.13}$$

Comme f_x est réelle, F_u est hermitique (*i.e.* $F_{-u} = F_u^*$) et, comme $Q \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathrm{Re}\, F_u} + \jmath \frac{\partial Q}{\partial \mathrm{Im}\, F_u}$$

est aussi hermitique, par conséquent sa TFD^{-1} est réelle. L'équation (J.13) se simplifie donc pour donner :

$$\frac{\partial Q}{\partial f_x} = \sum_{u=0}^{N-1} \left[\frac{\partial Q}{\partial \mathrm{Re}\, F_u} + \jmath \frac{\partial Q}{\partial \mathrm{Im}\, F_u} \right] \mathrm{e}^{\jmath 2\pi u x/N}, \tag{J.14}$$

où l'on retrouve (au facteur de normalisation près) l'expression de la TFD^{-1} de

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathrm{Re}\, F_u} + \jmath \frac{\partial Q}{\partial \mathrm{Im}\, F_u}.$$

La transformée de Fourier discrète du gradient de la quantité réelle Q par rapport aux valeurs f_x d'une fonction réelle échantillonnée s'exprime donc très simplement en fonction du gradient de Q par rapport aux valeurs F_u de la TFD de f_x :

$$\frac{\partial Q}{\partial f_x} \quad \xrightarrow{\mathrm{TFD}} \quad N \left[\frac{\partial Q}{\partial \mathrm{Re}\, F_u} + \jmath \frac{\partial Q}{\partial \mathrm{Im}\, F_u} \right]. \tag{J.15}$$

Dans le cas bidimensionnel, le même résultat peut être dérivé à ceci près que le facteur N dans l'équation (J.15) devient $N_1 N_2$ si la fonction est échantillonnée sur $N_1 \times N_2$ points.

Bibliographie

Aime C., Petrov R. G., Martin F., Ricort G. & Borgnino J., 1986, *Speckle interferometry and differential speckle interferometry using cross-spectrum techniques*, Opt. Eng., **25**, 6, pp. 716–723.

Aime C. & Aristidi E., 1992, *Statistical approach to biais effects in the techniques of speckle interferometry and speckle masking*, J. Opt. Soc. Am. A, **9**, 10.

Allouin D.M. & Mariotti J.-M. (ed.), 1989, *Diffraction limited imaging with very large telescopes*, NATO ASI 274.

Appenzeller I. & Mundt R., 1989, *T Tauri Stars*, A&A Rev., **1**, 291–334.

Ayers G. R., 1987, *Correlation techniques for imaging through atmospheric turbulence*, Imperial College of Science, Technology and Medicine, PhD thesis of the University of London.

Ayers G. R. & Dainty J. C., 1988, *Iterative blind deconvolution and its applications*, Opt. Lett., **13**, 7, pp. 547–549.

Ayers G. R., Northcott M. J. & Dainty J. C., 1988, *Knox-Thompson and triple-correlation imaging through atmospheric turbulence*, J. Opt. Soc. Am. A, **5**, 7, pp. 963–985.

Bartelt H., Lohmanm A. W. & Wirnitzer B., 1984, *Phase and amplitude recovery from bispectra*, Appl. Opt., **23**, 18.

Beckwith S. V. W., Sargent A. I., Chini R. S. & Güsten R., 1990, *A survey for circumstellar disks around young stellar objects*, AJ, **99**, 3, pp. 924–945.

Bertout C., Basri G. & Bouvier J., 1988, *Accretion disks around T Tauri stars*, ApJ, **330**, pp. 350–373.

Biraud Y., 1969, *A new approach for increasing the resolving power by data processing*, Astron. Astrophys., **1**, pp. 124–127.

Blazit A., 1987, *Comptage de photons bidimentionnel et applications astrophysiques*, Thèse de l'Université de Nice (France).

Bonneau D., Foy R., Blazit A. & Labeyrie A., 1982, A&A **106**, 235.

Bouvier J. & Bertout C., 1989, A&A, **211**, 99.

Bracewell R. N., 1978, *The Fourier transform and its applications*, McGraw-Hill.

Bruck Yu. M. & Sodin L. G., 1980, *A method for processing speckle images requiring no reference point source*, Astron. Astrophys., **87**, 11, pp. 188–191.

Chen W. P., Simon M., Logmore A. J., Howell R. R. & Benson J. A., 1990, *Discovery of five pre main-sequence binaries in Taurus*, ApJ, **357**, pp. 224–230.

Christou J.C., Cheng A.Y.S., Freeman J.D. & Roddier C., 1985, *Seeing calibration of astronomical speckle interferometric data*, AJ, **90**, 11, pp. 2644–2651.

Christou J.C, 1991, *Infrared speckle imaging : data reduction with application to binary stars*, Exp. Astron., **2**, pp. 27–56.

Clariá J. J., 1974, *A study of the stellar association Canis Majoris OB 1*, Astron. Astrophys., **37**, pp. 229–236.

Cohen M. & Kuhi L. V., 1979, *Observational studies of pre-main-sequence evolution*, Ap. J. Suppl., **41**, pp. 743–843.

Conan J.-M., Madec P.-Y. & Rousset G., 1993, *Image formation in adaptive optics partial correction*, Garching, Germany. I.C.O. Conf. on Active and Adaptive Optics.

Cuby J.-G., 1988, *Les dispositifs à comptage de photons*, Ann. Phys., **13**, pp. 1–35.

Dainty J. C., 1975, *Stellar Speckle Interferometry*, in *Laser speckle and related phenomena*, J. C. Dainty (ed.), Springer-Verlag.

Dainty J. C. & Greenaway A. H., 1979, *Estimation of spatial power spectra in speckle interferometry*, J. Opt. Soc. Am., **69**, 5, pp. 786–790.

Devaney M. N., Thiébaut E., Foy R., Blazit A., Bonneau D., Bouvier J., Batz B. de & Thom Ch., 1994, *The Hα environment of T Tauri resolved by speckle interferometry*, soumis Ã A&A.

Fienup J. R., 1982, *Phase retrieval algorithms : a comparison*, Appl. Opt., **21**, 15, pp. 2758–2769.

Fontanella J.-C. & Sève A., 1987, *Reconstruction of turbulence degraded-images using the Knox-Thompson algorithm*, J. Opt. Soc. Am. A, **4**, 3, pp. 439–448.

Foy R., 1988a, *The Photon Counting Camera CP40*, In Robinson L. B., editor, *Instrumentation for Ground-Based Optical Astronomy, Present and Future*, pp. 589–592, New-York. Springer-Verlag.

Foy R., 1988b, *Speckle Imaging Review*, In Robinson L. B., editor, *Instrumentation for Ground-Based Optical Astronomy, Present and Future*, pp. 345–359, New-York. Springer-Verlag.

Foy R., Foy F.-C., Quatrehomme F., Thiébaut E., Blazit A., Bonneau D., Tallon-Bosc I., Tallon A., M. Baranne & Thom Ch., 1992, *Self-referenced holography methods in french observatories*, In Andersen T., editor, *Wavefront supported post-facto image correction*, pp. 31–40, Risø (Denmark). Nordic Optical Telescope Scientific Association.

Foy R., Baranne A., Bentolila C., Blazit A., Foy F.-C., Leblondet R., Revest D., Thévenin F., Thiébaut E. & Thom Ch., 1994, *The fiberless multisplit spectrograph SFM*, Exp. Astron. **5**, pp. 329–354.

Freeman J. D., Christou J. C., Roddier F., McCarthy D. W. & Cobb M. L., 1988, *Application of bispectrum analysis for phase recovery from one-dimensional infrared speckle data*, J. Opt. Soc. Am. A, **5**, 3, pp. 406–415.

Fried D. L., 1966, *Optical resolution through a randomly inhomogeneus medium for very long and very short exposures*, J. Opt. Soc. Am., **56**, pp. 1372.

Gerchberg R. W. & Saxton W. O., 1972, *A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures*, Optik, **35**, 28, pp. 237–246.

Glindemann A. & Dainty J. C., 1993, *Object fitting to the bispectral phase by using least squares*, J. Opt. Soc. Am. A, **10**, 5, pp. 1056–1063.

Goodman J. W., 1985, *Statistical optics*, J. Wiley & sons ed., 43.

Haas M., Christou J. C., Zinnecker H., Ridgway S. T. & Leinert Ch., 1993, *Sub-diffraction-limited infrared speckle observations of Z Canis Majoris, a 0.10" variable binary star*, Astron. Astrophys., **269**, pp. 262–290.

Haniff C., 1991, *Least-squares Fourier phase estimation from the modulo 2π bispectrum phase*, J. Opt. Soc. Am. A, **8**, 1, pp. 134–140.

Herbst W., Booth J. F., Koret D. L., Zajtseva G. V., Shakhovskaya N. I., Vrba F. J., Covino E., Terranegra L., A. Vittone, Hoff D., Kelsey L., Lines R. & Barksdale W., 1987, *Photometric variations of Orion population stars. V. A search for periodicities*, AJ, **94**, 1, pp. 137–149.

Hofmann K.-H. & Weigelt G., 1987, *Astronomical speckle masking : image reconstruction by cross triple correlation*, Appl. Opt., **26**, 10, pp. 2011–2015.

Hofmann K.-H., 1993, *Photon-counting speckle imaging : the photon counting hole in triple correlation*, J. Opt. Soc. Am. A, **10**, 2, pp. 329–335.

Holmes T. J., 1992, *blind deconvolution of speckle images quantum-limited incoherent imagery : maximum-likehood approach*, J. Opt. Soc. Am. A, **9**, 7, pp. 1052–1061.

Karovska M., Nisenson P., Papaliolios C. & Boyle R. P., 1991, *Asymmetries in the atmosphere of Mira*, Ap. J. **374**, L51–L54.

Knox K. T., 1976, *Image retrieval from astronomical speckle patterns*, J. Opt. Soc. Am. A, **66**, pp. 1236–1239.

Knox K. T. & Thompson B. J., 1974, *Recovery of images from atmospherically degraded short exposure photographs*, Astrophys. J. Lett., **193**, pp. L45–L48.

Koresko C. D., Beckwith S. V. W., Ghez A. M., Matthews K. & Neugebauer G., 1991, *An infrared companion to Z Canis Majoris*, AJ, **102**, 6, pp. 2073–2078.

Korff D., 1973, *Analysis of a method for obtaining near-diffraction-limited information in the presence of atmospheric turbulence*, J. Opt. Soc. Am., **63**, 8, pp. 971–980.

Labeyrie A., 1970, *Attainment of diffraction-limited resolution in large telescopes by Fourier analyzing speckle patterns in star images*, Astron. Astrophys., **6**, pp. 85–87.

Labeyrie A., Koechlin L., Bonneau D., Blazit A. & Foy R., 1977, Ap. J. **218**, L75.

Lane R. G. & Bates R. H. T., 1987, *Automatic multidimensional deconvolution*, J. Opt. Soc. Am. A, **4**, 1, pp. 180–188.

Lane R. G., 1991, *Phase retrieval using conjugate gradient minimization*, J. Mod. Opt., **38**, 9, pp. 1797–1818.

Lane R. G., 1992, *Blind deconvolution of speckle images*, J. Opt. Soc. Am. A, **9**, 9, pp. 1508–1514.

Lane R. G., Glindemann A. & Dainty J. C., 1992, *Simulation of a Kolmogorov phase screen*, Wave in random media, **2**, pp. 209–224.

Lannes A., Roques S. & Casanove M. J., 1987, *Resolution and robustness in image processing : a new regularization principle*, J. Opt. Soc. Am., **4**, 1, pp. 189–199.

Lohmann A. W., Weigelt G. & Wirnitzer B., 1983, *Speckle masking in astronomy : triple correlation theory and applications*, Appl. Opt., **22**, 24, pp. 4028–4037.

Lucy L. B., 1974, *An iterative technique for the rectification of observed distributions*, ApJ, **79**, 6, pp. 745–754.

von der Lühe O., 1984, *Estimating Fried's parameter from a time series of arbitrary resolved structures imaged through the atmosphere*, J. Opt. Soc. Am. A, **1**, 510.

von der Lühe O., 1992, *Speckle imaging of solar small scale structure : I. methods*, A&A.

Malbet F., Rigaut F., Léna P. & Bertout C., 1993, *Detection of a 400 AU disk-like structure surrounding the stellar object Z CMa*, Astron. Astrophys., **271**, pp. L9-L12.

Mariotti J.-M., 1989, *Introduction to Fourier optics and coherence*, In Allouin D.M. & Mariotti J.-M. (ed.), *NATO ASI Series :* Diffraction limited imaging with very large telescopes, volume 274, pp. 3–31. Kluwer Academic Publishers.

Marais T., Michau V., Fertin G., Primot J. & Fontanella J.-C., 1991, *Deconvolution from wave-front sensing on a 4 m telescope*, Garching, Germany. E.S.O. Symposium on High Resolution Imaging.

Marron J. C., Sanchez P. P. & Sullivan R. C., 1990, *Unwrapping algorithm for least-squares phase recovery from the modulo* 2π *bispectrum phase*, J. Opt. Soc. Am. A, **7**, 1, pp. 14–20.

Matson C. L., 1991, *Weighted-least-squares phase reconstruction from the bispectrum*, J. Opt. Soc. Am. A, **8**, 12, pp. 1905–1913.

Michau V., Marais T., Laurent J., Primot J., Fontanella J.-C., Tallon M. & Fuensalida J., 1991, *High-resolution astronomical observations using deconvolution from wavefront sensing*, In *SPIE's International Symposium on Optical Engineering and Photonics in AerospaceSensing*, Orlando, FL (USA).

Narayan R. & Nityananda R., 1986, *Maximum entropy image restoration in astronomy*, ARA&A, **24**, pp. 127–170.

Nisenson P. & Papaliolios C., 1983, *Effects of photon noise on speckle image reconstruction with the Knox-Thompson algorithm*, Opt. Commun., **47**, 2, pp. 91–96.

Nisenson P., Stachnik R. V., Karovska M. & Noyes R., 1985, *A new optical source associated with T Tauri*, ApJ, **297**, pp. L17–L20.

Northcott M. J., Ayers G. R. & Dainty J. C., 1988, *Algorithms for image reconstruction from photon-limited data using the triple correlation*, J. Opt. Soc. Am. A, **5**, 7, pp. 986–992.

Papaliolios C., Nisenson P. & Ebstein S., 1985, *Speckle imaging with the PAPA detector*, Appl. Opt., **24**, 2, pp. 287.

Pehlemann E. & von der LÃ$\frac{1}{4}$he O., 1989, *Technical aspects of the speckle masking phase reconstruction algorithm*, A&A **216**, 337–346.

Perrier Ch., 1989, *Amplitude estimation from speckle interferometry*, In Allouin D.M. & Mariotti J.-M. (ed.), *NATO ASI Series :* Diffraction limited imaging with very large telescopes, volume 274, pp. 99–111. Kluwer Academic Publishers.

Pérez-Ilzarbe M. J. & Nieto-Vesperinas M., 1991, *Phase retrieval of photon-limited images from information of the power spectrum only*, J. Opt. Soc. Am. A, **8**, 9, pp. 908–918.

Plez B., Brett J.M. & Nordlund Å., 1992, A&A **256**, 551.

Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A. & Vetterling W. T., 1990, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press.

Primot J., Rousset G. & Fontanella J.-C., 1988, *Image deconvolution from wavefront sensing : atmospheric turbulence simulation cell results*, In *NOAO-ESO Conf. on* Very large Telescopes and their instrumentation, Number 30, Garching (FRG).

Primot J., Rousset G. & Fontanella J.-C., 1990, *Deconvolution from wavefront sensing : a new technique for compensating turbulence degraded images*, J. Opt. Soc. Am. A, **7**, 9, pp. 1598–1608.

Richardson W. H., 1972, *Bayesian-based iterative method of image restauration*, J. Opt. Soc. Am., **62**, 1, pp. 55–59.

Rigaut F., Rousset G., Kern P., Fontanella J.-C., Gaffard J.-P., Merkle F. & Léna P., 1991, *Adaptative optics on a 3.6-m telescope : results and performance*, Astron. Astrophys., **250**, pp. 280–290.

Roddier F., 1981, *The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy*, in Progress in Optics, **XIX**, pp. 281–376, North-Holland Publishing Company (Amsterdam).

Roddier F., 1986, *Triple correlation as a phase closure technique*, Opt. Commun., **60**, 3, pp. 145–148.

Roddier F., 1988a, *Interferometric imaging in optical astronomy*, Physics Reports, **170**, pp. 97–166.

Roddier F., 1988b, *Passive versus active methods in optical interferometry*, In *NOAO-ESO Conf. on* High-resolution imaging by interferometry, Number 29, Garching (FRG).

Roddier F. & Christou J. C., 1988, *Phase variance from triple correlation anlysis*, Opt. Commun., **65**, 2, pp. 115–120.

Roddier F. & Roddier C., 1991, *Wavefront reconstruction using iterative Fourier transforms*, Appl. Opt., **30**, 11, pp. 1325–1327.

Roddier F., Anuskiewicz J., Graves J.E., Northcott M. J. & Roddier C., 1994, *Adaptative optics at the University of Hawaii I : Current performance at the telescope*, SPIE 2201–01.

Rousset G., Madec P. Y. & Rabaud D., 1991, *Adaptive optics partial correction simulation for two telescope interferometry*, Garching, Germany. E.S.O. Symposium on High Resolution Imaging.

Rousset G., Beuzit J. L., Hubin N., Gendron E., Boyer C., Madec P. Y., Gigan P., Richard J.-C., Vittot M., Gaffard J.-P., Rigaut F. & Léna P., 1993, *The COME-ON-PLUS adaptive optics system : results and performance*, Garching, Germany. I.C.O. Conf. on Active and Adaptive Optics.

Schulz T. J., 1993, *Multiframe blind deconvolution of astronomical images*, J. Opt. Soc. Am. A, **10**, 5, pp. 1064–1073.

Stockham T.G., Cannon T.M. & Ingebreston IR.B., 1975, *Blind deconvolution through digital signal processing*, Proc. IEEE, **63**, pp. 678–692.

Tallon M., 1989, *Contributions Ã l'imagerie Ã haute rÃ©solution angulaire : analyse de surface d'onde, source laser de rÃ©fÃ©rence, optique adaptative*, thèse de doctorat de l'Université de Nice (France).

Takajo H. & Takahashi T., 1991, *Least-squares phase recovery from the bispectrum phase : an algorithm for a two-dimensional object*, J. Opt. Soc. Am. A, **8**, 7, pp. 1038–1047.

Teissier E., 1993, *Application de l'interférométrie bidimensionnelle des tavelures en infrarouge à l'étude des étoiles jeunes*, thèse de doctorat de l'Université de Paris 6.

Thiébaut E., 1994a, *Speckle interferometry with a photon-counting detector*, Astron. Astrophys., **284**, pp. 340–348.

Thiébaut E., 1994b, *Speckle imaging with the bispectrum and without reference star*, In Robertson J. G. and Tango W. J., editors, *IAU Symposium on* Very high angular resolution imaging, Number 158, pp. 209–211. Kluwer Academic Publishers.

Thiébaut E. & Conan J.-M., 1995, *Strict a priori constraints for maximum likelihood blind deconvolution*, J. Opt. Soc. Am. A. **12**, 485–492.

Thiébaut E., Devaney N., Foy R., Batz B. de, Blazit A., Bonneau D., Bouvier J. & Thom Ch., 1994, *The extended Hα component of T Tau*, In Robertson J. G. & Tango W. J., editors, *IAU Symposium on* Very high angular resolution imaging, Number 158, pp. 391–394. Kluwer Academic Publishers.

Timothy J. G., 1983, *Optical detectors for spectroscopy*, Publ. Astron. Soc. Pac., **95**.

Tsuji T., 1987, in *Astrochemestry* IAU Symp. 120 ed. M.S. Vardya & S.P. Tarafdar (Dordrecht : Reidel), p. 409.

Weigelt G., 1977, *Modified astronomical speckle interferometry "speckle masking"*, Opt. Commun., **21**, 1, pp. 55–59.

Welter G. L. & Worden S. P., 1978, *A method for processing stellar speckle interferometry data*, J. Opt. Soc. Am., **68**, 11, pp. 1271–1275.

Wirnitzer B., 1985, *Bispectral analysis at low light levels and astronomical speckle masking*, J. Opt. Soc. Am. A, **2**, 1, pp. 14–21.

Table des matières

1 Interférométrie des tavelures en astronomie **11**

1.1 Relation fondamentale de l'imagerie 11

1.2 Fréquence de coupure instrumentale 13

1.3 Fonction de transfert longue pose en présence de turbulence 14

1.4 Images courte pose 16

1.5 Interférométrie des tavelures classique 17

1.5.1 Calibration de la fonction de transfert 20

1.5.2 Rapport signal à bruit 21

1.6 Méthode de Knox-Thompson et bispectre 21

1.6.1 Définitions 22

1.6.2 Inversion 23

1.6.3 Rapport signal à bruit 24

1.6.4 Intégration des sous-plans 25

1.6.5 Influence des aberrations de phase 26

1.6.6 Invariance par translation 27

1.7 Méthodes holographiques 27

1.8 Contraintes observationnelles 28

1.8.1 Dépendances du paramètre de Fried 28

1.8.2 Temps d'exposition 28

1.8.3 Domaine d'isoplanétisme 29

1.8.4 Bande passante 30

1.8.5 Conséquences 30

2 Instrumentation et prétraitement des données 31

2.1 Tavélographe à quatre canaux . . . 31
2.2 La caméra CP40 . . . 32
2.2.1 Intensification . . . 33
2.2.2 Détection et localisation des photo-événements . . . 34
2.2.3 Acquisition des données . . . 35
2.2.4 Obturateur . . . 35
2.3 Prétraitement des données . . . 35
2.3.1 L'effet "fenêtre" . . . 35
2.3.2 Les photons doubles . . . 36
2.3.3 La non-uniformité de la réponse du détecteur . . . 36
2.3.4 Autres problèmes . . . 37
2.4 Correction de la distorsion . . . 37
2.4.1 Calibration de la distorsion . . . 37
2.4.2 Calcul de la correction . . . 39
2.4.3 Application de la correction . . . 41
2.4.4 Correction élémentaire . . . 42
2.4.5 Sous-pixel aléatoire . . . 42
2.4.6 Correction pondérée . . . 44
2.5 Conclusion . . . 46

3 Biais en comptage de photons 47

3.1 Modélisation . . . 47
3.2 Biais dû au bruit de photons . . . 49
3.2.1 Spectre de puissance . . . 50
3.2.2 Méthode de Knox-Thompson . . . 51
3.2.3 Triple corrélation et bispectre . . . 53
3.2.4 Conclusion . . . 56
3.3 Trou du comptage de photons . . . 56
3.3.1 Modélisation du trou . . . 57

3.3.2 Interférométrie des tavelures traditionnelle . . . 60
3.3.3 Méthode de Knox-Thompson . . . 64
3.3.4 Triple corrélation . . . 69
3.4 Conclusion . . . 76

4 Approches pour une déconvolution robuste 79
4.1 Déconvolution . . . 80
4.1.1 Maximum de vraisemblance . . . 81
4.1.2 Recherche de la solution . . . 83
4.1.3 Modélisation dans l'espace de Fourier . . . 84
4.1.4 Contraintes supplémentaires . . . 84
4.1.5 Comparaison avec d'autres approches . . . 88
4.2 Holographie . . . 89
4.2.1 Reconstruction au sens des moindres carrés . . . 91
4.2.2 Moindres carrés contraints . . . 91
4.2.3 Déconvolution de l'interspectre . . . 92
4.3 Déconvolution en aveugle . . . 94
4.4 Conclusion . . . 95

5 Exploitation des mesures de l'interférométrie des tavelures 97
5.1 Mesures du module . . . 97
5.1.1 Estimation du spectre de puissance . . . 98
5.1.2 Prise en compte du bruit de calibration . . . 99
5.1.3 Réduction du nombre de paramètres . . . 100
5.1.4 Discussion : faut-il pondérer ? . . . 101
5.2 Reconstruction d'image à partir des seules mesures de module . . . 101
5.3 Mesures de phase et calibration . . . 103
5.4 Reconstruction de la phase . . . 106
5.4.1 Reconstruction de proche en proche . . . 106
5.4.2 Reconstruction globale de la phase . . . 107
5.5 Reconstruction d'image à partir des mesures de phase . . . 114

5.5.1 Reconstruction à partir de la phase du spectre de l'objet 114
5.5.2 Reconstruction directe à partir des mesures de phase 116
5.5.3 Discussion 118
5.6 Reconstruction d'image à partir des mesures de module et de phase 118
5.7 Modélisation de la structure spatiale de l'objet 119
5.8 Résultats 120
5.8.1 Simulations 120
5.8.2 Capella 122
5.9 Conclusion 127

6 Résultats Astrophysiques 129
6.1 T Tauri 129
6.2 DF Tau 132
6.3 Z Canis Majoris 137
6.4 χ Cygni 141

A Speckle interferometry with a photon-counting detector 145

B Strict a priori constraints for maximum likelihood blind deconvolution 157

C The Hα environment of T Tauri... 167

D The extended Hα component of T Tau 177

E Speckle imaging with the bispectrum and without reference star 183

F Self-referenced holography methods in french observatories 189

G The fiberless multisplit spectrograph SFM 191

H Propriétés de la transformée de Knox-Thompson et du bispectre 193
H.1 Support 193
H.2 Symétries 195
H.3 Volume du bispectre 198

H.4 Supports des sous-plans 199
H.4.1 cas de la méthode de Knox-Thompson 200
H.4.2 cas du bispectre 200
H.5 Conclusion 201

I Moments statistiques sous changement de variables 203
I.1 Moyenne et covariances 203
I.2 Représentation polaire d'un complexe 204
I.3 Rapport de deux variables aléatoires 205

J Transformée de Fourier discrète 207
J.1 Définitions 207
J.2 Produit de convolution discret 208
J.3 Produit de corrélation discret 209
J.4 Transformée de Fourier discrète du gradient 209

Résumé

L'interférométrie des tavelures permet de restaurer des images à la limite de résolution angulaire (quelques 0.″01 dans le visible) des plus grands télescopes terrestres malgré les effets de la turbulence atmosphérique. Je présente différentes méthodes de l'interférométrie des tavelures (méthodes de Labeyrie, de Knox et Thompson, du bispectre et de l'holographie auto-référencée) pour mettre en évidence la rigueur nécessaire à leur exploitation. L'application en astronomie visible de ces méthodes nécessite un détecteur à comptage de photons. J'explique comment je compense le défaut dit du *trou* du comptage de photons en intégrant des intercorrélations. Je propose une approche robuste pour résoudre le problème de la restauration d'image à partir de mesures très bruitées et/ou lacunaires. Je montre que cette approche générale peut être adaptée à la nature des mesures, en particulier à celles de l'interférométrie des tavelures. Cela me permet de dériver ou d'améliorer un certain nombre d'algorithmes : déconvolution, déconvolution en aveugle, restauration d'image en interférométrie des tavelures, etc. Ces algorithmes me permettent d'obtenir des résultats fiables et d'intérêt astrophysique : la découverte en Hα de la base du jet émanant de T Tau, la première mise en évidence du mouvement orbital d'une étoile double préséquence principale pour DF Tau, la détection dans le visible du compagnon dit *infrarouge* de ZCMa et le sondage de l'atmosphère étendue de χ Cygni dans les bandes du TiO.

Abstract

Speckle interferometry allows the restoration of diffraction limited images (a resolution of a few 0.″01 in the visible) from the largest ground based telescopes in spite of the effects of atmospherical turbulence. I present various speckle interferometry methods (Labeyrie's, Knox and Thompson, bispectrum and self referenced speckle holography) in order to stress the rigour necessary in using them. Applying these methods in visible astronomy demands a photon-counting detector. I explain how I compensate for the so-called photon-counting *hole* defect. I propose a robust approach for solving the image restauration problem from noisy and/or incomplete measurements. I show that this general approach can be modified to fit the nature of the measurements, in particular those of speckle interferometry. This allows me to derive or to improve a number of algorithms : deconvolution, blind deconvolution, speckle imaging, etc. Using these algorithms, I obtain reliable results of astrophysical interest : the discovery in Hα of the jet emanating from T Tau, the first evidence of orbital motion for a pre-main sequence binary star DF Tau, the detection in the visible of the so-called *infra-red* ZCMa companion and the probing of the extended atmosphere of χ Cygni in TiO bands.