

Etude des pertes dans un tube supraconducteur HT_C : comparaison de méthodes de calculs

K. Berger, B. Douine, J. Leveque, D. Netter, A. Rezzoug, T. Satiramatekul et F. Bouillault

Résumé—L'objectif de cet article est l'étude théorique des pertes en champ propre dans un tube supraconducteur à haute température critique (HTC). Nous présentons et comparons deux méthodes de calculs des pertes. Dans un premier temps nous présentons les modèles pour représenter les supraconducteurs. Dans un deuxième temps, nous détaillons les deux méthodes de calculs. Puis nous comparons les résultats de calculs des pertes obtenues par les deux méthodes présentées.

Mots clés—supraconducteurs à haute température critique, tube supraconducteur, modèle de Bean.

I. INTRODUCTION

L'utilisation des supraconducteurs à haute température critique (SHT_C) pour le transport du courant électrique alternatif est maintenant une réalité et l'évaluation des pertes en champ propre est nécessaire. Bien que ces pertes soient faibles, il convient de les évaluer avec précisions. En effet, elles ont lieu à basse température, elles sont donc coûteuses à évaluer. Dans cet article nous présentons l'étude des pertes en champ propre dans une amenée de courant. Classiquement l'estimation des pertes se fait à l'aide de formules déduites du modèle de Bean, élaboré pour caractériser les supraconducteurs à basse température critique (SBT_C) lequel est défini par une caractéristique champ électrique, densité de courant $E(J)$ sous forme d'un palier :

$$J = \pm J_C \text{ ou } J = 0 \quad (1)$$

Une autre méthode consiste à utiliser un modèle à deux pentes à la place du modèle de Bean [1]. Dans un premier temps, nous avons calculé les pertes à l'aide de ce modèle.

Dans les SHT_C, la caractéristique réelle $E(J)$ diffère assez nettement de celle du modèle de Bean, on la modélise par une fonction progressive de la forme :

$$\vec{E} = E_C \times \left(\frac{J}{J_C} \right)^n \frac{\vec{J}}{J} \quad (2)$$

Dans un deuxième temps, nous avons donc calculé les pertes à partir de cette fonction $E(J)$, ce problème est résolu à l'aide d'un calcul numérique [2].

Dans cet article, nous présentons tout d'abord l'objet de

notre étude, puis les deux méthodes de calculs et nous comparons les résultats.

II. OBJET DE L'ETUDE

Nous calculons les pertes dans une amenée de courant parcouru par un courant sinusoïdal de fréquence f et d'amplitude I_{\max} .

Les caractéristiques de cette amenée de courant (Fig. 1) sont les suivantes :

- matériau BSCCO 2223
- courant critique (critère $1 \mu\text{V}/\text{cm}$) 100 A
- section $S = 22 \text{ mm}^2$
- longueur $h = 80 \text{ mm}$
- rayon interne $R_i = 4 \text{ mm}$
- rayon externe $R_e = 4,8 \text{ mm}$

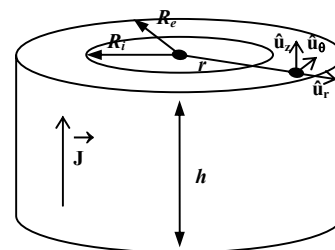


Fig. 1. Amenée de courant.

III. MODELE DES SUPRACONDUCTEURS

Le comportement électromagnétique d'un supraconducteur est régi par les équations de Maxwell :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \text{div} \vec{E} = 0, \text{div} \vec{B} = 0 \quad (3)$$

Ces équations doivent être complétées par les relations entre B et H , et E et J . Pour B et H nous avons : $B = \mu_0 H$

Pour E et J , il existe plusieurs représentations possibles (Fig. 2) :

- le modèle de Bean,
- le modèle en J^n déduit de la mesure de la caractéristique $E(J)$,
- le modèle à deux pentes.

Le modèle en J^n est déduit de la mesure de la caractéristique $E(J)$. La densité de courant critique J_C est calculée avec un

Ce travail est supporté par GDR ME²MS, Thème "matériau", Opération "matériaux supraconducteurs".

K. Berger, B. Douine, J. Leveque, D. Netter et A. Rezzoug travaillent au GREEN-UHP, Université H. Poincaré, F-54506 Vandoeuvre-lès-Nancy, France.

T. Satiramatekul et F. Bouillault travaillent au LGEP, Plateau du Moulon, 91192 Gif sur Yvette Cedex, France (e-mail: thitipong@lgep.supelec.fr).

critère de $1\mu\text{V}/\text{cm}$.

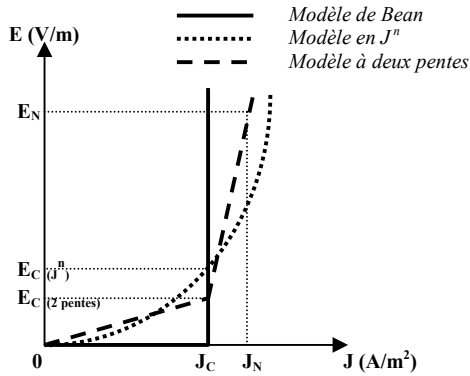


Fig. 2. Caractéristique $E(J)$ des supraconducteurs.

IV. CALCUL DES PERTES A L'AIDE DU MODELE EN J^n

La combinaison des équations de Maxwell et de la loi de comportement spécifique des supraconducteurs en J^n permet d'aboutir aux relations suivantes :

$$\Delta E = \mu_0 k \frac{\partial E^{1/n}}{\partial t} \quad \text{ou} \quad \Delta J^n = \mu_0 k^n \frac{\partial J}{\partial t}$$

avec $k = \frac{J_C}{E_C^{1/n}}$ et $J_C = k E_C^{1/n}$

Ces équations régissent la distribution de E et J , nous avons choisi de résoudre l'équation en champ électrique.

La densité de courant et le champ électrique ne sont dans notre exemple fonction que de r et t , et sont notés $J(r,t)$ et $E(r,t)$ où $r \in [R_i, R_e]$. En coordonnées cylindriques, nous devons donc résoudre le problème suivant :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} = \mu_0 k \frac{\partial E^{1/n}}{\partial t} \quad (4)$$

Maintenant, nous devons décrire les conditions aux limites. Sur le rayon extérieur du tube nous connaissons le champ magnétique $B(R_e, t)$ grâce au théorème d'Ampère :

$$B(R_e, t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi R_e}$$

Nous en déduisons :

$$\frac{\partial E}{\partial r}(r = R_e, t) = \frac{\mu_0}{2\pi R_e} \frac{\partial i(t)}{\partial t}$$

Sur le rayon intérieur du tube, la variation du champ électrique est nulle.

$$\frac{\partial E}{\partial r}(r = R_i, t) = 0$$

A l'instant initial nous supposons le champ électrique nul dans le matériau.

$$E(r, t = 0) = 0$$

Nous avons résolu ce problème par une méthode de type différences finies.

Par la suite nous utiliserons les conventions suivantes :

- le pas d'espace est noté Δ_r et le pas de temps Δ_t .

- l'indice d'espace est noté i et de temps t ;
- i varie de 0 à N_r
- t varie de 0 à N_t
- N_r est le nombre total de points dans l'espace
- N_t est le nombre total d'instant de calcul

L'endroit où nous calculons les différentes valeurs est situé à un rayon nommé r_i (représenté Fig. 3) à partir du centre du tube :

$$r_i = R_{in} + i \times \Delta_r$$

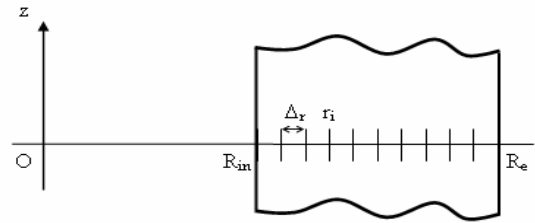


Fig. 3. Discrétisation du tube.

Les dérivées sont remplacées par les expressions aux différences :

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{E_{i+1,t} - E_{i-1,t}}{2\Delta_r}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} = \frac{E_{i+1,t} - 2E_{i,t} + E_{i-1,t}}{\Delta_r^2}$$

$$\frac{\partial E^{1/n}}{\partial t} = \frac{E_{i,t+1}^{1/n} - E_{i,t}^{1/n}}{\Delta_t}$$

Cela donne une série d'équations numériques de $E_{i,t}$:

$$E_{i+1,t+1} \left(\frac{1}{\Delta_r^2} + \frac{1}{2r_i \Delta_r} \right) + E_{i,t+1} \left(-\frac{2}{\Delta_r^2} \right) + E_{i-1,t+1} \left(\frac{1}{\Delta_r^2} - \frac{1}{2r_i \Delta_r} \right) = \mu_0 k \left(\frac{E_{i,t+1}^{1/n}}{\Delta_t} - \frac{E_{i,t}^{1/n}}{\Delta_t} \right)$$

La condition à la frontière extérieure donne pour $i = N_r$:

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\partial B}{\partial t} = f(t) = \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{E_{N_r+1,t}}{2\Delta_r} - \frac{E_{N_r-1,t}}{2\Delta_r}$$

Soit :

$$E_{N_r,t+1} \left(-\frac{2}{\Delta_r^2} \right) + E_{N_r-1,t+1} \left(\frac{2}{\Delta_r^2} \right) + 2\Delta_r f(t) \left(\frac{1}{\Delta_r^2} + \frac{1}{2r_{N_r} \Delta_r} \right) = \mu_0 k \left(\frac{E_{i,t+1}^{1/n}}{\Delta_t} - \frac{E_{i,t}^{1/n}}{\Delta_t} \right)$$

Nous obtenons donc un système de N_r équations, à chaque instant, dont la résolution nous permet d'obtenir le champ électrique E , la densité de courant J est déduite du calcul de E .

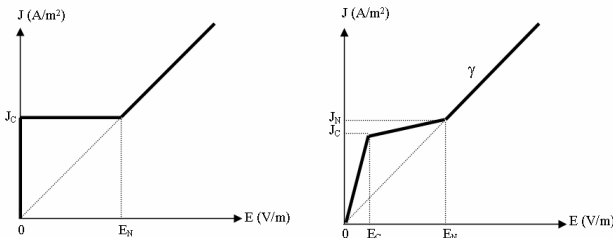
La puissance instantanée et les pertes en régime variable périodique sont obtenues par intégration numérique à l'aide des simulations, $J(r,t)$, $E(r,t)$:

$$p(t_k) = 2\pi h \Delta_r \sum_{i=1}^{N_r} E_i J_i r_i \quad (5)$$

$$P = \frac{\sum_{k=1}^{N_t} p(t_k)}{N_t} \quad (6)$$

V. CALCUL DES PERTES A L'AIDE DU MODELE A DEUX PENTES

Nous avons formulé la loi de comportement en explicitant le calcul d'une fonctionnelle convexe U telle que $J \in \partial U(E)$ où $\partial U(E)$ désigne le sous-gradient au point E de la fonctionnelle U [1]. On approche le graphe de la loi de comportement (Fig. 4(a)) par une famille de fonctions (Fig. 4(b)) plus régulières et moins raides, dépendant de paramètres ε_1 , ε_2 et telles que ces fonctions d'approximations tendent vers le graphe de la loi de comportement quand ε_1 et ε_2 tendent vers 0.



(a) modèle de Bean généralisé (b) modèle proposé
Fig. 4. Graphe de la loi de comportement $J(E)$.

Les quantités E_C , J_C et J_N figurant dans la figure 4(b) sont définies de la façon suivante :

$$E_C = \varepsilon_1 E_N, \quad J_C = (1 - \varepsilon_2) J_N, \quad J_N = \sigma E_N \quad (7)$$

où ε_1 et ε_2 sont des réels strictement positifs, σ désigne la conductivité électrique du supraconducteur à l'état normal. Les paramètres E_N et J_N délimitent la région pour laquelle le matériau demeure supraconducteur, E_C et J_C quant à eux sont choisis pour qu'on approche au mieux la caractéristique expérimentale.

Dans ce modèle, nous avons ignoré l'aspect monodimensionnel du problème et supposé cependant que le champ électrique et le courant avaient une seule composante suivant l'axe de la connexion, notée E et J . L'équation scalaire à résoudre s'écrit :

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \text{div} \left(\frac{1}{\mu_0} \text{grad } E \right) \quad (8)$$

avec $J = \gamma(E)$ où γ est une fonction croissante linéaire par morceaux (Fig. 4(b)). Cette équation ne peut être résolue sans les conditions aux limites résultant directement des équations de Maxwell. Plus précisément, on pose :

$$\frac{\partial E}{\partial n} = \mu_0 \frac{\partial H_{tg}}{\partial t} \quad (9)$$

où H_{tg} désigne la composante tangentielle du champ magnétique appliqué.

Pour résoudre l'équation (8), nous avons utilisé la méthode

des éléments finis en espace et le schéma de Crank-Nicolson en temps. A chaque pas de temps, une fonctionnelle convexe est minimisée par une procédure itérative de Gauss-Seidel non linéaire [3].

A partir des valeurs numériques de E et de J , nous calculons directement les pertes par période T et par unité de longueur par la formule suivante :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (10)$$

où $p(t)$ est la puissance instantanée par unité de longueur dissipée dans le matériau supraconducteur qu'on détermine par la formule suivante :

$$p(t) = \int_{\Omega_S} J(x, t) E(x, t) dx \quad (11)$$

où Ω_S est la section du matériau supraconducteur suivant le plan transversal et dx est la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^2 .

VI. RESULTATS DE SIMULATION NUMERIQUE

La figure 5 montre l'évolution temporelle des pertes Joule obtenues pour une alimentation de 80 A (a), 100 A (b), 110 A (c), et 120 A (d) à partir de trois calculs avec $J_C = 4,6 \text{ MA/m}^2$ et

- pour le modèle de Bean : $E_C = 1 \text{ } \mu\text{V/m}$, $E_N = 0,5302 \text{ V/m}$, et $J_N = 4,6004 \text{ MA/m}^2$,
- pour le modèle à deux pentes : $E_C = 1 \text{ } \mu\text{V/m}$, $E_N = 530 \text{ } \mu\text{V/m}$, et $J_N = 5 \text{ MA/m}^2$,
- pour le modèle en J^n : $E_C = 100 \text{ } \mu\text{V/m}$, et $n = 13$.

Nous constatons que nous obtenons des valeurs cohérentes des pertes avec les trois modèles. Et à partir de ces pertes instantanées, nous avons pu déterminer en utilisant les formules ci-dessus les valeurs des pertes moyennes.

Sur la figure 6, nous présentons l'évolution des pertes moyennes obtenues numériquement en fonction de l'amplitude maximale de courant traversant le tube supraconducteur. Les résultats obtenus montrent que quand l'intensité maximale est inférieure ou égale à l'intensité critique ($I_{\max} \leq I_C$), les trois calculs donnent presque les mêmes résultats pour les valeurs des pertes moyennes. Pour des courants dont l'intensité maximale est supérieure à l'intensité critique ($I_{\max} > I_C$), la concordance entre les deux modèles se détériore, le modèle à deux pentes permet donc d'étendre le domaine de validité du modèle de Bean au voisinage du courant critique. Des résultats expérimentaux sont cependant nécessaires pour confirmer l'utilisation du modèle en J^n pour les fortes intensités I avec $I > I_C$. Notons que dans ce cas, les aspects thermiques doivent certainement être considérés.

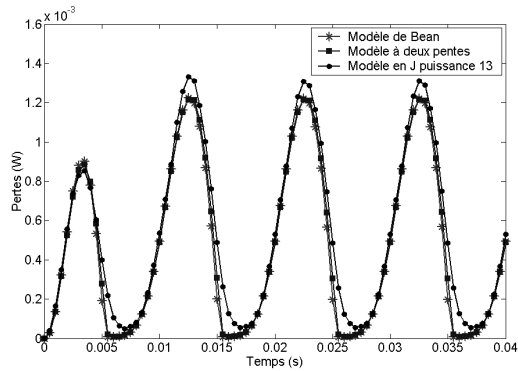
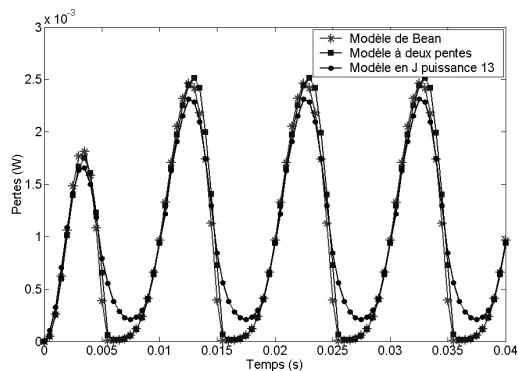
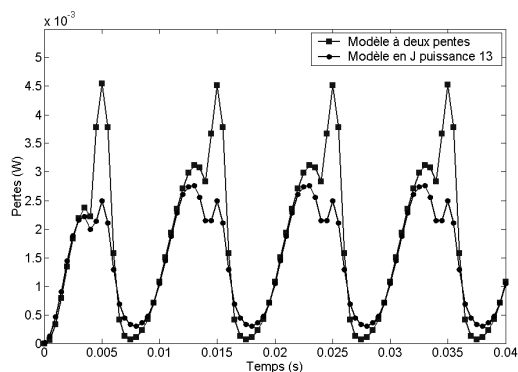
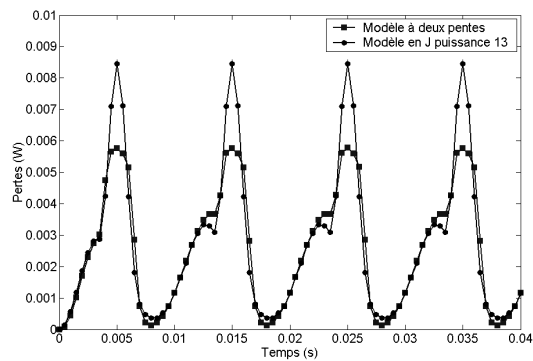
(a) pour $I_{\max} = 80 \text{ A} < I_c$ (b) pour $I_{\max} = 100 \text{ A} = I_c$ (c) pour $I_{\max} = 110 \text{ A} > I_c$ (d) pour $I_{\max} = 120 \text{ A} > I_c$

Fig. 5. Comparaison des pertes instantanées dans le tube supraconducteur.

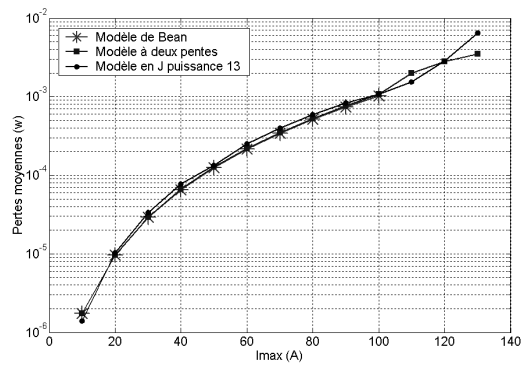


Fig. 6. Comparaison entre les pertes en fonction de l'amplitude du courant.

VII. CONCLUSION

Nous avons utilisé deux modèles pour le calcul des pertes en champ propre dans un tube supraconducteur. Pour modéliser l'amenée de courant, nous avons été conduit à résoudre un problème mathématique fortement non linéaire, de type Stefan. Les méthodes proposées prennent en compte de manière implicite la frontière libre, elles nous semblent robustes et rapides pour pouvoir estimer efficacement les pertes dans les supraconducteurs.

VIII. REFERENCES

- [1] M. MASLOUH, "Contribution à la modélisation numérique des matériaux supraconducteurs : problèmes non linéaires et homogénéisation", *Thèse*, LGEP, 1998.
- [2] B. DOUINE, D. NETTER, J. LEVEQUE, et A. REZZOUG, "AC losses in a BSCCO current lead : comparison between calculation and measurement", *IEEE Trans. on Applied Superconductivity.*, 2002.
- [3] A. BOSSAVIT, "Sur la modélisation des supraconducteurs : le modèle de l'état critique de Bean, en Trois Dimensions", *J. Phys. III*, 1993, pp. 373-396.