INTRODUCTION AUX INÉGALITÉS DE CARLEMAN POUR LES OPÉRATEURS ELLIPTIQUES ET PARABOLIQUES. APPLICATIONS AU PROLONGEMENT UNIQUE ET AU CONTRÔLE DES ÉQUATIONS PARABOLIQUES*

JÉRÔME LE ROUSSEAU ET GILLES LEBEAU

RÉSUMÉ: Nous introduisons les inégalités de Carleman locales pour les opérateurs elliptiques, en utilisant des techniques d'analyse microlocale semi-classique. Nous montrons l'optimalité des puissances des paramètres de ces inégalités et leur lien avec la variété caractéristique du problème après conjugaison avec les fonctions poids. Nous déduisons des inégalités de Carleman des propriétés de prolongement unique ainsi que des inégalités d'interpolations. Ces dernières donnent une inégalité spectrale remarquable et la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur. Dans un second temps, nous prouvons des inégalités de Carleman pour des opérateurs paraboliques. Tout d'abord enoncées localement en espace, ces inégalités sont recollées pour obtenir une inégalité globale. Nous montrons à nouveau la contrôlabilité à zéro des équations paraboliques par cette autre approche.

TABLE DES MATIÈRES

Date: 29 janvier 2009

*Une partie de la rédaction de ces notes a été faite quand le premier auteur était en délégation au Laboratoire POems, INRIA Paris-Rocquencourt / ENSTA, UMR CNRS 2706. La rédaction a été facilitée par le projet CNRS Pticrem. Le premier auteur est partiellement financé par l'Agence Nationale de la Recherche (contrat ANR-07-JCJC-0139-01).

1. Introduction

En 1939, T. Carleman introduisit des inégalités d'énergie à poids exponentiels dans le but de démontrer un résultat d'unicité pour des équations aux dérivées partielles (EDP) elliptiques à coefficients réguliers en deux dimensions [Car39]. Ce type d'inégalités que l'on nomme inégalités de Carleman, a été généralisé et systématisé par L. Hörmander et d'autres auteurs pour de larges classes d'opérateurs différentiels en dimension quelconque (voir [Hör63, chapitre 8] et [Hör85a, Sections 28.1-2] ; voir aussi [Zui83]). Depuis, l'utilisation de ces inégalités a largement dépassé leur application originelle. Elles donnent non seulement des résultats quantitatifs de prolongement unique mais elles sont aussi utilisées pour l'étude de problèmes inverses ainsi qu'en théorie du contrôle pour les EDP. C'est surtout dans ce dernier cadre que se placent nos notes.

En contrôle des EDP, pour les équations d'évolution, on cherche à amener la solution dans un état donné, partant d'une certaine donnée initiale, en agissant sur la solution à travers soit un second membre, on parle alors de contrôle distribué, soit une donnée au bord, on parle alors de contrôle frontière. Pour plus de généralité on souhaite que ce contrôle agisse uniquement sur une sous-partie du domaine ou du bord. On souhaite pouvoir choisir cette zone de contrôle aussi petite que possible.

Le cas de l'équation de la chaleur nous intéresse plus particulièrement ici. Dans un domaine Ω régulier et borné de $\mathbb{R}^n$, pour un intervalle de temps $[0, T]$ avec $T > 0$, et pour un contrôle distribué nous avons

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = 1_\omega v & \text{dans } Q = (0, T) \times \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega, \\ y(0) = y_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Ici $\omega \Subset \Omega$ est la zone de contrôle interne. La contrôlabilité à zéro de cette équation, à savoir l'existence pour tout $y_0 \in L^2(\Omega)$ de $v \in L^2(Q)$, avec $\|v\|_{L^2(Q)} \leq C\|y_0\|_{L^2(Q)}$, tel que $y(T) = 0$, fut démontrée dans [LR95], à partir d'inégalités de Carleman pour l'opérateur elliptique $-\partial_s^2 - \Delta_x$ sur un domaine $Z = (0, S_0) \times \Omega$ avec $S_0 > 0$. Nos notes couvrent cette approche dans un premier temps. Nous démontrons ces inégalités de Carleman elliptiques à partir d'outils issus de l'analyse microlocale semi-classique. Les inégalités que nous démontrons sont dites locales parce qu'elles s'appliquent à des fonctions dont le support est localisé dans une région fermée strictement incluse dans $\overline{\Omega}$. Une fois ces inégalités démontrées, une étape importante de cette approche réside dans l'obtention d'une inégalité d'interpolation, pour des fonctions régulières sur Z, satisfaisant certaines conditions au bord, ainsi que d'une inégalité spectrale pour les combinaisons linéaires finies de fonctions propres orthonormales du laplacien sur Ω, pour des conditions de Dirichlet homogènes au bord.

Une autre approche, celle de [FI96], a aussi permis d'obtenir le contrôle de la chaleur. Elle est fondée sur l'utilisation d'inégalités de Carleman globales pour l'opérateur parabolique $\partial_t - \Delta$. Ces inégalités sont dites globales car elles permettent de traiter des fonctions qui vérifient uniquement des conditions de Dirichlet homogènes au bord. Ces inégalités de Carleman globales diffèrent pourtant des inégalités locales par un terme d'observation. La forme de ces inégalités permet de déduire directement une inégalité dite d'observabilité pour l'opérateur parabolique qui est équivalente à la contrôlabilité à zéro de (1.1). Nous présentons cette approche dans un deuxième temps. La démonstration que nous donnons de l'inégalité de Carleman parabolique est différente de celle donnée dans [FI96]. Comme dans le cas elliptique, nous fondons notre exposition sur l'analyse microlocale semi-classique. Nous écrivons tout d'abord des inégalités locales et nous montrons comment de telles inégalités peuvent être recollées pour finalement obtenir une inégalité de Carleman globale avec un terme d'observation.

Une inégalité de Carleman locale prend la forme suivante : pour un opérateur elliptique P et pour une fonction poids $\varphi = \varphi(x)$ bien choisie, il existe $C > 0$ et $h_0 > 0$ tels que

$$h\|e^{\varphi/h}u\|_0^2 + h^3\|e^{\varphi/h}\nabla_x u\|_0^2 \leq Ch^4\|e^{\varphi/h}Pu\|_0^2,$$

pour u régulière à support compact, et $0 < h \leq h_0$.

Dans ce type d'inégalité, nous pouvons ainsi choisir le paramètre h aussi petit que nous le souhaitons, ce qui est souvent utilisé dans les applications de ces inégalités, en problèmes inverses ou en contrôle. Il nous a ainsi semblé opportun d'inclure aussi dans nos notes certains résultats sur l'optimalité des puissances de h dans les inégalités de Carleman. Nous montrons par exemple que la présence du paramètre h devant le premier terme de l'inégalité et celle de h^3 devant son second terme sont liés à la variété caractéristique de l'opérateur conjugué $P_\varphi = h^2 e^{\varphi/h} P e^{-\varphi/h}$. Nous donnons aussi un résultat d'optimalité pour l'inégalité spectrale que nous déduisons de cette inégalité de Carleman.

Seules les inégalités à l'intérieur, loin du bord de Ω, sont démontrées ici. Pour les estimations au bord, qui sont plus techniques, nous renvoyons aux articles originaux pour les démonstrations.

Ces notes s'inspirent en partie d'un cours donné par G. Lebeau à la Faculté des Sciences de Tunis en février 2005 et des notes manuscrites de M. Bellassoued prises à cette occasion [Leb05].

1.1 Plan Nous commençons par introduire brièvement les opérateurs pseudodifférentiels semi-classiques (OψD) dans la section 2. L'outil fondamental sera pour nous l'inégalité de Gårding qui nous permettra d'obtenir assez rapidement une inégalité de Carleman locale pour un opérateur elliptique dans la section 3. Dans cette section nous présentons la condition de sous-ellipticité que la fonction poids φ doit satisfaire. Nous montrons aussi l'optimalité des puissances du paramètre semi-classique h dans ces inégalités. Nous appliquons cette inégalité de Carleman à des questions de prolongement unique pour des équations et inéquations elliptiques dans la section 4. Dans la section 5, nous démontrons les inégalités d'interpolation et spectrale. Cette dernière concerne les combinaisons linéaires finies de fonctions propres de l'opérateur elliptique. Nous montrons l'optimalité de la constante de la forme $e^{C\sqrt{\mu}}$ dans cette inégalités, où μ est la plus grande valeur propre considérée dans la somme. Nous écrivons aussi un résultat de prolongement unique pour certaines séries de telles fonctions propres. Dans la section 6, ces résultats sont appliqués à la construction d'un contrôle pour (1.1). La section 7 est consacrée aux inégalités paraboliques locales, prouvées par une inégalité de Gårding en espace, uniforme en temps, ainsi qu'à leur recollement pour obtenir une inégalité globale. Nous démontrons à nouveau la contrôlabilité à zéro des équations paraboliques par cette seconde approche.

Pour une meilleure clarté de l'exposition, certains des résultats énoncés dans les sections principales sont démontrés dans les annexes.

1.2 Notations Nous donnons ici certaines notations que nous allons utiliser dont beaucoup sont classiques. Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ sera noté $\langle .,. \rangle$, la norme euclidienne par $|.|$ et la boule euclidienne de centre x et de rayon r par $B(x,r)$. Pour $\xi \in \mathbb{R}^n$ on pose $\langle \xi \rangle := (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$. Si α est un multi-indice, i.e., $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on introduit les notations suivantes :

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}, \text{ si } \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}, \qquad D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n}, \text{ et } \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

où $D = \frac{h}{i}\partial$. Dans $\mathbb{R}^n$, nous désignons par ∇ le gradient $(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})^t$ et par Δ le laplacien $\partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2$. On précisera parfois par rapport à quelle(s) variable(s) les dérivations sont faites en écrivant par exemple ∇_x ou Δ_x. On écrira aussi $\varphi' = \nabla_x \varphi$.

Pour un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont le support est un compact de Ω. Pour K un compact de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathscr{C}_c^\infty(K)$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans K. L'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à décroissance rapide. Son dual, $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des distributions tempérées. La transformée de Fourier d'une fonction $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est définie par $\hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x)\, dx$, avec une extension par dualité à $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions de carré sommable est muni du produit scalaire hermitien $(u,v)_{L^2} = \int_\Omega u(x)\bar{v}(x)\, dx$ et de la norme $\|u\|_{L^2} = \|u\|_0 = (u,u)_{L^2}^{1/2}$. Dans $\mathbb{R}^n$, les espaces de Sobolev classiques sont définis par $H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n);\ \langle \xi \rangle^s \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Dans Ω, pour $s \in \mathbb{N}$, $H^s(\Omega)$ est défini par $H^s(\Omega) = \{u \in \mathscr{D}'(\Omega);\ \partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq s\}$.

Pour deux fonctions f et g de variables x, ξ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on définit leur crochet de Poisson par

$$\{f,g\} = \sum_j (\partial_{\xi_j} f \partial_{x_j} g - \partial_{x_j} f \partial_{\xi_j} g).$$

Pour deux opérateurs A, B leur commutateur sera noté $[A,B] = AB - BA$.

Dans ces notes, C sera toujours une constante positive générique dont la valeur peut être différente d'une ligne à l'autre. D'autres notations seront utilisées si la valeur d'une constante nécessite d'être suivie. Pour une constante générique dépendant d'un paramètre, disons λ, nous écrirons aussi parfois C_λ.

Remerciements : Les notes manuscrites de M. Bellassoued de [Leb05] nous ont été précieuses et nous le remercions de les avoir mises à notre disposition. Nous remercions L. Robbiano pour de nombreuses discussions sur le sujet de ces notes et L. Miller pour des discussions sur certains résultats d'optimalité. Nous remercions aussi M. Léautaud pour ses corrections.

2. PRÉLIMINAIRES : OPÉRATEURS (PSEUDO-)DIFFÉRENTIELS SEMI-CLASSIQUES

La théorie semi-classique tire ses origines de la physique quantique. Le paramètre d'échelle h correspond à la constante de Planck en physique, il sera pris petit : $h \in (0, h_0)$, $0 < h_0 << 1$. On pose $D = \frac{h}{i}\partial$. La limite semi-classique correspond à la limite $h \to 0$.

Si $p(x, \xi)$ est un polynôme en ξ d'ordre inférieur ou égal à m, $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, $p(x, \xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$, on pose

$$p(x, D)u = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u.$$

Ici, α est un multi-indice. On observe que l'on peut écrire $D^\alpha u = \frac{h^{|\alpha|}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\xi^\alpha \hat{u}(\xi)\, d\xi$, pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, où $\hat{u}$ est la transformée de Fourier classique de u. Nous avons donc

$$p(x, D)u(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{h^{|\alpha|}}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} a_\alpha(x)\xi^\alpha \hat{u}(\xi)\, d\xi = (2\pi h)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle/h} \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \hat{u}(\xi/h)\, d\xi,$$

ou encore, formellement, $p(x, D)u(x) = (2\pi h)^{-n} \iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle/h} p(x, \xi)\, u(y)\, dy\, d\xi$.

Plus généralement nous introduisons les familles de symboles suivantes.

Définition 2.1. Soit $a(x, \xi, h) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ avec h comme paramètre dans $(0, h_0)$ tel que pour tous α et β multi-indices on ait

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi, h)| \leq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-|\beta|}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ h \in (0, h_0).$$

On dit que $a \in S^m$.

Pour $a \in S^m$ on appelle symbole principal la classe d'équivalence de a dans $S^m/(hS^{m-1})$.

Lemme 2.2. *Soient $m \in \mathbb{R}$ et $a_j \in S^{m-j}$ avec $j \in \mathbb{N}$. Alors il existe $a \in S^m$ tel que*

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad a - \sum_{j=0}^{N} h^j a_j \in h^{N+1} S^{m-N-1}.$$

On écrit alors $a \sim \sum_j h^j a_j$. Le symbole a est unique modulo $O(h^\infty)S^{-\infty}$, au sens où la différence de deux tels symboles est dans $O(h^N)S^{-M}$ pour tous $N, M \in \mathbb{N}$.

On identifie le symbole a_0 avec le symbole principal de a. En général, pour les symboles de la forme $a \sim \sum_j h^j a_j$ que nous considérerons ici les symboles a_j ne dépendront pas du paramètre d'échelle h.

A partir de ces classes de symboles, on peut définir les opérateurs pseudodifferentiels (OψD).

Définition 2.3. Si $a \in S^m$, on pose

$$\begin{aligned} a(x, D, h)u(x) = \mathrm{Op}(a)u(x) &:= (2\pi h)^{-n} \iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle/h} a(x, \xi, h)\, u(y)\, dy\, d\xi \\ &= (2\pi h)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle/h} a(x, \xi, h)\, \hat{u}(\xi/h)\, d\xi. \end{aligned}$$

On note Ψ^m l'ensemble de ces OψD. Pour $A \in \Psi^m$, on notera par $\sigma(A)$ son symbole principal.

Nous avons $\mathrm{Op}(a) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ continûment et $\mathrm{Op}(a)$ peut être étendu de manière unique à $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Alors $\mathrm{Op}(a) : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ continûment.

Exemple 2.4. Prenons l'opérateur différentiel défini par $A = -h^2\Delta + V(x) + h^2 \sum_{1\leq j\leq n} b_j(x)\partial_j$. Son symbole et son symbole principal sont $a(x,\xi,h) = |\xi|^2 + V(x) + ih\sum_{1\leq j\leq n} b_j(x)\xi_j$, et $\sigma(A) = |\xi|^2 + V(x)$ respectivement.

Nous définissons maintenant des espaces de Sobolev et des normes adaptés au paramètre d'échelle h. Nous désignons la norme naturelle sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ par $\|u\|_0^2 := (\int |u(x)|^2\, dx)^{\frac{1}{2}}$. Soit $s \in \mathbb{R}$, alors nous posons

$$\|u\|_s := \|\Lambda^s u\|_0, \quad \text{avec } \Lambda^s := \mathrm{Op}(\langle\xi\rangle^s) \quad \text{et} \quad \mathscr{H}^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n);\ \|u\|_s < \infty\}.$$

L'espace $\mathscr{H}^s(\mathbb{R}^n)$ est algébriquement le même que l'espace de Sobolev classique $H^s(\mathbb{R}^n)$. Pour h fixé, la norme $\|.\|_s$ est équivalente à la norme de Sobolev classique que l'on note $\|.\|_{H^s}$. Cependant, ces normes ne sont pas uniformément équivalentes lorsque h tend vers 0. Nous avons uniquement

$$\|u\|_s \leq C\|u\|_{H^s}, \quad \text{si } s \geq 0, \qquad \text{et} \quad \|u\|_{H^s} \leq C\|u\|_s, \quad \text{si } s \leq 0.$$

Pour $s \in \mathbb{N}$ la norme $\|.\|_s$ est équivalente à la norme $N_s(u) := \sum_{|\alpha|\leq s} \|D^\alpha u\|_0^2 = \sum_{|\alpha|\leq s} h^{2|\alpha|}\|\partial^\alpha u\|_0^2$. Les espaces $\mathscr{H}^s$ et $\mathscr{H}^{-s}$ sont en dualité : $\mathscr{H}^{-s} = (\mathscr{H}^s)'$, au sens de la dualité des distributions avec l'espace $L^2 = \mathscr{H}^0$ comme espace pivot. On peut démontrer le résultat de continuité suivant.

Théorème 2.5. *Si $a(x,\xi,h) \in S^m$ et $s \in \mathbb{R}$, alors nous avons $\mathrm{Op}(a) : \mathscr{H}^s \to \mathscr{H}^{s-m}$ continûment, uniformément en h.*

Le résultat important qui va nous intéresser ici est l'inégalité de Gårding.

Théorème 2.6 (Inégalité de Gårding)**.** *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Si $a(x,\xi,h) \in S^m$, de partie principale a_m, et s'il existe $C > 0$ tel que*

$$\mathrm{Re}\, a_m(x,\xi,h) \geq C\langle\xi\rangle^m, \quad x \in K,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ h \in (0,h_0),$$

alors pour $0 < C' < C$ et $h_1 > 0$ suffisamment petit on a

$$\mathrm{Re}(\mathrm{Op}(a)u, u) \geq C'\|u\|_{m/2}^2, \quad u \in \mathscr{C}_c^\infty(K),\ \ 0 < h \leq h_1.$$

La positivité du symbole principal de a implique donc une positivité pour l'opérateur $\mathrm{Op}(a)$. La valeur de h_1 est fonction de C, C' et d'un nombre fini de constantes $C_{\alpha,\beta}$ associées au symbole $a(x,\xi,h)$ (voir la définition 2.1). Une démonstration de l'inégalité de Gårding est donnée dans l'annexe A.

Remarque 2.7. On notera qu'ici la condition de positivité du symbole principal est imposée pour tout ξ dans $\mathbb{R}^n$, à l'opposé des hypothèses de l'inégalité de Gårding usuelle, i.e., non semi-classique, qui ne demandent une telle positivité que pour $|\xi|$ grand (voir par exemple [Tay81, chapitre 2]). Cependant, le résultat semi-classique est plus fort car il donne une réelle positivité de l'opérateur.

Nous aurons à comprendre la composition des OψD. Elle donne lieu à un calcul au niveau des symboles des opérateurs.

Théorème 2.8 (Calcul symbolique)**.** *Soit $a \in S^m$ et $b \in S^{m'}$. Alors $\mathrm{Op}(a) \circ \mathrm{Op}(b) = \mathrm{Op}(c)$ pour un certain $c \in S^{m+m'}$ qui admet le développement asymptotique*

$$c(x,\xi,h) \sim \sum_\alpha \frac{h^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|}\alpha!}\, \partial_\xi^\alpha a(x,\xi,h)\, \partial_x^\alpha b(x,\xi,h), \qquad \text{où } \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

Le premier terme de la série, le symbole principal, est ab ; le second terme est $\frac{h}{i}\sum_j \partial_{\xi_j} a(x,\xi,h)\, \partial_{x_j} b(x,\xi,h)$. Il en découle que le symbole principal du commutateur $[\mathrm{Op}(a), \mathrm{Op}(b)]$ est

$$\sigma([\mathrm{Op}(a), \mathrm{Op}(b)]) = \frac{h}{i}\{a,b\} \in hS^{m+m'-1}.$$

Enfin, le symbole de l'opérateur adjoint s'obtient à partir du symbole de l'opérateur.

Théorème 2.9. *Soit $a \in S^m$. Alors* $\mathrm{Op}(a)^* = \mathrm{Op}(b)$ *pour un certain $b \in S^m$ qui admet le développment asymptotique*

$$b(x,\xi,h) \sim \sum_\alpha \frac{h^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|}\alpha!}\partial_\xi^\alpha \partial_x^\alpha \overline{a}(x,\xi,h).$$

Le symbole principal de b est simplement $\overline{a}$.

Comme références sur les OψD usuels on citera : [Tay81, Hör85b, AG91, GS94, Shu01]. Comme références sur les OψD semi-classiques on citera : [Rob87, DS99, Mar02].

3. Inégalités de Carleman locales pour des opérateurs elliptiques

Nous allons montrer une inégalité de Carleman locale pour un opérateur elliptique d'ordre deux. Pour simplifier les notations nous prenons le laplacien, $P = -\Delta$, mais la méthode de démonstration est la même pour un opérateur elliptique d'ordre deux plus général dont la partie principale est $\sum_{i,j} \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i)$ avec $a_{ij} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $1 \le i,j \le n$ et $\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge C|\xi|^2$, avec $C > 0$, pour tout $x,\xi \in \mathbb{R}^n$. En particulier on notera que les inégalités de Carleman sont *insensibles*[1] à des changements de l'opérateur par des termes d'ordre un ou zéro.

Soit $\varphi(x)$ une fonction à valeurs réelles. On définit l'opérateur conjugué $P_\varphi = h^2 e^{\varphi/h} P e^{-\varphi/h}$, que l'on va considérer comme un opérateur différentiel semi-classique. On a $P_\varphi = -h^2\Delta - |\varphi'|^2 + 2\langle\varphi', h\nabla\rangle + h\Delta\varphi$. Son symbole complet est donné par $|\xi|^2 - |\varphi'|^2 + 2i\langle\varphi',\xi\rangle + h\Delta\varphi$. Son symbole principal est donné par

$$p_\varphi = \sigma(P_\varphi) = |\xi|^2 - |\varphi'|^2 + 2i\langle\varphi',\xi\rangle = \sum_j (\xi_j + i\varphi'_{x_j})^2,$$

i.e., on a « remplacé » ξ_j par $\xi_j + i\varphi'_{x_j}$. En effet on remarquera que le symbole de $e^{\varphi/h}D_j e^{-\varphi/h}$ est $\xi_j + i\varphi'_{x_j}$.

On définit les opérateurs symétriques suivants $Q_2 = (P_\varphi + P_\varphi^*)/2$, $Q_1 = (P_\varphi - P_\varphi^*)/(2i)$, de symboles principaux respectifs

$$q_2 = |\xi|^2 - |\varphi'|^2, \quad q_1 = 2\langle\xi,\varphi'\rangle.$$

On a $p_\varphi = q_2 + iq_1$ et $P_\varphi = Q_2 + iQ_1$.

Nous choisissons φ qui satisfait l'hypothèse suivante.

Hypothèse 3.1 (L. Hörmander [Hör63, Hör85a]). *Soit V un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On dit que la fonction poids $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ satisfait l'hypothèse de* sous-ellipticité *sur $\overline{V}$ si $|\varphi'| > 0$ sur $\overline{V}$ et*

$$\forall (x,\xi) \in \overline{V}\times\mathbb{R}^n, \quad p_\varphi(x,\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \{q_2,q_1\}(x,\xi) \ge C > 0.$$

Remarque 3.2. On note que $p_\varphi(x,\xi) = 0$ équivaut à $|\xi| = |\varphi'|$ et $\langle\xi,\varphi'\rangle = 0$. En particulier la sous-variété caractéristique $\mathscr{Z} = \{(x,\xi) \in \overline{V}\times\mathbb{R}^n; p_\varphi(x,\xi) = 0\}$ est compacte, comme illustrée dans la figure 1.

L'hypothèse 3.1 est réalisable, en particulier grâce au lemme suivant démontré dans l'annexe A.

Lemme 3.3 (L. Hörmander [Hör63, Hör85a]). *Soient V un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ telle que $|\psi'| > 0$ sur $\overline{V}$. Alors pour $\lambda > 0$ suffisamment grand $\varphi = e^{\lambda\psi}$ satisfait l'hypothèse 3.1 sur $\overline{V}$.*

La démonstration de l'inégalité de Carleman va utiliser l'inégalité de Gårding. En préparation nous avons le résultat suivant, démontré dans l'annexe A, qui découle de l'hypothèse 3.1.

Lemme 3.4. *Soit $\mu > 0$ et soit $\rho = \mu(q_2^2 + q_1^2) + \{q_2,q_1\}$. Alors, pour tout $(x,\xi) \in \overline{V}\times\mathbb{R}^n$, on a $\rho(x,\xi) \ge C\langle\xi\rangle^4$, avec $C > 0$, pour μ suffisamment grand.*

Nous pouvons maintenant démontrer l'inégalité de Carleman suivante.

[1] Au sens où seules les constantes sont affectées. Dans le théorème 3.5, seules les constantes C et h_1 changent mais pas la forme de l'inégalité de Carleman.

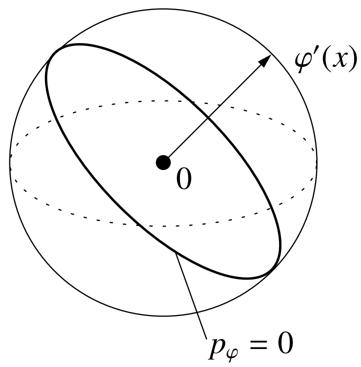

FIG. 1 – Forme de la sous-variété caractéristique $\mathcal{Z}$ à la verticale de chaque point $x \in \overline{V}$.

Théorème 3.5. *Soient V un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et φ qui satisfait l'hypothèse 3.1 sur $\overline{V}$; alors il existe $0 < h_1 < h_0$ et $C > 0$ tels que*

$$h\|e^{\varphi/h}u\|_0^2 + h^3\|e^{\varphi/h}\nabla_x u\|_0^2 \leq Ch^4\|e^{\varphi/h}Pu\|_0^2, \tag{3.1}$$

pour $u \in \mathscr{C}_c^\infty(\overline{V})$ et $0 < h < h_1$.

Preuve. On prend $v = e^{\varphi/h}u$. Alors, $Pu = f$ équivaut à $P_\varphi v = g = h^2 e^{\varphi/h} f$ ou encore $Q_2 v + iQ_1 v = g$. En utilisant $(Q_j w_1, w_2) = (w_1, Q_j w_2)$ pour $w_1, w_2 \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ on obtient alors

$$\|g\|_0^2 = \|Q_1 v\|_0^2 + \|Q_2 v\|_0^2 + 2\,\mathrm{Re}(Q_2 v, iQ_1 v) = \Big(\big(Q_1^2 + Q_2^2 + i[Q_2, Q_1]\big)\, v, v\Big). \tag{3.2}$$

On choisit $\mu > 0$ tel que donné dans le lemme 3.4. Alors pour h tel que $h\mu \leq 1$ nous avons

$$h\Bigg(\underbrace{\Big(\mu(Q_1^2 + Q_2^2) + \frac{i}{h}[Q_2, Q_1]\Big)}_{\text{symbole principal } = \ \mu(q_1^2+q_2^2)+\{q_2,q_1\}}\ v, v\Bigg) \leq \|g\|_0^2.$$

L'inégalité de Gårding et le lemme 3.4 donne alors

$$h\|v\|_2^2 \leq C\|g\|_0^2. \tag{3.3}$$

On se contente[2] ici de la norme dans $\mathscr{H}^1$ et on obtient $h\|e^{\varphi/h}u\|_0^2 + h^3\|\nabla_x(e^{\varphi/h}u)\|_0^2 \leq Ch^4\|e^{\varphi/h}f\|_0^2$. On écrit $\nabla_x(e^{\varphi/h}u) = h^{-1}e^{\varphi/h}(\nabla_x\varphi)u + e^{\varphi/h}\nabla_x u$, ce qui permet d'observer que nous avons

$$h^3\|e^{\varphi/h}\nabla_x u\|_0^2 \leq Ch\|e^{\varphi/h}u\|_0^2 + Ch^3\|\nabla_x(e^{\varphi/h}u)\|_0^2,$$

car $|\nabla_x\varphi| \leq C$, ce qui achève la démonstration. ∎

Remarque 3.6. Par densité le résultat du théorème 3.5 s'étend alors aux fonctions u dans $H_0^2(V)$. Cependant, ici, nous ne traitons pas le cas des fonctions dans $H_0^1(V) \cap H^2(V)$. Il faut pour cela disposer d'une inégalité de Carleman locale au bord de l'ouvert V comme démontrée dans la Proposition 2 page 351 de [LR95]. De plus, une inégalité *globale* sur tout l'ouvert V pour une fonction u dans $H_0^1(V) \cap H^2(V)$ nécessite un terme d'observation à droite dans l'inégalité de Carleman. Nous donnons plus loin ces détails dans le cas des opérateurs paraboliques (voir la section 7).

[2]Il est bon de noter que dans zone elliptique, par exemple pour $|\xi|$ grand, on peut obtenir un résultat qui est bien meilleur sans le facteur h dans (3.3). Autour de la sous-variété caractéristique $\mathcal{Z} = \{p_\varphi = 0\}$ le choix de la norme dans $\mathscr{H}^1$ ou $\mathscr{H}^2$ importe peu puisque cette zone est compacte en ξ. Voir la proposition 3.8 pour plus de détails.

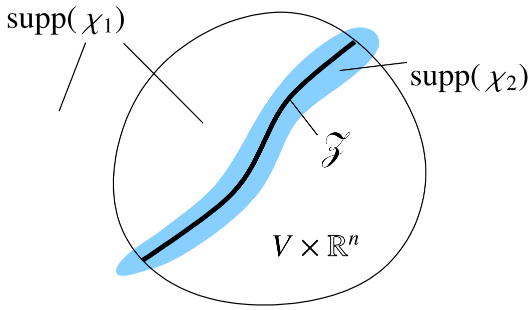

FIG. 2 – variété caractéristique $\mathscr{Z}$ et supports de χ_1 et χ_2 dans la proposition 3.8.

Remarque 3.7. Dans la preuve du théorème 3.5, nous avons utilisé l'hypothèse 3.1. Elle permet de donner des rôles complémentaires aux carrés, $\|Q_1 u\|_0^2$ et $\|Q_2 u\|_0^2$, que nous avons dans (3.2) et à l'action du commutateur $i([Q_2, Q_1]u, u)$. Lorsque les carrés s'approchent de zéro, c'est le commutateur qui prend le relais et rend les choses positives globalement. A. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov [FI96] ont introduit une modification de la méthode de démonstration de l'inégalité de Carleman qui permet de ne considérer que le terme équivalent au commutateur sans avoir à utiliser les deux carrés. Cette approche est exposée dans l'annexe A.4.

La proposition suivante donne un résultat plus précis que l'inégalité de Carleman précédente et illustre la perte d'une demi-dérivée qui se produit au voisinage de la sous-variété caractéristique $\mathscr{Z}$.

Proposition 3.8. *Soient $s \in \mathbb{R}$, V un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et φ qui satisfait l'hypothèse 3.1 sur $\overline{V}$. Soient $\chi_1, \chi_2 \in S^0$ de supports compacts en x. On suppose que χ_1 s'annule dans un voisinage de $\mathscr{Z}$ et que χ_2 s'annule hors d'un voisinage compact de $\mathscr{Z}$. Alors, il existe $C > 0$ et $0 < h_2 < h_0$ tels que*

$$\|\mathrm{Op}(\chi_1)v\|_2 \leq C\left(\|P_\varphi v\|_0 + h\|v\|_1\right), \quad \text{et } h^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{Op}(\chi_2)v\|_s \leq C\left(\|P_\varphi v\|_0 + h\|v\|_1\right), \tag{3.4}$$

pour $v \in \mathscr{C}_c^\infty(\overline{V})$ et $0 < h < h_2$.

Cette proposition est démontrée dans l'annexe A. Nous prenons χ_1 et χ_2 satisfaisant les hypothèses de la proposition 3.8 ainsi que $\chi_1 + \chi_2 = 1$ dans un voisinage de $\overline{V} \times \mathbb{R}^n$. Pour $v \in \mathscr{C}_c^\infty(\overline{V})$ nous avons $\|\mathrm{Op}(1 - \chi_1 - \chi_2)v\|_r \leq C_{N,r,r'} h^N \|v\|_{r'}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $r, r' \in \mathbb{R}$. On obtient ainsi

$$h^{\frac{1}{2}}\|v\|_2 \leq h^{\frac{1}{2}}(\|\mathrm{Op}(1-\chi_1-\chi_2)v\|_2 + \|\mathrm{Op}(\chi_1)v\|_2 + \|\mathrm{Op}(\chi_2)v\|_2) \leq C\left(\|P_\varphi v\|_0 + h\|v\|_1\right).$$

En prenant h suffisamment petit on obtient

$$h^{\frac{1}{2}}\|v\|_2 \leq C'\|P_\varphi v\|_0, \tag{3.5}$$

ce qui nous ramène à la dernière étape de la démonstration du théorème 3.5. On notera aussi que (3.5) permet d'éliminer le dernier terme dans chaque inégalité de (3.4) et d'obtenir ainsi

$$\|\mathrm{Op}(\chi_1)v\|_2 \leq C\|P_\varphi v\|_0, \quad \text{et } h^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{Op}(\chi_2)v\|_s \leq C\|P_\varphi v\|_0. \tag{3.6}$$

Nous avons vu que la condition de sous-ellipticité de l'hypothèse 3.1 était suffisante pour l'obtention de l'inégalité de Carleman du théorème 3.5. En fait on peut montrer que cette condition est *nécessaire*. On notera aussi que les puissances du facteur h qui apparaissent dans l'inégalité de Carleman du théorème 3.5 ainsi que dans la deuxième inégalité de (3.6) sont optimales : par exemple, on ne peut pas avoir $h^{2\alpha}$ devant le premier terme de l'inegalité (3.1) avec $\alpha < \frac{1}{2}$. Ces deux points sont l'objet de la proposition suivante.

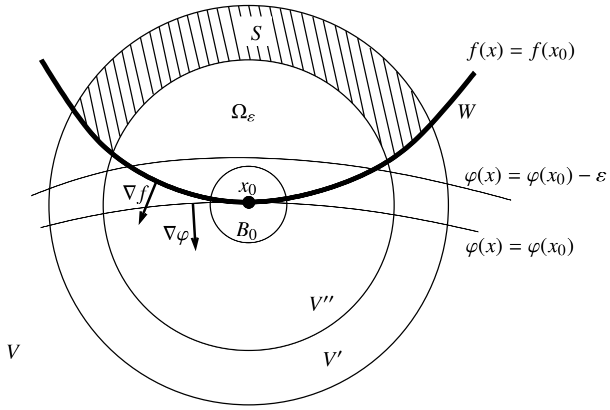

Fig. 3 – Géométrie locale pour le problème de prolongement unique. La région hachurée contient le support de $[P,\chi]u$.

Proposition 3.9. *Soient V un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$, $\varphi(x) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $0 < h_1 < h_0$ *et* $C > 0$ *tels que pour un* $\alpha \leq \frac{1}{2}$ *l'on ait*

$$h^\alpha \|e^{\varphi/h} u\|_0 \leq C h^2 \|e^{\varphi/h} P u\|_0, \tag{3.7}$$

pour $u \in \mathscr{C}_c^\infty(V)$ *et* $0 < h < h_1$. *Alors* $\alpha = \frac{1}{2}$ *et la fonction poids* φ *satisfait l'hypothèse 3.1 sur* $\overline{V}$.

Nous renvoyons le lecteur à l'annexe A.6 où cette proposition est démontrée.

4. Prolongement unique

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Nous nous plaçons dans un voisinage V d'un point $x_0 \in \Omega$. Nous prenons une fonction f définie au voisinage de x_0 avec $\nabla f \neq 0$ dans $\overline{V}$. Soit $p(x,\xi)$ un polynôme du second ordre en ξ vérifiant $p(x,\xi) \geq C|\xi|^2$ avec $C > 0$. Nous définissons l'opérateur différentiel $P = p(x, \partial/i)$.

Nous considérons $u \in H^2(V)$ solution de $Pu = g(u)$, où g est telle que $|g(y)| \leq C|y|$, $y \in \mathbb{R}$. Nous supposons que $u = 0$ dans $\{x \in V;\ f(x) \geq f(x_0)\}$. Nous souhaitons montrer que la fonction u s'annule au voisinage de x_0.

Nous choisissons une fonction ψ dont le gradient ne s'annule pas près de V et satisfaisant $\langle \nabla f(x_0), \nabla\psi(x_0)\rangle >$ 0 et tel que $f - \psi$ atteint un minimum local strict en x_0 quand on se déplace le long de la courbe de niveau $\{x \in V;\ \psi(x) = \psi(x_0)\}$. Nous pouvons prendre par exemple $\psi(x) = f(x) - c|x - x_0|^2$. Nous prenons alors $\varphi = e^{\lambda\psi}$ suivant le lemme 3.3. Dans le voisinage V (ou éventuellement dans un voisinage de x_0 plus petit) la situation géométrique que nous venons de décrire est illustrée par la figure 3.

Nous appelons W la région $\{x \in V;\ f(x) \geq f(x_0)\}$ (région sous $\{f(x) = f(x_0)\}$ dans la figure 3). Nous choisissons les voisinages V' et V'' de x_0 tels que $V'' \Subset V' \Subset V$ et nous choisissons une fonction $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(V')$ telle que $\chi = 1$ sur V''. Nous posons $v = \chi u$. Alors $v \in H_0^2(V)$. Notons que l'inégalité de Carleman du théorème 3.5 s'applique à v par la remarque 3.6. Nous avons

$$Pv = P(\chi u) = \chi\, Pu + [P,\chi]u,$$

où le commutateur est un opérateur différentiel d'ordre 1. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} h\|e^{\varphi/h}\chi u\|_0^2 + h^3\|e^{\varphi/h}\nabla_x(\chi u)\|_0^2 &\leq C\left(h^4\|e^{\varphi/h}\chi g(u)\|_0^2 + h^4\|e^{\varphi/h}[P,\chi]u\|_0^2\right) \\ &\leq C\left(h^4\|e^{\varphi/h}\chi u\|_0^2 + h^4\|e^{\varphi/h}[P,\chi]u\|_0^2\right), \qquad 0 < h < h_1. \end{aligned}$$

En prenant h suffisamment petit, disons $h < h_2$, on peut ignorer le premier terme du membre de droite. On écrit alors

$$h\|e^{\varphi/h}u\|^2_{L^2(V')} + h^3\|e^{\varphi/h}\nabla_x u\|^2_{L^2(V')} \leq h\|e^{\varphi/h}\chi u\|^2_0 + h^3\|e^{\varphi/h}\nabla_x(\chi u)\|^2_0 \leq Ch^4\|e^{\varphi/h}[P,\chi]u\|^2_{L^2(S)}, \quad 0 < h < h_2,$$

où $S := V' \setminus (V'' \cup W)$, puisque le support de $[P,\chi]u$ est confiné dans la région où χ varie et u ne s'annule pas (voir la région hachurée dans la figure 3).

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, on définit $V_\varepsilon = \{x \in V;\ \varphi(x) \leq \varphi(x_0) - \varepsilon\}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $S \Subset V_\varepsilon$. Nous choisissons alors une boule B_0 de centre x_0 telle que $B_0 \subset V'' \setminus V_\varepsilon$. Nous obtenons alors

$$e^{\inf_{B_0}\varphi/h}\|u\|_{H^1(B_0)} \leq Ce^{\sup_S \varphi/h}\|u\|_{H^1(S)}, \qquad 0 < h < h_2.$$

Comme $\inf_{B_0}\varphi > \sup_S \varphi$, en faisant tendre h vers zéro, nous obtenons $u = 0$ sur B_0. Nous avons ainsi prouvé le résultat de prolongement unique local suivant.

Proposition 4.1. *Soient g telle que $|g(y)| \leq C|y|$, $x_0 \in \Omega$ et $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ vérifiant $Pu = g(u)$ et $u = 0$ dans $\{x;\ f(x) \geq f(x_0)\}$, dans un voisinage V de x_0. La fonction f est définie dans V et telle que $|\nabla f| \neq 0$ dans un voisinage de x_0. Alors u s'annule dans un voisinage de x_0.*

Par un argument de connexité on prouve alors le théorème suivant.

Théorème 4.2 (Théorème de A. Calderón)**.** *Soient g telle que $|g(y)| \leq C|y|$. Soit Ω un ouvert connexe et soit $\omega \Subset \Omega$, un ouvert non vide. Si $u \in H^2(\Omega)$ vérifie $Pu = g(u)$ dans Ω et $u(x) = 0$ dans ω. Alors u est nul dans tout Ω.*

Preuve. Le support de u est fermé. Comme $F = \mathrm{supp}(u)$ n'est pas égal à Ω, montrons que F est ouvert. On aura alors $F = \emptyset$. Supposons que sa frontière dans Ω, $\mathrm{fr}(F) = F \setminus F^\circ$, est non vide et prenons $x_1 \in \mathrm{fr}(F)$. On pose $A := \Omega \setminus F$. On rappelle que l'on désigne par $B(x,r)$ la boule euclidienne ouverte de centre x et de rayon r. Il existe $R > 0$ tel que $B(x_1, R) \Subset \Omega$ et $x_0 \in B(x_1, R/4)$ tel que $x_0 \in A$. Comme A est ouvert, il existe $0 < r_1 < R/2$ tel que $B(x_0, r_1) \subset A$. Pour $r_2 = R/2$ nous avons ainsi obtenu $r_1 < r_2$ tels que

$$B(x_0, r_1) \subset A, \quad B(x_0, r_2) \Subset \Omega, \quad \text{et } \ x_1 \in B(x_0, r_2).$$

On définit $\mathscr{B}_t = B(x_0, (1-t)r_1 + tr_2)$ pour $0 \leq t \leq 1$. La proposition précédente montre que si u s'annule sur $\mathscr{B}_t$, avec $0 \leq t \leq 1$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que u s'annule sur $B_{t+\varepsilon}$. Comme u s'annule sur $\mathscr{B}_0$, on trouve ainsi que u s'annule sur $\mathscr{B}_1$, en particulier au voisinage de x_0 qui ne peut pas appartenir à la frontière de F. Donc F est ouvert. ∎

5. INÉGALITÉ D'INTERPOLATION, INÉGALITÉ SPECTRALE

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $S_0 > 0$ et $\alpha \in (0, S_0/2)$. Nous définissons $Z = (0, S_0) \times \Omega$ et $Y = (\alpha, S_0 - \alpha) \times \Omega$. On pose $z = (s, x)$ avec $s \in (0, S_0)$ et $x \in \Omega$. Nous définissons l'opérateur elliptique $A := -\partial_s^2 - \Delta_x$ sur Z. L'inégalité de Carleman que nous avons démontrée dans la section 3 s'applique à cet opérateur.

Partant d'une fonction poids $\varphi(z)$ définie sur Z on choisit $\rho_1 < \rho'_1 < \rho_2 < \rho'_2 < \rho_3 < \rho'_3$ et on pose

$$V = \{z \in Z;\ \rho_1 < \varphi(z) < \rho'_3\}, \qquad V_j = \{z \in Z;\ \rho_j < \varphi(z) < \rho'_j\}, \quad j = 1, 2, 3.$$

On suppose que $\overline{V}$ est compact dans Z (on reste loin du bord de Z) et que φ satisfait l'hypothèse 3.1 de sous-ellipticité sur $\overline{V}$.

L'inégalité de Carleman du théorème 3.5 permet d'obtenir l'inégalité d'interpolation locale suivante.

Proposition 5.1 (G. Lebeau-L. Robbiano [LR95])**.** *Il existe $C > 0$ et $\delta_0 \in (0,1)$ tel que pour $u \in H^2(V)$ on a*

$$\|u\|_{H^1(V_2)} \leq C\left(\|Au\|_{L^2(V)} + \|u\|_{H^1(V_3)}\right)^\delta \|u\|^{1-\delta}_{H^1(V)},$$

pour $\delta \in [0, \delta_0]$.

Preuve. Soit $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(V)$ telle que $\chi(z) = 1$ près de $\rho_1' \leq \varphi(z) \leq \rho_3$. On pose $w = \chi u$. L'inégalité de Carleman du théorème 3.5 implique $\|e^{\varphi/h} w\|_0 + \|e^{\varphi/h}\nabla w\|_0 \leq C\|e^{\varphi/h} A w\|_0$ pour h petit, $0 < h < h_1 \leq 1$. On observe alors que $Aw = \chi A u + [A, \chi]u$, avec l'opérateur $[A, \chi]$ d'ordre 1 et uniquement supporté dans $V_1 \cup V_3$. On obtient donc

$$e^{\rho_2/h}\|u\|_{H^1(V_2)} \leq Ce^{\rho_1'/h}\|u\|_{H^1(V_1)} + Ce^{\rho_3'/h}(\|Au\|_{L^2(V)} + \|u\|_{H^1(V_3)}),$$

car $\chi = 1$ sur V_2. On écrit enfin

$$e^{\rho_2/h}\|u\|_{H^1(V_2)} \leq Ce^{\rho_1'/h}\|u\|_{H^1(V)} + Ce^{\rho_3'/h}(\|Au\|_{L^2(V)} + \|u\|_{H^1(V_3)}), \quad 0 < h \leq h_1.$$

On conclut à partir du lemme suivant. ■

Lemme 5.2 (L. Robbiano [Rob95])**.** *Soit C_1, C_2 et C_3 strictement positives et A, B, C positifs, tels que $C \leq C_3 A$ et tels que pour tout $\gamma \geq \gamma_0$ on a*

$$C \leq e^{-C_1\gamma} A + e^{C_2\gamma} B. \tag{5.1}$$

Alors

$$C \leq \mathrm{Cst}\, A^{\frac{C_2}{C_1+C_2}} B^{\frac{C_1}{C_1+C_2}}. \tag{5.2}$$

Preuve. On optimise le membre de droite de (5.1) en fonction de γ et on trouve $\gamma_{\text{opt}} = \frac{\ln((AC_1)/(BC_2))}{C_1+C_2}$. Pour simplifier on prend $\gamma_1 = \frac{\ln(A/B)}{C_1+C_2}$. Si $\gamma_1 \geq \gamma_0$ alors en remplaçant dans (5.1), on obtient (5.2). Si maintenant $\gamma_1 < \gamma_0$, alors on voit que $A \leq \mathrm{Cst} B$. On conclut alors car $C \leq C_3 A$. ■

Nous appliquons maintenant le résultat de la proposition 5.1 à un choix particulier de fonction poids. Soit $y \in Z$ et $r > 0$ tel que $B(y, 6r) \Subset Z$. Posons $\psi(z) = -\operatorname{dist}(z, y)$ et on choisit $\lambda > 0$ de sorte que $\varphi = e^{\lambda\psi}$ satisfasse l'hypothèse 3.1 de sous-ellipticité dans $B(y, 6r) \setminus B(y, r/8)$ par le lemme 3.3. On prend alors

$$\rho_1 = e^{-5r\lambda},\ \rho_1' = e^{-4r\lambda},\ \rho_2 = e^{-3r\lambda},\ \rho_2' = e^{-r\lambda},\ \rho_3 = e^{-\frac{r}{2}\lambda},\ \rho_3' = e^{-\frac{r}{4}\lambda}.$$

Les voisinages V_1, V_2 et V_3 sont représentées dans la figure 5.

En appliquant la proposition 5.1 on obtient, pour $u \in H^2(Z)$,

$$\|u\|_{H^1(V_2)} \leq C\left(\|Au\|_{L^2(V)} + \|u\|_{H^1(V_3)}\right)^\delta \|u\|_{H^1(V)}^{1-\delta} \leq C\left(\|Au\|_{L^2(Z)} + \|u\|_{H^1(B(y,r))}\right)^\delta \|u\|_{H^1(Z)}^{1-\delta},$$

ce qui donne

$$\|u\|_{H^1(B(y,3r))} \leq C\left(\|Au\|_{L^2(Z)} + \|u\|_{H^1(B(y,r))}\right)^\delta \|u\|_{H^1(Z)}^{1-\delta}.$$

Ainsi la norme H^1 sur la boule $B(y, 3r)$ est estimée par la norme H^1 sur la boule $B(y, r)$. En particulier on retrouve le résultat d'unicité locale de la section 4 dans le cas où $Au = 0$.

Cette inégalité locale peut être « propagée » et on obtient alors un résultat global. En plus des inégalités de Carleman que nous avons montrées ici, il faut en démontrer au bord. La technique de « propagation » utilise un recouvrement *fini* par des boules de rayon r. Le lecteur est renvoyé à [LR95] pour les détails (pages 353–356). Ici, comme dans [LZ98] (voir la preuve du théorème 3, pages 312–313), l'inégalité d'interpolation peut-être « initiée » au bord en $s = 0$ (là aussi avec une inégalité de Carleman au bord).

Théorème 5.3 ([LR95, LZ98, JL99])**.** *Soit ω un ouvert non vide de Ω. Il existe $C > 0$ et $\delta \in (0, 1)$ tel que pour $u \in H^2(Z)$ qui satisfait $u(s, x)|_{x\in\partial\Omega} = 0$, pour $s \in (0, S_0)$, et $u(0, x) = 0$, pour $x \in \Omega$, nous avons*

$$\|u\|_{H^1(Y)} \leq C\|u\|_{H^1(Z)}^{1-\delta}\left(\|Au\|_{L^2(Z)} + \|\partial_s u(0, x)\|_{L^2(\omega)}\right)^\delta. \tag{5.3}$$

Nous pouvons maintenant en déduire une inégalité spectrale qui mesure entre autres la perte d'orthogonalité des fonction propres de $-\Delta$ sur Ω, avec conditions de Dirichlet homogènes au bord, quand elles sont restreintes à l'ouvert $\omega \subset \Omega$ tel que $\overline{\omega} \neq \Omega$. Soient ϕ_j, $j \in \mathbb{N}^*$, une base orthonormée de telles fonctions propres et $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_k \leq \cdots$ les valeurs propres associées, comptées avec leur multiplicité.

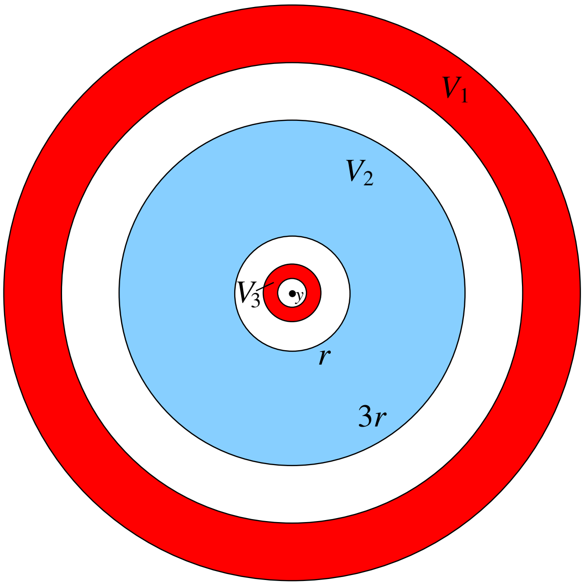

Fig. 4 – Lignes de niveau de la fonction φ et régions V_1, V_2 et V_3. Les zones rouges, V_1 et V_3, localisent le support de $\nabla\chi$.

Théorème 5.4 ([LZ98],[JL99]). *Il existe $K > 0$ tel que pour toute suite $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{C}$ et tout $\mu > 0$ nous avons*

$$\sum_{\mu_j\leq\mu} |\alpha_j|^2 = \int_\Omega \Big| \sum_{\mu_j\leq\mu} \alpha_j\phi_j(x) \Big|^2 \, dx \leq Ke^{K\sqrt{\mu}} \int_\omega \Big| \sum_{\mu_j\leq\mu} \alpha_j\phi_j(x) \Big|^2 \, dx, \tag{5.4}$$

ou de manière plus concise $\| \sum_{\mu_j\leq\mu} \alpha_j\phi_j\|^2_{L^2(\Omega)} \leq Ke^{K\sqrt{\mu}}\| \sum_{\mu_j\leq\mu} \alpha_j\phi_j\|^2_{L^2(\omega)}$.

Preuve. Nous appliquons l'inégalité (5.3) à la fonction $u(s,x) = \sum_{\mu_j\leq\mu} \alpha_j \frac{\sinh(\sqrt{\mu_j}s)}{\sqrt{\mu_j}}\phi_j(x)$ qui vérifie $Au = 0$ ainsi que les conditions au bord exigées dans le théorème 5.3. On a

$$\|u\|^2_{H^1(Y)} \geq \|u\|^2_{L^2(Y)} = \sum_{\mu_j\leq\mu} \int_\alpha^{S_0-\alpha} |\alpha_j|^2 \frac{\sinh^2(\sqrt{\mu_j}s)}{\mu_j} \, ds \geq \sum_{\mu_j\leq\mu} |\alpha_j|^2 \int_\alpha^{S_0-\alpha} s^2 \, ds = C_{S_0,\alpha} \sum_{\mu_j\leq\mu} |\alpha_j|^2,$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H^1(Z)} &= \int_0^{S_0} \bigg(\Big\| \sum_{\mu_j\leq\mu} \alpha_j \frac{\sinh(\sqrt{\mu_j}s)}{\sqrt{\mu_j}}\phi_j\Big\|^2_{L^2(\Omega)} + \Big\| \sum_{\mu_j\leq\mu} \alpha_j \frac{\sinh(\sqrt{\mu_j}s)}{\sqrt{\mu_j}}\nabla_x\phi_j\Big\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\qquad + \Big\| \sum_{\mu_j\leq\mu} \alpha_j \cosh(\sqrt{\mu_j}s)\phi_j\Big\|^2_{L^2(\Omega)} \bigg) \, ds \\ &= \sum_{\mu_j\leq\mu} |\alpha_j|^2 \int_0^{S_0} \Big((1 + \frac{1}{\mu_j})\sinh^2(\sqrt{\mu_j}s) + \cosh^2(\sqrt{\mu_j}s) \Big) \, ds \leq Ce^{C\sqrt{\mu}} \sum_{\mu_j\leq\mu} |\alpha_j|^2, \end{aligned}$$

puisque $(\frac{\nabla_x\phi_i}{\sqrt{\mu_i}}, \frac{\nabla_x\phi_j}{\sqrt{\mu_j}})_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij}$. Enfin, nous avons $\|\partial_s u(0,x)\|^2_{L^2(\omega)} = \int_\omega \big| \sum_{\mu_j\leq\mu} \alpha_j\phi_j(x) \big|^2 \, dx$, ce qui donne

$$\sum_{\mu_j\leq\mu} |\alpha_j|^2 \leq Ce^{C\sqrt{\mu}} \Big(\sum_{\mu_j\leq\mu} |\alpha_j|^2 \Big)^{1-\delta} \Big(\int_\omega \Big| \sum_{\mu_j\leq\mu} \alpha_j\phi_j(x) \Big|^2 \, dx \Big)^\delta,$$

et la conclusion suit. ∎

Dans le cas où $\omega = \Omega$ le résultat du théorème 5.4 devient trivial et la constante $Ce^{C\sqrt{\mu}}$ peut être remplacée par 1. D'un autre coté, il est clair que $K(\omega)$ tend vers $+\infty$ quand la taille de ω tend vers zéro. La caractérisation précise de $K = K(\omega)$ constitue un problème intéressant et ouvert à notre connaissance.

Dans le cas où $\overline{\omega} \neq \Omega$, la proposition suivante montre que la puissance $\frac{1}{2}$ de μ dans la constante $Ke^{K\sqrt{\mu}}$ est optimale (voir aussi [JL99]).

Proposition 5.5. *Soit ω un ouvert non vide de Ω avec $\overline{\omega} \neq \Omega$. Il existe une suite réelle $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$, telle que, pour une certaine constante $C > 0$, on a*

$$\sum_{\mu_j\leq\mu} |\alpha_j|^2 \geq Ce^{C\sqrt{\mu}} \int_\omega \Big| \sum_{\mu_j\leq\mu} \alpha_j\phi_j(x) \Big|^2 \, dx,$$

pour μ suffisamment grand.

Preuve. On note $P_t(x, y)$ le noyau de la chaleur que l'on peut écrire $\sum_{j\in\mathbb{N}} e^{-t\mu_j}\phi_j(x)\phi_j(y)$ pour $t > 0$; on a bien $e^{t\Delta} f(x) = \int P_t(x, y) f(y)\, dy$. On écrit alors

$$\Big| \sum_{\mu_j\leq\mu} e^{-t\mu_j}\phi_j(x)\phi_j(y) \Big| \leq |P_t(x, y)| + \Big| \sum_{\mu_j>\mu} e^{-t\mu_j}\phi_j(x)\phi_j(y) \Big|.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, les injections de Sobolev donnent

$$\|\phi_j\|_{L^\infty} \leq C\|\phi_j\|_{H^{2k}} \leq C'\|\Delta^k\phi_j\|_{L^2} = C'\mu_j^k. \tag{5.5}$$

Pour tous $x, y \in \Omega$ nous avons $p_t(x, y) \leq (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$ par le principe du maximum (voir le lemme A.7 dans l'annexe A.7). Soit y_0 tel que $d = \mathrm{dist}(y_0, \omega) > 0$. Nous avons alors $p_t(x, y_0) \leq e^{-C_0/t}$, avec $C_0 > 0$, uniformément pour x dans ω. Avec (5.5) nous obtenons alors

$$\Big| \sum_{\mu_j\leq\mu} e^{-t\mu_j}\phi_j(x)\phi_j(y_0) \Big| \leq e^{-C_0/t} + C \sum_{\mu_j>\mu} e^{-t\mu_j}\mu_j^{2k}, \quad x \in \omega.$$

On choisit $\alpha_j = e^{-t\mu_j}\phi_j(y_0)$ et on prend $t = 1/\sqrt{\mu}$. Nous avons

$$\Big| \sum_{\mu_j\leq\mu} \alpha_j\phi_j(x) \Big| \leq Ce^{-C_0\sqrt{\mu}} + C \sum_{\mu_j>\mu} e^{-t\mu_j}\mu_j^{2k}, \quad x \in \omega.$$

Pour estimer le deuxième terme nous introduisons $J_\mu = \{l;\ \mu_l \leq \mu\}$. L'asymptotique de Weyl (voir e.g. [Agm65]) donne $\#J_\mu \leq C\mu^{n/2}$. Alors, pour $\mu > 1$ grand, on écrit

$$\begin{aligned}\sum_{\mu_j>\mu} e^{-t\mu_j}\mu_j^{2k} &= \sum_{\substack{N\in\mathbb{N}\\ N<\mu_j-\mu\leq N+1}} e^{-t\mu_j}\mu_j^{2k} \leq \sum_{\substack{N\in\mathbb{N}\\ N<\mu_j-\mu\leq N+1}} e^{-t(\mu+N)}(\mu+N+1)^{2k} \leq \sum_{N\in\mathbb{N}} \#J_{\mu+N+1}\, e^{-t(\mu+N)}(\mu+N+1)^{2k}\\ &\leq C \sum_{N\in\mathbb{N}} e^{-t(\mu+N)}(\mu+N+1)^{2k+n/2} \leq C \int_{\mu-1}^{\infty} e^{-tx}(x+1)^{2k+n/2}\, dx = Ce^t \int_{\mu}^{\infty} e^{-tx}x^{2k+n/2}\, dx.\end{aligned}$$

En effet, avec $t = 1/\sqrt{\mu}$, la fonction $e^{-tx}x^{2k+n/2}$ est décroissante sur $[\mu, +\infty)$ pour μ grand. Nous posons $l = 2k + n/2$. Le changement de variable $y = t(x - \mu)$ donne alors

$$\begin{aligned}\int_\mu^\infty e^{-tx}x^l\, dx &= t^{-1-l}e^{-t\mu} \int_0^\infty e^{-y}(\mu t + y)^l\, dy = \mu^{\frac{l+1}{2}} e^{-\sqrt{\mu}} \int_0^\infty e^{-y}(\sqrt{\mu} + y)^l\, dy\\ &\leq \mu^{l+\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{\mu}} \int_0^\infty e^{-y}(1 + y)^l\, dy = C\mu^{l+\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{\mu}},\end{aligned}$$

puisque $t = 1/\sqrt{\mu}$. Pour $\mu > 1$ grand, nous avons obtenu $\big| \sum_{\mu_j\leq\mu} \alpha_j\phi_j(x) \big| \leq Ce^{-C\sqrt{\mu}}$, ce qui donne

$$\int_\omega \Big| \sum_{\mu_j\leq\mu} \alpha_j\phi_j(x) \Big|^2 dx \leq C|\omega|e^{-C\sqrt{\mu}}.$$

Nous concluons maintenant en montrant $\sum_{\mu_j\le\mu}|\alpha_j|^2 \ge C\mu^{n/4} \ge 1$, pour μ suffisamment grand avec le choix des coefficients α_j, $j \in \mathbb{N}$, que nous avons fait plus haut. En effet, nous avons

$$\sum_{\mu_j\le\mu}|\alpha_j|^2 = \sum_{\mu_j\le\mu} e^{-2t\mu_j}|\phi_j(y_0)|^2 = P_{2t}(y_0,y_0) - \sum_{\mu_j>\mu} e^{-2t\mu_j}|\phi_j(y_0)|^2.$$

Comme ici $t = \sqrt{\mu}$ est petit, le lemme A.8 (voir l'annexe A.7) donne $P_{2t}(y_0,y_0) \ge C(2t)^{-n/2} = C'\mu^{n/4}$. Enfin, en procédant par inégalités de Sobolev comme plus haut, on obtient l'estimation suivante

$$\sum_{\mu_j>\mu} e^{-2t\mu_j}|\phi_j(y_0)|^2 \le C \sum_{\mu_j>\mu} e^{-2t\mu_j}\mu_j^{2k} \le C'e^{-C'\sqrt{\mu}},$$

ce qui donne la conclusion pour μ suffisamment grand. ■

L'inégalité spectrale du théorème 5.4 mène aussi au résultat de prolongement unique suivant pour certaines séries de fonctions propres.

Proposition 5.6. *Soient $\omega \subset \Omega$ un ouvert et $\varepsilon > 0$. Alors pour toute fonction $u = \sum_{j\in\mathbb{N}^*}\alpha_j\phi_j$ avec les coefficients α_j satisfaisant $|\alpha_j| \le e^{-\varepsilon\sqrt{\mu_j}}$, $j \in \mathbb{N}^*$, on a $u = 0$ si $u|_\omega = 0$.*

Ce résultat permet de faire une analogie entre les séries $\sum_{j\in\mathbb{N}^*}\alpha_j\phi_j$ et les fonctions analytiques, pour des coefficients α_j satisfaisant l'asymptotique $|\alpha_j| \le e^{-\varepsilon\sqrt{\mu_j}}$.

Preuve. Pour $0 \le s < \varepsilon$ nous posons $v(s,x) = \sum_{j\in\mathbb{N}^*}\alpha_j\frac{\sinh(\sqrt{\mu_j}s)}{\sqrt{\mu_j}}\phi_j(x)$. Le comportement asymptotique que nous supposons sur les coefficients α_j donne $v \in \mathscr{C}^2((0,\varepsilon),H^2(\Omega))$. Nous appliquons alors l'inégalité d'interpolation du théorème 5.3 en prenant $Y = (\alpha, S_0-\alpha)\times\Omega$ avec $0 < \alpha < S_0-\alpha < S_0 < \varepsilon$. Comme v satisfait les conditions adéquates au bord Comme $Av = 0$ et $\partial_s v|_{\{0\}\times\omega} = u|_\omega = 0$, cela donne $\|v\|_{H^1(Y)} = 0$. Pour presque tout $s \in (\alpha, S_0-\alpha)$ on a donc $x \mapsto \sum_{j\in\mathbb{N}^*}\alpha_j\frac{\sinh(\sqrt{\mu_j}s)}{\sqrt{\mu_j}}\phi_j(x) = 0$ dans $L^2(\Omega)$. L'orthogonalité les fonctions propres donne $\alpha_j = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.

■

6. CONTRÔLE DE LA CHALEUR

Nous allons maintenant construire un contrôle pour l'équation de la chaleur sur l'intervalle de temps $(0,T)$ pour une certaine donnée initiale y_0 dans $L^2(\Omega)$:

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = 1_\omega v & \text{dans } Q = (0,T)\times\Omega, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma = (0,T)\times\partial\Omega, \\ y(0) = y_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{6.1}$$

La fonction v est le contrôle. L'objectif est d'amener la solution y à zéro au temps $T > 0$, en agissant uniquement sur le sous-domaine ω.

Nous commençons par donner un résultat de contrôle partiel, puis le contrôle v sera construit par une suite de contrôles actifs et passifs, ce dernier choix permettant de profiter de la décroissance exponentielle naturelle de la norme L^2 de la solution.

6.1 Observabilité et contrôle partiels. Pour $j \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de dimension finie $E_j = \text{vect}\{\phi_k;\ \mu_k \le 2^{2j}\}$ et le problème de contrôle à zéro partiel suivant :

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = \Pi_{E_j}(1_\omega v) & \text{dans } (0,\mathcal{T})\times\Omega, \\ y = 0 & \text{sur } (0,\mathcal{T})\times\partial\Omega, \\ y(0) = y_0 \in E_j & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{6.2}$$

avec $\mathcal{T} > 0$ et où Π_{E_j} désigne la projection orthogonale sur E_j dans $L^2(\Omega)$. Nous évaluons maintenant le coût du contrôle v qui permet d'obtenir $y(\mathcal{T}) = 0$.

Lemme 6.1. *Il existe un contrôle v qui amène la solution du système* (6.2) *à zéro au temps* $\mathcal{T}$ *et* $\|v\|_{L^2((0,T)\times\omega)} \leq C\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}} e^{C2^j} \|y_0\|_{L^2(\Omega)}$.

Pour $a \geq 0$, lorsque l'on travaille sur l'intervalle de temps $[a, a + \mathcal{T}]$, on notera par $V_j(y_0, a, \mathcal{T})$ un tel contrôle vérifiant $\|V_j(y_0, a, \mathcal{T})\|_{L^2((a,a+\mathcal{T})\times\Omega)} \leq C\mathcal{T}^{-\frac{1}{2}} e^{C2^j} \|y_0\|_{L^2(\Omega)}$.

Preuve. Le système adjoint de (6.2) s'écrit

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q = 0 & \text{dans } (0, \mathcal{T}) \times \Omega, \\ q = 0 & \text{sur } (0, \mathcal{T}) \times \partial\Omega, \\ q(\mathcal{T}) = q_f \in E_j. \end{cases}$$

Si $q(0)$ s'écrit $q(0) = \sum_{\mu_k \leq 2^{2j}} b_k \phi_k$ alors $q(t) = \sum_{\mu_k \leq 2^{2j}} \alpha_k(t) \phi_k$ avec $\alpha_k(t) = b_k e^{\mu_k t}$ et ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \|q(0)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \int_0^{\mathcal{T}} \|q(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \, dt = \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega \Big| \sum_{\mu_k \leq 2^{2j}} \alpha_k(t) \phi_k \Big|^2 \, dt \, dx \\ &\leq C e^{C2^j} \int_0^{\mathcal{T}} \int_\omega \Big| \sum_{\mu_k \leq 2^{2j}} \alpha_k(t) \phi_k \Big|^2 \, dt \, dx = C e^{C2^j} \int_0^{\mathcal{T}} \int_\omega |q(t)|^2 \, dt \, dx, \end{aligned}$$

par dissipation parabolique et par l'inégalité spectrale du théorème 5.4. Cette inégalité d'observabilité donne le coût du contrôle escompté. ∎

6.2 Construction du contrôle. Nous découpons l'intervalle de temps considéré : $[0, T] = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} [a_j, a_{j+1}]$, avec $a_0 = 0$, $a_{j+1} = a_j + 2T_j$, pour $j \in \mathbb{N}$ et $T_j = K2^{-j\rho}$ avec $\rho \in (0, 1)$ et la constante K telle que $2\sum_{j=0}^{\infty} T_j = T$. Nous définissons maintenant le contrôle v suivant la stratégie annoncée :

$$\begin{aligned} &\text{si } t \in (a_j, a_j + T_j], \quad v(t, x) = V_j(\Pi_{E_j} y(a_j, .), a_j, T_j) \\ &\qquad\qquad \text{et } y(t, .) = S(t - a_j) y(a_j, .) + \int_{a_j}^{t} S(t - s) v(s, .) ds, \\ &\text{si } t \in (a_j + T_j, a_{j+1}], \quad v(t, x) = 0 \quad \text{et} \quad y(t, .) = S(t - a_j - T_j) y(a_j + T_j, .), \end{aligned}$$

où $S(t)$ désigne le semi-groupe de la chaleur, $S(t) = e^{t\Delta}$. En particulier, $\|S(t)\|_{(L^2, L^2)} \leq 1$.

Le choix du contrôle v pendant l'intervalle de temps $[a_j, a_j + T_j]$, $j \in \mathbb{N}$, implique

$$\|y(a_j + T_j, .)\|_{L^2(\Omega)} \leq (1 + C e^{C2^j}) \|y(a_j, .)\|_{L^2(\Omega)}, \quad \text{et} \quad \Pi_{E_j} y(a_j + T_j, .) = 0.$$

Pendant la période *passive*, $t \in [a_j + T_j, a_{j+1}]$, la solution subit une décroissance exponentielle :

$$\|y(a_{j+1}, .)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-2^{2j} T_j} \|y(a_j + T_j, .)\|_{L^2(\Omega)}.$$

On obtient donc $\|y(a_{j+1}, .)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{C2^j - 2^{2j} T_j} \|y(a_j, .)\|_{L^2(\Omega)}$, et ainsi

$$\|y(a_{j+1}, .)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{\sum_{k=0}^{j} C2^k - 2^{2k} T_k} \|y_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

On a $2^{2k} T_k = K2^{k(2-\rho)}$. On note que $2 - \rho > 1$ ce qui donne $\lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{j} (C2^k - K2^{k(2-\rho)}) = -\infty$. Pour une certaine constante $C > 0$ nous avons ainsi

$$\|y(a_{j+1}, .)\|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{-C2^{j(2-\rho)}} \|y_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{6.3}$$

On conclut que $\lim_{j\to\infty} \|y(a_j, .)\|_{L^2(\Omega)} = 0$, i.e. $y(T, .) = 0$ puisque $y(t, .)$ est continu à valeur dans $L^2(\Omega)$ car le membre de droite de (6.1) est dans $L^2(Q)$ par construction comme nous allons le voir maintenant.

Nous avons $\|v\|^2_{L^2(Q)} = \sum_{j\geq 0} \|v\|^2_{L^2((a_j,a_j+T_j)\times\Omega)}$. A partir du coût du contrôle donné dans le lemme 6.1 et de (6.3), on en déduit

$$\|v\|^2_{L^2(Q)} \leq \Big(CT_0^{-1}e^{2C} + \sum_{j\geq 1} CT_j^{-1}e^{C2^j}e^{-C2^{(j-1)(2-\rho)}}\Big)\|y_0\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Comme $2-\rho > 1$ et $T_j = K2^{-j\rho}$, un argument similaire au précédent donne $\|v\|_{L^2(Q)} \leq C_T\|y_0\|_{L^2(\Omega)}$ avec $C_T < \infty$. Nous avons ainsi obtenu le résultat de contrôle suivant.

Théorème 6.2 (Contrôlabilité à zéro [LR95])**.** *Pour tout $T > 0$, il existe $C_T > 0$ tel que pour toute donnée initiale $y_0 \in L^2(\Omega)$, il existe $v \in L^2(Q)$, avec $\|v\|_{L^2(Q)} \leq C_T\|y_0\|_{L^2(\Omega)}$, tel que la solution du système* (6.1) *satisfait $y(T) = 0$.*

Corollaire 6.3 (Observabilité)**.** *Il existe $C_T > 0$ tel que la solution $y \in \mathscr{C}([0,T], L^2(\Omega))$ du système adjoint*

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q = 0 & \textit{dans } Q, \\ q = 0 & \textit{sur } \Sigma, \\ q(T) = q_T & \textit{dans } \Omega, \end{cases}$$

vérifie l'inégalité d'observabilité suivante $\|q(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_T^2 \int_0^T \int_\omega |q(t)|^2\, dt\, dx.$

7. INÉGALITÉS DE CARLEMAN POUR DES OPÉRATEURS PARABOLIQUES

Nous allons démontrer ici des inégalités de Carleman pour des opérateurs paraboliques, typiquement $P = \partial_t - \Delta$. Comme dans les sections précédentes Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$. On pose $Q = (0,T)\times\Omega$. Nous commençons par démontrer des inégalités locales en espace, loin du bord $\partial\Omega$.

7.1 Inégalités locales. On pose $\theta(t) = t(T-t)$ et $h = \varepsilon\theta(t)$. Le paramètre ε sera pris petit, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 << 1$. Pour une fonction poids $\varphi(x)$ nous définissons $P_\varphi = h^2 e^{\varphi/h} P e^{-\varphi/h}$. Le paramètre semi-classique h va donc dépendre de la variable t ici, et même s'annuler pour $t = 0$ et $t = T$.

Nous avons

$$P_\varphi = h^2\partial_t + \varepsilon\varphi(x)\theta'(t) - h^2\Delta + 2h\langle\varphi', \nabla_x\rangle - |\varphi'|^2 + h\Delta\varphi.$$

On définit les opérateurs symétriques suivants

$$Q_2 = (P_\varphi + P_\varphi^*)/2, \quad Q_1 = (P_\varphi - P_\varphi^*)/(2i),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} Q_2 &= -\varepsilon h\theta'(t) + \varepsilon\varphi(x)\theta'(t) - h^2\Delta - |\varphi'|^2, \\ Q_1 &= \frac{h^2}{i}\partial_t + \frac{\varepsilon h}{i}\theta'(t) + \frac{h}{i}\Delta\varphi + \frac{2h}{i}\langle\varphi', \nabla_x\rangle, \end{aligned}$$

de symboles principaux respectifs

$$q_2 = \varepsilon\varphi(x)\theta'(t) + |\xi|^2 - |\varphi'|^2, \quad q_1 = h\tau + 2\langle\varphi', \xi\rangle.$$

On a $p_\varphi = q_2 + iq_1$ et $P_\varphi = Q_2 + iQ_1$.

Nous choisissons la fonction poids φ satisfaisant l'hypothèse suivante.

Hypothèse 7.1. *Soit V un ouvert de Ω. La fonction poids φ satisfait*

$$\begin{aligned} &\varphi(x) < 0, \qquad |\varphi'(x)| \neq 0, \ x \in \overline{V}, \\ &q_2|_{\varepsilon=0} = 0 \Rightarrow \{q_2|_{\varepsilon=0}, q_1|_{\varepsilon=0}\} > 0, \quad x \in \overline{V}, \xi \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{7.1}$$

De telles conditions, plus fortes que celles du cas elliptique, ont été introduites dans [Leb05]. Elles s'avèrent particulièrement judicieuses pour démontrer l'inégalité parabolique. Elles ne font intervenir que les variables spatiales, x et ξ, et peuvent être satisfaites en prenant φ de la forme

$$\varphi(x) = e^{\lambda\psi(x)} - e^{\lambda L}, \quad \text{avec } L > \|\psi\|_\infty, \quad |\psi'(x)| \neq 0,\ x \in \overline{V},$$

et en prenant le paramètre λ positif suffisamment grand (voir le lemme A.1 dans la section A.2).

A partir de ces conditions on peut démontrer le lemme suivant (voir l'annexe A.8 pour une démonstration).

Lemme 7.2. *Il existe $C > 0$, $\mu_1 > 0$ et $\delta_1 > 0$, tels que pour $\mu \geq \mu_1$ et $0 \leq \varepsilon T \leq \delta_1$ on a*

$$\mu q_2^2 - 2\varepsilon\theta'|\xi|^2 + \{q_2, b\} \geq C\langle\xi\rangle^4, \quad x \in \overline{V},\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

où $b := 2\langle\varphi', \xi\rangle$.

Nous pouvons maintenant démontrer l'inégalité de Carleman suivante, locale en espace et globale en temps, pour l'opérateur parabolique P.

Théorème 7.3 (Inégalité de Carleman locale loin du bord)**.** *Soient K un compact de Ω et V un ouvert de Ω, voisinage de K. Soit φ qui satisfait l'hypothèse 7.1 sur $\overline{V}$. Alors il existe $C > 0$ et $\delta_2 > 0$ tels que*

$$\|h^{\frac{1}{2}} e^{\varphi/h} u\|^2_{L^2(Q)} + \|h^{3/2} e^{\varphi/h} \nabla_x u\|^2_{L^2(Q)} \leq C \|h^2 e^{\varphi/h} P u\|^2_{L^2(Q)},$$

pour $u \in \mathscr{C}^\infty([0,T] \times \Omega)$, avec $u(t) \in \mathscr{C}_c^\infty(K)$ pour tout $t \in [0,T]$, et $0 < (T + T^2)\varepsilon \leq \delta_2$.

Preuve. On pose $v = e^{\varphi/h} u$. On note que v, ainsi que toutes ses dérivées en temps, s'annulent en $t = 0$ et $t = T$, puisque $\varphi \leq -C < 0$ dans K. On a $P_\varphi v = h^2 e^{\varphi/h} P u = g$ et on écrit, en procédant comme pour (3.2),

$$\|g\|^2_{L^2(Q)} = \|Q_1 v\|^2_{L^2(Q)} + \|Q_2 v\|^2_{L^2(Q)} + i([Q_2, Q_1]v, v)_{L^2(Q)},$$

ce qui donne, avec $B = Q_1 - \frac{h^2}{i}\partial_t - \frac{\varepsilon h}{i}\theta'(t) = \frac{h}{i}\Delta\varphi + \frac{2h}{i}\langle\varphi', \nabla_x\rangle$,

$$\begin{aligned}\|g\|^2_{L^2(Q)} &= \|Q_1 v\|^2_{L^2(Q)} + \|Q_2 v\|^2_{L^2(Q)} + ((-h^2(\partial_t Q_2) + i[Q_2, B])v, v)_{L^2(Q)} \\ &\geq \Big((h\mu Q_2^2 - h^2(\partial_t Q_2) + i[Q_2, B])v, v\Big)_{L^2(Q)} = \Big(h\Big(\mu Q_2^2 - h(\partial_t Q_2) + \frac{i}{h}[Q_2, B]\Big) v, v\Big)_{L^2(Q)}\end{aligned}$$

pour $\mu > 0$ et $0 < h < 1/\mu$. On note que $h(\partial_t Q_2) = -\varepsilon h^2\theta'' - \varepsilon^2 h(\theta')^2 + \varepsilon h\theta''\varphi - 2\varepsilon\theta' h^2\Delta$. Le symbole principal de $\mu Q_2^2 - h(\partial_t Q_2) + \frac{i}{h}[Q_2, B]$ est $\mu q_2^2 - 2\varepsilon\theta'|\xi|^2 + \{q_2, b\}$. On choisit $\mu_1 > 0$ et $\delta_1 > 0$ suivant le lemme 7.2 et on prend $0 < \varepsilon T \leq \delta_1$. L'inégalité de Gårding étant uniforme par rapport au paramètre semi-classique h, pris suffisamment petit (i.e., en prenant par exemple $0 < \varepsilon\theta < \varepsilon T^2/4 \leq \delta_1'$ pour δ_1' suffisamment petit), on obtient

$$\Big(\Big(\mu Q_2^2 - h(\partial_t Q_2) + \frac{i}{h}[Q_2, B]\Big) v(t), v(t)\Big)_{L^2(\Omega)} \geq C\|v(t)\|_2^2, \qquad \forall t \in [0,T], \tag{7.2}$$

pour $\mu \geq \mu_1$ et $0 < (T + T^2)\varepsilon \leq \delta_2 = \min(\delta_1, 4\delta_1')$, d'où $\|g\|^2_{L^2(Q)} \geq C\int_0^T h\|v\|_2^2\, dt$. On obtient alors l'inégalité de Carleman locale recherchée en procédant comme dans la fin de la preuve du théorème 3.5. ∎

Remarque 7.4. Dans la démonstration du théorème précédant, on notera l'importance de n'utiliser que le terme positif $\|Q_2 v\|^2_{L^2(Q)}$ car le second terme $\|Q_1 v\|^2_{L^2(Q)}$ implique une dérivée de v par rapport au temps t, et ne peut-être utilisé dans l'inégalité de Gårding (7.2) à t fixé. Si on utilise une inégalité de Gårding par rapport à toutes les variables (t, x) on peut alors se contenter de l'hypothèse de sous-ellipticité plus faible :

$$q_2|_{\varepsilon=0} = 0 \text{ et } q_1|_{\varepsilon=0} = 0 \ \Rightarrow \{q_2|_{\varepsilon=0}, q_1|_{\varepsilon=0}\} > 0, \quad x \in \overline{V}, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{7.3}$$

La démonstration utilise alors les deux carrés $\|Q_2 v\|^2_{L^2(Q)}$ et $\|Q_1 v\|^2_{L^2(Q)}$. Cette démonstration est par contre plus technique et fait appel au calcul de Weyl-Hörmander des OψD (voir [LR]).

7.2 Inégalités au bord. Si nous nous plaçons au voisinage du bord, nous avons le résultat suivant.

Théorème 7.5 (Inégalité de Carleman au bord)**.** *Soient K un compact de $\overline{\Omega}$ et V un ouvert de $\overline{\Omega}$, voisinage de K dans $\overline{\Omega}$. Soit φ qui satisfait l'hypothèse 7.1 dans $\overline{V}$ et $\partial_n\varphi|_{\partial\Omega\cap V} < 0$, où n est la normale sortante à Ω. Alors il existe $C > 0$ et $\delta_3 > 0$ tels que*

$$\|h^{\frac{1}{2}} e^{\varphi/h} u\|^2_{L^2(Q)} + \|h^{3/2} e^{\varphi/h} \nabla_x u\|^2_{L^2(Q)} \leq C \|h^2 e^{\varphi/h} P u\|^2_{L^2(Q)},$$

pour $0 < (T + T^2)\varepsilon \leq \delta_3$, $h = \varepsilon t(T - t)$ et $u \in \mathscr{C}^\infty([0, T] \times \overline{\Omega})$, avec $\operatorname{supp}(u(t)) \subset K$ pour tout $t \in [0, T]$, et $u|_{(0,T)\times(\partial\Omega\cap V)} = 0$.

Voir [LR] pour une démonstration. L'idée est alors d'utiliser l'inégalité de Gårding dans les directions tangentielles spatiales mais aussi en temps. Suivant la remarque 7.4 la condition (7.3) est en fait suffisante pour obtenir cette inégalité locale au bord.

7.3 Recollement, inégalité globale. Nous nous intéressons maintenant à des inégalités de Carleman globales. Une manière de procéder consiste au recollement des inégalités locales à l'intérieur et au bord que nous avons énoncées précédemment. Le caractère global de l'inégalité nous imposera un terme « d'observation » sur $(0, T) \times \omega$, avec $\omega \Subset \Omega$ dans le second membre de l'inégalité.

Le recollement nécessite le choix d'une fonction poids globale commune à toutes ces inégalités. Nous choisissons une fonction poids suivant l'hypothèse suivante.

Hypothèse 7.6. *Soit $\omega_0 \Subset \omega \Subset \Omega$. La fonction poids φ satisfait*

$$\begin{aligned}
&\varphi|_{\partial\Omega} = \text{Cst}, \qquad \partial_n\varphi|_{\partial\Omega} < 0, \qquad \sup_{x\in\overline{\Omega}} \varphi(x) < 0, \qquad |\varphi'(x)| \neq 0,\ x \in \Omega \setminus \omega_0,\\
&q_2|_{\varepsilon=0} = 0 \Rightarrow \{q_2|_{\varepsilon=0}, q_1|_{\varepsilon=0}\} > 0, \quad x \in \Omega \setminus \omega_0,
\end{aligned}$$

De telles conditions peuvent être satisfaites en prenant φ de la forme

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) = e^{\lambda\psi(x)} - e^{\lambda K}, \quad \text{avec } K > \|\psi\|_\infty, \quad |\psi'(x)| \neq 0,\ x \in \Omega \setminus \omega_0, \quad \text{et}\\
&\psi|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \partial_n\psi|_{\partial\Omega} < 0, \qquad \psi(x) > 0,\ x \in \Omega,
\end{aligned}$$

et en prenant le paramètre λ positif suffisamment grand. Pour la construction d'une telle fonction ψ on se référera à [FI96, lemme 1.1]. La construction fait appel aux fonctions de Morse et au théorème d'approximation associé [AE84].

Théorème 7.7 (Inégalité de Carleman globale)**.** *Soit φ qui satisfait l'hypothèse 7.6. Alors il existe $\delta_4 > 0$, et $C \geq 0$ tels que*

$$\|h^{\frac{1}{2}} e^{\varphi/h} u\|^2_{L^2(Q)} + \|h^{3/2} e^{\varphi/h} \nabla_x u\|^2_{L^2(Q)} \leq C \Big(\|h^2 e^{\varphi/h} P u\|^2_{L^2(Q)} + \|h^{\frac{1}{2}} e^{\varphi/h} u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)} \Big),$$

pour $0 < (T + T^2)\varepsilon \leq \delta_4$, $h = \varepsilon t(T - t)$ et $u \in \mathscr{C}^\infty([0, T] \times \overline{\Omega})$ et tel que $u|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0$.

Preuve. Soit ω_1 tel que $\omega_0 \Subset \omega_1 \Subset \omega$. Pour tout $x \in \overline{\Omega} \setminus \omega_1$, il existe un voisinage V_x de x et un ouvert $\tilde{V}_x$ de $\overline{\Omega}$, avec $x \in \tilde{V}_x \Subset V_x \subset \overline{\Omega} \setminus \omega_0$ pour lesquels l'inégalité de Carleman locale au bord ou à l'intérieur est valable avec la fonction poids φ pour des fonctions à support dans le compact $K_x = \overline{\tilde{V}_x}$.

Du recouvrement de $\overline{\Omega} \setminus \omega_1$ par les $\tilde{V}_x$ nous pouvons en extraire un recouvrement fini $(\tilde{V}_i)_{i\in\mathcal{I}}$, tel que pour tout $i \in \mathcal{I}$ l'inégalité de Carleman sur V_i est valable pour $h < h_i$ et $C = C_i > 0$ et $\operatorname{supp}(u) \subset K_i = \overline{\tilde{V}_i}$.

Soit $(\chi_i)_{i\in\mathcal{I}}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement des $\tilde{V}_i$, $i \in \mathcal{I}$, [Trè67, Hör90], i.e.,

$$\chi_i \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}), \qquad \operatorname{supp}(\chi_i) \subset K_i = \overline{\tilde{V}_i}, \qquad 0 \leq \chi_i \leq 1, \quad i \in \mathcal{I}, \qquad \text{et} \qquad \sum_{i\in\mathcal{I}} \chi_i = 1 \text{ dans } \Omega \setminus \omega_1$$

Notons que nous avons $\mathrm{supp}(\chi_i) \cap \omega_0 = \emptyset$. Pour tout $i \in \mathcal{I}$, on pose $u_i = \chi_i u$. Alors pour chaque u_i on a une inégalité de Carleman locale. On note maintenant que l'on a

$$Pu_i = P(\chi_i u) = \chi_i Pu + [P, \chi_i]u = \chi_i Pu - [\Delta, \chi_i]u,$$

où le commutateur est un opérateur différentiel d'ordre un en x. Pour tout $i \in \mathcal{I}$, on obtient donc

$$\begin{aligned} \|h^2 e^{\varphi/h} Pu_i\|^2_{L^2(Q)} &\leq C\|h^2 e^{\varphi/h} Pu\|^2_{L^2(Q)} + C\|h^2 e^{\varphi/h} u\|^2_{L^2(Q)} + C\|h^2 e^{\varphi/h} \nabla_x u\|^2_{L^2(Q)} \\ &\leq C\|h^2 e^{\varphi/h} Pu\|^2_{L^2(Q)} + C(\varepsilon T^2)^3 \|h^{\frac{1}{2}} e^{\varphi/h} u\|^2_{L^2(Q)} + C\varepsilon T^2 \|h^{3/2} e^{\varphi/h} \nabla_x u\|^2_{L^2(Q)}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Maintenant on note que l'on a

$$\begin{aligned} \|h^{\frac{1}{2}} e^{\varphi/h} u\|^2_{L^2(Q)} + \|h^{3/2} e^{\varphi/h} \nabla_x u\|^2_{L^2(Q)} \leq & C \sum_{i \in \mathcal{I}} \left(\|h^{\frac{1}{2}} e^{\varphi/h} u_i\|^2_{L^2(Q)} + \|h^{3/2} e^{\varphi/h} \nabla_x u_i\|^2_{L^2(Q)} \right) \\ & + C\|h^{\frac{1}{2}} e^{\varphi/h} u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega_1)} + C\|h^{3/2} e^{\varphi/h} \nabla_x u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega_1)}, \end{aligned}$$

De (7.4) on obtient alors

$$\begin{aligned} \|h^{\frac{1}{2}} e^{\varphi/h} u\|^2_{L^2(Q)} + \|h^{3/2} e^{\varphi/h} \nabla_x u\|^2_{L^2(Q)} \leq C \Big(& \|h^2 e^{\varphi/h} Pu\|^2_{L^2(Q)} + (\varepsilon T^2)^3 \|h^{\frac{1}{2}} e^{\varphi/h} u\|^2_{L^2(Q)} + \varepsilon T^2 \|h^{3/2} e^{\varphi/h} \nabla_x u\|^2_{L^2(Q)} \\ & + \|h^{\frac{1}{2}} e^{\varphi/h} u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega_1)} + \|h^{3/2} e^{\varphi/h} \nabla_x u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega_1)} \Big). \end{aligned}$$

Pour εT^2 suffisamment petit on obtient

$$\begin{aligned} \|h^{\frac{1}{2}} e^{\varphi/h} u\|^2_{L^2(Q)} + \|h^{3/2} e^{\varphi/h} \nabla_x u\|^2_{L^2(Q)} \leq C \Big(& \|h^2 e^{\varphi/h} Pu\|^2_{L^2(Q)} + \|h^{\frac{1}{2}} e^{\varphi/h} u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega_1)} \\ & + \|h^{3/2} e^{\varphi/h} \nabla_x u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega_1)} \Big). \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant éliminer le dernier terme à droite dans l'estimation précédente. Soit donc $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\omega)$ tel que $\chi = 1$ dans un voisinage de $\overline{\omega}_1$. Si $Pu = f$, après multiplication par $e^{2\varphi/h} h^3 \chi \overline{u}$, intégration sur Q, on obtient

$$\frac{1}{2} \iint_Q e^{2\varphi/h} h^3 \chi \partial_t |u|^2 \, dt\, dx - \mathrm{Re} \iint_Q e^{2\varphi/h} h^3 \chi \overline{u} \Delta u \, dt\, dx = \mathrm{Re} \iint_Q e^{2\varphi/h} h^3 \chi \overline{u} f \, dt\, dx \tag{7.5}$$

Nous traitons tout d'abord le premier terme I_1 par intégration par parties en t

$$|I_1| = \left| \frac{1}{2} \iint_Q e^{2\varphi/h} h^3 \chi \partial_t |u|^2 \, dt\, dx \right| = \left| \frac{1}{2} \iint_Q (3\varepsilon\theta' h^2 - 2\varphi\varepsilon\theta' h) e^{2\varphi/h} \chi |u|^2 \, dt\, dx \right| \leq C\|h^{\frac{1}{2}} e^{\varphi/h} u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)},$$

car $\varepsilon|\theta'| \leq C\varepsilon T$ est borné. Le troisième terme s'estime ainsi

$$|I_3| = \left| \mathrm{Re} \iint_Q e^{2\varphi/h} h^3 \chi \overline{u} f \, dt\, dx \right| \leq C\|h^2 e^{\varphi/h} f\|^2_{L^2(Q)} + C\|h^{\frac{1}{2}} e^{\varphi/h} u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)}.$$

Pour le deuxième terme, avec des intégrations par parties en x, nous avons

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_Q e^{2\varphi/h} h^3 \chi |\nabla_x u|^2 \, dt\, dx + \mathrm{Re} \iint_Q h^3 \nabla_x (e^{2\varphi/h} \chi) \overline{u} \nabla_x u \, dt\, dx \\ &\geq \|h^{\frac{3}{2}} e^{\varphi/h} \nabla_x u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega_1)} - \frac{1}{2} \iint_Q h^3 \Delta (e^{2\varphi/h} \chi) |u|^2 \, dt\, dx, \end{aligned}$$

ainsi que $\left| \iint_Q h^3 \Delta(e^{2\varphi/h}\chi)|u|^2 \, dt\, dx \right| \leq C\|h^{\frac{1}{2}} e^{\varphi/h} u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)}$. Les estimations précédentes et (7.5) donnent ainsi

$$\|h^{\frac{3}{2}} e^{\varphi/h} \nabla_x u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega_1)} \leq C\|h^2 e^{\varphi/h} Pu\|^2_{L^2(Q)} + C\|h^{\frac{1}{2}} e^{\varphi/h} u\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)},$$

ce qui conclut la démonstration. ∎

7.4 Inégalité d'observabilité et contrôlabilité. Il est maintenant simple de déduire une inégalité d'observabilité pour le système adjoint

$$\begin{cases} -\partial_t q - \Delta q = 0 & \text{dans } Q, \\ q = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ q(T) = q_T & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

On notera que l'inégalité du théorème 7.7 s'applique aussi à l'opérateur adjoint $-\partial_t - \Delta$. Avec la décroissance parabolique de l'énergie, on obtient $\frac{1}{2}T\|q(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|q\|^2_{L^2((T/4,3T/4)\times\Omega)}$. On a aussi $Ce^{-C'/(\varepsilon T^2)}\|q\|^2_{L^2((T/4,3T/4)\times\Omega)} \leq \|h^{\frac{1}{2}}e^{\varphi/h}q\|^2_{L^2((T/4,3T/4)\times\Omega)}$ car sur l'intervalle $[T/4, 3T/4]$ on a $0 < CT^2 \leq t(T-t) \leq C'T^2$ (on note qu'ici φ a été choisie négative ce qui explique la restriction à l'intervalle $[T/4, 3T/4]$ pour cette estimation). Alors pour $(T + T^2)\varepsilon = \delta_4$, l'inégalité de Carleman donne ainsi

$$\|q(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{T} e^{C/(\varepsilon T^2)}\|q\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)} \leq e^{C+C'/T}\|q\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)}.$$

De cette inégalité d'observabilité, on peut aussi déduire la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur. On note qu'ici nous avons une expression de la constante d'observabilité qui dépend du temps de contrôle T. Naturellement, on voit que cette constante explose quand T tend vers 0.

Remarque 7.8. Les inégalités de Carleman paraboliques permettent de traiter le contrôle d'équations paraboliques plus générales. Des termes d'ordre 0 ou 1, réels ou complexes, dépendant du temps peuvent être introduits. De plus, par linéarisation et par point fixe, on peut aborder la question du contrôle d'équations paraboliques semi-linéaires pour certaines formes de non-linéarités. Pour ces questions nous renvoyons à [Bar00, FCZ00, DFCGBZ02]. C'est précisément une connaissance fine de la constante d'observabilité, obtenue grâce aux inégalités de Carleman paraboliques qui permet de traiter ces cas non linéaires. En particulier, les puissances du paramètre semi-classique h dans l'inégalité de Carleman globale du théorème 7.7 jouent un rôle important pour ces questions. La question de l'optimalité de ces puissances se pose alors. Comme dans le cas elliptique nous montrons dans la proposition suivante que ces puissances sont optimales.

Proposition 7.9. *Soient V un ouvert de Ω et $\varphi(x)$ définie sur un voisinage de $\overline{V}$, $\delta > 0$ et $C > 0$ tels que l'on ait pour un $\alpha \leq \frac{1}{2}$,*

$$\|h^\alpha e^{\varphi/h}u\|_{L^2(Q)} \leq C\|h^2 e^{\varphi/h}Pu\|_{L^2(Q)}, \tag{7.6}$$

pour $u \in \mathscr{C}^\infty([0,T]\times\Omega)$, avec $u(t) \in \mathscr{C}^\infty_c(V)$ pour tout $t \in [0,T]$, et $0 < (T+T^2)\varepsilon \leq \delta$. Alors $\alpha = \frac{1}{2}$ et la fonction poids φ satisfait

$$|\varphi'(x)| \neq 0, \quad x \in \overline{V},$$
$$q_2|_{\varepsilon=0} = 0 \ \text{ et } \ q_1|_{\varepsilon=0} = 0 \Rightarrow \{q_2|_{\varepsilon=0}, q_1|_{\varepsilon=0}\} > 0, \quad x \in \overline{V},\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

A. Quelques résultats supplémentaires et preuves de résultats intermédiaires

A.1. Preuve de l'inégalité de Gårding. Le symbole $a(x,\xi,h)$ est de la forme $a(x,\xi,h) = a_m(x,\xi,h) + ha_{m-1}(x,\xi,h)$, avec $a_{m-1} \in S^{m-1}$. Ainsi, pour h suffisamment petit, disons $h < h_1$, le symbole complet $a(x,\xi,h)$ satisfait

$$\operatorname{Re} a(x,\xi,h) \geq C''\langle\xi\rangle^m, \qquad x \in K,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ h \in (0,h_1),$$

avec $C' < C'' < C$. Soit U un voisinage de K tel que l'inégalité précédent reste vraie pour $(x,\xi) \in U \times \mathbb{R}^n$ avec la constante C'' remplacée par C''' vérifiant $C' < C''' < C'' < C$. Soit $\chi(x) \in \mathscr{C}^\infty_c(U)$ tel que $0 \leq \chi \leq 1$ et $\chi = 1$ dans un voisinage de K. Nous posons alors $\tilde{a}(x,\xi,h) = \chi(x)a(x,\xi,h) + C'''(1-\chi)(x)\langle\xi\rangle^m$ qui vérifie

$$\tilde{a} \in S^m \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}\tilde{a}(x,\xi,h) \geq C'''\langle\xi\rangle^m, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ h \in (0,h_1), \tag{A.1}$$

On note par ailleurs que $(\mathrm{Op}(\tilde{a})u, u) = (\mathrm{Op}(a)u, u)$ si $\mathrm{supp}(u) \subset K$. Sans perte de généralité, nous pouvons donc supposer que le symbole a satisfait (A.1) dans le reste de la preuve.

On choisit alors $L > 0$ tel que $C' < L < C'''$ et on pose

$$b(x,\xi,h) := \left(\operatorname{Re} a(x,\xi,h) - L\langle\xi\rangle^m\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{et } B = \operatorname{Op}(b).$$

Le calcul symbolique donne alors $B^* \circ B = \operatorname{Re}\operatorname{Op}(a) - L\Lambda^m + hR$, avec $R \in \Psi^{m-1}$, où $\operatorname{Re}\operatorname{Op}(a)$ signifie $(\operatorname{Op}(a) + \operatorname{Op}(a)^*)/2$. Alors on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\operatorname{Op}(a)u, u) = (\operatorname{Re}\operatorname{Op}(a)u, u) \geq L(\Lambda^m u, u) - h(Ru, u) &\geq L\|\Lambda^{m/2}u\|_0^2 - hL'\|u\|_{(m-1)/2}^2 \\ &\geq (L - hL')\|u\|_{m/2}^2.\end{aligned}$$

On conclut en prenant h suffisamment petit. ∎

A.2 Exemple de fonctions satisfaisant la condition de sous-ellipticité : preuve du lemme 3.3. Nous allons ici montrer le lemme plus fort suivant

Lemme A.1. *Soient V un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $|\psi'| > 0$ sur $\overline{V}$. Alors pour $\lambda > 0$ suffisamment grand, $\varphi = e^{\lambda\psi}$ satisfait $|\varphi'| \geq C > 0$ sur $\overline{V}$ et*

$$\forall (x,\xi) \in \overline{V} \times \mathbb{R}^n, \quad q_2(x,\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \{q_2, q_1\}(x,\xi) \geq C > 0. \tag{A.2}$$

La propriété (A.2) est plus forte que celle de l'hypothèse 3.1. Elle est utile dans certaines situations, en particulier pour des inégalités de Carleman pour des opérateurs paraboliques tels que $\partial_t - \Delta$ comme on peut le voir dans la section 7.1.

Preuve. Le calcul du crochet de Poisson $\{q_2, q_1\} = \sum_j \partial_{\xi_j} q_2 \partial_{x_j} q_1 - \partial_{x_j} q_2 \partial_{\xi_j} q_1$ donne

$$\{q_2, q_1\} = 4 \sum_{1 \leq j,k \leq n} \varphi''_{j,k}(\xi_j\xi_k + \varphi'_j\varphi'_k) = 4(\varphi''(\xi,\xi) + \varphi''(\varphi',\varphi')).$$

Ici nous avons $\varphi = e^{\lambda\psi}$, d'où $\varphi' = \lambda\varphi\psi'$, et $\varphi''_{jk} = \lambda\varphi\psi''_{jk} + \lambda^2\varphi\psi'_j\psi'_k$, $j,k = 1,\ldots,n$, ce qui donne

$$\{q_2, q_1\} = 4\lambda^3\varphi^3\left(\lambda|\psi'|^4 + \psi''(\psi',\psi') + \psi''((\lambda\varphi)^{-1}\xi, (\lambda\varphi)^{-1}\xi) + \lambda^{-1}\varphi^{-2}\langle\psi',\xi\rangle^2\right).$$

Dans le cas où $q_2 = 0$ alors on obtient alors $|\xi| = \lambda\varphi|\psi'|$. On note qu'alors

$$|\psi''((\lambda\varphi)^{-1}\xi, (\lambda\varphi)^{-1}\xi)| \leq C|\psi'|^2, \qquad |\psi''(\psi',\psi')| \leq C|\psi'|^2.$$

On en déduit que

$$\{q_2, q_1\} \geq 4\lambda^3\varphi^3\left(\lambda|\psi'|^4 - C|\psi'|^2\right). \tag{A.3}$$

On voit donc que pour λ suffisamment grand on a $\{q_2, q_1\} \geq C_\lambda > 0$, puisque $|\psi'| \geq C > 0$. ∎

Remarque A.2. Dans le lemme 3.3 nous avons fait le choix d'utiliser la fonction exponentielle. Le lecteur notera que l'on peut obtenir un résultat similaire en prenant $\varphi = G(\lambda\psi)$, avec λ suffisamment grand, pour une fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie $G' > 0$, $G'' > 0$ et $G''/G' \geq C > 0$. Cette méthode est souvent appelée « convexification » de la fonction poids.

A.3 Preuve du lemme 3.4. Pour $|\xi|$ grand, la réponse est claire car $q_2 = |\xi|^2 - |\varphi'|^2$ et car le symbole $\{q_2, q_1\}$ est seulement d'ordre 2.

Il reste à montrer le résultat pour $|\xi| \leq R$, avec $R > 0$, i.e. pour (x,ξ) dans un compact (ici $x \in \overline{V}$). En fait on peut se placer dans un cadre plus général. On travaille avec deux fonctions f et g continues, définies sur un compact $\mathcal{K}$, et avec comme hypothèse $f \geq 0$ et $f(y) = 0 \Rightarrow g(y) \geq L > 0$. On pose $h_\mu = \mu f + g$.

Pour tout $y \in \mathcal{K}$, soit $f(y) = 0$ et donc $h_\mu(y) > L$, soit $f(y) > 0$ et donc il existe un $\mu_y > 0$ tel que $h_{\mu_y}(y) > 0$. Cette inégalité reste alors vraie localement dans un voisinage ouvert V_y. Du recouvrement de $\mathcal{K}$ par les ouverts V_y, on extrait un recouvrement fini $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$ et en prenant $\mu = \max_{1 \leq j \leq n} \mu_j$ on obtient $h_\mu \geq C > 0$. On applique ce résultat à $\rho/\langle\xi\rangle^4$. ∎

A.4 La méthode d'A. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov. Suivant l'approche d'A. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov [FI96], nous donnons ici une autre démonstration du théorème 3.5 du cas elliptique. Reprenant les notations de la preuve du théorème 3.5, on écrit

$$\|g + h\Delta\varphi v\|_0^2 = \|Q_2 v\|_0^2 + \|\tilde{Q}_1 v\|_0^2 + (i[Q_2, Q_1]v, v) + 2\operatorname{Re}(Q_2 v, h\Delta\varphi v),$$

où $\tilde{Q}_1 = Q_1 - ih\Delta\varphi$ et on obtient $\|g + h\Delta\varphi v\|_0^2 = \|Q_2 v\|_0^2 + \|\tilde{Q}_1 v\|_0^2 + h\operatorname{Re}(Rv, v)$, où $\rho = \sigma(R) = (\{q_2, q_1\} + 2q_2\Delta\varphi)$. On a le lemme suivant.

Lemme A.3. *Si $\varphi = e^{\lambda\psi}$, alors pour $\lambda > 0$ suffisamment grand, il existe $C_\lambda > 0$ tel que*

$$\rho = \{q_2, q_1\} + 2q_2\Delta\varphi \geq C_\lambda\langle\xi\rangle^2, \quad x \in \overline{V},\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Par l'inégalité de Gårding, on conclut alors $\operatorname{Re}(Rv, v) \geq C'\|v\|_1^2$, pour $0 < C' < C_\lambda$ et h pris suffisamment petit. L'inégalité de Carleman s'en suit sans avoir recours au deux carrés $\|Q_2 v\|_0^2$ et $\|\tilde{Q}_1 v\|_0^2$. En effet on écrit

$$\|g + h\Delta\varphi v\|_0^2 \leq 2\|g\|_0^2 + 2h^2\|\Delta\varphi v\|_0^2,$$

et le second terme du membre de droite peut être « absorbé » par $h\|v\|_1^2$ pour h suffisamment petit. ■

Preuve du lemme A.3. Nous avons vu plus haut, dans la section A.2,

$$\{q_2, q_1\} = 4\lambda^3\varphi^3\left(\lambda|\psi'|^4 + \psi''(\psi', \psi') + \psi''((\lambda\varphi)^{-1}\xi, (\lambda\varphi)^{-1}\xi) + \lambda^{-1}\varphi^{-2}\langle\psi', \xi\rangle^2\right).$$

On constate que $2q_2\Delta\varphi = 2\left(|\xi|^2 - \lambda^2|\psi'|^2\varphi^2\right)\left(\lambda^2|\psi'|^2\varphi + \lambda(\Delta\psi)\varphi\right)$, d'où

$$\begin{aligned}\rho = \lambda^3\varphi^3\Big(&4\psi''((\lambda\varphi)^{-1}\xi, (\lambda\varphi)^{-1}\xi) + 2(\lambda|\psi'|^2 + \Delta\psi)\left|\frac{\xi}{\lambda\varphi}\right|^2 + \lambda^{-1}\varphi^{-2}\langle\psi', \xi\rangle^2 \\ &+ 2\lambda|\psi'|^4 + 4\psi''(\psi', \psi') - |\psi'|^2\Delta\psi\Big),\end{aligned}$$

que l'on peut effectivement rendre plus grand que $C_\lambda\langle\xi\rangle^2$, avec $C_\lambda > 0$ pour λ suffisamment grand. ■

Remarque A.4. La méthode d'A. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov, au niveau des symboles des opérateurs, revient donc à ajouter au symbole du commutateur $\frac{i}{h}[Q_2, Q_1]$ un terme de la forme $\mu q_2\Delta\varphi$. Comme le signe de $q_2\Delta\varphi$ n'est pas fixé, un choix précis de la valeur de μ s'impose.

Remarque A.5. La condition (A.2) est plus forte que la condition de l'hypothèse 3.1, i.e.,

$$p_\varphi(x, \xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \{q_2, q_1\}(x, \xi) \geq C > 0.$$

Enfin la condition d'A. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov, i.e., $\{q_2, q_1\} + 2q_2\Delta\varphi \geq C\langle\xi\rangle^2$ est elle-même plus forte que (A.2). Les différentes conditions que nous imposons sur la fonction poids φ sont suffisantes pour l'obtention d'une inégalité de Carleman. Nous rappelons que la condition la plus faible que nous avons énoncée, celle l'hypothèse 3.1, est en fait nécessaire : voir la proposition 3.9 et sa démonstration dans la section A.6.

A.5 Estimations dans la zone elliptique et près de la variété caractéristique : preuve de la proposition 3.8. Soit $w_1 = \operatorname{Op}(\chi_1)v$. On note que $\operatorname{supp}(w_1) \subset V$ par l'hypothèse de support faite sur le symbole χ_1. Alors $P_\varphi w_1 = g_1 = \operatorname{Op}(\chi_1)g + [P_\varphi, \operatorname{Op}(\chi_1)]v$, où $g = P_\varphi v$. Le commutateur est dans $h\Psi^1$ et ainsi

$$\|g_1\|_0 \leq C\left(\|g\|_0 + h\|v\|_1\right). \tag{A.4}$$

Soit $\chi \in S^0$ tel que $\chi = 1$ dans un voisinage de $\operatorname{supp}(\chi_1)$ et $\chi = 0$ dans un voisinage de $\mathscr{Z}$. Par l'ellipticité de P_φ sur $\operatorname{supp}(\chi)$, pour $M \in \mathbb{N}$ grand, il existe un OψD $E_M = \operatorname{Op}(e)$, $e \in S^{-2}$, de la forme $e = \sum_{j=0}^M h^j e_j$, avec $e_j \in S^{2-j}$ et $e_0 = \chi/p_\varphi$, qui réalise une paramétrix pour P_φ (voir [Hör85b, Mar02])

$$E_M \circ P_\varphi = \operatorname{Op}(\chi) + h^{M+1}R_M, \quad R_M \in \Psi^{-1-M}.$$

On obtient alors $w_1 = E_M g_1 + \tilde{g}_1$, avec $\tilde{g}_1 = (\mathrm{Id} - \mathrm{Op}(\chi))w_1 - h^{M+1} R_M w_1$. Comme $\mathrm{supp}(1-\chi) \cap \mathrm{supp}(\chi_1) = \emptyset$, et $w_1 = \mathrm{Op}(\chi_1)v$, par la calcul des O$\psi$D (voir théorème 2.8) , on trouve

$$\|\tilde{g}_1\|_2 \leq Ch\|v\|_1. \tag{A.5}$$

Par (A.4) et (A.5) on obtient ainsi le premier résultat de la proposition :

$$\|w_1\|_2 \leq C\left(\|g_1\|_0 + h\|v\|_1\right) \leq C'\left(\|g\|_0 + h\|v\|_1\right).$$

Pour la deuxième partie nous introduisons $w_2 = \mathrm{Op}(\chi_2)v$. On a alors $P_\varphi w_2 = g_2 = \mathrm{Op}(\chi_2)g + [P_\varphi, \mathrm{Op}(\chi_2)]v$ et $\|g_2\|_0 \leq C\left(\|g\|_0 + h\|v\|_1\right)$. La preuve de l'inégalité de Carleman donne alors (voir (3.3)) $h\|w_2\|_2^2 \leq C\left(\|g\|_0^2 + h^2\|v\|_1^2\right)$.

Soit $\tilde{\chi}_2 \in S^0$ à support compact tel que $\tilde{\chi}_2 = 1$ dans un voisinage de $\mathrm{supp}(\chi_2)$. Alors le calcul symbolique du théorème 2.8 donne

$$w_2 = \mathrm{Op}(1-\tilde{\chi}_2)w_2 + \mathrm{Op}(\tilde{\chi}_2)w_2 = \underbrace{\mathrm{Op}(1-\tilde{\chi}_2)\mathrm{Op}(\chi_2)}_{\in h^N \Psi^{-N}} v + \mathrm{Op}(\tilde{\chi}_2)w_2, \quad N \in \mathbb{N},$$

d'où, pour tous $N \in \mathbb{N}$, et $r, r' \in \mathbb{R}$ on obtient

$$\|w_2\|_s = \|\Lambda^s w_2\|_0 \leq C_{N,r,s} h^N \|v\|_r + \|\underbrace{\Lambda^s \mathrm{Op}(\tilde{\chi}_2)}_{\in \Psi^{r'}} w_2\|_0 \leq C_{N,r,s} h^N \|v\|_r + C'_{r',s}\|w_2\|_{r'}.$$

Nous obtenons ainsi $\|w_2\|_s \leq C_s h\|v\|_1 + C'_s\|w_2\|_2$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, ce qui donne le résultat. ∎

A.6 Condition de sous-ellipticité et optimalité de la puissance du paramètre semi-classique dans l'inégalité de Carleman : preuve de la proposition 3.9. La démonstration que nous donnons est adaptée de celle du théorème 8.1.1 dans [Hör63]. Le lecteur se référera à cette preuve pour le traitement d'opérateurs plus généraux. Ici, le symbole du laplacien ne dépendant pas de x, la preuve s'en trouve simplifiée.

Soit $x_0 \in V$ et soit $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $p_\varphi(x_0, \xi_0) = 0$ (un tel ξ_0 existe toujours). On note que l'on peut se ramener au cas où $x_0 = 0$ et $\varphi(x_0) = 0$. On pose $\zeta_0 = \xi_0 + i\varphi'(x_0)$. Alors $\sum_j \zeta_{0,j}^2 = 0$. Soit $w(x) = \langle x, \zeta_0\rangle$. Nous avons

$$\varphi(x) - \mathrm{Im}(w(x)) = A(x) + o(|x|^2), \qquad \text{avec } A(x) = \frac{1}{2}\sum_{j,k} \varphi''_{jk}(x_0)x_j x_k.$$

Soit $\phi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\phi(0) \neq 0$. Nous posons alors $u_h = e^{iw(x)/h}\phi(x/h^{\frac{1}{2}})$ et nous avons

$$h^2 P u_h = e^{iw/h}\left(-h(\Delta\phi)(x/h^{\frac{1}{2}}) - ih\Delta w(x)\phi(x/h^{\frac{1}{2}}) + \left(\textstyle\sum_j (\partial_{x_j} w(x))^2\right)\phi(x/h^{\frac{1}{2}}) - 2ih^{\frac{1}{2}}\langle \nabla_x w(x), \phi'(x/h^{\frac{1}{2}})\rangle\right). \tag{A.6}$$

On note que $\sum_j (\partial_{x_j} w(x))^2 = 0$. On constate alors que l'on a

$$\|h^2 e^{\varphi/h} P u_h\|_0^2 = h^{n/2}\int e^{\frac{2}{h}\left(A(h^{\frac{1}{2}}x) + o(|h^{\frac{1}{2}}x|^2)\right)}\left|-h\Delta\phi(x) - ih(\Delta w)(h^{\frac{1}{2}}x)\phi(x) - 2ih^{\frac{1}{2}}\langle(\nabla w)(h^{\frac{1}{2}}x), \phi'(x)\rangle\right|^2\, dx,$$

après le changement de variables $x \to x/h^{\frac{1}{2}}$. A la limite $h \to 0$, par convergence dominée, on obtient

$$\|h^2 e^{\varphi/h} P u_h\|_0^2 \sim 4h^{(n/2+1)}\int e^{2A(x)}|\langle \zeta_0, \phi'(x)\rangle|^2\, dx.$$

De même on a $h^{2\alpha}\|e^{\varphi/h}u_h\|_0^2 \sim h^{(n/2+2\alpha)}\int e^{2A(x)}|\phi(x)|^2\, dx$. De l'inégalité (3.7) nous concluons que nécessairement $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\langle \zeta_0, \phi'(x)\rangle \not\equiv 0$. En particulier $\varphi'(x_0) \neq 0$ car sinon $\zeta_0 = 0$.

Si nous notons K la constante C dans (3.7), avec $\alpha = \frac{1}{2}$, le passage à la limite $h \to 0$ donne

$$\int e^{2A(x)}|\phi(x)|^2\, dx \leq K\int e^{2A(x)}|\langle \zeta_0, \phi(x)'\rangle|^2\, dx,$$

pour tout $\phi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Le lemme 8.1.3 dans [Hör63] donne alors $\sum_{j,k} \varphi''_{jk}\, \zeta_{0,j}\, \overline{\zeta_{0,k}} \geq \frac{1}{2K}$. On pose $\zeta = \xi + i\varphi'(x)$. Le calcul fait dans la section A.2 donne $\{q_2, q_1\} = 4\varphi''(\zeta, \zeta) = 4\sum_{j,k} \varphi''_{j,k}\, \zeta_j\, \overline{\zeta_k}$. Ainsi pour tout $x \in V$ nous avons

$$\xi \in \mathbb{R}^n \text{ et } p_\varphi(x, \xi) = 0 \ \Rightarrow\ \{q_2, q_1\}(x, \xi) \geq \frac{2}{K}. \tag{A.7}$$

Soit maintenant $(y, \eta) \in \partial V \times \mathbb{R}^n$ tel que $p_\varphi(y, \eta) = 0$. Considérons tout d'abord $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}^*} \subset V$ qui converge vers y et $(\xi^{(k)})_{k\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^n$ telles que $p_\varphi(x^{(k)}, \xi^{(k)}) = 0$. Nous posons $\zeta^{(k)} = \xi^{(k)} + i\varphi'(x^{(k)})$. En particulier $|\xi^{(k)}| = |\varphi'(x^{(k)})|$ et donc la suite $(\xi^{(k)})_k$ est bornée. Elle converge à une sous-suite près vers un certain $\xi \in \mathbb{R}^n$ et ainsi $p_\varphi(y, \xi) = 0$. En particulier $|\xi| = |\varphi'(y)|$. Nous avons vu que $\{q_2, q_1\}(x^{(k)}, \xi^{(k)}) = 4\sum_{i,j} \varphi''_{i,j}(x^{(k)})\, \zeta_i^{(k)}\, \overline{\zeta_j^{(k)}} \geq \frac{2}{K}$. Si $\zeta = \xi + i\varphi'(y)$ nous obtenons ainsi $\{q_2, q_1\}(y, \xi) = 4\sum_{i,j} \varphi''_{i,j}(y)\, \zeta_i\, \overline{\zeta_j} \geq \frac{2}{K}$. Cela exclut $\zeta = 0$. Comme $|\xi| = |\varphi'(y)|$ nous trouvons $\varphi'(y) \neq 0$.

La varieté caractéristique sur $\overline{V}$ est donnée par $\mathscr{Z} = \tilde{\mathscr{Z}} \cap (\overline{V} \times \mathbb{R}^n)$ avec

$$\tilde{\mathscr{Z}} = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n;\ f_1(x, \xi) = |\xi|^2 - |\varphi'(x)|^2 = 0, \text{ et } f_2(x, \xi) = \langle \xi, \varphi'(x)\rangle = 0\}.$$

Comme $\varphi'(y) \neq 0$ et $\eta \neq 0$ est orthogonal à $\varphi'(y)$, on voit alors que les différentielles partielles $d_\xi f_1$ et $d_\xi f_2$ forment un système de rang 2 en (y, η). Quitte à réordonner les variables, par le théorème des fonctions implicites, cela signifie que pour voisinage U_1 de (y, η) et un voisinage U_2 de $(y, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2})$ nous avons

$$(x, \xi) \in \tilde{\mathscr{Z}} \cap U_1 \ \Leftrightarrow\ (x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-2}) \in U_2 \text{ et } (\xi_{n-1}, \xi_n) = g(x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-2}),$$

avec g une fonction régulière. Prenons une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}^*} \subset V$ qui converge vers y. Pour k suffisamment grand, $k \geq N_0$, nous avons $(x^{(k)}, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in U_2$ et si nous posons $\xi^{(k)} = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-2}, g(x^{(k)}, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}))$ alors $(x^{(k)}, \xi^{(k)})$ est dans $\mathscr{Z}$ et converge vers (y, η). Nous avons $\{q_2, q_1\}(x^{(k)}, \xi^{(k)}) \geq 2/K$ pour tout $k \geq N_0$ par la première partie de la preuve. On obtient alors $\{q_2, q_1\}(y, \eta) \geq 2/K$ par passage à la limite. ■

Remarque A.6. Dans la démonstration précédente nous avons choisit une fonction test u_h qui est localisée autour de x_0 en espace, à travers le terme $\phi(x/h^{\frac{1}{2}})$, et autour de ζ_0 en fréquence, à travers le terme $e^{i\langle x, \zeta_0\rangle/h}$, pour la transformée de Fourier semi-classique. Cette microlocalisation montre bien que la puissance non nulle du paramètre h à gauche dans l'inégalité de Carleman provient du comportement du symbole au niveau de la variété caractéristique $\mathscr{Z}$ comme déjà souligné par la proposition 3.8. On notera bien que la mise à l'échelle $x/h^{\frac{1}{2}}$ dans $\phi(x/h^{\frac{1}{2}})$ permet de maîtriser les variations de $A(x)/h$ dans le support de u_h.

A.7 Estimation du noyau de la chaleur Soit $p_t(x, y)$ le noyau de la chaleur sur Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ avec des conditions de Dirichlet homogènes au bord.

Lemme A.7. *Pour tous $x, y \in \Omega$ on a $p_t(x, y) \leq (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$ si $t > 0$.*

Preuve. Le noyau de la chaleur dans $\mathbb{R}^n$ est donné par $p_{0,t}(x, y) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$ si $t > 0$. Considérons $y_0 \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ tel que $y_0 \geq 0$. Nous notons aussi y_0 son extension par zéro sur $\mathbb{R}^n$. Nous considérons les problèmes paraboliques suivants :

$$\begin{cases} \partial_t y - \Delta y = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ y|_{t=0} = y_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_t z - \Delta z = 0 & \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^n, \\ z|_{t=0} = y_0 & \text{dans } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Pour $t > 0$, les solutions z et y sont des fonctions régulières données par $y(t, x) = \langle p_t(x, .), y_0(.)\rangle$ et $z(t, x) = \langle p_{0,t}(x, .), y_0(.)\rangle$. En particulier $z(t, x) \geq 0$ si $x \in \partial\Omega$. Ainsi $z - y \geq 0$ sur $(0, T) \times \partial\Omega$. La différence des solutions vérifie donc un problème parabolique de la forme

$$\begin{cases} \partial_t(z - y) - \Delta(z - y) = 0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ z - y \geq 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ (z - y)|_{t=0} = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Le principe du maximum donne $z - y \geq 0$ dans $(0, T) \times \Omega$ (voir e.g. [Bre83, théorème X.6]). Ainsi, si $y_0 \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ avec $y_0 \geq 0$, on a $\langle p_{0,t}(x, .), y_0(.)\rangle \geq \langle p_t(x, .), y_0(.)\rangle$ pour $t > 0$. Cela donne le résultat recherché. ■

Lemme A.8. *Soit* $p_{0,t}(x, y) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$ *le noyau de la chaleur dans* $\mathbb{R}^n$ *et soient* $y \in \Omega$ *et* V_y *un voisinage de* y *tel que* $\overline{V}_y \subset \Omega$*. Il existe* C *and* $C' > 0$ *telles que*

$$|p_t(x, y) - p_{0,t}(x, y)| \leq Cte^{-C'/t}, \quad x \in \overline{V}_y,\ t > 0.$$

Preuve. Soit $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que $\chi = 1$ près de $\overline{V}_y$. Nous introduisons $v(t, x) = p_t(x, y) - \chi(x)p_{0,t}(x, y)$ et vérifions que $v|_{t=0} = 0$ et $v|_{(0,+\infty)\times\partial\Omega} = 0$ et que v satisfait l'équation parabolique $(\partial_t - \Delta)v = w$ avec

$$w(t, x) = p_{0,t}(x, y)\Big(\Delta\chi(x) - \frac{1}{t}(\nabla\chi(x), x - y)\Big).$$

On observe que $|x - y| \geq d > 0$ dans $\mathrm{supp}(\chi')$ et ainsi $\tilde{w}(t, x) = e^{\frac{d^2}{4t}} w(t, x) \in \mathscr{C}^\infty([0, +\infty[\times\Omega)$ et de plus $\|\tilde{w}\|_{L^\infty([0,+\infty[\times\Omega)} < \infty$. La formule de Duhamel donne $v(t, x) = \int_0^t S(t - s)w(s)ds$, où $S(t)$ est le semi-groupe de la chaleur ou encore $v(t) = \int_0^t e^{-\frac{d^2}{4s}} S(t - s)\tilde{w}(s)ds$, et nous trouvons

$$\|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq e^{-\frac{d^2}{4t}} \int_0^t \|S(t - s)\tilde{w}(s)\|_{L^\infty(\Omega)}ds \leq te^{-\frac{d^2}{4t}} \|\tilde{w}(s)\|_{L^\infty([0,+\infty[\times\Omega)}, \quad t > 0,$$

par le principe du maximum [Bre83, théorème X.3]. La conclusions suit dans $\overline{V}_y$ où $\chi = 1$. ■

Le lecteur notera que pour le noyau de la chaleur sur une variété riemannienne, avec ou sans bord, on peut obtenir le développement asymptotique en temps court suivant sur la diagonale, pour tout $N \in \mathbb{N}$ (voir par exemple l'équivalent (13.59) ainsi que (13.39) et (13.40) dans [Tay96, chapitre 7.13])

$$P_t(y, y) = t^{-n/2} \left(C_0(y) + t\, C_1(y) + \cdots + C_N(y)t^N + O(t^{N+1})\right), \quad t \to 0.$$

Dans le cas que nous considérons, la métrique étant plate, un tel développement est alors simplifié comme le montre le lemme précédent.

A.8 Preuve du lemme 7.2. La preuve du lemme 7.2 est proche de celle du lemme 3.4. Il suffit ici aussi de montrer le résultat pour (x, ξ) dans un compact $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Nous prenons tout d'abord $\varepsilon = 0$. On a $q_2|_{\varepsilon=0} = |\xi|^2 - |\varphi'|^2$. Pour μ suffisamment grand on a

$$\mu q_2^2|_{\varepsilon=0} + \{q_2|_{\varepsilon=0}, b\} \geq C\langle\xi\rangle^4, \quad (x, \xi) \in \mathcal{K},$$

comme vu dans la preuve du lemme A.1 (page 21). Enfin, puisque (x, ξ) est dans un compact, cette inégalité reste vraie, avec une constante C différente, pour $\varepsilon|\theta'| > 0$ petit. Comme $|\theta'(t)| \leq T$, cela conclut la démonstration. ■

A.9 Preuve de la proposition 7.9 La preuve est proche de celle de la proposition 3.9. Soit $x_0 \in V$ et soit $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $q_2|_{\varepsilon=0} = 0$ et $q_1|_{\varepsilon=0} = 0$ (un tel ξ_0 existe toujours). On pose $\zeta_0 = \xi_0 + i\varphi'(x_0)$. On a $\sum_j \zeta_{0,j}^2 = 0$. On note que l'on peut se ramener au cas où $x_0 = 0$. Soit $w(x) = i\varphi(x_0) + \langle x, \zeta_0\rangle$ et nous avons

$$\varphi(x) - \mathrm{Im}(w(x)) = A(x) + o(|x|^2), \qquad \text{avec } A(x) = \sum_{j,k} \varphi''_{jk}(x_0)x_j x_k.$$

Soit $\gamma \in (0, T/2)$ et $t_0 \in (\gamma, T - \gamma)$ et soit $\phi \in \mathscr{C}_c^\infty((\gamma, T - \gamma) \times \mathbb{R}^n)$ telle que $\phi(t_0, 0) \neq 0$. Nous posons alors $u_\varepsilon = e^{iw(x)/(\varepsilon\theta)}\phi(t, x/\varepsilon^{\frac{1}{2}})$. On rappelle que $\theta = t(T - t)$ et $h = \varepsilon\theta$. Nous avons

$$\partial_t u_\varepsilon = \left(-i\varepsilon^{-1} w(x)\theta'\theta^{-2}\phi(t, x/\varepsilon^{\frac{1}{2}}) + \partial_t\phi(t, x/\varepsilon^{\frac{1}{2}})\right) e^{iw(x)/(\varepsilon\theta)}.$$

En se servant du calcul fait dans le cas elliptique (voir (A.6)), nous obtenons

$$h^2 Pu_\varepsilon = e^{iw/h}\theta^2 \Big(-i\varepsilon w(x)\theta'\theta^{-2}\phi(t,x/\varepsilon^{\frac12}) + \varepsilon^2\partial_t\phi(t,x/\varepsilon^{\frac12}) - \varepsilon(\Delta\phi)(x/\varepsilon^{\frac12}) - i\varepsilon\theta^{-1}\Delta w(x)\phi(x/\varepsilon^{\frac12}) \\ -2i\varepsilon^{\frac12}\theta^{-1}\langle\nabla w(x), \phi'_x(x/\varepsilon^{\frac12})\rangle\Big).$$

Après le changement de variables $x \to x/\varepsilon^{\frac12}$, on obtient, pour $\varepsilon \to 0$,

$$\|h^2 e^{\varphi/h} Pu_\varepsilon\|_0^2 \sim 4\varepsilon^{n/2+1} \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} e^{2A(x)/\theta}\theta^2 |\langle\zeta_0, \phi'_x(t,x)\rangle|^2 \, dt\, dx.$$

Comme nous avons $\|h^\alpha e^{\varphi/h}u_\varepsilon\|_0^2 \sim \varepsilon^{(n/2+2\alpha)} \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} e^{2A(x)/\theta}\theta^{2\alpha}|\phi(t,x)|^2 \, dt\, dx$ l'inégalité (7.6) donne $\alpha = \frac12$ et $\zeta_0 \neq 0$, d'où $\varphi'(x_0) \neq 0$. Nous avons obtenu

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} e^{2A(x)/\theta}\theta|\phi(t,x)|^2 \, dt\, dx \le C \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} e^{2A(x)/\theta}\theta^2 |\langle\zeta_0, \phi'_x(t,x)\rangle|^2 \, dt\, dx,$$

pour tout $\phi \in \mathscr{C}_c^\infty((\gamma, T-\gamma)\times\mathbb{R}^n)$. Nous prenons ϕ de la forme $\phi(t,x) = \eta^{-\frac12}\phi_1((t-t_0)/\eta)\phi_2(x)$ avec $\phi_1 \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, $\int|\phi_1|^2 = 1$, et $\phi_2 \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\eta > 0$ suffisamment petit. En laissant η tendre vers 0 nous trouvons

$$\int e^{2A(x)/\theta(t_0)}\theta(t_0)|\phi_2(x)|^2 \, dx \le C \int e^{2A(x)/\theta(t_0)}\theta^2(t_0)|\langle\zeta_0, \phi'_2(x)\rangle|^2 \, dx,$$

ce qui permet de conclure comme dans la démonstration de la proposition 3.9.

RÉFÉRENCES

[AE84] J.-P. Aubin et I. Ekeland. *Applied Non Linear Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1984.

[AG91] S. Alinhac et P. Gérard. *Opérateurs Pseudo-Différentiels et Théorème de Nash-Moser*. Editions du CNRS, 1991.

[Agm65] S. Agmon. *Lectures on Elliptic Boundary Values Problems*. Van Nostrand, 1965.

[Bar00] V. Barbu. Exact controllability of the superlinear heat equation. *Appl. Math. Optim.*, 42, 73–89, 2000.

[Bre83] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle*. Masson, Paris, 1983.

[Car39] T. Carleman. Sur une problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 26B(17), 1–9, 1939.

[DFCGBZ02] A. Doubova, E. Fernandez-Cara, M. Gonzales-Burgos et E. Zuazua. On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient. *SIAM J. Control Optim.*, 41, 798–819, 2002.

[DS99] M. Dimassi et J. Sjöstrand. *Spectral Asymptotics in the Semi-classical Limit*, volume 268 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[FCZ00] E. Fernández-Cara et E. Zuazua. Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations. *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse non lin.*, 17, 583–616, 2000.

[FI96] A. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov. *Controllability of evolution equations*, volume 34. Seoul National University, Korea, 1996. Lecture notes.

[GS94] A. Grigis et J. Sjöstrand. *Microlocal Analysis for Differential Operators*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Hör63] L. Hörmander. *Linear Partial Differential Operators*. Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[Hör85a] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, volume IV. Springer-Verlag, 1985.

[Hör85b] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, volume III. Springer-Verlag, 1985. Second printing 1994.

[Hör90] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, volume I. Springer-Verlag, second edition, 1990.

[JL99] D. Jerison et G. Lebeau. *Harmonic analysis and partial differential equations (Chicago, IL, 1996)*, chapter Nodal sets of sums of eigenfunctions, pages 223–239. Chicago Lectures in Mathematics. The University of Chicago Press, Chicago, 1999.

[Leb05] G. Lebeau. Cours sur les inégalités de Carleman. Mastère « Equations aux Dérivées Partielles et Applications », Faculté des Sciences de Tunis, Tunisie, février 2005.

[LR] J. Le Rousseau et L. Robbiano. Carleman estimate for parabolic operators with coefficients with jumps at an interface in arbitrary dimension. *En rédaction*.

[LR95] G. Lebeau et L. Robbiano. Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Comm. Partial Differential Equations*, 20, 335–356, 1995.

[LZ98] G. Lebeau et E. Zuazua. Null-controllability of a system of linear thermoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 141, 297–329, 1998.

[Mar02] A. Martinez. *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*. Springer-Verlag, 2002.

[Rob87] D. Robert. *Autour de l'Approximation Semi-Classique*, volume 68 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987.

[Rob95] L. Robbiano. Fonction de coût et contrôle des solutions des équations hyperboliques. *Asymptotic Anal.*, 10, 95–115, 1995.

[Shu01] M. A. Shubin. *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, second edition, 2001.

[Tay81] M. E. Taylor. *Pseudodifferential Operators*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1981.

[Tay96] M. E. Taylor. *Partial Differential Equations 2 : Qualitative Studies of Linear Equations*, volume 116 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New-York, 1996.

[Trè67] F. Trèves. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. Academic Press, New York, 1967.

[Zui83] C. Zuily. *Uniqueness and Non Uniqueness in the Cauchy Problem*. Birkhauser, Progress in mathematics, 1983.

J. LE ROUSSEAU. UNIVERSITÉS D'AIX-MARSEILLE, UNIVERSITÉ DE PROVENCE, LABORATOIRE D'ANALYSE TOPOLOGIE PROBABILITÉS, UMR CNRS 6632. NOUVELLE ADRESSE : UNIVERSITÉ D'ORLÉANS, LABORATOIRE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS, PHYSIQUE MATHÉMATIQUE D'ORLÉANS, CNRS UMR 6628, FÉDÉRATION DENIS POISSON, BÂTIMENT DE MATHÉMATIQUES, B.P. 6759, 45067 ORLÉANS CEDEX 2.

G. LEBEAU. UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS, LABORATOIRE JEAN DIEUDONNÉ, UMR CNRS 6621, PARC VALROSE 06108 NICE CEDEX 02