Fonction asymptotique de Samuel des sections hyperplanes et multiplicité

M. Hickel

Abstract

Let $(A, \mathfrak{m}_A, k)$ be a local noetherian ring and I an $\mathfrak{m}_A$-primary ideal. The asymptotic Samuel function (with respect to I) $\overline{v_I} : A \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is defined by $\overline{v_I}(x) = lim_{k \to +\infty} \frac{ord_I(x^k)}{k}$, $\forall x \in A$. Similary, one defines for another ideal J, $\overline{v_I}(J)$ as the minimum of $\overline{v_I}(x)$ as x varies in J. Of special interest is the rational number $\overline{v_I}(\mathfrak{m}_A)$. We study the behavior of the asymptotic Samuel function (with respect to I) when passing to hyperplanes sections of A as one does for the theory of mixed multiplicities. [1]

1 Introduction

Soient $(A, \mathfrak{m}_A, k)$ un anneau local noetherien et I un idéal $\mathfrak{m}_A$-primaire. La fonction asymptotique de Samuel (par rapport à I) est la fonction $\overline{v_I} : A \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ définie par :

$$\overline{v_I}(x) = Lim_{k \to +\infty} \frac{ord_I(x^k)}{k}$$

où $ord_I(x) = Max\{m \in \mathbb{N} / x \in I^m\}$ si $x \neq 0$ et $ord_I(0) = +\infty$. De façon similaire, on définit pour un idéal J de A le nombre $\overline{v_I}(J)$ par :

$$\overline{v_I}(J) = Min_{x \in J} \overline{v_I}(x).$$

La fonction asymptotique de Samuel prend en fait des valeurs rationnelles et peut se calculer à l'aide des *valuations de Rees* de I. Elle joue un rôle primordial dans l'étude des clôtures intégrales des puissances de I. Nous renvoyons à [H-S], [L-T], [R1] pour les résultats et les compléments essentiels concernant ces notions.

[1] 2000 *Mathematics Subject Classification ; Primary 13B22 ; Secondary 13C15, 13F25. Key words and phrases : Asymptotic Samuel function, Hyperplanes sections, Integral Closure of ideals, Multiplicity, Lojasiewicz inequalities.*

En particulier le nombre rationnel $\overline{v_I}(\mathfrak{m})$, ou son inverse $\nu_I(\mathfrak{m})=\overline{v_I}(\mathfrak{m})^{-1}$ que nous appellerons *exposant de Łojasiewicz de* I (voir § 2) joue un rôle important dans l'étude de la topologie des singularités c.f. [T1,2]. De la même manière que la notion de *multiplicité mixte* permet en particulier de rendre compte du comportement de la I-multiplicité de A après avoir intersecté celui-ci par des sections hyperplanes suffisamment génériques, nous avons cherché à établir des résultats similaires pour la I-fonction asymptotique de Samuel après sections hyperplanes génériques. Le résultat principal du présent travail est le suivant.

Théorème 1.1
Soit $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local régulier d'égale caractéristique zéro, dont on notera $n+1$ la dimension. Considérons un idéal $I \subset A$, $\mathfrak{m}$-primaire, de multiplicité $e(I)$ et d'exposant de Łojasiewicz $\nu_I(\mathfrak{m}) = \overline{v_I}(\mathfrak{m})^{-1} = \nu_I^{(n+1)}$.

1) Pour tout i, $1 \leq i \leq n$, il existe un ouvert de Zariski dense $U^{(i)} = U^{(i)}(I) \subset G_k(i, n+1)$ de la Grassmanienne des i-plans de k^{n+1} tel que $\forall H \in U^{(i)}$, H défini par l'annulation des $n+1-i$ formes linéaires

$$h_j(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sum_{0 \leq k \leq n} a_{k,j}.X_j,$$

le nombre rationnel $\overline{v_{I.A_H}}(\mathfrak{m}_H)$, où $A_H = A/(h_1, \ldots, h_{n+1-i})$ et $\mathfrak{m}_H$ est l'idéal maximal de A_H, est indépendant de $H \in U^{(i)}$. Le nombre rationnel $\nu_I^{(i)} = (\overline{v_{I.A_H}}(\mathfrak{m}_H))^{-1}$ (indépendant de $H \in U^i$) est appelé le ième exposant de Łojasiewicz de I ou encore l'exposant de Łojasiewicz de I restreint à un i-plan générique.

2) On a :

$$e(I) \leq \nu_I^{(1)} \times \nu_I^{(2)} \times \ldots . \times \nu_I^{(n)} \times \nu_I^{(n+1)}.$$

Notons que $\nu_I^{(1)} \leq \nu_I^{(2)} \leq \ldots \leq \nu_I^{(n)} \leq \nu_I^{(n+1)}$ et que $\nu_I^{(1)}$ n'est autre que $ord_{\mathfrak{m}}(I)$. Un cas important parmi les cas d'égalités dans 2) est fourni par les idéaux I tels qu'il existe des entiers $b \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_1 \leq a_2 \ldots \leq a_{n+1}$ tels que

$$\overline{I^b} = \overline{(l_1^{a_1}, l_2^{a_2}, \ldots, l_{n+1}^{a_{n+1}})},$$

où $l_1, \ldots, l_{n+1}$ est un système régulier de paramètres de A. En effet, dans ce cas $\nu_I^{(i)} = \frac{a_i}{b}$ et $b^{n+1}e(I) = \Pi_{1 \leq i \leq n+1} a_i$. Une discussion et une description plus complète des cas d'égalités de 2) est donnée plus bas (c.f 5)).
Quelques mots sur la preuve du résultat ci-dessus. Tout d'abord, il ne nous a pas paru aisé de décrire la variation des valuations de Rees de $I.A_H$ lorsque H parcourt la Grassmanienne et donc de suivre par ce biais la variation de $\overline{v_{I.A_H}}(\mathfrak{m}_H)$.

Ainsi la preuve du premier point de 1.1 procède de manière indirecte. On commence par montrer un résultat indépendant (Th 3.1) qui nous semble pouvoir présenter un interêt par lui-même. Si A est local régulier d'égale caractéristique zéro, nous montrons comment on peut calculer $\overline{v_I}(\mathfrak{m})$ à l'aide de certains polynômes caractéristiques canoniquement associés à I. Ce procédé, indépendant de la connaissance des valuations de Rees de I, fait l'objet de la section 3). Nous rappellons au préalable (section 2) quelques résultats et notions que nous utiliserons ensuite. C'est dans la preuve de 3.1 qu'interviennent les hypothèses de régularité et d'égale caractéristique zéro. On utilise ensuite l'existence de réductions jointes et des techniques de bases standards (dans le sens de Grauert-Hironaka [A-H-V], [H]) et de variations de diagrammes des exposants initiaux telles que développées par Bierstone-Milman [B-M] pour montrer que les polynômes caractéristiques en question varient de façon agréable lorsque H décrit un ouvert de Zariski convenable de la Grassmanienne. Ceci est exposé à la section 4) et permet d'obtenir le premier point de 1.1. La majoration de la multiplicité $e(I)$ est obtenue ensuite comme conséquence de cela et d'une généralisation de la loi d'associativité pour les multiplicités que l'on peut trouver dans le livre de D.G. Northcott [N] (Nous ignorons si ce résultat lui est dû). Nous décrivons ensuite certains cas d'égalité dans l'inégalité 2) à la section 5).

2 Rappels et notations

2.1 L'algorithme de division formelle de Grauert-Hironaka

Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on notera : $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. $\mathbb{N}^n$ est totalement ordonné par l'ordre lexicographique sur les $n+1$ upplets $(|\alpha|, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Si A est un anneau commutatif unitaire intègre, et f un élément non nul de $A[[X]] = A[[X_1, \ldots, X_n]]$, nous noterons par $\nu(f)$ son exposant initial. C'est à dire si :

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha . X^\alpha,\ Supp(f) = \{\alpha \in \mathbb{N}^n | a_\alpha \neq 0\},\ \nu(f) = Min\{\alpha \in \mathbb{N}^n | a_\alpha \neq 0\}.$$

De même, on notera $Init(f)$ le coefficient du monôme initial de f i.e. $Init(f) = a_{\nu(f)}$. Pour un idéal, $I \subset A[[X]]$, on notera $\triangle_I$ le diagramme des exposants initiaux de I, i.e. :

$$\triangle_I = \{\alpha \in \mathbb{N}^n | \exists g \in I \ tel\ que\ \nu(g) = \alpha\}.$$

On a : $\triangle_I + \mathbb{N}^n = \triangle_I$. Si $N \subset \mathbb{N}^n$ satisfait $N + \mathbb{N}^n = N$ (i.e. est stable par translation), le lemme de Dickson nous assure de l'existence d'une unique partie finie de $\mathbb{N}^n$, $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^p\}$, telle que :

$$N = \cup_{1\leq i\leq p}(\alpha^i + \mathbb{N}^n) \ \textit{et}\ \alpha^j \notin \cup_{i\neq j}(\alpha^i + \mathbb{N}^n)$$

Les α^i sont dits les sommets de N. L'ensemble $\mathcal{D}(n)$ des parties de $\mathbb{N}^n$ stables par translation (i.e. satisfaisant $N + \mathbb{N}^n = N$) est totalement ordonné comme suit. Soient $N_1, N_2 \in \mathcal{D}(n)$. Pour chaque $i = 1, 2$, soient β_i^k, $k = 1, \ldots, t_i$ les sommets de N_i indexés dans l'ordre croissant. Après avoir éventuellement permuté N_1 et N_2, il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que : $\beta_1^k = \beta_2^k$, $1 \leq k \leq t$ et (1) $t_1 = t = t_2$, ou bien (2) $t_1 > t = t_2$, ou bien (3) $t_1, t_2 > t$ et $\beta_{t+1}^1 < \beta_{t+1}^2$. Dans le cas (1), $N_1 = N_2$. Dans les cas (2) et (3), $N_1 < N_2$. Il revient au même de dire que la suite $(\beta_1^1, \ldots, \beta_1^{t_1}, \infty, \ldots)$ est strictement plus petite que la suite $(\beta_2^1, \ldots, \beta_2^{t_2}, \infty, \ldots)$ pour l'ordre lexicographique, avec la convention $\beta < \infty$ pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$.
Si $\beta^1, \ldots, \beta^t \in \mathbb{N}^n$, on leur associe la partition suivante de $\mathbb{N}^n$:

$$\triangle = \cup_{1\leq i\leq t}(\beta^i + \mathbb{N}^n), \quad \overline{\triangle} = \mathbb{N}^n - \triangle, \quad \triangle_i = (\beta^i + \mathbb{N}^n) - \cup_{k<i}(\beta^k + \mathbb{N}^n)$$

Ainsi $\mathbb{N}^n$ est l'union disjointe : $\triangle \cup \overline{\triangle} = (\cup_{1\leq i\leq t}\triangle_i) \cup \overline{\triangle}$. Nous utiliserons le résultat suivant.

Théorème 2.1 *(Le théorème de division formelle de Grauert-Hironaka [A-H-V], [B-M], [G])*
Soient A un anneau (commutatutif unitaire) intègre et $F_1, \ldots, F_t$ des éléments non nuls de $A[[X_1, \ldots, X_n]]$. Notons $\beta^i = \nu(F_i)$ l'exposant initial de F_i, $a_i = Init(F_i)$ le coefficient du monôme initial de F_i. Soit S la partie multiplicativement fermée de A engendrée par les a_i i.e. $S = \{a_1^{m_1}, \ldots, a_t^{m_t}, \quad m_i \in \mathbb{N}\}$. Alors tout élément F de $A[[X]]$ (ou de $S^{-1}.A[[X]]$) peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$F = \sum_{1\leq i\leq t} D_i F_i + R, \quad D_i, R \in S^{-1}.A[[X]]$$

avec $Supp(R) \subset \overline{\triangle}$ et $Supp(D_i) + \beta_i \subset \triangle_i$, où les $\triangle_i$ et $\overline{\triangle}$ sont définis comme ci-dessus.

2.2 Brefs rappels sur la fonction asymptotique de Samuel et les valuations de Rees

Soient $(A, \mathfrak{m}_A, k)$ un anneau local noetherien intègre et I un idéal de A. Comme nous l'avons rappelé plus haut la fonction asymptotique de Samuel relativement à I est définie par :

$$\forall x \in A, \quad \overline{v_I}(x) = Lim_{k\rightarrow+\infty}\frac{ord_I(x^k)}{k}.$$

Nous rappelons ici très brièvement comment se calcule $\overline{v_I}$ à l'aide de valuations discrètes de rang 1 positives sur A. Pour de plus amples compléments nous renvoyons à [H-S] chap.6 et 10. Par la terminologie «v une valuation discrète de rang 1 positive sur A »nous entendrons la donnée d'une valuation v associée à un anneau de valuation discrète de rang 1, A_v, entre A et son corps des fractions $K = Frac(A)$ (i.e. $A \subset A_v \subset K$) tel que $\mathfrak{m}_v \cap A = \mathfrak{m}_A$. Désignons par Λ_A l'ensemble des telles valuations. Alors :

$$\forall x \in A, \quad \overline{v_I}(x) = Inf_{v \in \Lambda_A} \frac{v(x)}{v(I)} = Min_{v \in \Lambda_A} \frac{v(x)}{v(I)}$$

De plus, il existe un ensemble $\mathcal{R}_\mathcal{I}$ fini non redondant de telles valuations, unique à l'équivalence près des valuations, telles que :

$$\forall x \in A, \quad \overline{v_I}(x) = Min_{v \in \mathcal{R}_I} \frac{v(x)}{v(I)}$$

Ces valuations particulières sont appelées l'ensemble des valuations de Rees de I. Diverses constructions des valuations de Rees de I sont exposées dans [H-S] chap. 10. Un point de vue plus géométrique dans le cadre de la géométrie analytique complexe est dans [L-T]. En particulier [L-T], si $A = \mathcal{O}_{X,x}$ est la fibre en x du faisceau structural d'un espace analytique complexe X et $I = (f_1, \ldots, f_d)$ est un idéal $\mathfrak{m}_{X,x}$-primaire, le nombre $\overline{v_I}(\mathfrak{m}_{X,x})^{-1}$ est le plus petit nombre réel positif α tel qu' il existe un voisinage de V_x de x dans X et une constante C tels que :

$$\forall z \in V_x, \quad \sum_{i=1}^{d} |f_i(z)| \geq C||z - x||^\alpha,$$

où $|| \quad ||$ désigne une norme arbitraire sur $\mathbb{C}^n$ dans lequel on a plongé (X, x). Ceci est un cas particulier *d'inégalités de Łojasiewicz*. Pour cette raison et dans un contexte général nous appellerons le nombre $\overline{v_I}(\mathfrak{m}_A)^{-1}$ l'exposant de Łojasiewicz de I.

3 Polynômes caractéristiques et calcul de la fonction asymptotique de Samuel

Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local régulier d'égale caractéristique zéro, de dimension n. Soit I un idéal $\mathfrak{m}$-primaire et g un élément de A. Nous cherchons un procédé qui permet de calculer $\overline{v}_I(g)$ sans recours à la description des valuations de Rees, en particulier sans recours à l'éclatement normalisé de centre I (i.e. sans recours à la clôture intégrale de l'algèbre de Rees de I). Nous allons voir que pour tout $g \in A$, il y a une relation de dépendance intégrale de degré $e(I)$, canonique, qui calcule $\overline{v}_I(g)$. Soit $\hat{A}$ le complété pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique de A. Par fidèle platitude $I^p.\hat{A} \cap A = I^p$. Il en découle alors que pour tout $g \in A$, $\overline{v}_I(g) = \overline{v}_{I.\hat{A}}(g)$. On peut donc supposer que A est complet et donc par le théorème de structure de Cohen supposer que A est isomorphe à $k[[X_1, \dots, X_n]]$ où $k \simeq A/\mathfrak{m}$. Supposons dans un premier temps que $I = (f_1, \dots, f_n)$ est engendré par une suite régulière. La construction de base est alors la suivante. Notons F^* le morphisme de $A_1 = k[[U_1, \dots, U_n]]$ dans $A_2 = k[[X_1, \dots, X_n]]$ défini par $U_i \longrightarrow f_i(X)$. Le morphisme F^* est quasi-fini car $dim_k(A_2/\mathfrak{m}_1.A_2) < +\infty$, il est donc fini par le théorème de préparation formel c.f. [La] chap. 8. Il en résulte aussitôt qu'il est injectif, puisque A_2 est entier sur $A_1/Ker(F^*)$, ces deux anneaux ont donc la même dimension et par suite $Ker(F^*) = 0$. Maintenant le critère local de platitude (c.f. [M]), nous assure que A_2 est un A_1 module plat de type fini car $(f_1, \dots, f_n)$ est une suite régulière de A_2. Par conséquent les anneaux étant locaux, A_2 est un A_1-module libre de type fini, et son rang n'est autre que $dim_k(A_2/\mathfrak{m}_1.A_2) = dim_k(A_2/I) = e(I)$, puisque A_2 est de Cohen-Macauley. Si g est un élément de A_2, l'opérateur de multiplication par g, $m_g : A_2 \longrightarrow A_2$ a donc un polynôme caractéristique comme élément de $End_{A_1}(A_2)$. Notons $P_g(Y, U) \in A_1[Y]$ ce polynôme caractéristique :

$$P_g(Y, U) = Y^{e(I)} + \sum_{k=1}^{e(I)} a_i(U_1, \dots, U_n) Y^{e(I)-i} \in A_1[Y].$$

Clairement, par le théorème d'Hamilton-Cayley on a : $P_g(g, f_1, \dots, f_n) = 0$. Cette relation de dépendance intégrale particulière calcule toujours $\overline{v}_I(g)$. On a en effet le résultat suivant :

Théorème 3.1
Soient $I = (f_1, \dots, f_n) \subset A_2$ et $g \in A_2$ comme ci-dessus, et $P_g(Y, U) \in A_1[Y]$ son polynôme caractéristique. Posons :

$$\alpha = \frac{p}{q} = Min_{1 \leq i \leq e(I)}(\frac{Ord_U a_i(U)}{i}), \text{ où } ord_U a = Max\{k \in \mathbb{N} / a \in (U)^k\}$$

Alors : $\overline{v}_I(g) = \alpha = \frac{p}{q}$.

Preuve :
Nous constatons d'abord que $\overline{v}_I(g) \geq \frac{p}{q}$. Notons $K_2 = Frac(A_2)$. En effet, soit v

une valuation discrète $K_2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ positive sur A_2 de rang 1. Puisque :

$$g^{e(I)} + \sum_{i=1}^{e(I)} a_i(f_1, \ldots, f_n) g^{e(I)-i} = 0.$$

On a :

$$(*) \quad e(I)v(g) \geq Min_{1 \leq i \leq e(I)}(v(a_i(f_1, \ldots, f_n)) + (e(I)-i)v(g)).$$

Soit i_0 réalisant le minimum dans le membre de droite de cette inégalité. Par définition on a : $ord_{(U)} a_{i_0}(U) \geq i_0 \frac{p}{q}$. Donc $ord_I a_{i_0}(f_1, \ldots, f_n) \geq i_o \frac{p}{q}$. Par conséquent : $v(a_{i_0}(f_1, \ldots, f_n)) \geq i_0 \frac{p}{q} v(I)$. Il vient ainsi simplifiant l'inégalité $(*)$ par $(e(I) - i_0)v(g)$: $i_0 v(g) \geq i_0 . \frac{p}{q} . v(I)$, où encore $v(g) \geq \frac{p}{q} . v(I)$. D'où l'on déduit que $\overline{v}_I(g) \geq \frac{p}{q}$, puisque $\overline{v}_I(g)$ se calcule comme le minimum des $v(g)/v(I)$ lorsque v parcourt l'ensemble des valuations de Rees de I. Supposons maintenant que l'inégalité $\overline{v}_I(g) \geq \frac{p}{q}$ soit stricte i.e. $\overline{v}_I(g) > \frac{p}{q}$. Nous allons voir que l'on aboutit à une contradiction. Remarquons que pour cela, on peut supposer que k est algébriquement clos. En effet, sinon soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Le morphisme $k[[X_1, \ldots, X_n]] \longrightarrow \overline{k}[[X_1, \ldots, X_n]]$ étant fidèlement plat, on a $\overline{v}_I(g) = \overline{v}_{I.\overline{k}[[X]]}(g)$, et de même les polynômes caractéristiques de g considéré comme élément de $k[[X]]$ ou comme élément de $\overline{k}[[X]]$ coincident. On supposera donc que k est algébriquement clos. Soit $K_1 = Frac(A_1)$ et notons toujours $F^* : K_1 \longrightarrow K_2$ le morphisme injectif induit par $F^* : A_1 \longrightarrow A_2$. Comme A_2 est un A_1-module libre de type fini, on a facilement que pour tout $b \in A_2 - (0)$, $1/b \in K_1.A_2$ et donc K_2 est une extension algébrique finie de K_1 et $[K_2 : K_1] = e(I)$. Comme l'on a supposé que A était d'égale caractéristique zéro, cette extension est séparable et quitte à faire un changement de variables linéaires sur les X_i, par le théorème de l'élément primitif on peut supposer que cette extension est engendrée par X_1 i.e. $K_2 = K_1(X_1)$. Maintenant soit $\frac{p'}{q'}$ tel que $\overline{v}_I(g) > \frac{p'}{q'} > \frac{p}{q}$. Puisque $\overline{v}_I(g) = Lim_{m \to \infty} \frac{ord_I(g^m)}{m}$, il existerait m_0 tel que pour $m \geq m_0$ on ait $ord_I(g^m) \geq m \frac{p'}{q'}$. Désignant par [ ] la partie entière supérieure, on aurait donc $g^m \in I^{[m \frac{p'}{q'}]}$. Par suite pour tout arc $\varphi^* : k[[X_1, \ldots, X_n]] \longrightarrow k[[t]]$, on aurait :

$$m.ord_t(\varphi^*(g)) \geq [m.\frac{p'}{q'}] Min_{1 \leq i \leq n} ord_t(\varphi^*(f_i))$$

et donc :

$$(\bullet) \quad ord_t(\varphi^*(g)) \geq \frac{p'}{q'} Min_{1 \leq i \leq n} ord_t(\varphi^*(f_i)) > \frac{p}{q} Min_{1 \leq i \leq n} ord_t(\varphi^*(f_i)).$$

Nous allons construire un arc φ^* qui ne satisfait pas cette inégalité et obtenir ainsi une contradiction, ce qui prouvera $\overline{v}_I(g) = \frac{p}{q}$. Pour cela, notons P le polynôme minimal de X_1 sur K_1. P est de degré $e(I)$ et à coefficients dans A_1, i.e. $P \in A_1[Y]$. On notera $\Delta \in k[[U_1, \ldots, U_n]]$ son discriminant (qui est non nul puisque l'extension est séparable). Notons D le produit :

$$D = \Delta.\Pi_{1 \leq i \leq e(I)} a_i \in k[[U_1, \ldots, U_n]]$$

où les a_i sont les coefficients du polynôme caractéristique de g comme défini ci-dessus. Considérons alors $In(D) \in k[U_1, \ldots, U_n]$ la forme initiale de D, c'est à dire le polynôme homogène de plus bas degré dans le développement en somme de polynômes homogènes de D. $In(D)$ est le produit des formes initiales des a_i et de celle de Δ. Puis choisissons un point $(b_1, \ldots, b_n) \in k^n$ tel que $In(D)(b_1, \ldots, b_n) \neq 0$ et $b_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$. On considère alors l'idéal $\mathfrak{a}$ de A_2 engendré par $(b_1 f_2 - b_2 f_1, b_1 f_3 - b_3 f_1 \ldots, b_1 f_n - b_n f_1)$. Puisque le morphisme $F^* : A_1 \longrightarrow A_2$ est entier on a $haut(\mathfrak{a}) = n - 1$ par les théorèmes de Cohen-Seidenberg. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de hauteur $n-1$ parmi ceux contenant $\mathfrak{a}$, soit B la clôture intégrale de $k[[X]]/\mathfrak{p}$ et $\hat{B}$ son complété. Alors par le théorème de structure de Cohen $\hat{B}$ est isomorphe à $k[[t]]$. On a donc un morphisme non nul (un arc) φ^{1*} :

$$\varphi^{1*} : k[[X]] \longrightarrow k[[X]]/\mathfrak{p} \longrightarrow B \longrightarrow k[[t]]$$

dont le noyau est $\mathfrak{p}$. Posons $\varphi_i^1 = \varphi^{1*}(X_i) \in k[[t]]$. Par construction : $b_1 \varphi^{1*}(f_l) - b_l \varphi^{1*}(f_1) = 0$ et $\varphi^{1*}(f_1) \neq 0$ (car $b_i \neq 0$ pour tout i et $ker(\varphi^{1*}) = \mathfrak{p}$). Posons $u(t) = \varphi^{1*}(f_1)/b_1$. On a donc :

$$f_l(\varphi_1^1(t), \ldots, \varphi_n^1(t)) = b_l.u(t),\ 1 \leq l \leq n.$$

Notant α_j, $1 \leq j \leq e(I)$ les coefficients du polynôme minimal P de X_1 sur K_1. On a :

$$\varphi_1^1(t)^{e(I)} + \sum_{1 \leq j \leq e(I)} \alpha_j(b_1.u(t), \ldots, b_n.u(t)).\varphi_1^1(t)^{e(I)-i} = 0$$

Regardons l'équation :

$$P(t, X_1) = X_1^{e(I)} + \sum_{1 \leq i \leq e(I)} \alpha_i(b_1.u(t), \ldots, b_n.u(t)).X_1^{e(I)-i} = 0$$

comme une équation à coefficients dans le corps des séries de puiseux $\cup_{m \geq 1} k((t^{1/m}))$ qui est algébriquement clos. φ_1^1 en est une racine, le discriminant de ce polynôme vaut $\Delta(b_1.u(t),\ldots,b_n.u(t))$ et comme $(b_1,\ldots,b_n)$ n'est pas un zéro de la forme initiale de $\triangle$ on a :

$$ord_t\Delta(b_1.u(t),\ldots,b_n.u(t)) = ord_U(\Delta(U)).ord_t(u(t))$$

Ainsi notre polynôme $P(t,X_1)$ a $e(I)$ racines distinctes dans $\cup_{m\geq 1}k((t^{1/m}))$. Celles-ci sont toutes dans $k((t^{1/m}))$ pour m convenablement choisi (assez grand). Notons $\varphi_1^1,\ldots,\varphi_1^{e(I)}$ ces racines distinctes. Elles sont en fait dans $k[[t^{1/m}]]$ puisque éléments de $k((t^{1/m}))$ et entières sur $k[[t]]$ donc sur $k[[t^{1/m}]]$. Un changement d'uniformisante $t \longrightarrow t^{1/m}$ nous donne donc $e(I)$ éléments distincts dans $k[[t]]$, que nous noterons encore $\varphi_1^1,\ldots,\varphi_1^{e(I)}$, tels qu'en posant $v(t)=u(t^m)$ on ait :

$$\varphi_1^j(t)^{e(I)} + \sum_{1\leq i\leq m} \alpha_i(b_1.v(t),\ldots,b_n.v(t)).\varphi_1^j(t)^{e(I)-i} = 0,\ 1\leq j\leq e(I)$$

Maintenant puisque $K_2 = K_1(X_1)$, on peut écrire dans K_2 pour $s\geq 2$:

$$X_s = \sum_{m=0}^{e(I)-1} \beta_m^s.X_1^m,\ \beta_m^s \in K_1$$

Classiquement (c.f. par exemple [To] Th 7.5 p. 25), on voit que les β_m^s sont dans $(A_1)_{(\Delta)}$ où (Δ) désigne la partie multiplicativement fermée $\{1,\Delta,\Delta^2,\ldots\}$. On pose maintenant :

$$\varphi_s^j(t) = \sum_{0\leq m\leq e(I)-1} \beta_m^s(b_1.v(t),\ldots,b_n.v(t)).\varphi_1^j(t)^m \in k((t))$$

Puisque X_s est entier sur A_1 (et non pas simplement sur K_1) alors $\varphi_s^j(t)$ est élément de $k((t))$ et entier sur $k[[t]]$, il est donc élément de $k[[t]]$. Maintenant, on pose pour tout j, $1\leq j\leq e(I)$:

$$\varphi^j(t) = (\varphi_1^j(t),\ldots,\varphi_n^j(t)) \in k[[t]]^n.$$

Par construction même on a :

$$f_l(\varphi^j(t)) = b_l.v(t),\ 1\leq l\leq e(I)$$

et $\varphi^j \neq \varphi^{j'}$ si $j\neq j'$. Nous allons voir que chacun des arcs $\varphi^{*j} : k[[X]] \longrightarrow k[[t]]$ et en particulier φ^{1*} nous fournit une contradiction avec $(\bullet)$. En effet, puisque $(b_1,\ldots,b_n)$ n'annule pas les zéros de la forme initiale des a_i, on a :

(1) $\quad ord_t a_i(f_1(\varphi^j(t)),\ldots,f_n(\varphi^j(t))) = ord_t a_i(b_1.v(t),\ldots,b_n v(t))$

(2) $\quad = ord_U a_i(U_1,\ldots,U_n) ord_t v(t) = ord_U a_i(U_1,\ldots,U_n) Min_{1\leq l\leq n} ord\varphi^{j*}(f_l)$

Puisque $g(\varphi^1(t))$ est racine de :

$$Y^{e(I)} + \sum_{1 \leq i \leq m} a_i(b_1.v(t), \dots, b_n v(t)) Y^{e(I)-i} = 0$$

et que les autres racines sont les $g(\varphi^j(t))$. On a aux signes près :

$$a_i(f_1(\varphi_1^1(t), \dots, f_n(\varphi_n^1(t)) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \dots j_i \leq e(I)} g(\varphi^{j_1}(t)) \dots g(\varphi^{j_i}(t)).$$

Maintenant par ($\bullet$) on a :

$$ord_t(\sum_{1 \leq j_1 < j_2 \dots j_i \leq e(I)} g(\varphi^{j_1}(t)) \dots g(\varphi^{j_i}(t)) > i.\frac{p}{q} Min_{1 \leq l \leq n} ord_t \varphi^{1*}(f_l)$$

Donc comparant avec $(1), (2)$ on obtient :

$$\forall i, \quad ord_U(a_i(U_1, \dots, U_n)) Min_{1 \leq l \leq n} ord_t(\varphi^{1*}(f_l)) > i\frac{p}{q} Min_{1 \leq l \leq n} ord_t(\varphi^{*1}(f_l).$$

Ce qui est contradictoire avec la définition de $\frac{p}{q}$. □

Corollaire 3.2

Soient $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local régulier d'égale caractéristique zéro de dimension n et I un idéal $\mathfrak{m}$-primaire alors tout élément x de $\overline{I}$ satisfait une relation de dépendance intégrale sur I de degré $e(I)$ *où* $e(I)$ *désigne la multiplicité de Samuel de I.*

Preuve :

D'après les résultats de [N-R], on peut trouver $f_1, \dots, f_n \in I$ tels que $f_1, \dots, f_n$ soit une suite régulière de A et $J = (f_1, \dots, f_n)$ une réduction minimale de I. On a alors $\overline{I} = \overline{J}$. Soit $x \in \overline{I} = \overline{J}$. Si $\hat{A}$ désigne le complété $\mathfrak{m}$-adique de A, on a $e(I) = e(I.\hat{A}) = e(J) = e(J.\hat{A})$. D'après le résultat précédent, x satisfait une relation de dépendance intégrale de degré $e(I)$ sur $J.\hat{A}$ et donc à fortiori sur $I.\hat{A}$. En procédant comme dans [H-I-O] lemme 4.11 p.19 ceci implique que :

$$(I.\hat{A} + x.\hat{A})^{e(I)} = I.\hat{A}.(I.\hat{A} + x.\hat{A})^{e(I)-1}$$

Comme $\hat{A}$ est fidélement plat sur A, on a :

$(I.\hat{A}+x.\hat{A})^{e(I)} \cap A = (I+x.A)^{e(I)}$ et $I.\hat{A}.(I.\hat{A}+x.\hat{A})^{e(I)-1} \cap A = I.(I+x.A)^{e(I)-1}$

Par suite : $(I + x.A)^{e(I)} = I.(I + x.A)^{e(I)-1}$ et ceci implique que x satisfait une relation de dépendance intégrale de degré $e(I)$ sur I toujours en reprenant la preuve de 4.11 de [H-I-O]. □

4 Preuve de 1.1

4.1 Existence du ième exposant de Łojasiewicz de I

Soient $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local régulier de dimension $n+1$, d'égale caractéristique zéro, et I un idéal $\mathfrak{m}$-primaire. Notons d'abord que le morphisme canonique $A \longrightarrow \hat{A}$ étant fidèlement plat, la fonction asymptotique de Samuel est invariante par passage au complété. Ainsi $\overline{v_I}(g) = \overline{v_{I.\hat{A}}}(g)$ et $\overline{v_{I.A_H}}(g) = \overline{v_{I.\hat{A_H}}}(g)$ pour tout $g \in A$ et tout i plan H. On pourra donc sans restriction supposer que A est complet. Par le théorème de structure de I.S. Cohen c.f. [M], on peut donc supposer que $A = k[[X_0, X_1, \ldots, X_n]]$ avec $Car(k) = 0$. Soit $I = (f_1, \ldots, f_m)$ un idéal $\mathfrak{m}$ primaire de A. D'après les résultats sur la réduction des idéaux de Northcott-Rees [N-R], [H-S], on peut supposer que pour $j > n+1$, f_j est entier sur $J = (f_1, \ldots, f_{n+1})$ i.e. J est une réduction de I. Il en découle bien évidemment que $J.A_H$ est une réduction de $I.A_H$ pour tout i-plan H. Nous pouvons donc supposer que $I = (f_1, \ldots, f_{n+1})$. D'autre part, par récurrence sur la dimension de A, il suffit d'établir 1.1 pour les n-plans, c'est à dire pour une section hyperplane de A.
Rappelons maintenant que $K = (g_1, \ldots, g_n, h_{n+1})$ est dit une réduction jointe (c.f. [H-S] chap. 17) de $I, \ldots, I, \mathfrak{m}$ (I listé n fois), ou encore une réduction jointe de $I^{[n]}, \mathfrak{m}$, si et seulement si $g_i \in I$, $h_{n+1} \in \mathfrak{m}$, et $(g_1, \ldots, g_n).I^{n-1}\mathfrak{m} + h_{n+1}.I^n$ est une réduction de $I^n.\mathfrak{m}$. C'est à dire s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$((g_1, \ldots, g_n)I^{n-1}\mathfrak{m} + h_{n+1}.I^n).(I^n.\mathfrak{m})^k = I^{n(k+1)}\mathfrak{m}^{k+1}.$$

Ce qui s'écrit encore :

$$(g_1, \ldots, g_n)I^{n(k+1)-1}\mathfrak{m}^{k+1} + h_{n+1}.I^{n(k+1)}\mathfrak{m}^k = I^{n(k+1)}\mathfrak{m}^{k+1}.$$

Posons :

$$A' = A/(h_{n+1}), \quad J' = (g_1, \ldots, g_n).A' \text{ et } I' = I.A/(h_{n+1}) = I+(h_{n+1}).A/(h_{n+1}).$$

Alors J' est une réduction de I'. En effet, si $\mathfrak{m}'$ est l'idéal maximal de A', on a :

$$(*) \quad (g_1, \ldots, g_n)I'^{n(k+1)-1}\mathfrak{m}'^{k+1} = I'^{n(k+1)}.\mathfrak{m}'^{k+1}$$

Comme $J' \subset I'$, pour toute valuation discrète v sur A' on a :$J'.A'_v \subset I'.A'_v$ i.e. $v(J') \geq v(I')$. Réciproquement par l'égalité :

$$(*)\, v(J') + (n(k+1)-1)v(I') + (k+1)v(\mathfrak{m}') = n(k+1)v(I') + (k+1)v(\mathfrak{m}'),$$

on obtient après simplification $v(J') = v(I')$. Par conséquent $J' \subset I' \subset \overline{J'}$. Il existe maintenant d'après [H-S], [R-S] des ouverts de Zariski denses $U_1 \subset (k^{n+1})^n \simeq (I/\mathfrak{m}.I)^n$ et $V_1 \subset k^{n+1} \simeq \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ tels que si :

$$g_1 = \sum_{1\leq i\leq n+1} \lambda_{i,1}.f_i, \ldots, g_n = \sum_{1\leq i\leq n+1} \lambda_{i,n}.f_i \text{ et } h_{n+1} = \sum_{0\leq i\leq n} a_i.X_i$$

satisfont $(\lambda_{i,j}) \in U_1$ et $(a_i)_{0\leq i\leq n} \in V_1$ alors $K = (g_1, \ldots, g_n, h_{n+1})$ est une réduction jointe de $I^{[n]}, \mathfrak{m}$. Notons V_0 l'ouvert de Zariski de k^{n+1} défini par $X_0 \neq 0$. Notant W_0 son intersection avec V_1, on en déduit qu'il existe un ouvert de Zariski W_1 de k^n tel que si

$$g_1 = \sum_{1\leq i\leq n+1} \lambda_{i,1}.f_i, \ldots, g_n = \sum_{1\leq i\leq n+1} \lambda_{i,n}.f_i \text{ et } h_{n+1} = X_0 - \sum_{1\leq i\leq n} a_i.X_i$$

satisfont $(\lambda_{i,j}) \in U_1$ et $(a_i)_{1\leq i\leq n} \in W_1$ alors $(g_1, \ldots, g_n, X_0 - \sum_{1\leq i\leq n} a_i X_i)$ est une réduction jointe de $I^{[n]}, \mathfrak{m}$. Fixons un $\Lambda = (\lambda_{i,j})$ dans U_1 et notons encore $g_1, \ldots, g_n$ les éléments de $k[[X_0, \ldots, X_n]]$ correspondants. Pour $1 \leq i \leq n$, on définit alors les éléments suivants de $k[A][[X_1, \ldots, X_n]] = k[a_1, \ldots, a_n][[X_1, \ldots, X_n]]$:

$$G_i(A, X_1, \ldots, X_n) = g_i(a_1X_1 + \ldots + a_nX_n, X_1, \ldots, X_n) \in k[A][[X_1, \ldots, X_n]].$$

Désignons par $\mathfrak{a} \subset k[A][[X_1, \ldots, X_n]]$ l'idéal engendré par les $G_i(A, X)$, $1 \leq i \leq n$, et soit $\triangle \subset \mathbb{N}^n$ son diagramme des exposants initiaux au sens de la section précédente. Pour $a \in k^n$ donné, notons $J'_a \subset k[[X_1, \ldots, X_n]]$ l'idéal engendré par les $G_i(a, X)$ après évaluation des coefficients en a et soit $\triangle_a \subset \mathbb{N}^n$ son diagramme des exposants initiaux. Par construction, pour $a \in W_1$, J'_a est une réduction de $I'_a k[[X_1, \ldots, X_n]] = I.k[[X_0, \ldots, X_n]]/(X_0 - \sum_{1\leq i\leq n} a_i X_i)$ On a alors le lemme suivant qui est une simple transposition des lemmes 7.1 et 7.2 de [B-M].

Lemme 4.1
1) $\forall a \in k^n$, $\triangle \leq \triangle_a$.
2) Il existe $Q_1, \ldots, Q_l \in k[A]$ *tels que* $\Gamma = \{a \in k^n / Q_1(a) \times \ldots \times Q_l(a) = 0\}$ *soit strictement inclus dans* k^n *et :*
a) $\forall a \in W_2 = k^n - \Gamma$, $\triangle = \triangle_a$
b) Si $\beta^1, \ldots, \beta^l$ *désignent les sommets de* $\triangle$*, il existe* $R_i \in \mathfrak{a}$, $1 \leq i \leq l$ *tels que :*

$$\forall a \in W_2 = k^n - \Gamma, \quad \nu(R_i(A, X)) = \nu(R_i(a, X)) = \beta^i$$

On peut en fait prendre pour Q_i le coefficient du monôme initial de $R_i(X) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} r_{i,\alpha} X^\alpha$, $r_{i,\alpha} \in k[A]$. Notons maintenant $S \subset k[A]$ la partie multiplicativement fermée engendrée par les Q_i, i.e. $S = \{Q_1^{m_1} \times \ldots \times Q_t^{m_t} / (m_1, \ldots, m_t) \in k^t\}$.

Soit $\overline{\triangle}$ (resp. $\overline{\triangle_a}$) le complémentaire de $\triangle$ (resp. $\triangle_a$) dans $\mathbb{N}^n$. $\overline{\triangle}$ est nécessairement un ensemble fini puisque dans l'ouvert de Zariski dense $W_1 \cap W_2$ de k^n on a : $\overline{\triangle} = \overline{\triangle}_a$, et ce dernier ensemble est fini car $\sqrt{J'_a} = (X_1, \ldots, X_n)$. Ainsi pour tout $a \in W = W_1 \cap W_2$, les X^α, $\alpha \in \overline{\Delta}$, constituent une base du quotient $k[[X_1, \ldots, X_n]]/J'_a$. Il en résulte que pour tout $a \in W$ le morphisme θ_a^* : $k[[Y_1, \ldots, Y_n]] \longrightarrow k[[X_1, \ldots, X_n]]$ défini par $Y_i \to G_i(a, X)$ fait de $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ un $k[[Y_1, \ldots, Y_n]]$ module libre de base les X^α, $\alpha \in \overline{\triangle}$. Donc tout élément g de $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ s'écrit de manière unique :

$$g = \sum_{\alpha \in \overline{\triangle}} a_\alpha(G_1(a, X), \ldots, G_n(a, X)).X^\alpha, \quad a_\alpha \in k[[Y]].$$

Nous avons besoin de décrire la variation des a_α en fonction de a pour établir la constance de $\overline{v_{I.A_H}}(\mathfrak{m}_H)$ sur un ouvert de Zariski. Pour cela notons $R = S^{-1}k[A]$ et soit $\theta^* : R[[Y_1, \ldots, Y_n]] \longrightarrow R[[X_1, \ldots, X_n]]$ qui à Y_i fait correspondre $G_i(A, X)$. Nous allons constater que :

($\bullet$) $R[[X]]$ est via θ^* un $R[[Y]]$ module de type fini engendré par les X^α, $\alpha \in \overline{\triangle}$.

En effet, soit $D \in R[[X]]$. L'algorithme de division formelle de Grauert-Hironaka (c.f section 2) permet d'écrire de manière unique :

$$D = \sum_{1 \le i \le t} D_i(X) R_i(X) + \sum_{\alpha \in \overline{\triangle}} r_\alpha X^\alpha$$

avec $r_\alpha \in R$, $D_i \in R[[X]]$ et $Supp(D_i) + \beta^i \subset \Delta_i = (\beta^i + \mathbb{N}^n) - \cup_{k<i}(\beta^k + \mathbb{N}^n)$. Ce qui se réécrit, en tenant compte du fait que $(R_1, \ldots, R_t) \subset \mathfrak{a} = (G_1, \ldots, G_n)$ en :

$$D = \sum_{1 \le i \le n} C_i(X) G_i(X) + \sum_{\alpha \in \overline{\triangle}} r_\alpha X^\alpha.$$

Le terme $\sum_{\alpha \in \overline{\triangle}} r_\alpha X^\alpha$ restant unique puisque son support est inclus dans $\overline{\triangle}$. Une itération de ce procédé permet de conclure à ($\bullet$). En effet, supposons que pour $k \in \mathbb{N}^*$ nous disposions d'une écriture :

$$(*_k)\ D = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n / |\gamma| = k} C_\gamma G^\gamma + \sum_{\alpha \in \overline{\triangle}} \Big(\sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n / |\alpha| < k} r_{\alpha,\gamma} G^\gamma \Big) X^\alpha$$

avec $G^\gamma = G_1(A, X)^{\gamma_1} \times \ldots \times G_n(A, X)^{\gamma_n}$ et $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Divisons par l'algorithme d'Hironaka-Grauert chaque C_γ par $R_1, \ldots, R_t$ puis retournant à une écriture en les G_i, on obtient :

$$C_\gamma = \sum_{1 \le i \le n} C_{\gamma,i}(X) G_i(X) + \sum_{\alpha \in \overline{\triangle}} a_{\gamma,\alpha} X^\alpha, \quad a_{\gamma,\alpha} \in R.$$

Reportant dans $(*_k)$, on obtient une écriture :

$$(*_{k+1})\ D = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^n/|\gamma|=k+1} C_\gamma G^\gamma + \sum_{\alpha\in\overline{\triangle}} \left(\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^n/|\gamma|<k+1} r_{\alpha,\gamma} G^\gamma \right) X^\alpha.$$

Ceci prouve que désignant par $M \subset R[[X]]$ le $R[[Y]]$ module engendré via θ^* par les X^α, $\alpha \in \overline{\triangle}$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad R[[X]] \subset M + \mathfrak{a}^k \subset M + (X)^k.$$

Donc, d'après le théorème d'intersection de Krull, on a $R[[X]] = M$ et donc $(\bullet)$. En fait l'unicité dans le théorème de division formel nous dit en plus que $R[[X]]$ est un $R[[Y]]$ module *libre* de type fini via θ^* dont une base est constituée par les X^α, $\alpha \in \overline{\triangle}$. Ceci va nous permettre de calculer *globalement* nos polynômes caractéristiques et d'obtenir la constance de $\overline{v_{I.A_H}}(\mathfrak{m}_H)$ sur un ouvert de Zariski. En effet, notons e_1 le cardinal de $\overline{\triangle}$ (qui n'est autre que la multiplicité mixte $e(I^{[n]}, \mathfrak{m})$ c.f. [H-S]) et soit i, $1 \leq i \leq n$. On peut écrire pour tout $\alpha \in \overline{\triangle}$:

$$X_i.X^\alpha = \sum_{\beta\in\overline{\triangle}} C^i_{\alpha,\beta}(G_1(A,X), \ldots, G_n(A,X)).X^\beta$$

avec $C^i_{\alpha,\beta} \in R[[Y]]$. Soit alors M_i la matrice carrée d'ordre e_1 à coefficients dans $R[[Y]]$:

$$M_i = \left(C^i_{\alpha,\beta}\right)_{\alpha,\beta\in\overline{\triangle}}.$$

Pour chaque a dans l'ouvert de Zariski $W = W_1 \cap W_2$, *l'évaluation* en a, $M_i(a)$ de M_i est la matrice de l'opérateur de multiplication par X_i dans le $k[[Y]]$ module libre de type fini $k[[X]]$ via θ^*_a déterminé par $Y_i \longrightarrow G_i(a, X)$. Notons $P_i(\lambda, A, Y) = det(\lambda Id_{e_1} - M_i) \in R[[Y]][\lambda]$ le polynôme caractéristique de M_i :

$$P_i(\lambda, A, Y) = \lambda^{e_1} + \sum_{1\leq k\leq e_1} r^i_k(A,Y).\lambda^{e_1-k}, \quad r^i_k(A,Y) \in R[[Y]].$$

Ainsi pour chaque $a \in W$, *l'évalué* en a de $P_i(\lambda, A, Y)$ noté $P_i(\lambda, a, Y)$ est le polynôme caractéristique désiré. Posons pour tout i, k, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq e_1$: $d^i_k = ord_{(Y)} r^i_k(A,Y)$ ($ord_{(Y)}(\quad)$ comme élément de $R[[Y]]$) et enfin :

$$\overline{v_I}^{(n)} = Min_{1\leq i\leq n}(Min_{1\leq k\leq e_1} \frac{d^i_k}{k}).$$

On peut écrire pour tout i, k, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq e_1$:

$$r^i_k(A,Y) = \sum_{\gamma\in N^n/|\gamma|=d^i_k} \frac{r^i_{k,\gamma}(A)}{Q^i_k(A)} Y^\gamma + S^i_k(Y)$$

avec $S_k^i(Y) \in (Y)^{d_k^i+1}R[[Y]]$, $r_{k,\gamma}^i(A) \in k[A]$, $Q_k^i(A) \in S$. Considérons alors :

$$V_k^i = \{a \in k^n / \forall \gamma \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\gamma| = d_k^i,\ r_{k,\gamma}^i(a) = 0\} \text{ et } U_k^i = (k^n - V_k^i) \cap W.$$

Par construction chaque ouvert de Zariski U_k^i est non vide. Alors pour toute forme linéaire $H(X_0, X_1, \dots, X_n) = X_0 - \sum_{1 \le i \le n} a_i X_i$ telle que $a = (a_1, \dots, a_n) \in U = \cap_{i,k} U_k^i \cap W$, on a :

$$\overline{v_{I.A_H}}(\mathfrak{m}_H) = \overline{v_I}^{(n)}.$$

Ceci au vu du calcul de la fonction asymptotique de Samuel fait à la section 3. On obtient ainsi le premier point de 1.1. $\square$

4.2 Majoration de la multiplicité

La preuve relativement simple de l'inégalité 2) de 1.1 se fait par récurrence sur n (dim A=n+1). Elle découle d'une généralisation de la loi d'associativité pour les multiplicités que l'on peut trouver dans [N].

Théorème 4.2 *([N] Chap.7 Th.18 p. 342)*
Soit $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local noetherien de dimension s et E un A-module de type fini. Considérons $a_1, \dots, a_s$ des éléments de A engendrant un idéal $\mathfrak{m}$-primaire. Alors pour tout i, $0 \le i \le s$, on a :

$$e(a_1, \dots, a_s, E) = \sum_{P \in Min(a_1,\dots,a_i)} e_{A_P}(\phi_P(a_1), \dots, \phi_P(a_i), E_p) e_{\frac{A}{P}}(\psi_P(a_{i+1}), \dots, \psi_P(a_s), A/P)$$

où P parcourt l'ensemble des idéaux premiers minimaux contenant $(a_1, \dots, a_i)$ et ϕ_P, ψ_P désignent respectivement les morphismes canoniques $\phi_P : A \longrightarrow A_P$ et $\psi_P : A \longrightarrow \frac{A}{P}$.

Nous prouvons à présent l'inégalité 2) de 1.1 par récurrence sur n, $dimA = n+1$. Si $n = 0$, il n'y a rien à prouver car alors $e(I) = \nu_I^{(1)}(\mathfrak{m}) = ord_{\mathfrak{m}}(I)$. On supposera donc $n > 0$ et le résultat établi pour tout anneau local régulier d'égale caractéristique zéro B de dimension n. Présentons I (ou plutôt une réduction de I) sous la forme $(g_1, \dots, g_n, g_{n+1})$ où comme précédemment $K = (g_1, \dots, g_n, h_{n+1})$ est une réduction jointe de $I^{[n]}, \mathfrak{m}$ et g_{n+1} est une combinaison linéaire générique d'un système de générateurs de I. Ainsi comme nous l'avons vu au paragraphe précédent on a :

$$g_{n+1} \in \overline{(g_1, \dots, g_n).\frac{A}{(h_{n+1})}} = \overline{I.\frac{A}{(h_{n+1})}}.$$

Soient $P_1, \ldots, P_l$ les idéaux premiers minimaux de A contenant $(g_1, \ldots, g_n)$. Pour tout j, $1 \leq j \leq l$, on a $dim(A/P_j) = 1$. Soit $\widetilde{A/P_j}$ la clôture intégrale de A/P_j dans son corps des fractions. $\widetilde{A/P_j}$ est un anneau local noetherien de dimension 1 et intégralement clos, c'est donc un anneau local régulier de dimension 1 et par suite un anneau de valuation discrète. Notons v_{p_j} la valuation définie par son idéal maximal :

$$v_{P_j}(h) = long(\frac{\widetilde{A/P_j}}{(h)}) = Max\{k \in \mathbb{N}/h \in \mathfrak{m}_{P_j}\} = ord_{\mathfrak{m}_{P_j}}(h).$$

Maintenant pour tout $g \in A$, désignant encore par g l'image de celui-ci via le morphisme naturel $A \longrightarrow A/P_J \longrightarrow \widetilde{A/P_j}$, on a :

$$(*) \quad e_{A/P_j}(g, A/P_j) = long(\frac{A/P_j}{(g)}) = long(\frac{\widetilde{A/P_j}}{(g)}) = v_{P_j}(g).$$

Maintenant, pour chaque j, $1 \leq j \leq l$, on a $v_{P_j}(I) = v_{P_j}(g_{n+1})$. D'autre part puisqu'on peut choisir les coefficients de $h_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i X_i$ dans un ouvert de Zariski dense de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \simeq k^{n+1}$, quitte à restreindre cet ouvert on peut supposer que :

$$\forall j, \quad 1 \leq j \leq l, \quad v_{P_j}(\mathfrak{m}_A) = v_{P_j}(h_{n+1}).$$

Ainsi pour tout j, $1 \leq j \leq l$,

$$\frac{v_{P_j}(g_{n+1})}{v_{P_j}(h_{n+1})} = \frac{v_{P_j}(I)}{v_{P_j}(\mathfrak{m}_A)} \leq \nu_I^{(n+1)}.$$

En effet, $\nu_I^{(n+1)} = Sup\frac{v(I)}{v(\mathfrak{m}_A)}$ car $\nu_I^{(n+1)} = \overline{v_I}(\mathfrak{m}_A)^{-1} = (Min\frac{v(\mathfrak{m}_A)}{v(I)})^{-1}$, les Sup et Min étant pris sur l'ensemble des valuations discrètes de rang 1 de A (c.f. [H-S]). Nous pouvons à présent appliquer 3.2 avec $i = n$. On a :

$$e(I) = e(g_1, \ldots, g_n, g_{n+1}, A) = \sum_{1 \leq j \leq l} e(\phi_{P_j}(g_1), \ldots, \phi_{P_j}(g_n), A_{P_j}) e(\psi_{P_j}(g_{n+1}), A/P_j).$$

Ce qui s'écrit grâce à $(*)$ en :

$$e(I) = e(g_1, \ldots, g_n, g_{n+1}, A) = \sum_{1 \leq j \leq l} e(\phi_{P_j}(g_1), \ldots, \phi_{P_j}(g_n), A_{P_j}) v_{P_j}(g_{n+1})$$

Ecrivant $v_{P_j}(g_{n+1}) = v_{P_j}(h_{n+1}).\frac{v_{P_j}(g_{n+1})}{v_{P_j}(h_{n+1})} = v_{P_j}(h_{n+1}).\frac{v_{P_j}(I)}{v_{P_j}(\mathfrak{m}_A)}$ et majorant cette dernière fraction par ν_I^{n+1}, on obtient :

$$e(I) = e(g_1, \ldots, g_n, g_{n+1}, A) \leq \left(\sum_{1 \leq j \leq l} e(\phi_{P_j}(g_1), \ldots, \phi_{P_j}(g_n), A_{P_j}) v_{P_j}(h_{n+1}) \right) .\nu_I^{(n+1)}.$$

Mais toujours d'après 3.2, le terme entre parenthèses n'est autre que :

$$e(g_1, \ldots, g_n, h_{n+1}, A) = e(g_1, \ldots, g_n, A/(h_{n+1}).$$

Ainsi :

$$e(I) \leq (e(g_1, \ldots, g_n, A/(h_{n+1}))\nu_I^{(n+1)}.$$

Mais puisque $\overline{(g_1, \ldots, g_n).\frac{A}{(h_{n+1})}} = \overline{I.\frac{A}{(h_{n+1})}}$, on a :

$$e(I, A/(h_{n+1})) = e(g_1, \ldots, g_n, A/(h_{n+1})).$$

Ainsi $e(I) \leq (e(I, A/(h_{n+1})).\nu_I^{(n+1)}$. Il suffit alors pour conclure d'appliquer l'hypothèse de récurrence dans l'anneau $B = A/(h_{n+1})$ à $I.B$. On a alors $e(I, B) \leq \Pi_{1 \leq i \leq n} \nu_I^{(i)}$. Ce qui fournit l'égalité 2) de 1.1. $\square$

Remarque 4.3
1) Avec les notations ci-dessus le terme $e(I, A/(h_{n+1}) = e(g_1, \ldots, g_n, h_{n+1}, A)$ *n'est autre que la multiplicité mixte* $e(I^{[n]}, \mathfrak{m}, A)$ *et nous renvoyons à [H-S] chap.17 pour les définitions et notations.*
2) On a en fait prouvé l'inégalité :

$$\frac{e(I^{[n+1-i]}, \mathfrak{m}^{[i]}, A)}{e(I^{[n-i]}, \mathfrak{m}^{[i+1]}, A)} \leq \nu_I^{(n+1-i)}.$$

De même $e(I^{[n+1-i]}, \mathfrak{m}^{[i]}, A) \leq \Pi_{1 \leq j \leq n+1-i} \nu_I^{(j)}$.

5 Sur les cas d' égalité

Nous cherchons ici comment se caractérise les idéaux I tels que $e(I) = \Pi_{i=1}^{n+1} \nu_I^i$ (Les notations et hypothèses sont celles de 1.1). Pour cela soient $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local régulier de dimension $n+1$ et $Gr_{\mathfrak{m}}(A) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \frac{\mathfrak{m}^k}{\mathfrak{m}^{k+1}} \simeq k[X_0, \ldots, X_n]$. Si $g \in A - (0)$ et si $a = ord_{\mathfrak{m}}(g)$, on appellera forme initiale de g et on notera $In(g)$ la classe de g dans $\frac{\mathfrak{m}^a}{\mathfrak{m}^{a+1}} \subset Gr_{\mathfrak{m}}(A)$. Celle-ci s'identifie à un polynôme homogène de degré a de $k[X_0, \ldots, X_n]$, pour tout choix d'un système régulier de paramètres $X_0, \ldots, X_n$ de A. Si I est un idéal de A, on notera $In(I)$ l'idéal de $Gr_{\mathfrak{m}}(A)$ engendré par les formes initiales des éléments g de I. Des éléments $f_1, \ldots, f_m$ de I sont dit une $\mathfrak{m}$-base standard de I si et seulement si $In(g_1), \ldots, In(g_m)$ engendrent $In(I)$. On a alors le résultat suivant.

Proposition 5.1

Soient $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local régulier d'égale caractéristique zéro et I un idéal $\mathfrak{m}$-primaire. Considérons les propriétés suivantes :

1) $e(I) = \nu_I^{(1)} \times \nu_I^{(2)} \times \ldots . \times \nu_I^{(n)} \times \nu_I^{(n+1)}$

2) Il existe $b \in \mathbb{N}^*$ et $g_1, \ldots, g_{n+1} \in A$ tels que :

a) $In(g_1), \ldots, In(g_{n+1}))$ sont sans zéros communs non triviaux dans $\overline{k}^{n+1}$ où $\overline{k}$ est une clôture algébrique de k,

b) $\overline{(g_1, \ldots, g_{n+1})} = \overline{I^b}$.

Alors $2 \Longrightarrow 1$ et si $dim A = 2$ alors $1) \Longleftrightarrow 2)$.

Preuve :

Commençons par constater que $2) \Longrightarrow 1)$, ce qui est élémentaire. Soient $g_1, \ldots, g_{n+1}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ satisfaisant 2). Posons $a_i = ord_{\mathfrak{m}}(g_i)$ et indexons $g_1, \ldots, g_{n+1}$ de telle sorte que $a_1 \leq a_2 \leq \ldots a_{n+1}$. Soit $J = (g_1, \ldots, g_{n+1})$. Puisque $\overline{J} = \overline{I^b}$, on a :

$$e(J) = b^{n+1} e(I) \text{ et } \nu_J^{(i)} = \nu_{I^b}^{(i)} = b.\nu_I^{(i)}, \quad 1 \leq i \leq n+1$$

Par suite pour obtenir 1) pour I, il suffit de l'obtenir pour J. Pour cela, il nous suffira de constater :

$$(*) \quad \forall i, \quad 1 \leq i \leq n+1, \quad \nu_J^{(i)} = a_i.$$

En effet, on a d'abord par une propriété bien classique de la multiplicité (c.f. [M] Th 14.9 p. 109) :

$$\Pi_{1 \leq i \leq n+1} ord_{\mathfrak{m}}(g_i) = \Pi_{1 \leq i \leq n+1} a_i \leq e(J).$$

L'égalité s'obtient par $(*)$ en utilisant la majoration 2) de 1.1.

Prouvons $(*)$. Pour cela, il suffit de prouver que si $g_1, \ldots, g_{n+1}$ sont $n+1$ éléments de A satisfaisant $2a)$ et indexés selon $ord_{\mathfrak{m}}()$ croissant alors : $\nu_J^{(n+1)} = a_{n+1}$ où $J = (g_1, \ldots, g_{n+1})$. En effet supposons cette affirmation prouvée en toute généralité. Alors soit $h(X_0, \ldots, X_n) = X_0 - \sum_{I=1}^n a_i X_i$ une forme linéaire suffisamment générale pour que $In(g_1), \ldots, In(g_n), h$ soient sans zéros communs non triviaux dans $\overline{k}^{n+1}$. Désignons par g'_j la classe de g_j dans $A' = A/(h)$, $1 \leq j \leq n+1$. Notons $J'_1 = (g'_1, \ldots, g'_n)$ et $J' = (g'_1, \ldots, g'_n, g'_{n+1})$. Alors $In(g'_1), \ldots, In(g'_n)$ sont sans zéros communs non triviaux dans $\overline{k}^n$ (ce ne sont autres que $In(g_1)(\sum_{1 \leq i \leq n} a_i X_i, X_1 \ldots, X_n), \ldots, In(g_n)(\sum_{1 \leq i \leq n} a_i X_i, X_1 \ldots, X_n))$. Par conséquent si notre assertion est prouvée $\nu_{J'_1}^{(n)} = a_n$. Maintenant soit $\mathfrak{m}'$ le maximal de A'. On a $g'_{n+1} \in \mathfrak{m}'^{a_{n+1}} \subset \mathfrak{m}'^{a_n}$ et $\mathfrak{m}'^{a_n} \subset \overline{J'_1}$ car $\nu^{(n)}_{J'_1} = a_n$. Par suite $g'_{n+1} \in \overline{J'_1}$ et donc $\overline{J'} = \overline{J'_1}$ et $\nu^{(n)}_{J'} = \nu^{(n)}_{J'_1} = a_n$ i.e $\nu^{(n)}_J = a_n$. Il suffit alors de répéter l'opération.

Il ne nous reste plus qu'a prouver que sous $2a)$ on a $\nu^{(n+1)}_J = a_{n+1}$. L'hypothèse 2)a) fait que $g_1, \dots, g_{n+1}$ est une suite régulière et une $\mathfrak{m}$-base standard de $J = (g_1, \dots, g_{n+1})$ (c.f. [H-I-O] 13.10 p 96). Soit $l \in \mathbb{N}^*$ assez grand pour que $\mathfrak{m}^l$ soit inclus dans J. A fortiori : $\mathfrak{m}^{la_{n+1}} \subset J$. Puisque $g_1, \dots g_{n+1}$ est une base standard de J, on peut ecrire pour tout $r \in \mathfrak{m}^{la_{n+1}}$ (c.f. [H.I.O] 13.7 p. 91) :

$$r = \sum_{i=1}^{n+1} q_i g_i, \text{ avec } ord_{\mathfrak{m}}(q_i) \geq la_{n+1} - a_i \geq (l-1)a_{n+1}.$$

Par suite :

$$(\mathfrak{m}^{a_{n+1}} + J)^l \subset (\mathfrak{m}^{a_{n+1}} + J)^{l-1}.J \subset (\mathfrak{m}^{a_{n+1}} + J)^l$$

Ainsi J est une réduction de $J + \mathfrak{m}^{a_{n+1}}$ et ces deux idéaux ont donc même clôture intégrale i.e. $\overline{J} = \overline{J + \mathfrak{m}^{a_{n+1}}}$. En particulier : $\mathfrak{m}^{a_{n+1}} \subset \overline{J}$. De ce dernier fait, on déduit que $\nu^{(n+1)}_J \leq \nu^{(n+1)}_{\mathfrak{m}^{a_{n+1}}} = a_{n+1}$. L'inégalité opposée s'obtient en considérant un arc (non trivial) $\varphi^* : A \longrightarrow \overline{k}[[t]]$ tel que $\varphi^*(g_1) = \ldots = \varphi^*(g_n) = 0$ (ce qui est possible car $DimA/(g_1, \dots, g_n) = 1$). Comme $In(g_1), \dots, In(g_{n+1})$ sont sans zéros communs non triviaux dans $\overline{k}^{n+1}$, on a $ord(\varphi^*(g_{n+1})) = a_{n+1} ord(\varphi^*(\mathfrak{m}))$. Ceci fournit une valuation v telle que $v(I)/v(\mathfrak{m}) \geq a_{n+1}$ et donc $\nu^{(n+1)}_j \geq a_{n+1}$.

Montrons maintenant que si $dimA = 2$, alors $1 \Longrightarrow 2)$. Posons $\nu^{(2)}_I = \frac{a_2}{b}$ et $\nu^{(1)}_I = ord_{\mathfrak{m}}(I) = a_1$. Soit $g_1 \in I$ tel que $ord_{\mathfrak{m}}(g_1) = a_1$. On peut trouver un système régulier de paramètres de A, X_0, X_1, tel que $In(g_1)(X_0, 0) \neq 0$ (ceci quitte à effectuer un changement «linéaire » de système régulier de paramètres). Donc $ord_{\mathfrak{m}'}(g_1.A/(X_1)) = a_1$ où $\mathfrak{m}'$ est le maximal de $A/(X_1)$. Puisque $\nu^{(2)}_I = a_2/b$, on a : $X_1^{a_2} \in \overline{I^b}$. Par conséquent : $J = (X_1^{a_2}, g_1^b) \subset \overline{I^b}$. Mais $e(J) = a_2.b.e(X_1, g_1)$ et $e(X_1, g_1) = a_1$ car $ord_{\mathfrak{m}'}(g_1.A/(X_1)) = a_1$. Ainsi : $e(J) = a_2.b.a_1 = b^2(\frac{a_2}{b} \times a_1) = b^2 e(I) = e(I^b)$. Par conséquent, par un célèbre résultat de D. Rees (c.f. [H-S] Th 11.3.1 p.222) on a $\overline{J} = \overline{I^b}$, et donc 2). $\square$

Remarque 5.2
Nous ignorons si en général si on a équivalence entre les conditions 1) *et* 2). *En fait, soient* A *comme ci-dessus avec* $dimA = n + 1$, $n \geq 2$, *et* I *un idéal satisfaisant* 1). *Comme nous avons vu en 4.3 que :*

$$e(I) \leq e(I^{[n]}, \mathfrak{m})\nu^{(n+1)}_I \leq \Pi_{1 \leq k \leq n+1} \nu^{(k)}_I.$$

On a :

$$e(I^{[n]}, \mathfrak{m}) = \Pi_{1 \leq k \leq n} \nu_I^{(k)} \text{ et } e(I^{[n+1-i]}, \mathfrak{m}^{[i]}) = \Pi_{1 \leq k \leq n+1-i} \nu_I^{(k)}.$$

Ceci conduit a une caractérisation de 1) *du type* 2) *mais seulement après section hyperplane générique. Par exemple si* $dimA = 3$*, notant* $\nu_I^{(k)} = \frac{a_i}{b}$*. Si* (X_0, X_1, X_2) *est un système régulier de paramètres de* A *suffisamment général pour que* (g_1, g_2, X_2) *soit une une réduction jointe de* $(I^{[2]}, \mathfrak{m})$*, on obtient comme précédemment que* $\overline{I^b} = \overline{(g_1^b, g_2^b, X_2^{a_3})}$*. Posons :* $K = I^b.A/(X_3)$*. Alors* K *satisfait fait* 1)*, et donc par le cas* $dimA = 2$*, il existe* $g_1', g_2' \in \overline{K}$ *tels que* $\overline{K} = \overline{(g_1', g_2')}$ *et* $In(g_1')(X_0, X_1), In(g_2')(X_0, X_1)$ *sont sans zéros communs non triviaux dans* $\overline{k}^2$*.*
Il se pose alors la question de relévement suivante :
Existe t-il $h_1, h_2 \in A$ *tels que :*
- $h_1, h_2 \in \overline{I^b}$ *et classe de* h_i *dans* $A/(X_2)$ *égale* g_i'*,*
- $In(h_i)(X_0, X_1, 0) = In(g_i')(X_0, X_1)$*.*

Nous ignorons en général la réponse à de telles questions.

BIBLIOGRAPHIE

[A-H-V] J.M. Aroca-H. Hironaka-J.L. Vicente, *The theory of the maximal contact*, Mem. Mat. Inst. Jorge Juan n°29, Consejo Superior de Investigaciones Cientificas, Madrid, 1975.

[B1] N. Bourbaki, *Algèbre Chapitre 1 à 3*, nouvelle édition Hermann 1970.

[B2] N. Bourbaki, *Algèbre commutative chap.1 à 7*, Hermann 1961.

[B3] N. Bourbaki, *Algèbre commutative chap. 10*, Masson 1998.

[B-M] E. Bierstone, P.D. Milman, *Relations among analytic functions I*, Ann. Inst. Fourier **37** (1),(1987) 187-239.

[E] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics $\overset{\circ}{n}$ 150, Springer-Verlag.

[G] H. Grauert, *Uber die deformation isolierter Singularitaten analytischer Mengen*, Invent. Math. **15** (1972), 171-198.

[H-I-O] M. Herman, S. Ikeda, U. Orbanz, *Equimultiplicity and blowing up, an algebraic study with an appendix by B. MOONEN*, Springer 1988.

[H-S] C. Huneke-I. Swanson, *Integral Closure of ideals, Rings, and Modules*, London Mathematical Society Lecture Note Series $\overset{\circ}{n}$ 336, Cambridge University Press 2006.

[La] J.P. Lafon, *Algèbre commutative, langages géométrique et algébrique*, Collection enseignement des Sciences n° 24, Hermann.

[Lo] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, Pub. Math. I.H.E.S. 1964.

[L-T] M. Lejeune-B. Teissier, *Clôture intégrale des idéaux et équisingularité*, Séminaire Lejeune-Teissier, Centre de Mathématiques de l'école polytechnique 1974, Publications Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

[M] H. Matsumura, *Commutative Ring theory*, Cambridge studies in mathematics 8, 1986.

[N] D.G. Northcott, *Lessons on Rings, Modules and Multiplicities*, Cambridge University Press 1968.

[N.R] D.G. Northcott-D. Rees, *Reduction of ideals in local rings*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **50** 2 (1954), 145-158.

[R1] D. Rees, *Lectures on the asymptotic theory of ideals*, London Mathematical lecture notes series 113, Cambridge University Press.

[R2] D. Rees, *Multiplicities, Hilbert functions an degree functions.* In Commutative algebra : Durham 1981, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **72**, Cambridge-New-York, Cambridge University Press, 1982, 170-178.

[R-S] D. Rees-J. Sally, *General elements and joint reductions*, Michigan Math. J., **35** (1988), 241-254.

[T1] B. Teissier, *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney*, Astérisque 7 et 8, (1973), 285-362.

[T2] B. Teissier, *Variétés Polaires I, Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces*, Invent. Math. **40** (3), (1977), 267-292.

[T3] B. Teissier, *Sept compléments au séminaire Lejeune-Teissier*, à paraître dans Ann. Fac. Sci. Toulouse.

[To] J.C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Band 71, Springer-Verlag 1972.

Michel HICKEL,
Université Bordeaux 1, I.M.B.
Equipe d'Analyse et Géométrie
et I.U.T. Bordeaux 1 département Informatique
33405 Talence Cedex, France
email : hickel@math.u-bordeaux1.fr