

THÈSE

préparée à :

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique
INRIA - Paris - Rocquencourt

Spécialité :

Mathématiques - Automatique

pour obtenir le grade de :

DOCTEUR

délivré par :

l'UNIVERSITÉ PARIS I - PANTHÉON - SORBONNE

présentée par

Nadir FARHI

Modélisation Minplus et Commande du Trafic de Villes Régulières

soutenue le :

03 juin 2008

devant le jury composé de :

<i>Président</i>	Jean-Marc BONNISSEAU	Professeur Université Paris I
<i>Directeurs</i>	Jean-Pierre QUADRAT Maurice GOURSAT	Directeur de recherche INRIA Directeur de recherche INRIA
<i>Rapporteurs</i>	Alain BENSOUSSAN Geert Jan OLSDER	Professeur Université de Dallas Professeur Université de Delft
<i>Examineurs</i>	Jean-Marc BONNISSEAU Guy COHEN Markos PAPAGEORGIOU	Professeur Université Paris I Directeur de recherche ENPC Professeur Université de Crète
<i>Invitée</i>	Neila BHOURI	Chargée de recherche INRETS

Modélisation Minplus et Commande du Trafic de Villes Régulières

Nadir FARHI

Remerciements

Je remercie d'abord Jean-Pierre QUADRAT et Maurice GOURSAT de m'avoir très bien accueilli à l'INRIA et de m'avoir beaucoup aidé. En particulier j'exprime toute ma reconnaissance à Jean-Pierre QUADRAT d'être à tout moment disponible durant tout ce travail et de m'avoir introduit à la recherche depuis son enseignement à l'université Paris 1 et mon stage de DEA que j'ai effectué sous sa direction. Je le remercie aussi de m'avoir appris beaucoup de choses.

Je remercie toute l'équipe du projet METALAU de l'INRIA de m'avoir bien accueilli.

Je remercie Stéphane GAUBERT pour les discussions que nous avons eues à l'INRIA et qui étaient très utiles pour moi.

Je remercie Neila BHOURI et Pablo LOTITO de m'avoir aidé durant le stage que j'ai effectué à l'INRETS.

Je remercie Alain BENSOUSSAN et Geert Jan OLSDER d'avoir accepté d'examiner ce travail, et d'avoir fait le déplacement des États-Unis et des Pays-Bas respectivement.

Je remercie Markos PAPAGEORGIOU de m'avoir fait l'honneur de participer au jury et d'avoir fait le déplacement de la Grèce.

Je remercie Jean-Marc BONNISSEAU et Guy COHEN de m'avoir fait l'honneur de participer au jury, mais aussi pour leurs cours de DEA de l'université Paris 1 qui m'étaient très utiles.

Nadir FARHI.

À la mémoire de mon père et de ma grand-mère.

Table des matières

1	Introduction	13
1.1	Les grandes classes de modèles de trafic	13
1.1.1	Modèles microscopiques	14
1.1.2	Modèles mécanique des fluides	14
1.1.3	Modèles cinétiques	16
1.1.4	Modèles d'automates cellulaires	16
1.2	Le contenu et les apports de la thèse	17
1.2.1	Chapitre 2 : La route circulaire	18
1.2.2	Chapitre 3 : Les systèmes additivement homogènes	19
1.2.3	Chapitre 4 : Deux routes circulaires avec une intersection	20
1.2.4	Chapitre 5 : Les réseaux réguliers de routes	22
1.2.5	Chapitre 6 : Un modèle macroscopique d'un système bimodal	23
2	Commande optimale et diagramme fondamental du trafic 1D	25
2.1	Introduction	25
2.2	Exemple d'un diagramme fondamental	26
2.3	Le modèle linéaire dans l'algèbre minplus.	27
2.3.1	L'algèbre minplus.	27
2.3.2	La théorie spectrale minplus	28
2.3.3	Commande optimale déterministe à états discrets	30
2.3.4	Le modèle de trafic 1D minplus linéaire	30
2.3.5	Première approximation du diagramme fondamental.	33
2.4	Le modèle de trafic 1D en terme de commande optimale stochastique	34
2.4.1	Programmation dynamique stochastique ergodique	34
2.4.2	Le modèle commande stochastique du trafic 1D.	35
2.4.3	Deuxième approximation du diagramme fondamental.	38
2.5	Le modèle jeu stochastique du trafic 1D.	39
2.5.1	Jeu stochastique ergodique	40
2.5.2	Le modèle jeu stochastique du trafic 1D.	42
2.5.3	Troisième approximation.	44
2.6	Un modèle de trafic 1D avec vitesse aléatoire	44
2.6.1	Quelques rappels	44
2.6.2	Le modèle stochastique	46

3	Systèmes additivement homogènes polyédraux	49
3.1	Introduction	49
3.2	Systèmes homogènes	50
3.2.1	Le problème de valeur propre d'un système homogène	52
3.2.2	Le chaos dans les systèmes homogènes	54
3.3	Systèmes homogènes monotones	56
3.3.1	Le problème de valeur propre et la programmation linéaire	59
3.3.2	Systèmes homogènes monotones affines par morceaux	60
3.4	Systèmes homogènes monotones convexes	60
3.4.1	Les systèmes homogènes monotones convexes correspondent à des problèmes de commande optimale stochastique	61
3.4.2	L'algorithme de Newton est global	62
3.4.3	Applications homogènes monotones convexes et affines par morceaux	63
3.5	Systèmes homogènes triangulaires périodiques	63
3.5.1	Systèmes linéaires périodiques	63
3.5.2	Systèmes linéaires paramétrés	66
3.5.3	Systèmes homogènes monotones convexes paramétrés	71
3.6	Conclusion	73
4	Modélisation d'intersections	75
4.1	Introduction	75
4.2	Les réseaux de Petri	78
4.3	Modélisation d'une route circulaire	80
4.3.1	Le modèle classique	80
4.3.2	Modélisation d'une route circulaire avec un retardateur	83
4.4	Intersection gérée par la priorité à droite	85
4.4.1	Intersection sans possibilité de tourner	87
4.4.2	Intersection avec possibilité de tourner	98
4.5	Contrôle d'intersection par des feux de signalisation	111
4.5.1	Intersection sans possibilité de tourner	111
4.5.2	Contrôle d'intersections avec possibilité de tourner	113
4.6	Conclusion	120
5	Construction de grands réseaux réguliers	121
5.1	Introduction	121
5.2	Deux routes circulaires avec deux intersections	122
5.2.1	Le modèle de réseau de Pétri et la dynamique minplus associée	122
5.2.2	Le diagramme fondamental global	123
5.3	Construction de réseaux de Pétri	129
5.3.1	Réseaux de Pétri non autonomes	129
5.4	Modélisation du trafic	133
5.4.1	Modélisation de la ville régulière.	134
5.4.2	Le diagramme fondamental	136
5.4.3	Les régimes transitoires et stationnaires	137

5.5	Le contrôle du trafic de villes régulières	138
5.5.1	Le contrôle en boucle ouverte	138
5.5.2	Le contrôle en boucle fermée sur l'état du trafic	140
5.5.3	Le temps de réponse	143
5.6	La boîte à outils Trafic Microscopique	144
5.6.1	Le module de trafic	147
5.7	Conclusion	150
6	Commande optimale du trafic bimodal	151
6.1	Introduction	151
6.2	Modélisation	152
6.2.1	La dynamique des véhicules particuliers	152
6.2.2	La dynamique des véhicules de transport en commun	153
6.2.3	Le problème linéaire quadratique	154
6.2.4	Le problème d'affectation	154
6.3	Résultats numériques	155
6.3.1	L'exemple	155
6.3.2	La robustesse du feedback	157
6.3.3	Comparaison avec [BL05]	157
6.4	Conclusion	167

Chapitre 1

Introduction

Le but de ce travail est la dérivation du diagramme fondamental du trafic, qui donne les relations entre la densité et le flot des véhicules, dans diverses situations : – une route circulaire, – une route avec croisement (sous forme d’un huit (8)), – un réseau régulier de routes. On utilise des modèles représentables par des réseaux de Pétri dont les dynamiques s’interprètent, dans les cas simples, en termes d’équations de la programmation dynamique. Le coût moyen optimal du problème de commande optimale associé correspond alors au flot et sa dépendance de la densité peut être analysée analytiquement ou numériquement avec une précision surprenante. Elle fait apparaître des phases au sens mécanique statistique qui sont clairement interprétables en terme de trafic.

Ce travail est divisé en six chapitres dont cette introduction. On rappelle ici quelques modèles classiques du trafic routier, puis on discute les apports de la thèse chapitre par chapitre.

1.1 Les grandes classes de modèles de trafic

Deux grandes classes d’approches de modélisation de trafic routier peuvent être distinguées : – l’approche macroscopique où le trafic est vu comme un gaz, avec une loi de comportement donnée par un diagramme appelé le diagramme fondamental du trafic, – l’approche microscopique où chaque véhicule a un comportement spécifique distingué des autres.

On commence par le modèle microscopique classique le plus intuitif qui est le modèle du “car-following” ou “follow-the-leader” [HMPR59, GHR61]. On rappelle aussi le modèle macroscopique du trafic le plus connu et le plus utilisé qui est le modèle de Lighthill, Witham et Richards [LW55, Ric56]. On discute ensuite le modèle cinétique dû à Prigogine et Herman [PH71]. On finit par le modèle très connu d’automates cellulaires de Nagel et Schreckenberg [NS92b] dans lequel les individus ont un comportement individuel très simplifié pour pouvoir simuler de grands systèmes et faire émerger des lois macroscopiques. Nos travaux relèvent de cette dernière philosophie.

1.1.1 Modèles microscopiques

Un modèle microscopique classique est celui de *follow-the-leader* [HMPR59, GHR61]. Ce modèle décrit le trafic sur une route par la façon avec laquelle le conducteur suit son prédécesseur sans possibilité de dépassement. Il est supposé que chaque véhicule suit son prédécesseur avec une relation de stimulation-réponse. L'accélération $d^2x_n(t+T)/dt^2$ du véhicule n à l'instant $t+T$, où T est le temps de réaction d'un conducteur, est donnée en multipliant par λ la réponse à la stimulation $dx_{n-1}(t)/dt - dx_n(t)/dt$, c'est à dire :

$$\frac{d^2x_n(t+T)}{dt^2} = \lambda \left[\frac{dx_{n-1}(t)}{dt} - \frac{dx_n(t)}{dt} \right], \quad (1.1)$$

où λ est généralement donné par :

$$\lambda = \frac{\lambda_0 [dx_n(t)/dt]^m}{[x_{n-1}(t) - x_n(t)]^l},$$

avec λ_0 une constante donnée et m et l des paramètres.

Dans le cas le plus simple où $m = l = 0$ c'est à dire $\lambda = \lambda_0$, on obtient, en intégrant l'équation (1.1) de zéro à l'infini, le modèle linéaire :

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = \lambda_0 [x_{n-1}(t) - x_n(t)],$$

qui s'écrit aussi :

$$v = \lambda_0 s + \beta,$$

où $s = x_{n-1} - x_n$ et β est une constante qui peut être déterminée par la condition de frontière $v = 0$ correspondant à $s = s_j$ associé à l'état de blocage. Sachant de plus que $s = 1/\rho$, on obtient :

$$v = \lambda_0 (s - s_j) = \lambda_0 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_j} \right).$$

En passant au régime stationnaire où le flot des véhicules q satisfait $q = v\rho$, on obtient le diagramme fondamental :

$$q = \lambda_0 (1 - \rho/\rho_j).$$

Dans un autre exemple important, lorsque $m = 0$ et $l = 1$, on obtient de la même façon, le diagramme fondamental suivant :

$$q = \lambda_0 \rho \ln\left(\frac{\rho_j}{\rho}\right).$$

1.1.2 Modèles mécanique des fluides

Le modèle macroscopique du trafic routier le plus connu est celui de Lighthill, Witham et Richards (LWR) [LW55, Ric56]. C'est un modèle d'écoulement qui décrit le trafic par une équation de conservation des véhicules et une équation de comportement (le diagramme fondamental). L'équation de conservation des véhicules s'écrit :

$$\partial_t \rho(x, t) + \partial_x q(x, t) = 0, \quad (1.2)$$

où on note par $q(x, t)$ le flot dans la position x de la route à l'instant t et par $\rho(x, t)$ la densité en x à l'instant t . Il est admis qu'en régime stationnaire (ou homogène) le flot q et la densité ρ sont liés par la relation fonctionnelle suivante :

$$q(\rho) = \rho \bar{v}, \quad (1.3)$$

où \bar{v} est la vitesse moyenne des véhicules sur la route. Pour compléter l'équation (1.2), LWR supposent l'existence d'une telle relation, donnée par une fonction f , même en situation de dépendance du temps et de l'espace. Le flot $q(x, t)$ et la densité $\rho(x, t)$ sont supposés liés par :

$$q(x, t) = f(\rho(x, t)) . \quad (1.4)$$

La fonction f , qui est donnée, est appelée le diagramme fondamental du trafic. Elle est l'analogue de la loi des gaz parfaits. En général, cette fonction partitionne l'axe des densités en deux parties : la partie où $f(\rho)$ croît avec ρ et la partie où $f(\rho)$ décroît avec ρ . On obtient alors le modèle :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x q = 0, \\ q = f(\rho). \end{cases} \quad (1.5)$$

En se donnant des conditions initiales et des conditions frontières, le modèle LWR (1.5) peut être intégré. De ce modèle on arrive à dériver des ondes cinématiques qui satisfont une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

L'équation (1.2) s'écrit aussi :

$$\partial_t \rho + V \partial_x \rho = 0, \quad (1.6)$$

avec

$$V_\rho = \partial_\rho q = \partial_\rho(\rho \bar{v}). \quad (1.7)$$

l'équation (1.6) admet des solutions de la forme :

$$\bar{\rho} = \rho(x - V_{\bar{\rho}} t), \quad (1.8)$$

qui sont des ondes cinématiques à vitesse de propagation égale à $V_{\bar{\rho}}$ donné par (1.7).

Puisque $V_\rho = \bar{v} + \rho \partial_\rho \bar{v}$ et que $\partial_\rho \bar{v}$ est négatif, on déduit que la vitesse V des ondes cinématiques obtenues vérifie : $V \leq \bar{v}$, et qu'elle varie en fonction de la densité des véhicules de la façon suivante :

- en faibles densités, on a $V > 0$,
- à la densité critique ρ_c vérifiant $q(\rho_c) = \max_\rho q(\rho)$, on a $V = 0$,
- en hautes densités ($\rho > \rho_c$), on a $V < 0$.

La vitesse V étant décroissante avec la densité des véhicules ρ , les ondes circulant à grandes vitesse correspondant à des zones de faible densité rattrapent les ondes en aval correspondant à des densités plus fortes en donnant une discontinuité appelée onde de choc.

1.1.3 Modèles cinétiques

Le premier modèle cinétique est celui de Prigogine et Herman [PH71]. C'est un modèle macroscopique plus précis que le modèle mécanique des fluides précédent. Ce modèle donne l'évolution de la densité des particules $\rho(t, x, v)$ comme une fonction du temps t , de la position d'une particule x et de sa vitesse v . Prigogine a modélisé le flot en combinant un flot libre, un terme de décélération et un terme de relaxation :

$$\partial_t q + v \partial_x q = S_\rho(q) + R_\rho(q). \quad (1.9)$$

Le terme d'accélération $S_\rho(q)$ est donné par :

$$S_\rho(q) = (1 - P(\rho))q \int_0^{v_m} (v' - v)q(v')dv',$$

et dépend de la probabilité de dépassement P qui est souvent supposée dépendre linéairement de ρ :

$$P(\rho) = 1 - \frac{\rho}{\rho_j},$$

où v_m est la vitesse maximale et ρ_j est la densité maximale de véhicules dans l'état de congestion.

Le terme de relaxation $R_\rho(q)$ est donné par :

$$R_\rho(q) = -\frac{q - q_0}{T(\rho)},$$

où q_0 est la distribution de la vitesse désirée, supposée de la forme :

$$q_0(x, v, t) = \rho(x, t)Q_0(v),$$

avec Q_0 est une fonction indépendante de t , et où T est le temps de relaxation dépendant de ρ :

$$T(\rho) = \frac{\rho}{\rho_j - \rho}.$$

Ce genre de modèle plus coûteux en terme de temps de calcul, par comparaison aux modèles de type LWR, est peu utilisé en pratique.

1.1.4 Modèles d'automates cellulaires

Ces modèles sont de nature microscopique avec une dynamique simple décrivant l'évolution de cellules. Un modèle d'automates cellulaires suppose que les deux espaces d'états et de temps sont discrets, et que les objets interagissant sont en nombre fini. Le premier modèle d'automate cellulaire appliqué au trafic routier est [NS92b] probablement le modèle de Cremer et Ludwig [CL86]. Le modèle le plus connu est celui de Nagel et Schreckenberg [NS92b].

Dans ce modèle une voie est représentée par un certain nombre de sections. à chaque instant, une section peut être libre ou occupée par un véhicule. L'état des cellules est remis à jour suivant des règles faisant intervenir les cellules voisines. Si la position et la vitesse

du $n^{\text{ème}}$ véhicule sont notées respectivement par x_n et v_n , alors la vitesse v peut prendre une des valeurs : $0, 1, \dots, v_{\max}$. La distance séparant les véhicules n et $n + 1$ à l'instant t est noté $d_n = x_{n+1} - x_n$. L'actualisation de l'état du système se fait à chaque instant en appliquant les règles ci-dessous :

1. *L'accélération* : $v_n \leftarrow \min\{v_n + 1, v_{\max}\}$,
2. *La décélération* : $v_n \leftarrow \min\{v_n, d_n - 1\}$,
3. *L'aléa* : $v_n \leftarrow \max\{v_n - 1, 0\}$ avec une probabilité p ,
4. *Le mouvement* : $x_n \leftarrow x_n + v_n$.

L'étape 3 prend en compte les différents comportements des conducteurs, et permet l'apparition spontanée des bouchons observée sur les réseaux réels. Dans le cas particulier où $v_{\max} = 1$, le modèle de Nagel et Schreckenberg déterministe est équivalent à l'automate cellulaire "règle-184" dans les notations de Wolfram [Wol86].

Les règles du modèle de Nagel et Schreckenberg sont appliqués dans l'ordre :

étape 1 \rightarrow étape 2 \rightarrow étape 3 \rightarrow étape 4 \rightarrow étape 1 \rightarrow ...

Pour une description réaliste du trafic [NS92a], on peut prendre la longueur d'une section égale à 7.5m, l'unité de temps à 1 seconde (ce qui correspond au temps de réaction d'un conducteur), et la vitesse maximale v_{\max} égale à 5 sections/seconde.

Des améliorations peuvent être apportées à ce modèle dans le but de modéliser certaines situations. Par exemple, pour modéliser les accidents Boccara et al. [BFZ97] applique l'étape 4 comme suit :

$$\text{Si } v_{n+1}(t) > 0 \text{ alors } x_n(t+1) = x_n(t) + v_n(t+1) + \Delta v,$$

où Δv est une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de moyenne p .

Un autre modèle classique d'automates cellulaires est le modèle de Biham-Middleton-Levine (BML) [BML92]. Dans ce modèle les véhicules se déplacent dans une ville à deux dimensions (2D) sur un tore. Deux types de véhicules sont considérés, disons bleus et rouges. Les véhicules rouges se déplacent horizontalement de gauche à droite alors que les bleus se déplacent verticalement de bas en haut. Une certaine densité ρ de véhicules dans la ville est considérée initialement.

La dynamique des véhicules est très simple : à chaque instant, d'abord les véhicules rouges essaient d'avancer vers la droite (sur le tore), puis les véhicules bleus essaient à leur tour d'avancer vers le haut. Un véhicule rouge (resp. bleu) peut avancer si la place à droite (resp. en haut) de lui est libre.

Les simulations numériques de ce modèle montre l'existence d'une densité critique en dessous de laquelle les véhicules circulent librement et au dessus de laquelle un blocage complet du système se produit. Ces régimes s'établissent après un régime transitoire de longueur fini. On verra apparaître ce genre de comportement dans nos modèles.

1.2 Le contenu et les apports de la thèse

Dans ce travail on présente des modèles microscopiques du trafic basés sur la programmation dynamique (et de ses extensions au cas non monotone). On utilise les notations

matricielles de l'algèbre minplus [BCOQ92] qui conduit à interpréter le calcul des flots moyens comme des problèmes de valeurs propres généralisés. Ces modèles sont établis dans la majorité des cas à l'aide de réseaux de Pétri [Mur89]. Notre approche est microscopique proche de celle des automates cellulaires [BBSS01, AS02, NS92b]. Comme en physique statistique [CSS00, FI96, FI01b, FI01a], on étudie les mouvements microscopique des véhicules pour dériver des lois macroscopiques.

1.2.1 Chapitre 2 : La route circulaire

Le deuxième chapitre est intitulé "Commande optimale et diagramme fondamental du trafic 1D". Le but de ce chapitre est de généraliser le modèle de l'algèbre minplus permettant de dériver le diagramme fondamental du trafic sur une route circulaire comme une valeur propre d'une matrice carrée minplus. Dans ce modèle chaque véhicule tente d'avancer sans dépassement avec une vitesse donnée en respectant une distance de sécurité donnée avec le véhicule qui le précède. La dynamique du système est linéaire minplus. C'est une équation de la programmation dynamique (EPD) d'un problème de contrôle optimal déterministe. Le flot moyen est la valeur propre de la matrice minplus de la matrice décrivant la dynamique. Cette valeur propre est égale au taux moyen d'accroissement de la fonction valeur de l'EPD correspondante. L'interprétation en terme de graphe de l'unique valeur propre du système linéaire, donne la dépendance de la valeur propre avec la densité des véhicules sur la route. C'est le diagramme fondamental du trafic. Il a deux phases : – une phase à faibles densités où les véhicules circulent librement, – une phase à hautes densités où on peut dire que ce sont les places vides qui se déplacent librement dans le sens inverse du trafic des véhicules.

On propose deux généralisations.

La première suppose que la vitesse de chaque véhicule dépend de la distance d'un véhicule au véhicule qui le précède. Cette hypothèse conduit à une dynamique déterministe interprétable en terme d'EPD d'un problème de commande stochastique. La résolution du problème ergodique donne le taux d'accroissement du système qui s'interprète comme le flot moyen des véhicules sur la route. De plus ce problème ergodique peut être résolu analytiquement. On obtient alors explicitement le flot comme fonction de la densité des véhicules, ce qui donne le diagramme fondamental du trafic de la route. Le flot est obtenu comme un minimum de fonctions affines de la densité. Ceci permet d'approcher par des fonctions concaves les diagrammes fondamentaux observés.

La deuxième généralisation a pour objectif d'affiner la première pour pouvoir approximer des diagrammes fondamentaux non nécessairement concaves. Pour cela on modifie la dynamique des véhicules en rajoutant des hypothèses affinant la modélisation de la distance de sécurité. On obtient alors une dynamique qui s'interprète comme une équation d'un jeu stochastique à deux joueurs. Le modèle reste toujours déterministe. De nouveau, la résolution de cette équation donne le taux d'accroissement du système qui s'interprète comme le flot moyen des véhicules sur la route. De nouveau le problème ergodique peut être résolu analytiquement et le diagramme fondamental du trafic de la route est obtenu explicitement. Le flot est donné cette fois comme une fonction min-max de fonctions affines de la densité des véhicules. Ceci permet d'avoir des diagrammes fondamentaux non

nécessairement concaves.

Dans la dernière partie de ce chapitre on rappelle un modèle de trafic à vitesse aléatoire basé sur l'algèbre minplus [LMQ03]. Le diagramme fondamental obtenu ressemble au diagramme donné par le modèle linéaire minplus avec un lissage paramétré par la loi de l'aléa.

1.2.2 Chapitre 3 : Les systèmes additivement homogènes

Ce troisième chapitre est intitulé "systèmes additivement homogènes polyédraux". Un système dynamique $x^{k+1} = f(x^k)$, où $x \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dit additivement homogène (ou homogène, en abrégé) si f est une application additivement homogène, c'est à dire si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda + x) = \lambda + f(x).$$

On définit le problème de valeur propre associé et on montre que le problème de valeur propre d'un système homogène dans \mathbb{R}^n se ramène à un problème de point fixe dans \mathbb{R}^{n-1} . On montre sur un exemple simple qu'un système homogène qui admet une valeur propre associée à deux vecteurs propres instables a un comportement chaotique. Cet exemple montre que le taux de croissance du système dynamique n'est pas toujours donné par une valeur propre.

Dans la deuxième partie on rappelle des résultats [GK95, GG98a, GG99, GG04] sur les systèmes homogènes monotones. Une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite monotone si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y),$$

où l'ordre sur \mathbb{R}^n est défini par :

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i.$$

Dans ce cas, l'application f est non expansive. Une notion de graphe lui y est associée qui permet de parler de connexité. Une analogie avec la théorie de Perron-Frobenius [Nus88] a été établie [GG98a, LMS01, Vir01]. On a le résultat important : une application homogène monotone fortement connexe admet une unique valeur propre égale au taux moyen d'accroissement (qui existe dans ce cas) des trajectoires du système dynamique correspondant.

Dans la troisième partie on rajoute une hypothèse de convexité de l'application f pour avoir une application homogène monotone et convexe. On rappelle d'abord un résultat de [AG01] qui permet d'interpréter f comme l'équation de la programmation dynamique d'une chaîne de Markov commandée. Dans ce cas l'itération sur les politiques de Howard donne un algorithme efficace toujours convergent pour calculer les taux de croissance.

On étudie ensuite une classe de systèmes homogènes non nécessairement monotones qu'on appelle systèmes triangulaires homogènes. On présente d'abord la version linéaire minplus où on appelle *système triangulaire homogène* un système composé de deux sous-systèmes linéaires minplus où l'un est paramétré par une sortie de l'autre. Le système obtenu reste homogène mais pas nécessairement monotone car la dépendance par rapport au paramètre a une propriété d'homogénéité mais pas de monotonie. Les deux principaux résultats sont : – tout système triangulaire homogène se comporte *asymptotiquement* comme un système linéaire minplus temps-variant *périodique*, et inversement – tout

système linéaire minplus temps-variant périodique est réalisable par un système triangulaire homogène. On généralise les deux principaux résultats au cas où le système triangulaire homogène est composé de deux sous-systèmes définis par des opérateurs de la programmation dynamique stochastique au lieu de systèmes linéaires minplus.

1.2.3 Chapitre 4 : Deux routes circulaires avec une intersection

Le quatrième chapitre est intitulé "modélisation d'intersections". L'objectif de ce chapitre est de modéliser le trafic sur deux routes avec une intersection et de discuter les phases apparaissant dans le diagramme fondamental correspondant. La modélisation utilisée au chapitre 2 consistant à suivre les véhicules (modélisation par les *ressources* dite lagrangienne en physique) n'est pas bien adaptée à cette nouvelle situation car l'ordre des positions des véhicules peut changer. Il est préférable de couper le réseaux en sections et de compter les nombres de véhicules entrant dans les sections (modélisation *compteur* dite eulerienne en physique).

Après avoir revisité le trafic sur une route circulaire avec une modélisation compteur représentée par un réseau de Pétri standard, on considère sur une route unique en forme de huit, avec une intersection gérée par la priorité à droite, des véhicules avançant sans possibilité de tourner. Pour modéliser ce système par un réseau de Pétri déterministe¹, on introduit des multiplicateurs négatifs sur les arcs. La dynamique du réseau de Pétri s'écrit $x^{k+1} = f(x^k)$ avec f homogène mais non monotone. L'étude de ce système a permis de déterminer des conditions initiales pour lesquelles les trajectoires de toutes les composantes du système sont croissantes. On montre que l'écart entre deux composantes des trajectoires reste borné. On montre également que la recherche de valeur propre se ramène sous l'hypothèse que le nombre de places dans la partie non prioritaire est supérieur au nombre de places dans la partie prioritaire (et d'autres hypothèses vérifiées par le problème de trafic) au calcul de la valeur propre d'un système minplus linéaire. On en déduit une formule explicite approximant le diagramme fondamental :

$$f = \max \left\{ 0, \min \left\{ d, 1/4, \frac{1}{1-r} - \frac{1+r}{1-r} d \right\} \right\},$$

lorsque $r < 1$, où r est le rapport entre la taille de la route prioritaire sur la taille de la route non prioritaire et d désigne la densité des véhicules.

Dans le cas $r < 1$, comme on le voit sur la forme du diagramme fondamental, on distingue quatre phases du trafic :

- *La phase libre* où les véhicules circulent sans gêne. Cette phase s'étale jusqu'à une densité de $1/4$. Durant cette phase les véhicules atteignent une distribution où l'intersection n'a aucun effet sur le trafic.
- *La phase de saturation* durant laquelle le flot est limité par la capacité de l'intersection qui est de $1/4$. Les véhicules atteignent un régime périodique où l'intersection sert tout le temps. La longueur d'intervalle de cette phase dépend du rapport r .

¹Ayant une dynamique déterminant de façon unique les trajectoires par opposition aux réseaux de Pétri généraux qui expriment seulement des contraintes sur la trajectoire.

- *La phase de récession* durant laquelle le flot se dégrade. Dans ce cas l'intersection n'arrive pas à servir tout le temps à cause de l'encombrement des véhicules à sa sortie (aux entrées des routes).
- *La phase de blocage* où la route non prioritaire se remplit complètement et bloque tout le système. Le flot est nul dans ce cas.

Le cas $r > 1$ n'est pas inclus dans l'analyse théorique du système, cependant, la compréhension du cas $r < 1$ permet de le déduire, et les simulations numériques confirment nos conclusions.

On étudie ensuite un modèle d'une route circulaire avec une intersection gérée par la priorité à droite, mais avec possibilité de tourner. Le modèle reste un réseau de Pétri déterministe avec des poids négatifs sur certains arcs, mais aussi des poids rationnels non entiers sur d'autres. En suivant le même raisonnement que pour le modèle précédent, on ramène le problème de valeur propre associé à une EPD d'un problème de commande stochastique. La résolution de cette équation donne les mêmes taux d'accroissement que dans le cas du modèle précédent, et donc les mêmes flots et les mêmes diagrammes fondamentaux. L'analyse qualitative des phases est complètement explicitée dans ce cas.

On s'intéresse ensuite au contrôle d'intersection par des feux de signalisation. On commence par un modèle d'une intersection sans possibilité de tourner. On considère deux routes circulaires qui s'intersectent, et on se propose de contrôler l'intersection par un feu de signalisation. L'intersection étant sans possibilité de tourner, le trafic n'est pas homogène dans ce réseau. On a donc deux densités à fixer et deux flots différents à calculer. On présente d'abord le modèle d'un feu de signalisation réalisé par un réseau de Pétri. Le réseau de Pétri correspondant est déterministe avec des poids négatifs sur certains arcs. La dynamique correspondante est un système triangulaire homogène vu dans le chapitre précédent. Et le diagramme fondamental de chaque route peut être obtenu et optimisé analytiquement.

On donne ensuite un modèle de deux routes circulaires avec une intersection avec possibilité de tourner gérée par un feu de signalisation. Dans ce cas, le but n'est pas de résoudre analytiquement le système, mais de faire des simulations numériques pour comparer trois politiques de gestion d'intersections, qui sont : – la priorité à droite, – le contrôle par un feu en boucle ouverte, – le contrôle par un feu en boucle fermée. Les résultats montrent que le contrôle par un feu en boucle ouverte améliore nettement le diagramme fondamental du trafic dans le cas des hautes densités. Cependant le contrôle en boucle fermée est meilleur et permet d'obtenir le diagramme optimal où le flot n'est limité que par la capacité des routes et de l'intersection. On montre aussi sur un exemple que le contrôle en boucle fermée distribue mieux (au sens de l'uniformité) les véhicules sur les deux routes que le contrôle en boucle ouverte. Dans ce dernier cas, le système peut même se stabiliser sur une distribution non symétrique.

Enfin on montre comment la programmation linéaire peut aider à déterminer une bonne politique de contrôle des feux de signalisation.

1.2.4 Chapitre 5 : Les réseaux réguliers de routes

Le cinquième chapitre s'intitule "construction de grands réseaux réguliers". L'objectif principal de ce chapitre est la construction de la dynamique du trafic sur de grands réseaux réguliers de routes et de calculer les diagrammes fondamentaux correspondants, que l'on qualifie de 2D. D'une façon surprenante les diagrammes fondamentaux présentent le même genre de phases que les réseaux simples décrits au chapitre précédent. L'amélioration apportée par la présence et la gestion optimale des feux de circulation est également étudiée.

On commence par étudier un modèle de deux routes circulaires et deux intersections gérées par la priorité à droite avec possibilité de tourner. On obtient numériquement des diagrammes fondamentaux de même forme que ceux obtenus avec une seule intersection. Le rapport entre le nombre de places dans la route prioritaire et la non prioritaire étant remplacé par la somme des tailles des routes prioritaires sur la somme des tailles des routes non prioritaires. Ce résultat qualitatif important se généralise aux cas des villes régulières étudiées dans la suite.

Pour pouvoir étudier le trafic sur des villes il faut construire la dynamique du système qui est très compliquée. On ne s'intéresse qu'aux villes régulières faites de routes en sens unique avec possibilité de tourner aux carrefours. Pour en faire un système fermé on considère que ces villes sont sur des tores. Pour faire la construction on introduit une théorie des systèmes pour les réseaux de Pétri déterministes généraux.

On montre que la dynamique de tout réseau de Pétri déterministe ayant des entrées-sorties peut être défini par trois matrices standards et trois matrices minplus. On définit ensuite sur ces 6-uplets les opérations correspondant à la : – mise en série, – mise en parallèle, – mise en contre réaction de réseaux de Pétri.

Pour modéliser le trafic routier, on introduit trois réseaux de Pétri élémentaires à partir desquels on peut construire le réseau de Pétri de la ville en utilisant les opérations introduites. Une boîte à outils Scilab permettant de faire la construction effective est décrite. Elle permet de construire la dynamique, de calculer les diagrammes fondamentaux et de visualiser le mouvement des véhicules.

On étudie ensuite l'influence des feux de signalisation sur les diagrammes fondamentaux obtenus. On applique d'abord les commandes en boucle ouverte et en boucle fermée étudiées déjà au chapitre précédent. Cette commande en boucle fermée est locale (la commande prise à chaque intersection ne dépend que de l'état du trafic sur les deux routes entrantes à cette intersection). Un contrôle en boucle fermée globale est aussi présenté pour ce modèle. C'est la stratégie TUC [DPA02] appliquée à des modèles macroscopiques qu'on a adaptée à notre modèle microscopique. Cette méthode est basée sur la commande optimale de systèmes linéaires à critère quadratique. L'état du système dans ce cas est le nombre de véhicules sur les routes, et les commandes sont les durées de vert associées aux feux de signalisation. La résolution du problème donne les temps de vert et de rouge des feux utilisés dans le modèle réseau de Pétri de la ville. Les améliorations importantes ainsi obtenues dans le cas de trafic dense sont clairement visibles sur les diagrammes fondamentaux obtenus.

Le diagramme fondamental ne concerne que les états d'équilibre. Il est aussi important

d'étudier les vitesses avec laquelle l'état d'équilibre est atteint et de juger les différentes commandes selon ce critère. Du point de vue des deux critères : – équilibre obtenu, – temps de réponse, les feedbacks locaux semble s'imposer compte tenu de leur facilité d'implémentation.

1.2.5 Chapitre 6 : Un modèle macroscopique d'un système bimodal

Le sixième et dernier chapitre est intitulé "commande optimale du trafic bimodal". L'objectif de ce chapitre est d'étendre la stratégie TUC [DPA02] de contrôle de trafic unimodal au cas bimodal : – véhicules particuliers, – véhicules de transport en commun. On résout un problème LQ autour d'une solution nominale favorisant la circulation des bus. La trajectoire nominale est obtenue en résolvant des problèmes d'affectations statiques du trafic des véhicules particuliers sur plusieurs tranches horaires. On modifie ces affectations autour desquelles on régule en diminuant le trafic souhaité des véhicules particuliers au moment du passage des bus.

Les résultats numériques obtenus sur un exemple simple, sont satisfaisants au sens où les routes se vident de véhicules particuliers pour laisser passer les véhicules de transport en commun. On montre que le contrôle est robuste par des simulations en introduisant des perturbation sur les trajectoires des deux modes de trafic. Enfin on fait une comparaison avec une étude récente [BL05] qui avait le même objectif mais utilisait une méthode différente.

Chapitre 2

Commande optimale et diagramme fondamental du trafic 1D

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est la modélisation du trafic sur une route. La qualité de la modélisation est jugée sur le diagramme fondamental donnant la relation entre le flot et la densité des véhicules. On fournit des modèles conduisant à des diagrammes fondamentaux affines par morceaux généralisant une version modifiée du modèle linéaire en algèbre min-plus donné dans [LMQ03]. Ces modèles décrivent tous la dynamique des véhicules sur la route par une équation de type programmation dynamique d'un problème de commande optimale déterministe ou stochastique ou de jeu stochastique. Le flot moyen des véhicules est alors obtenu comme le coût moyen par une unité de temps du problème de commande ou de jeu correspondant. Le flot moyen est calculé en fonction de la densité des véhicules sur la route en résolvant les équations de la programmation dynamique correspondantes.

On commence par rappeler le modèle existant, qui est linéaire dans l'algèbre min-plus. Ce modèle contient deux paramètres qui sont la vitesse désirée fixe et commune à tous les véhicules, et la distance de sécurité entre les véhicules. On étudie la dépendance du diagramme fondamental par rapport à ces deux paramètres.

On étend d'abord ce modèle en supposant que la vitesse d'un véhicule dépend de sa distance au véhicule qui le précède. On obtient alors des dynamiques qui s'interprètent comme des équations de la programmation dynamique de problèmes de contrôle optimal stochastique, qu'on résout à l'aide de l'algorithme de Howard (itération sur les politiques). Cette première généralisation permet d'approximer tout diagramme fondamental par une application concave affine par morceaux.

La deuxième généralisation introduit une dynamique qui s'exprime non seulement avec l'opérateur min mais aussi avec le max. Cette dynamique s'interprète comme l'équation de la programmation dynamique d'un jeu stochastique. Dans ce cas, on obtient un diagramme fondamental affine par morceaux qui n'est plus nécessairement concave.

Dans la dernière section on rappelle (voir [LMQ03]) l'extension du modèle linéaire

dans d'algèbre minplus qui est un modèle déterministe au cas où les vitesses des véhicules sont stochastiques. On obtient des diagrammes fondamentaux qui ne sont plus affines par morceaux mais qui sont des versions lissées du cas déterministe.

2.2 Exemple d'un diagramme fondamental

On présente ici un exemple d'un diagramme fondamental (figure 2.1) observé expérimentalement qui nous servira de référence pour juger de nos approximations. Il correspond à de mesures réelles effectuées sur un tronçon à trois voies de l'autoroute A6.

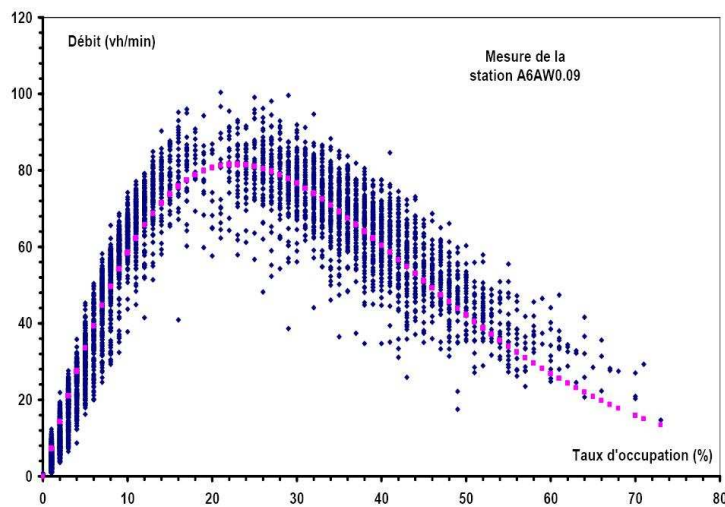


FIG. 2.1 – Diagramme fondamental observé sur l'autoroute A6.

Sur ce diagramme, en abscisse on a le taux d'occupation de la route en pourcentage qui peut être vu comme une densité normalisée, et en ordonnée le flot des véhicules en nombre de véhicules par minute. Pour pouvoir exprimer le diagramme dans un système de coordonnées sans unité que l'on appellera diagramme normalisé, on fixe arbitrairement à un (1) la *vitesse libre* (c'est la vitesse moyenne des véhicules à faible densité qui est la pente à l'origine du diagramme fondamental). Cela fixe l'échelle des flots qui peut s'interpréter dans cette échelle comme des pourcentages par rapport au flot maximum qui est de 1. Ce flot de 1 est atteint lorsque le taux d'occupation vaut 1 et que les véhicules à cette densité circulent librement¹.

Si on prend par exemple comme densité faible $d = 0.1$, le flot moyen correspondant est de 60 véh./min., ce qui donne un flot majorant de 600 véh/min. En divisant par 600 l'axe des flots de ce diagramme on obtient le diagramme normalisé.

On peut lire aussi sur ce diagramme : – le flot maximal : $f_m = 0.13$, – le taux d'occupation critique : $d_c = 0.22$. On voit également l'approximation tracée en rose correspondant

¹Ce cas bien sûr n'arrive jamais en pratique lorsqu'on laisse conduire des conducteurs humains. On peut néanmoins imaginer des routes automatisées où tous les véhicules seraient coordonnés approchant cette performance.

à la formule empirique :

$$f = dve^{-(1/a)(d/d_c)^a},$$

où v est la vitesse libre et a est un paramètre (pris ici égal à 2).

Le but de chacune des trois sections suivantes est de présenter des modèles de trafic approximant de mieux en mieux le diagramme fondamental de la figure 2.1. Pour cela on se contente de comparer ces approximations à une interpolation (jugée suffisante) de ce diagramme par une fonction affine par morceaux. Cette interpolation est montrée sur la figure 2.2.

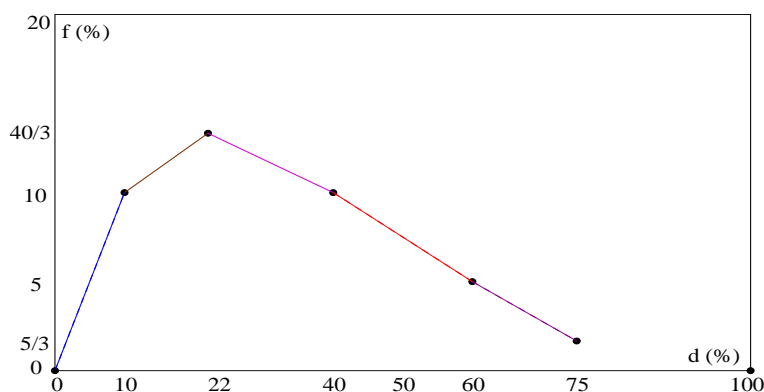


FIG. 2.2 – Interpolation du diagramme de la figure 2.1 par une fonction affine par morceaux.

2.3 Le modèle linéaire dans l'algèbre minplus.

2.3.1 L'algèbre minplus.

On rappelle que l'algèbre minplus est le semi-anneau commutatif idempotent $(\mathbb{R}_{\min}, \oplus, \otimes)$ où $\mathbb{R}_{\min} \triangleq \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (le symbole \triangleq se lit : égale par définition à), et où les deux opérations \oplus et \otimes sont définies par : $a \oplus b \triangleq \min\{a, b\}$ et $a \otimes b \triangleq a + b$ pour tous a et b dans \mathbb{R}_{\min} . Plus précisément les opérations ont les propriétés suivantes :

- L'opération \oplus est associative, commutative, idempotente ($a \oplus a = a \forall a \in \mathbb{R}_{\min}$) et admet un élément neutre noté $\varepsilon = +\infty$ qui est absorbant ($\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon, \forall a \in \mathbb{R}_{\min}$).
- $\mathbb{R}_{\min}^* = \mathbb{R}_{\min} \setminus \{\varepsilon\} = \mathbb{R}$ muni de l'opération \otimes définit un groupe commutatif dont l'élément neutre 0 est noté e .
- L'opération \otimes est distributive par rapport à \oplus .

L'ordre naturel sur \mathbb{R}_{\min} est défini par : $a \leq b$ si $a \oplus b = a$. L'addition minplus n'est pas simplifiable, c'est à dire : $a \oplus b = a \oplus c \not\Rightarrow b = c$, et en particulier : $a \oplus b = a \not\Rightarrow b = \varepsilon$. On a aussi $\max(a, b) = a + b - \min(a, b), \forall a, b \in \mathbb{R}$ que l'on notera $(a \otimes b)/(a \oplus b)$.

La structure $(\mathbb{R}_{\min}, \oplus, \otimes)$ sur les scalaires induit une structure de semi-anneau idempotent (dioïde) sur l'ensemble des matrices carrées à éléments dans \mathbb{R}_{\min} . Pour A et B deux matrices minplus $n \times n$, l'addition \oplus est définie par :

$$(A \oplus B)_{ij} \triangleq A_{ij} \oplus B_{ij}, \quad \forall i, j,$$

et le produit \otimes est défini par :

$$(A \otimes B)_{ij} \triangleq \bigoplus_k [A_{ik} \otimes B_{kj}]. \quad (2.1)$$

On note aussi l'élément zéro et l'élément unité par ε et e respectivement.

2.3.2 La théorie spectrale minplus

On rappelle dans ce paragraphe la définition d'une valeur propre dans l'algèbre minplus et son interprétation graphique. On rappelle également le résultat assurant l'existence et l'unicité d'une valeur propre d'une matrice carrée minplus irréductible et le lien existant entre la valeur propre d'une matrice carrée minplus A irréductible et le taux d'accroissement du système dynamique linéaire minplus $x^{k+1} = A \otimes x^k$.

Définition 1. On appelle graphe associé à une matrice carrée minplus A noté $\mathcal{G}(A)$ le graphe dont les nœuds correspondent aux lignes de A , et dont les arcs correspondent aux entrées non nulles ($\neq \varepsilon$) de A . Si $A_{ij} \neq \varepsilon$, alors il existe un arc allant du nœud j vers le nœud i dans $\mathcal{G}(A)$.

Exemple 1. Soit A la matrice carrée minplus donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & e & \varepsilon \\ -2 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ 3 & e & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Le graphe associé à A est le graphe de la figure 2.3.

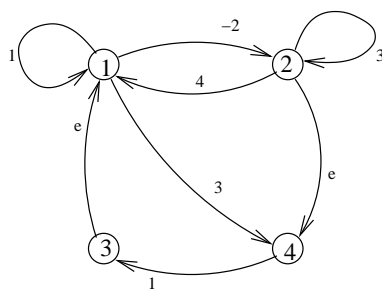


FIG. 2.3 – Le graphe associé à A .

Sur le graphe $\mathcal{G}(A)$ associé à une matrice carrée minplus A , un chemin est une suite de nœuds tels qu'il existe un arc joignant deux nœuds successifs. Par exemple : $(1, 2, 4, 3)$, $(1, 1, 2)$, \dots . Un circuit dans $\mathcal{G}(A)$ est un chemin dont le premier nœud coïncide avec le dernier. Par exemple : $(1, 2, 3, 4, 1)$, $(1, 1)$, \dots . On appelle poids d'un chemin p , que l'on note $|p|_w$ le produit minplus (qui est la somme ordinaire) des poids de ses arcs. On appelle

longueur d'un chemin p , que l'on note $|p|_l$ le nombre d'arcs qui forment le chemin. Un chemin représenté par une suite de n nœuds est de longueur $n - 1$. Les poids et longueur d'un circuit sont définis d'une façon analogue.

Les matrices $A^n, n \geq 0$ définies par :

$$A^n := \underbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A}_{n \text{ fois}}$$

donnent les poids minimums des chemins de longueur n dans le graphe $\mathcal{G}(A)$. $(A^n)_{ij}$ donne le poids minimum des chemins de longueur n allant du nœud j vers le nœud i ; par exemple : $(A^2)_{13} = 4$, $(A^3)_{11} = (1 \otimes 1 \otimes 1) \oplus ((-2) \otimes 4 \otimes 1) \oplus (3 \otimes 1 \otimes e) \oplus ((-2) \otimes 3 \otimes 4) = 3, \dots$

Les matrices \bar{A}^n définies par $\bar{A}^n := \bigoplus_{k=0}^n A^k$ donnent les poids minimums des chemins de longueur inférieure ou égale à n sur le graphe $\mathcal{G}(A)$. $(\bar{A}^n)_{ij}$ donne le poids minimum des chemins de longueur $\leq n$ allant du nœud j vers le nœud i ; par exemple : $(\bar{A}^2)_{14} = 3 \oplus ((-2) \otimes e) \oplus (1 \otimes 3) = -2$.

La matrice A^* définie par $A^* \triangleq \bigoplus_{k \geq 0} A^k$, si elle existe, donne les poids minimum des chemins de longueur quelconque sur $\mathcal{G}(A)$. $(A^*)_{ij}$ donne le poids minimum des chemins de longueur quelconque allant du nœud j vers le nœud i .

Si le graphe $\mathcal{G}(A)$ associé à une matrice carrée minplus A de taille $n \times n$ n'a aucun circuit de poids négatif, alors [BCOQ92] la matrice A^* existe, et on a $A^* = \bigoplus_{k=0}^{n-1} A^k$. Dans l'exemple précédent, $\mathcal{G}(A)$ n'a aucun circuit de poids négatif, donc A^* existe, elle est donnée par :

$$A^* = \bar{A}^3 = \begin{bmatrix} e & 1 & e & 1 \\ -2 & e & -2 & -1 \\ -1 & 1 & e & 1 \\ -2 & e & -2 & e \end{bmatrix}$$

Définition 2. Le nombre $\mu \in \mathbb{R}_{\min}$ est une valeur propre pour une matrice carrée minplus A s'il existe un vecteur non nul ($\neq \varepsilon$) $x \in \mathbb{R}_{\min}^n$ appelé vecteur propre tel que : $\mu \otimes x = A \otimes x$.

Théorème 1. [BCOQ92] Si le graphe $\mathcal{G}(A)$ associé à la matrice A est fortement connexe, alors il existe une et une seule valeur propre μ pour A donnée par le minimum des poids moyens des circuits du graphe $\mathcal{G}(A)$, c-à-d :

$$\mu = \min_{c \in \mathcal{C}} \frac{|c|_w}{|c|_l}$$

où \mathcal{C} est l'ensemble des circuits du graphe $\mathcal{G}(A)$, $|c|_w$ est le poids d'un circuit c qui est le produit minplus (ou la somme ordinaire) des poids de ses arcs, et $|c|_l$ est la longueur de c qui est le nombre d'arcs du circuit.

Théorème 2. [BCOQ92] Le système dynamique linéaire minplus associé à une matrice carrée minplus A dont le graphe est fortement connexe, défini par :

$$x^{k+1} = A \otimes x^k,$$

est asymptotiquement périodique, c'est à dire :

$$\exists T, K, \mu : \forall k \geq K : A^{k+T} = \mu^T \otimes A^k.$$

2.3.3 Commande optimale déterministe à états discrets

Etant donné : – un ensemble d'états \mathcal{X} fini de cardinal n , – un ensemble de commandes \mathcal{U} fini, – une famille de matrices de transition déterministe $(M^u)_{u \in \mathcal{U}}$ (matrices booléennes ayant un coefficient non nul par ligne, de taille $n \times n$), – une famille de vecteurs de coût c^u (de taille n) indexés par la commande, on définit le problème de commande optimale déterministe en horizon infini avec coût non actualisé par :

$$\min_{s \in \mathcal{S}} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} c_{x^k}^{u^k}, \quad (2.2)$$

où x^{k+1} est l'indice non nulle de la ligne x^k dans la matrice M^{u^k} , x^0 est donné, et \mathcal{S} l'ensemble des stratégies en boucle fermée sur l'état (feedback). Un feedback s est une application qui associe à un état x une commande u ($u^k = s(x^k)$).

Dans le cas irréductible où il existe une suite de commande permettant de joindre deux états quelconques, l'équation de la programmation dynamique associée à ce problème est :

$$v_x + \mu = \min_{u \in \mathcal{U}} \{ [M^u v]_x + c_x^u \}, \quad (2.3)$$

où μ est le coût moyen par unité de temps associé au problème, définie par :

$$\mu = \min_{s \in \mathcal{S}} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} c_{x^k}^{u^k}. \quad (2.4)$$

Cette équation peut s'écrire dans l'algèbre minplus. à une matrice booléenne M de l'algèbre ordinaire on associe la matrice booléenne de l'algèbre minplus \hat{M} en remplaçant 0 par ε et 1 par e . On définit la matrice carrée minplus A par :

$$A = \bigoplus_{u \in \mathcal{U}} \hat{M}^u \otimes \text{diag}(c^u).$$

On peut alors vérifier que l'équation (2.3) s'écrit :

$$\mu \otimes v = A \otimes v. \quad (2.5)$$

Ceci signifie que μ est une valeur propre minplus pour A et v est un vecteur propre associé à μ . Le théorème (2) dit que si le graphe associé à A est fortement connexe, alors le système dynamique $v^{k+1} = A \otimes v^k$ est asymptotiquement périodique, et que le taux moyen d'accroissement par unité de temps, défini par $\lim_{k \rightarrow \infty} v^k/k$ est l'unique valeur propre μ de A , donnée par l'équation de la programmation dynamique (2.5).

2.3.4 Le modèle de trafic 1D minplus linéaire

Sur une route circulaire à une voie, on prend comme unité de distance la taille moyenne d'un véhicule. On considère n véhicules circulant sur une route de longueur m (c'est-à-dire pouvant contenir m véhicules). La densité d des véhicules dans la route est donc donnée par $d = n/m$. On suppose que les véhicules ont une même vitesse désirée v et que chaque

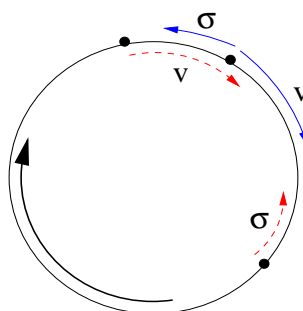


FIG. 2.4 – Trafic sur une route circulaire.

véhicule doit respecter une distance de sécurité σ le séparant du véhicule qui le précède. Pour toute unité de temps, les véhicules essaient de parcourir une distance égale à la vitesse désirée v , tout en respectant la distance de sécurité σ avec les véhicules qui les précèdent. Si on note la distance parcourue par le véhicule i à l'instant k par x_i^k , alors cette distance satisfait :

$$x_i^{k+1} = \begin{cases} \min\{v + x_i^k, x_{i+1}^k - \sigma\} & \text{si } i < n, \\ \min\{v + x_i^k, x_1^k + m - \sigma\} & \text{si } i = n. \end{cases} \quad (2.6)$$

Le taux moyen d'accroissement par unité de temps du système (2.6) s'interprète comme la vitesse moyenne des véhicules dans la route. Le système (2.6) s'écrit en algèbre minplus comme suit :

$$x_i^{k+1} = \begin{cases} vx_i^k \oplus (e/\sigma)x_{i+1}^k & \text{si } i < n, \\ vx_i^k \oplus (m/\sigma)x_1^k & \text{si } i = n. \end{cases} \quad (2.7)$$

La dynamique (2.7) est linéaire en algèbre minplus, et s'écrit matriciellement :

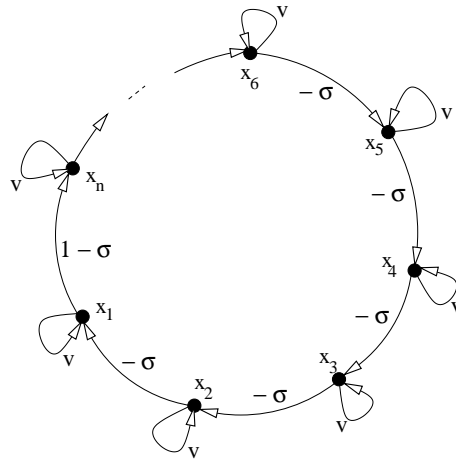
$$x^{k+1} = A \otimes x^k, \quad (2.8)$$

où A est donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} v & e/\sigma & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & v & e/\sigma & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & & e/\sigma \\ m/\sigma & \varepsilon & \varepsilon & & v \end{bmatrix}.$$

Théorème 3. La valeur propre \bar{v} de la matrice A associée au système (2.8) s'interprète comme la vitesse moyenne des véhicules. Elle est donnée par :

$$\bar{v} = \min \left\{ v, \frac{m - n\sigma}{n} \right\}.$$

FIG. 2.5 – Le graphe associé à A .

Démonstration. Le graphe associé à la matrice minplus A est donnée sur la figure (2.5). Le théorème (1) donne la valeur propre de A comme le minimum des poids moyen des circuits du graphe associé à A . Les circuits élémentaires du graphe de la figure (2.5) sont :

- le circuit passant par toutes les places, de poids moyen égal à $(m - n\sigma)/n$,
- les boucles de poids v .

Interprétation. La valeur propre \bar{v} de A coïncide avec le taux moyen d'accroissement par unité de temps du système (2.8) qui s'interprète comme la vitesse moyenne des véhicules sur la route ■

Corollaire 1. *Le diagramme fondamental de la route circulaire dont le trafic est décrit par la dynamique (2.6) est donné par :*

$$f = \min\{vd, 1 - \sigma d\}.$$

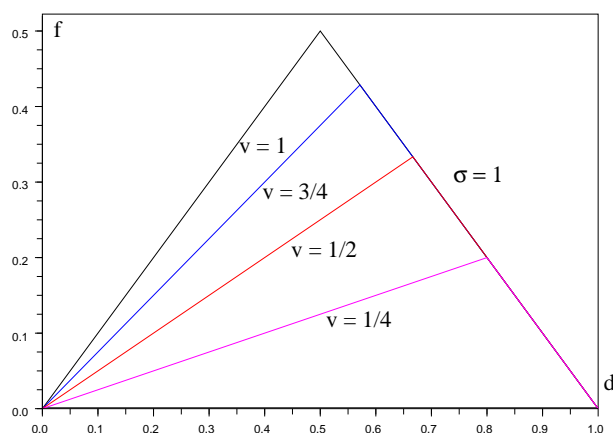
Démonstration. On sait que le flot moyen f est donné par la vitesse moyenne \bar{v} multipliée par la densité moyenne d :

$$f = d\bar{v}. \quad (2.9)$$

Dans cet exemple, la densité des véhicules sur la route d est donnée par le nombre de véhicules n divisé par la longueur de la route m , c'est à dire : $d = n/m$. En remplaçant \bar{v} dans (2.9) par sa valeur donnée par le théorème (3), On obtient le résultat ■

Pour que ce modèle ait un sens dans le trafic, la distance de sécurité doit être fixée à 1 ($\sigma = 1$), car c'est la seule valeur qui vérifie $d = 1 \Rightarrow f = 0$. Sur la figure (2.6) on montre la dépendance de ce diagramme de la vitesse désirée v . Pour cela, on fixe σ à 1 et on fait varier v .

La figure 2.6 montre que le diagramme donné pour ce modèle, qui est une modification du modèle de [LMQ03], n'est pas très flexible. En effet, on le présente ici dans le but d'introduire sa généralisation dans les sections suivantes qui sont plus flexibles. Pour approximer le diagramme réel de la figure 2.1, on revient à la version initiale du modèle minplus de [LMQ03] qui donne un résultat satisfaisant. Dans la version initiale, on suppose que la route est de longueur 1, que les n véhicules sont des points ponctuels et que c'est

FIG. 2.6 – Dépendance du diagramme fondamental de la vitesse désirée v .

la distance de sécurité σ entre les véhicules qui détermine leur densité d sur la route. La densité d est donc donnée par $n\sigma$ divisé par la longueur de la route qui est 1. On a donc $d = n\sigma$. La vitesse moyenne dans ce cas est donnée par :

$$\bar{v} = \min \left\{ v, \frac{1 - n\sigma}{n} \right\}.$$

Ce qui donne le diagramme fondamental suivant :

$$f = \min\{vd, \sigma(1 - d)\}. \quad (2.10)$$

2.3.5 Première approximation du diagramme fondamental.

On se basant sur le diagramme (2.10), on approxime le diagramme réel de la figure 2.1 en fixant les deux paramètres du modèle à $v = 1$ et $\sigma = 0.17$. Cette approximation est montrée sur la figure 2.7.

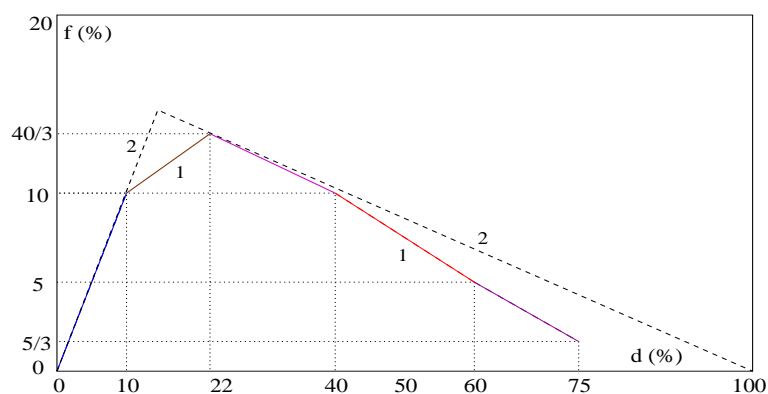


FIG. 2.7 – L'approximation par un modèle d'algèbre minplus. 1 : le modèle réel, 2 : l'approximation.

2.4 Le modèle de trafic 1D en terme de commande optimale stochastique

Dans cette section on fait des rappels sur la commande optimale stochastique ergodique que l'on voit comme une généralisation du problème spectral à des opérateurs non linéaires (monotones additivement homogènes concaves) exprimable en terme matriciel comme la composition d'une matrice dans l'algèbre ordinaire et d'une matrice dans l'algèbre minplus. On montre ensuite qu'une extension naturelle du modèle de trafic de la section précédente, dans lequel la vitesse d'un véhicule dépend de la distance avec le véhicule qui le précède s'interprète en terme de commande stochastique. Le diagramme fondamental se ramène alors au calcul de cette valeur propre généralisée que l'on arrive, dans ce cas, à calculer explicitement. On obtient ainsi par ce modèle la possibilité d'approximer le diagramme fondamental par une fonction concave polyédrale quelconque.

2.4.1 Programmation dynamique stochastique ergodique

Etant donné : – un ensemble d'états \mathcal{X} fini en nombre n , – un ensemble de commandes \mathcal{U} fini en nombre r , – une famille de matrice de transition de chaînes de Markov $(M^u)_{u \in \mathcal{U}}$ (matrice de taille $n \times n$ à coefficients positifs ayant leurs sommes en ligne égales à 1), – une famille de vecteurs (de taille n) de coût c^u indexés par la commande, on définit le problème de commande optimale stochastique en horizon infini avec coût non actualisé par :

$$\mu = \min_{s \in \mathcal{S}} \mathbb{E} \left\{ \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} c_{x^k}^u \right\} \quad (2.11)$$

où $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ désigne l'état de la chaîne de Markov et s est un feedback qui, à un état x , associe une commande u (on a donc $u^k = s(x^k)$).

L'équation de la programmation dynamique stochastique associée à ce problème est :

$$\mu + v_x = \min_{u \in \mathcal{U}} \{ [M^u v]_x + c_x^u \}. \quad (2.12)$$

L'équation (2.12) peut s'écrire matriciellement en combinant un opérateur linéaire de l'algèbre standard avec un opérateur linéaire de algèbre minplus :

$$\mu \otimes v = D \otimes (Hv), \quad (2.13)$$

où les matrices H et D sont définies par :

– Les lignes de H est l'ensemble de toutes les lignes des matrices M^u , $u \in \mathcal{U}$:

$$H = \begin{bmatrix} M_{1\bullet}^1 \\ M_{1\bullet}^2 \\ \dots \\ M_{n\bullet}^m \end{bmatrix}.$$

C'est donc une matrice ayant rn lignes et n colonnes.

- La matrice minplus D est constituée de l'ensemble des vecteurs de coût :

$$D = \begin{bmatrix} c_1^\bullet & \varepsilon & \cdot & \varepsilon \\ \varepsilon & c_2^\bullet & \varepsilon & \varepsilon \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon & \cdot & \varepsilon & c_n^\bullet \end{bmatrix}$$

C'est donc une matrice à n lignes et rn colonnes

On voit que μ est une valeur propre additive de l'opérateur (que l'on appellera opérateur de la programmation dynamique stochastique (OPDS)) $v \mapsto D \otimes (Hv)$ et que v est un vecteur propre associé à μ .

On dira que cet opérateur est *irréductible* dans le cas où tous les états sont *connectés* dans le graphe associé. Ce dernier est composé de noeuds de décision en nombre n , de noeuds de hasard en nombre nr , des arcs de décision définis par la matrice D : il existe un arc² de i à j si $D_{ij} \neq \varepsilon$ et des arcs de hasard définis par la matrice H : il existe un arc de j à k si $H_{jk} \neq 0$.

On remarque que cet opérateur est additivement homogène, monotone et concave. Ces opérateurs ont été étudiés récemment avec beaucoup de précision dans [AG01, GG04]. Un corollaire de ces deux références est le théorème suivant.

Théorème 4. *Dans le cas où l'opérateur de la programmation dynamique stochastique est irréductible, le problème spectral*

$$\mu \otimes v = D \otimes (Hv),$$

admet une solution (μ, v) où v est définie à une constante additive près pas nécessairement de façon unique et μ est unique et vérifie :

$$\mu = \min_{s \in \mathcal{S}} \mathbb{E} \left\{ \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} c_{x_k}^{u_k} \right\}.$$

On déduit que le taux moyen d'accroissement par unité de temps du système $v_x^{k+1} = \min_{u \in \mathcal{U}} \{ [M^u v^k]_x + c_x^u \}$, défini par $\lim_{k \rightarrow \infty} v^k / k$ est l'unique valeur propre additive μ du système (2.23).

2.4.2 Le modèle commande stochastique du trafic 1D.

Dans cette section on généralise le modèle du trafic 1D de la section précédente en ajoutant aux deux contraintes : – limitation de vitesse, – respect d'une distance de sécurité, une contrainte sur la vitesse d'approche des véhicules. La distance parcourue par un véhicule en une étape reste inférieure à une fraction de la distance qui le sépare du véhicule de devant. On montre que ces trois contraintes sont affines et conduisent à un modèle interprétable en terme de commande stochastique. Pour ce problème, on est capable de calculer explicitement la valeur propre et d'en déduire explicitement le diagramme fondamental. On

²On inverse ici la direction des arcs par rapport à la convention prise dans le paragraphe précédent pour garder l'intuition de la programmation dynamique stochastique en horizon fini écrite traditionnellement en arrière pour des raisons de causalité (bien qu'ici elle apparaîtra avec le temps inversé).

peut ainsi obtenir une meilleure approximation du diagramme observé. L'approximation obtenue reste néanmoins concave.

Plus précisément, en notant par x^k la distance parcourue par un véhicule jusqu'à l'instant k et par y^k la distance parcourue par le véhicule le précédant, on a les contraintes :

- Limitation de vitesse :

$$x^{k+1} \leq x^k + v .$$

- Respect d'une distance de sécurité :

$$x^{k+1} \leq y^k - \sigma .$$

- Limitation de la vitesse par la distance entre les véhicules :

$$x^{k+1} \leq x^k + \beta(y^k - x^k), \quad 0 \leq \beta \leq 1 .$$

Ces trois contraintes peuvent s'écrire :

$$x^{k+1} \leq x^k + \alpha + \beta(y^k - x^k), \quad 0 \leq \beta \leq 1 , \quad (2.14)$$

en effet : - la première condition est obtenue en posant $\alpha = v, \beta = 0$, - la deuxième en posant $\alpha = -\sigma, \beta = 1$, - la troisième en posant $\alpha = 0$.

D'une façon plus générale, on suppose que chaque véhicule doit satisfaire un ensemble \mathcal{U} de contraintes de trafic du type (2.14). En indexant par i les véhicules et en notant x_i^k la distance parcourue par le véhicule i jusqu'à l'instant k on a la dynamique du trafic (sur la route circulaire de longueur m , et en notant $d = n/m$ la densité de véhicules) :

$$x_i^{k+1} = \begin{cases} \min_{u \in \mathcal{U}} \{x_i^k + \alpha_u + \beta_u(x_{i+1}^k - x_i^k)\} & \text{si } i < n, \\ \min_{u \in \mathcal{U}} \{x_n^k + \alpha_u + \beta_u(m + x_1^k - x_n^k)\} & \text{si } i = n, \end{cases} \quad (2.15)$$

ce qui s'écrit en utilisant $m = n/d$:

$$x_i^{k+1} = \begin{cases} \min_{u \in \mathcal{U}} \{\alpha_u + (1 - \beta_u)x_i^k + \beta_u x_{i+1}^k\} & \text{si } i < n, \\ \min_{u \in \mathcal{U}} \{\alpha_u + n\beta_u/d + (1 - \beta_u)x_n^k + \beta_u x_1^k\} & \text{si } i = n, \end{cases} \quad (2.16)$$

On définit les matrices M^u et les vecteurs c^u pour $u \in \mathcal{U}$ par :

$$M^u = \begin{bmatrix} 1 - \beta_u & \beta_u & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 - \beta_u & \beta_u & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 - \beta_u & \beta_u \\ \beta_u & 0 & \cdots & 0 & 1 - \beta_u \end{bmatrix} ,$$

$$c^u = {}^t[\alpha_u, \alpha_u, \cdots, \alpha_u, \alpha_u + n\beta_u/d],$$

Les équations (2.16) s'écrivent alors :

$$x_i^{k+1} = \min_{u \in \mathcal{U}} \{ [M^u x^k]_i + c_i^u \}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.17)$$

qui s'interprète comme l'équation de la programmation dynamique en arrière d'un problème de commande stochastique (de matrices de transitions M^u et de coûts c^u) à condition de faire le changement de temps k en $-k$. Le théorème spectral s'applique. Il existe donc une vitesse moyenne des véhicules :

$$\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} x_i^k, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.18)$$

unique solution de

$$\mu + x_i = \min_{u \in \mathcal{U}} \{ (M^u x)_i + c_i^u \}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.19)$$

Théorème 5. La solution (μ, x) de l'équation (2.19) est donnée par :

$$\mu = \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \alpha_u + \frac{\beta_u}{d} \right\} \quad \text{et} \quad x \equiv {}^t[0 \quad 1/d \quad 2/d \quad \cdots \quad (n-1)/d].$$

Démonstration. Il est assez naturel de penser que les x_i se répartissent uniformément sur le cercle, ce qui donne le vecteur propre, et que pour des raisons de symétrie la stratégie optimale est constante par rapport à l'état. Vérifions le.

Soit $\bar{u} \in \mathcal{U}$ satisfaisant :

$$\mu = \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \alpha_u + \frac{\beta_u}{d} \right\} = \alpha_{\bar{u}} + \frac{\beta_{\bar{u}}}{d}.$$

Montrons que la stratégie :

$$s : x_i \rightarrow \bar{u}, \quad 1 \leq i \leq n$$

est optimale.

On peut vérifier que

$$\mu = \alpha_{\bar{u}} + \frac{\beta_{\bar{u}}}{d}, \quad \text{et} \quad x \equiv {}^t[0 \quad 1/d \quad 2/d \quad \cdots \quad (n-1)/d],$$

est solution du système :

$$\mu + x = M^{\bar{u}} x + c^{\bar{u}}.$$

On vérifie aussi que la stratégie s est optimale, car pour tout i dans $\{1, 2, \dots, n\}$ et pour tout u dans \mathcal{U} on a :

$$[M^{\bar{u}} + c^{\bar{u}} x]_i = \mu + x_i \leq \alpha_u + \frac{\beta_u}{d} + x_i = [M^u x + c^u]_i,$$

ce qui montre que le couple (μ, x) vérifie l'équation de la programmation dynamique (ou est un couple spectral pour l'OPDS associé) ■

Corollaire 2. Le diagramme fondamental pour la route circulaire dont le trafic est décrit par la dynamique (2.25) est donné par :

$$f = \min_{u \in \mathcal{U}} \{ \alpha_u d + \beta_u \}.$$

Démonstration. Le flot moyen est égal à la vitesse moyenne donnée par le théorème 5 multipliée par la densité d ■

2.4.3 Deuxième approximation du diagramme fondamental.

Le diagramme fondamental de la figure (2.1) est approximé par le modèle de trafic donné par les quatre contraintes suivantes :

1. $f \leq d$,
2. $f \leq \frac{3}{11}d + \frac{8}{110} = 0.27d + 0.07$,
3. $f \leq -\frac{20}{117}d + \frac{20}{117} = -0.17d + 0.17$,

ce qui donne le diagramme fondamental :

$$f = \min \{d, 0.27d + 0.07, -0.17d + 0.17\}, \quad (2.20)$$

qui est montré sur la figure (2.8).

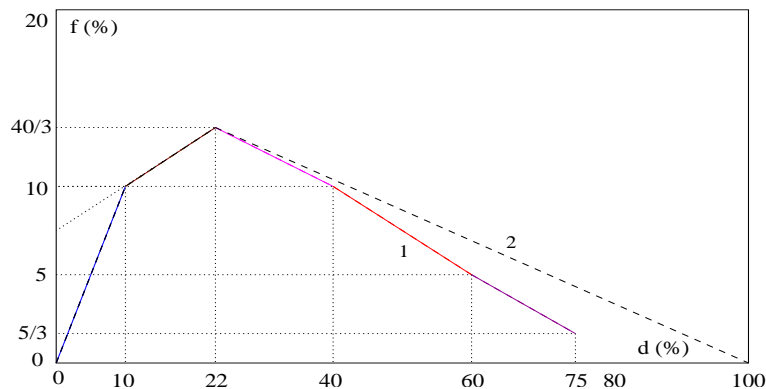


FIG. 2.8 – L'approximation par un modèle de contrôle optimal stochastique. 1 : le modèle réel, 2 : l'approximation.

Avec le modèle présenté dessus, on peut approximer une grande classe de diagrammes fondamentaux concaves. On verra dans la section prochaine comment généraliser ce modèle aux diagrammes non nécessairement concaves. Le modèle linéaire de la sous-section (2.4.2) est un cas particulier où on a $\mathcal{U} = \{u_1, u_2\}$ avec $(\alpha_1, \beta_1) = (v, 0)$ et $(\alpha_2, \beta_2) = (-\sigma, 1)$. Dans ce cas particulier, on a seulement deux possibilités : soit le véhicule avance avec une vitesse v , soit il n'avance pas. Ceci nous empêche d'avoir les accélérations progressives quand le véhicule a de l'espace devant lui, et les décélérations progressives quand il est gêné, ce qui est permis par le modèle de contrôle stochastique présenté ici, voir l'exemple 2.

Exemple 2. Soit $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$, avec $(\alpha_1, \beta_1) = (1, 0)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (1/3, 1/8)$ et $(\alpha_3, \beta_3) = (-1, 1)$. Le diagramme fondamental correspondant est donné par : $f = \min\{d, \frac{1}{3}d + \frac{1}{8}, 1 - d\}$. Sur les figures (2.9),(2.10) et (2.11), on montre la simulation de trois configurations correspondant aux trois phases de ce diagramme. On donne la position des véhicules à plusieurs instants pour montrer les régimes transitoires ■

En pratique, le régime périodique est important parce qu'il donne le flot moyen des véhicules, mais la durée du régime transitoire est aussi un paramètre important. Dans le cas où $\beta^u \in]0, 1[$ pour tout u dans \mathcal{U} , durant la phase transitoire, les positions des véhicules se répartissent uniformément progressivement jusqu'à ce qu'on atteigne la distribution

uniforme. Lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée ce n'est pas le cas. Ce qui signifie qu'il y a d'autres vecteurs propres que la répartition uniforme (c'est le cas du premier modèle donné).

D'autres variantes de ce modèle peuvent être données. On peut par exemple supposer que la vitesse d'un véhicule dépend non seulement du véhicule qui le précède mais aussi d'autres véhicules. Dans ce cas, on aura toujours un système qui s'interprétera comme une équation de la programmation dynamique d'un problème de commande optimale stochastique. On peut vérifier que les régimes stationnaires, donc les flots moyens, ne changent pas, par contre la phase transitoire s'améliorera (se raccourcira) car on aura une meilleure prévision sur l'état du trafic.

On peut obtenir aussi un modèle de commande optimale stochastique en observation incomplète dans le cas où un véhicule ne peut observer que quelques véhicules qui le précèdent, alors que la distance qu'il parcourt dépend de la distance qui le sépare de tous les autres véhicules.

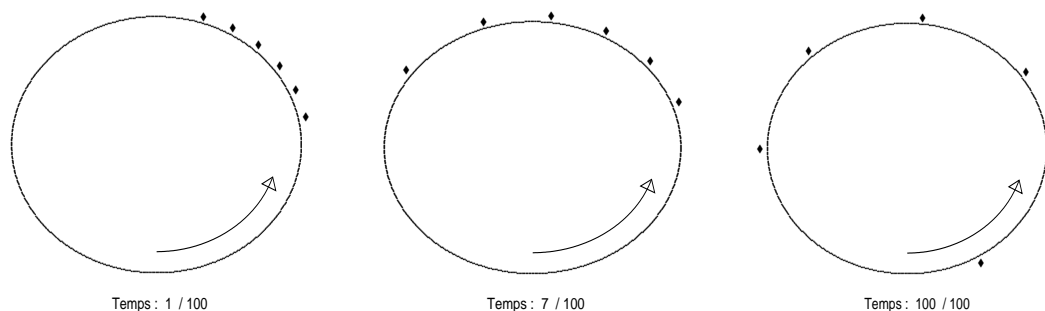


FIG. 2.9 – Le phase 1 de l'exemple 2.

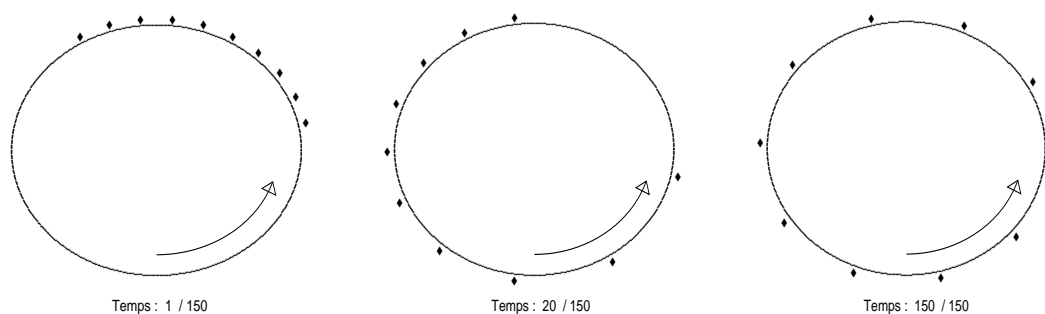


FIG. 2.10 – La phase 2 de l'exemple 2.

2.5 Le modèle jeu stochastique du trafic 1D.

Dans cette section on donne des rappels sur les jeux stochastiques ergodiques que l'on voit comme une généralisation du problème spectral à des opérateurs non linéaires (monotones additivement homogènes) exprimable en terme matriciel comme la composition d'une matrice dans l'algèbre ordinaire, d'une matrice dans l'algèbre minplus et d'une

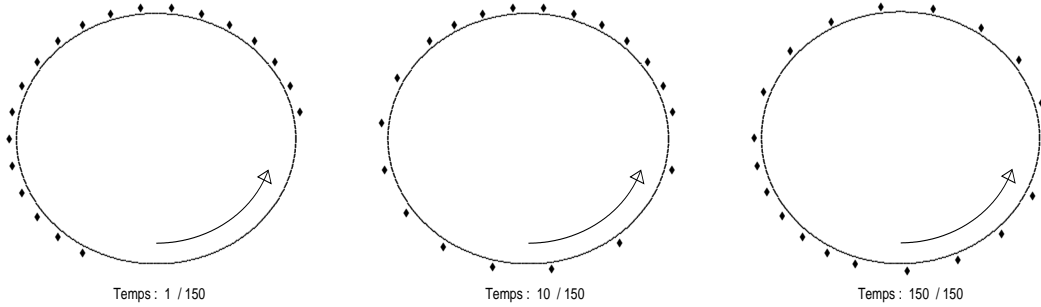


FIG. 2.11 – La phase 3 de l'exemple 2.

matrice dans l'algèbre maxplus. On montre ensuite qu'une extension du modèle de trafic de la section précédente dans lequel le conducteur essaie en plus de maximiser une distance de sécurité, s'interprète en terme de jeu stochastique. Le diagramme fondamental se ramène au calcul de cette valeur propre généralisée que l'on arrive, dans ce cas, à calculer explicitement. On obtient ainsi par ce modèle la possibilité d'approximer le diagramme fondamental par une fonction polyédrale quelconque et non plus seulement concave.

2.5.1 Jeu stochastique ergodique

Etant donné : – un ensemble d'états \mathcal{X} fini en nombre n , – un ensemble de commandes \mathcal{U} fini en nombre r du minimiseur, – un ensemble de commandes \mathcal{W} fini en nombre p du maximiseur, – une famille de matrices de transition de chaînes de Markov $(M^{uw})_{u \in \mathcal{U}, w \in \mathcal{W}}$ (matrices de taille $n \times n$ à coefficients positifs ayant leurs sommes en ligne égales à 1), – une famille de vecteurs (de taille n) de coûts c^{uw} indexés par les commandes du maximiseur et du minimiseur, on définit le problème de jeu optimal stochastique en horizon infini avec coût non actualisé par :

$$\mu = \min \max_{s \in \mathcal{S}} \mathbb{E} \left\{ \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} c_{x^k}^{u^k w^k} \right\} \quad (2.21)$$

où $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ désigne l'état de la chaîne de Markov et s est une stratégie qui à un état x associe un couple de commandes u, w (on a donc $(u^k, w^k) = s(x^k)$).

L'équation de la programmation dynamique stochastique associée à ce problème (dans lequel le maximiseur connaît à chaque étape le choix du minimiseur) est :

$$\mu + v_x = \min_{u \in \mathcal{U}} \max_{w \in \mathcal{W}} \{ [M^{uw} v]_x + c_x^{uw} \}. \quad (2.22)$$

L'équation (2.22) peut s'écrire matriciellement en combinant un opérateur linéaire de l'algèbre standard avec un opérateur linéaire de algèbre minplus et un opérateur linéaire de l'algèbre maxplus :

$$\mu \otimes v = E \otimes (C \odot (Hv)), \quad (2.23)$$

où les matrices H, C, E sont définies par :

- L'ensemble des lignes de H est l'ensemble de toutes les lignes des matrices M^{uw} , $u \in \mathcal{U}$, $w \in \mathcal{W}$:

$$H = \begin{bmatrix} M_{1\bullet}^{11} \\ M_{1\bullet}^{12} \\ \dots \\ M_{n\bullet}^{rp} \end{bmatrix}.$$

C'est donc une matrice ayant rpn lignes et n colonnes.

- La matrice maxplus C est construite avec l'ensemble des vecteurs de coût du maximiseur :

$$C = \begin{bmatrix} \text{diag}(c_1^{\bullet 1}) & \cdot & \text{diag}(c_1^{\bullet p}) & \varepsilon' & \cdot & \varepsilon' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon' & \cdot & \varepsilon' & \text{diag}(c_n^{\bullet 1}) & \cdot & \text{diag}(c_n^{\bullet p}) \end{bmatrix},$$

où ε' est le zéro maxplus c.a.d $-\infty$. C'est donc une matrice a rn lignes et rpn colonnes.

- La matrice minplus E est constituée de l'ensemble des vecteurs de coût du minimiseur :

$$E = \begin{bmatrix} e_r & \varepsilon & \cdot & \varepsilon \\ \varepsilon & e_r & \varepsilon & \varepsilon \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon & \cdot & \varepsilon & e_r \end{bmatrix},$$

où e_r désigne un vecteur ligne des e de taille r . C'est donc une matrice a n lignes et rn colonnes.

On voit que μ est une valeur propre additive de l'opérateur (que l'on appellera opérateur de la programmation dynamique du jeu stochastique (OPJS)) $v \mapsto E \otimes (C \odot (Hv))$ et que v est un vecteur propre associé à μ .

On dira que cet opérateur est *irréductible* dans le cas où tous les états sont *connectés* dans le graphe composé des noeuds de décision du minimiseur en nombre n , des noeuds du maximiseur en nombre nr , des noeuds de hasard en nombre nrp et des arcs de décision du minimiseur définis par la matrice E (il existe un arc de i à j si $E_{ij} \neq \varepsilon$), des arcs du maximiseur définis par la matrice C (il existe un arc de j à k si $C_{jk} \neq \varepsilon'$) et les arcs de hasard (il existe un arc de k à l si $H_{kl} \neq 0$).

On remarque que cet opérateur est additivement homogène, monotone mais pas concave. Ces opérateurs ont été aussi étudiés dans [AG01, GG04]. Un corollaire de ces deux références est le théorème suivant.

Théorème 6. *Dans le cas où l'opérateur de la programmation dynamique du jeu stochastique est irréductible, le problème spectral*

$$\mu \otimes v = E \otimes (C \odot (Hv)),$$

admet une solution (μ, v) où v est définie à une constante additive près pas nécessairement de façon unique et μ est unique et vérifie :

$$\mu = \min \max_{s \in \mathcal{S}} \mathbb{E} \left\{ \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} (c_x^{u^k w^k}) \right\}.$$

Du théorème (6) on déduit que le taux moyen d'accroissement par unité de temps du système $v_x^{k+1} = \min_{u \in \mathcal{U}} \max_{w \in \mathcal{W}} \{ [M^{uw} v^k]_x + c_x^{uw} \}$, défini par $\lim_{k \rightarrow \infty} v^k / k$ est l'unique valeur propre additive μ du système (2.23).

2.5.2 Le modèle jeu stochastique du trafic 1D.

On modélise la différence de comportement des conducteurs entre la situation de densité faible et la situation de densité forte vis à vis de la distance de sécurité. Reprenons le modèle linéaire minplus en ajoutant cette considération. Appelons x^k [resp. y^k] la distance parcourue jusqu'à l'instant k par un véhicule [resp. par le véhicule précédant le véhicule considéré]. Au lieu de maintenir la distance de sécurité supérieure à σ c'est à dire $x^k \leq y^k - \sigma$, utilisons la contrainte :

$$x^k \leq \max\{y^k - \sigma, (x^k + y^k)/2\}.$$

En situation de faible densité où les véhicules sont séparés d'au moins 2σ on a

$$\max\{y^k - \sigma, (x^k + y^k)/2\} = y^k - \sigma,$$

en situation de haute densité on a

$$\max\{y^k - \sigma, (x^k + y^k)/2\} = (x^k + y^k)/2,$$

on accepte de s'approcher de plus de σ mais en réduisant la vitesse d'approche de façon à éviter une collision. La dynamique complète devient :

$$x^{k+1} = \min\{\max\{y^k - \sigma, (x^k + y^k)/2\}, x^k + v\},$$

qui correspond à une équation de la programmation dynamique associée à un jeu stochastique.

De façon plus générale on considère une famille de fonctions affines :

$$\alpha_{uw} + \beta_{uw}y + (1 - \beta_{uw})x, \quad 0 \leq \beta_{uw} \leq 1,$$

indexées par $u \in \mathcal{U}$ et $w \in \mathcal{W}$ et la dynamique correspondante :

$$x^{k+1} = \min_{u \in \mathcal{U}} \max_{w \in \mathcal{W}} \{ \alpha_{uw} + \beta_{uw}y^k + (1 - \beta_{uw})x^k \}.$$

En notant x_i^k la distance parcourue par le véhicule i jusqu'à l'instant k et en considérant que le véhicule $i+1$ est devant i , on est conduit à la dynamique des véhicules sur la route :

$$x_i^{k+1} = \begin{cases} \min_{u \in \mathcal{U}} \max_{w \in \mathcal{W}} \{ (1 - \beta_{uw})x_i^k + \beta_{uw}x_{i+1}^k + \alpha_{uw} \} & \text{si } i < n, \\ \min_{u \in \mathcal{U}} \max_{w \in \mathcal{W}} \{ (1 - \beta_{uw})x_n^k + \beta_{uw}x_1^k + \alpha_{uw} + n\beta_{uw}/d \} & \text{si } i = n, \end{cases} \quad (2.24)$$

On définit, comme dans la section précédente les matrices M^{uw} et les vecteurs c^{uw} pour $(u, w) \in (\mathcal{U} \times \mathcal{W})$ par :

$$M^{uw} = \begin{bmatrix} 1 - \beta_{uw} & \beta_u & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 - \beta_{uw} & \beta_{uw} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 - \beta_{uw} & \beta_{uw} \\ \beta_{uw} & 0 & \cdots & 0 & 1 - \beta_{uw} \end{bmatrix},$$

$$c^u = {}^t[\alpha_{uw}, \alpha_{uw}, \dots, \alpha_{uw}, \alpha_{uw} + \frac{n\beta_{uw}}{d}],$$

Les équations (2.24) s'écrivent alors :

$$x_i^{k+1} = \min_{u \in \mathcal{U}} \max_{w \in \mathcal{W}} \{[M^{uw} x^k]_i + c_i^{uw}\}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.25)$$

L'équation (2.25) est l'équation de la programmation dynamique d'un jeu stochastique irréductible (dès qu'une contrainte sur la distance de sécurité existe). On a donc une vitesse moyenne des véhicules :

$$\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} x_i^k, \quad 1 \leq i \leq n,$$

unique valeur propre du problème spectral :

$$\mu + x_i = \min_{u \in \mathcal{U}} \max_{w \in \mathcal{W}} \{(M^{uw} x)_i + c_i^{uw}\}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.26)$$

Il est remarquable que l'on puisse calculer explicitement la valeur propre de ce jeu et donc en déduire une forme explicite du diagramme fondamental.

Théorème 7. *La solution (μ, x) de l'équation (2.26) est donnée par :*

$$\mu = \min_{u \in \mathcal{U}} \max_{w \in \mathcal{W}} \left\{ \alpha_{uw} + \frac{\beta_{uw}}{d} \right\} \quad \text{et} \quad x \equiv {}^t[0 \quad 1/d \quad 2/d \quad \dots \quad (n-1)/d].$$

Démonstration. Soient $(\bar{u}, \bar{w}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{W}$ vérifiant :

$$\mu = \min_{u \in \mathcal{U}} \max_{w \in \mathcal{W}} \left\{ \alpha_{uw} + \frac{\beta_{uw}}{d} \right\} = \alpha_{\bar{u}\bar{w}} + \frac{\beta_{\bar{u}\bar{w}}}{d}.$$

et la stratégie $s \in \mathcal{S}$ donnée par $(M^{\bar{u}\bar{w}}, c^{\bar{u}\bar{w}})$, c'est à dire :

$$s : x_i \rightarrow (\bar{u}, \bar{w}), \quad 1 \leq i \leq n,$$

On vérifie que s est optimale. En effet le couple (μ, x) donné par :

$$\mu = \alpha_{\bar{u}\bar{w}} + \frac{\beta_{\bar{u}\bar{w}}}{d}, \quad \text{et} \quad x \equiv {}^t[0 \quad 1/d \quad 2/d \quad \dots \quad (n-1)/d],$$

est solution de :

$$\mu + x = M^{\bar{u}\bar{w}} x + c^{\bar{u}\bar{w}}.$$

La stratégie s est optimale, car pour tout i dans $\{1, 2, \dots, n\}$, pour tout u dans \mathcal{U} et tout w dans \mathcal{W} on a :

$$[M^{\bar{u}\bar{w}} x + c^{\bar{u}\bar{w}}]_i = \mu + x_i = \min_{u \in \mathcal{U}} \max_{w \in \mathcal{W}} \left\{ \alpha_{uw} + \frac{\beta_{uw}}{d} \right\} + x_i = \min_{u \in \mathcal{U}} \max_{w \in \mathcal{W}} [M^{uw} x + c^{uw}]_i,$$

ce qui prouve que le couple (μ, x) vérifie l'équation spectrale ■

Corollaire 3. *Le diagramme fondamental sur la route circulaire dont le trafic est décrit par la dynamique (2.24) est donné par :*

$$f = \min_{u \in \mathcal{U}} \max_{w \in \mathcal{W}} \{ \alpha_{uw} d + \beta_{uw} \}.$$

Démonstration. Le flot moyen est égal à la vitesse moyenne donnée par le théorème (7) multipliée par la densité moyenne d ■

2.5.3 Troisième approximation.

Sur le diagramme obtenu à partir de mesures réelles, la courbe est concave pour des densités d telles que $0 \leq d \leq 0.4$ et convexe pour $0.4 \leq d \leq 1$. Pour obtenir la partie convexe, on modélise la distance de sécurité par

$$f = \max\{-0.25d + 0.2, -0.2d + 0.17, 0\}.$$

On applique à la partie concave la méthode utilisée dans la modélisation commande stochastique. On obtient l'approximation du diagramme fondamental représenté dans la figure 2.12 correspondant à la formule :

$$f = \min\{d, 0.27d + 0.07, -0.19d + 0.18, \max\{-0.25d + 0.2, -0.2d + 0.17, 0\}\} .$$

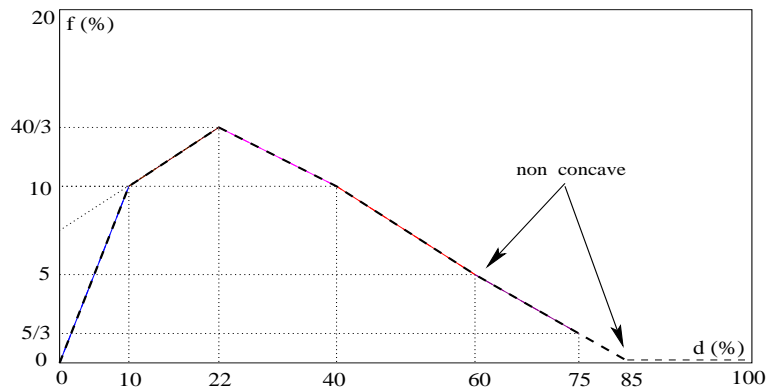


FIG. 2.12 – L'approximation par un modèle de jeu stochastique.

2.6 Un modèle de trafic 1D avec vitesse aléatoire

Dans cette section, on rappelle (par souci de complétude) le modèle stochastique développé dans [LMQ05] qui donne la vitesse moyenne des véhicules sur une route circulaire par l'exposant de Lyapunov d'une matrice stochastique minplus. Ce modèle est obtenu en introduisant un aléa dans la vitesse du modèle minplus de la section 2.3. Il doit être remarqué que les modèles appelés programmation dynamique stochastique ou jeu stochastique des sections précédentes sont en fait des modèles déterministes. Ce sont des dynamiques déterministes qui s'interprètent en terme d'optimisation stochastique. Dans cette section le modèle de trafic est stochastique.

2.6.1 Quelques rappels

Résolution du système $x = A \otimes x \oplus b$.

Soit A une matrice carrée minplus. On a vu que les matrices $A^k, k \geq 0$ définies par :

$$A^k := \underbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A}_k \text{ fois}$$

donnent les poids minimums des chemins de longueur k dans le graphe $G(A)$.

Les matrices \bar{A}^k définies par $\bar{a}^k \triangleq \bigoplus_{l=0}^k A^l$ donnent les poids minimums des chemins de longueur inférieure ou égale à k du graphe $G(A)$. $(\bar{A}^k)_{ij}$ donne le poids minimum des chemins de longueur $\leq k$ allant du nœud j vers le nœud i . Par exemple pour $G(A)$ de la figure 2.3 : $(\bar{A}^2)_{41} = 3 \oplus (-2 \otimes e) = -2$.

La matrice A^* définie, si elle existe (pas de chemin de longueur ∞ de poids $-\infty$), par :

$$A^* \triangleq \bigoplus_{k \geq 0} A^k,$$

donne les poids minimum des chemins de longueur quelconque sur $G(A)$. $(A^*)_{ij}$ donne le poids minimum des chemins de longueur quelconque allant du nœud j vers le nœud i .

Lorsque le graphe $G(A)$ associé à une matrice minplus carrée $A, n \otimes n$ n'a aucun circuit de poids négatif, alors la matrice A^* existe, et on a [BCOQ92] :

$$A^* = \bigoplus_{k=0}^{n-1} A^k.$$

Si on reprend l'exemple de la figure 2.3 $G(A)$ n'a aucun circuit de poids négatif, donc A^* existe, elle est égale à :

$$A^* = \bar{A}^3 = \begin{bmatrix} e & 1 & e & 1 \\ -2 & e & -2 & -1 \\ -1 & 1 & e & 1 \\ -2 & e & -2 & e \end{bmatrix}.$$

Théorème 8. [BCOQ92] Si le graphe $G(A)$ associé à une matrice carrée minplus A n'a aucun circuit de poids négatif, alors le système $x = A \otimes x \oplus b$ admet une solution donnée par $x = A^* \otimes b$. Et si les circuits de $G(A)$ sont tous de poids positifs, alors le système admet une seule solution.

Exposant de Lyapunov minplus.

On considère le système :

$$x^{k+1} = A^k \otimes x^k. \quad (2.27)$$

où les A^k sont des tirages indépendants d'une matrice carrée aléatoire intégrable à entrées dans \mathbb{R}_{\min} , et x^k un vecteur aléatoire à entrées dans \mathbb{R}_{\min} . On a le résultat suivant qui est un corollaire de [BCOQ92] Cor.7.31.

Théorème 9. Si la loi des matrices aléatoires A ne charge que les matrices irréductibles, alors pour toute condition initiale ayant au moins une composante différente de ε , on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_j^k(x_0)^{\frac{1}{k}} = a, \text{ p.s. } 1 \leq j \leq n,$$

où a est appelé l'exposant de Lyapunov minplus du système (2.27).

2.6.2 Le modèle stochastique

On considère n véhicules de taille nulle roulant sans dépassement sur une route que l'on supposera de longueur 1. On suppose aussi que chaque conducteur peut anticiper le mouvement du véhicule qui le précède, et qu'il choisit sa vitesse, à chaque instant, aléatoirement indépendamment dans l'ensemble $\{w, v\}$ avec une probabilité $(\lambda, \mu = 1 - \lambda)$. On suppose que chaque véhicule respecte une distance de sécurité égale à σ avec le véhicule qui le précède. On peut supposer, sans perte de généralité, que w est égale à 0, ce qui veut dire qu'à tout instant k , un conducteur s'arrête avec une probabilité μ ou roule à une vitesse v avec une probabilité λ .

On note par x_i^k la distance parcourue par le véhicule i jusqu'à l'instant k , on a la dynamique :

$$x_i^{k+1} = \begin{cases} v_i^k x_i^k \oplus (-\sigma) x_{i+1}^{k+1} & \text{si } i < n, \\ v_n^k x_n^k \oplus (1 - \sigma) x_1^{k+1} & \text{si } i = n. \end{cases} \quad (2.28)$$

Ce système s'écrit matriciellement :

$$x^{k+1} = A \otimes x^{k+1} \oplus B^k \otimes x^k,$$

où :

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & -\sigma & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & & \ddots & -\sigma \\ 1 - \sigma & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad B^k = \begin{bmatrix} v_1^k & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & v_2^k & & \varepsilon \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & v_N^k \end{bmatrix}.$$

On l'écrit alors :

$$x^{k+1} = C^k \otimes x^k,$$

avec $C^k = A^* \otimes B^k$ et $A^* \triangleq \bigoplus_{r=0}^{\infty} A^r$.

Etant donné que A est irréductible et ne contient aucun circuit de poids négatif, la matrice A^* est donnée par : $A^* = \bigoplus_{r=0}^{N-1} A^r$. On a alors

$$A^* = \begin{bmatrix} e & -\sigma & -2\sigma & \cdots & -(n-2)\sigma & -(n-1)\sigma \\ 1 - n\sigma & e & -\sigma & -2\sigma & & -(n-2)\sigma \\ 1 - (n-1)\sigma & 1 - n\sigma & e & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 - (n-1)\sigma & \ddots & \ddots & \ddots & -2\sigma \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -\sigma \\ 1 - \sigma & \cdots & & 1 - (n-1)\sigma & 1 - n\sigma & e \end{bmatrix}.$$

Dans ce qui suit, on suppose $\sigma = 0$ ce qui permet d'obtenir quelques résultats analytiques. Dans ce cas, on a :

$$A^* = \begin{bmatrix} e & e & \cdots & e \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & e \\ 1 & \cdots & 1 & e \end{bmatrix}.$$

Définition 3. *État d'encombrement (ou d'embouteillage).*

Un état d'encombrement est un état où les véhicules se concentrent en k positions : $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ avec $k = \lceil \frac{1}{v} \rceil$, et où pour tout $i = 1, \dots, k-1$: $\pi_{i+1} - \pi_i = v$. Dans le cas où $\frac{1}{v} \in \mathbb{N}$, on a aussi $\pi_1 + 1 - \pi_k = v$.

On note :

$$d_v(x) = \min_h \left(\sum_{j \neq h} \left\{ \frac{x_{j+1} - x_j}{v} \right\} \right),$$

où $\{x\} \triangleq x - \lfloor x \rfloor$. Un état d'encombrement est alors caractérisé par : $d_v(x) = 0$, et on a :

$$d_v(x^T) = 0 \Rightarrow d_v(x^t) = 0, \forall t \geq T.$$

L'application $d_v(x)$ peut être considérée comme une distance de l'état x par rapport à l'état d'embouteillage. On montre que la suite $\{d_v(x^t)\}_t$ est décroissante.

Théorème 10. [LMQ05] *Un état d'embouteillage est atteint avec une probabilité de 1.*

Théorème 11. [LMQ05] *La distribution stationnaire de l'ensemble des clusters $\mathcal{R} = \{(r_1, \dots, r_k)\}$ est uniforme dans le simplexe :*

$$\mathcal{S} = \{(r_1, \dots, r_k), \sum_{i=1}^k r_i = n\}.$$

Théorème 12. [LMQ05] *Si $k \triangleq \frac{1}{v} \in \mathbb{N}$, alors la vitesse moyenne est donnée par :*

$$\bar{v}_\lambda(n, k) = \frac{\lambda v}{n\mu} (k - S_k(n)),$$

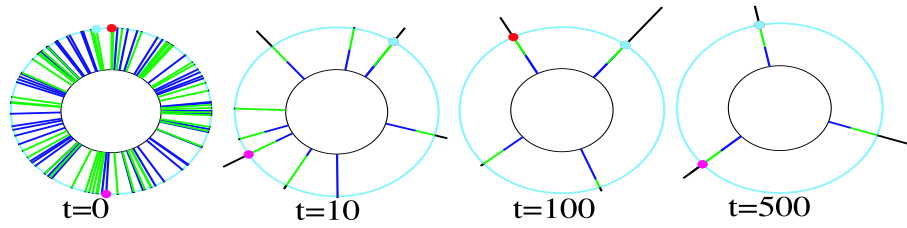
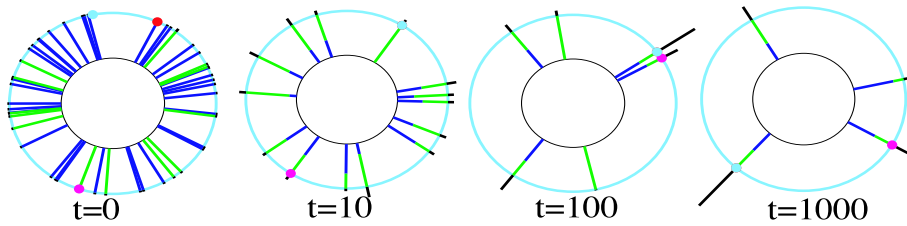
où

$$\begin{cases} S_k(0) = k, \\ (n+k)S_k(n+1) = k-1 + (n+1)\lambda S_k(n). \end{cases}$$

De plus, pour n assez grand, on aura :

$$\bar{v}_\lambda(n, k) = \frac{\lambda}{n\mu} + o(1/n).$$

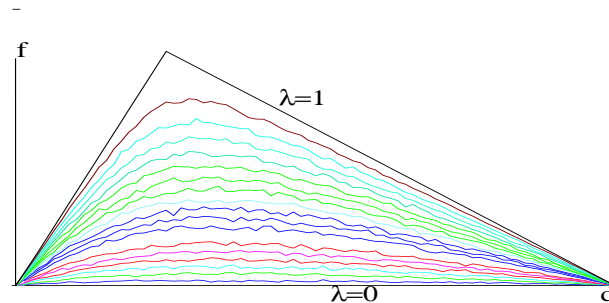
Le théorème (12) donne la vitesse moyenne des véhicules sur la route, pour le cas $\sigma = 0$. On donne ci-dessous quelques simulations numériques montrant l'évolution du système dans les deux cas : $1/v \in \mathbb{N}$ et $1/v \notin \mathbb{N}$. Sur la figure (2.13), on montre l'évolution du trafic de 100 véhicules sur la route circulaire dans le cas où les vitesses sont fixées à : $w = 0$

FIG. 2.13 – Evolution du système ($v = 1/3$).FIG. 2.14 – Evolution du système ($v = 0.3$).

et $v = 1/3$. Sur cette figure, et sur la figure (2.14), la longueur d'un segment dépassant le cercle extérieur est proportionnelle au nombre de véhicules présents à cet endroit. La longueur d'un segment de couleur bleue (noire) (resp. verte (grise)) est proportionnelle au nombre de véhicules ayant les vitesses w (resp. v).

Sur la figure (2.14) on montre l'évolution du trafic de 50 véhicules sur la route circulaire dans le cas où les vitesses sont fixées à : $w = 0$ et $v = 0.3$. La figure (2.15) montre les diagrammes fondamentaux du trafic pour $w = 0$, $v = \sigma$ et des probabilités λ variant entre 0 et 1.

On peut bien sûr calculer le diagramme fondamental dans des cas plus généraux que dans le cas particulier précédent où on obtenait des résultats analytiques. On montre les résultats dans un cas non anticipatif pour montrer l'amélioration par rapport au modèle déterministe :

FIG. 2.15 – Le diagramme fondamental (modèle stochastique non anticipatif, $v = \sigma$ et λ variant de 0 à 1).

Chapitre 3

Systèmes additivement homogènes polyédraux

3.1 Introduction

Les équations de la programmation dynamique de problèmes de commande stochastique ou de jeux stochastiques en horizon fini, dans le cas d'un nombre fini de commandes, que nous écrirons dans le sens direct grâce à un changement de sens du temps $x_{n+1} = f(x_n)$, ont des *fonctions de la programmation dynamique* f continues, affines par morceaux, additivement homogènes (lorsqu'on ajoute une constante à toutes les composantes de la fonction valeur x_n la fonction de la programmation dynamique augmente de la même constante). À cause de cette propriété (et sous certaines autres conditions) le taux de croissance, lorsque n tend vers ∞ , croît de façon linéaire. Cette propriété d'homogénéité provient du fait que les matrices de transition décrivant la dynamique de ces systèmes ont des sommes en ligne égales à 1. Ces sont des probabilités. Pour certaines applications (on en verra lors de la modélisation du trafic sur des réseaux de routes) on obtient des équations ayant une forme analogue : – conservant la propriété d'homogénéité à cause d'une conservation (par exemple la conservation du nombre d'automobiles dans un problème de trafic), – perdant la propriété de monotonie qui était due à la positivité des probabilités.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à ces systèmes dynamiques additivement homogènes de degré 1 polyédraux auxquels on ajoute progressivement d'autres propriétés. Cette propriété d'homogénéité permet de ramener le problème de valeur propre additive à un problème de point fixe. On étudie le problème d'existence et d'unicité de valeur propre additive et de son lien avec le taux moyen d'accroissement d'un tel système lorsqu'il existe.

On commence par l'étude du problème de valeur propre d'un système homogène. On montre d'abord, à l'aide de quelques exemples que ce problème peut ne pas admettre de solution, comme il peut admettre une ou plusieurs solutions. Grâce à l'algorithme de Newton on peut calculer ces valeurs propres à condition d'en connaître une approximation suffisante. Mais ces valeurs propres peuvent être instables et dans ce cas la valeur propre ne donne pas le comportement asymptotique de la dynamique.

On montre ensuite, sur un exemple simple, que dans le cas où le problème de point fixe admet plusieurs solutions instables, le système dynamique peut avoir un comportement

chaotique avec un accroissement linéaire mais dont le taux n'est pas donné par une valeur propre. On illustre de plus, la difficulté à simuler ces systèmes chaotiques en rappelant les propriétés d'un système très simple pour lequel la simulation en des nombres flottants conduit toujours au point instable 0 alors que le système admet la loi uniforme sur $[0,1]$ comme mesure invariante pour presque toute condition initiale.

On rappelle les principaux résultats existants sur les systèmes homogènes monotones. Ces systèmes sont souvent rencontrés dans les problèmes de contrôle optimal (déterministes et stochastiques) [BCOQ92, Whi86], dans les problèmes de jeux [RS01], ou dans les modèles des systèmes à événements discrets [BCOQ92, CGQ95, Gun98, GG98a, Gun01]. Lorsqu'un système homogène et monotone admet une valeur propre, alors son taux moyen d'accroissement existe et coïncide avec sa valeur propre. De plus pour un tel système, une propriété de connexité introduite dans [GG04] permet d'obtenir, lorsqu'elle est vérifiée, l'existence et l'unicité d'une valeur propre. Dans ce cas, la méthode de Newton de calcul de la valeur propre reste un algorithme local, bien qu'un algorithme global mais plus lent utilisant la monotonie ait été donné [GG98b, CTG06].

Une classe plus restreinte encore est celle des systèmes homogènes monotones convexes étudiés dans [AG01]. La convexité dans le cas polyédral permet d'interpréter la dynamique comme une équation de la programmation dynamique associée à un problème de commande optimale de chaîne de Markov à états en nombre fini. Dans ce cas la convergence de la méthode de Newton pour la résolution du problème du point fixe (ou du problème de valeur propre) devient globale et n'est rien d'autre que l'algorithme de Howard ou d'itération sur les politiques.

Enfin, on donne quelques résultats nouveaux sur les systèmes non nécessairement monotones. On présente une classe de systèmes qui se comportent asymptotiquement comme des systèmes linéaires minplus temps-variants périodiques ou comme des équations de la programmation dynamique de problèmes de commande stochastique périodiques.

3.2 Systèmes homogènes

Dans cette première section, on fait quelques rappels sur les systèmes dynamiques, et on donne les principales conséquences de l'homogénéité additive d'un système dynamique. Considérons le système dynamique suivant :

$$x^{k+1} = f(x^k) .$$

Un point \bar{x} est un point fixe de f si $\bar{x} = f(\bar{x})$. Il est dit stable s'il existe un voisinage $\mathcal{V}(\bar{x})$ de \bar{x} tel que :

$$\forall x \in \mathcal{V}(\bar{x}), \| f(x) - f(\bar{x}) \| \leq \| x - \bar{x} \| .$$

Lorsque l'inégalité dessus est stricte, le point fixe est dit attractif, et dans ce cas on a :

$$\forall x \in \mathcal{V}(\bar{x}), \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \bar{x} .$$

Un point x est dit périodique de période p si :

$$f^p(x) = x, \quad f^k(x) \neq x, \quad \forall k \in \{1, \dots, p-1\} .$$

Un point périodique de f , de période p , est un point fixe de f^p . L'orbite (ou le cycle) $\mathcal{O}(x)$ d'un point périodique x est l'ensemble des itérés de x . Les points périodiques d'une même orbite ont la même période et la même nature (stable, instable,...). On parle alors d'orbite stable ou instable. Le bassin d'attraction $\mathcal{W}(x)$ d'un point périodique x de période p est l'ensemble des points y tels que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{np}(y) = x.$$

Le bassin d'attraction d'une orbite est l'union des bassins d'attraction de ses points.

Définition 4. Une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est additivement homogène de degré 1 (en abrégé *homogène*), si elle satisfait :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda + x) = \lambda + f(x),$$

où $(\lambda + x)_i = \lambda + x_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Un système $x_{k+1} = f(x_k)$ sur \mathbb{R}^n est dit homogène si l'application f l'est. L'intérêt porté à ce type de systèmes est motivé par sa puissance de modélisation, notamment dans les modèles des systèmes à événements discrets.

Exemple 3. Une large classe des systèmes homogènes étudiés dans la pratique est de la forme :

$$x_i^{k+1} = \min_{u \in \mathcal{U}} \max_{v \in \mathcal{V}} ([M^{uv}x + c^{uv}]_i), \quad \forall 1 \leq i \leq n. \quad (3.1)$$

où les matrices M^{uv} satisfont $M_{ij}^{uv} \geq 0 \forall i, j \forall u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}$ et $M^{uv}\mathbf{1} = \mathbf{1}, \forall u \in \mathcal{U}, \forall v \in \mathcal{V}$, et où $\mathbf{1} \triangleq {}^t(1 \ 1 \ \dots \ 1)$. Ces systèmes sont des équations de la programmation dynamique (EPD) (écrite avec le temps inversé) de jeux stochastiques à deux joueurs. Le cas où l'ensemble \mathcal{V} est réduit à un singleton :

$$x_i^{k+1} = \min_{u \in \mathcal{U}} ([M^u x^k + c^u]_i), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (3.2)$$

correspond à la commande optimale stochastique. Si de plus, les matrices M^u sont à coefficients booléens, l'EPD est linéaire minplus, elle s'écrit :

$$x^{k+1} = A \otimes x^k, \quad (3.3)$$

où A est une matrice carrée minplus de taille $n \times n$ avec $A_{ij} = \min_u c_i^u$ si $M_{ij}^u = 1$ (par ligne il y a nécessairement un seul coefficient booléen non nul puisqu'une ligne est une probabilité). Enfin, un système de type (3.2) où, de plus, l'ensemble \mathcal{U} est réduit à un singleton, est un système affine dans l'algèbre standard :

$$x^{k+1} = Mx + c, \quad (3.4)$$

tel que $M - I_d$ a un noyau non nul.

Dans le chapitre précédent on a vu que la modélisation du trafic sur une route circulaire a donné dans certain cas une dynamique du type (3.2), qu'on a écrit aussi sous la forme :

$$x^{k+1} = D \otimes (Hx^k), \quad (3.5)$$

où D est une matrice minplus et H est une matrice standard vérifiant $H\mathbf{1} = \mathbf{1}$.

On verra aussi au chapitre suivant que la modélisation de certains réseaux de trafic routier en terme de réseau de Pétri conduit à des systèmes homogènes du type (3.2).

On verra, dans le chapitre sur la modélisation d'intersections qu'une façon d'éviter les conflits dans les réseaux de Pétri en acceptant des poids négatifs sur certains arcs donne des systèmes homogènes du type (3.2) avec des matrices M^u qui ne sont pas nécessairement à éléments positifs.

Définition 5. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, on appelle *taux d'accroissement* d'un système dynamique $x^{k+1} = f(x^k)$, la limite $\chi(f) \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k)/k$ lorsqu'elle existe.

Un des buts principaux de ce chapitre est d'étudier l'existence de tels taux d'accroissement et de les calculer.

3.2.1 Le problème de valeur propre d'un système homogène

Soit $x^{k+1} = f(x^k)$ un système homogène. On écrit en algèbre minplus $f(ax) = af(x), \forall x \in \mathbb{R}_{\min}^n, \forall a \in \mathbb{R}_{\min}$ avec $f : \mathbb{R}_{\min}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\min}^n$. Le problème de valeur propre minplus associé à ce système est de trouver $x \in \mathbb{R}_{\min}^n$ non nul ($x \neq \varepsilon$), et $\lambda \in \mathbb{R}_{\min}$ tels que :

$$\lambda x = f(x).$$

On suppose, sans perte de généralité, que si x existe alors $x_1 \neq \varepsilon$. Le problème de valeur propre s'écrit alors :

$$\begin{cases} \lambda & = f_1(x/x_1), \\ x_2/x_1 & = (f_2/f_1)(x/x_1), \\ \dots & = \dots \\ x_n/x_1 & = (f_n/f_1)(x/x_1). \end{cases} \quad (3.6)$$

Si on note $y = (x_2/x_1, x_3/x_1, \dots, x_n/x_1)$, le problème revient à calculer le point fixe du problème réduit $y = g(y)$, où g est une fonction minplus générale (pas nécessairement homogène) telle que $g_{i-1}(y) = (f_i/f_1)(0, y)$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Quand la fonction g admet un point fixe \bar{y} , on obtient, pour f , un vecteur propre normalisé \bar{x} et une valeur propre correspondante λ donnés par $\bar{x} = (0 \ \bar{y})$ et $\lambda = f_1(\bar{x})$. Le vecteur propre \bar{x} de f est dit stable lorsque le point fixe \bar{y} de g est stable.

L'existence et/ou l'unicité de point fixe d'une fonction homogène ne sont pas toujours assurés, comme le montrent les deux exemples suivants :

Exemple 4. On voit facilement que le problème de valeur propre associé à un système homogène suivant n'a aucune valeur propre.

$$\begin{cases} \lambda x_1 = 2x_1, \\ \lambda x_2 = (x_2)^2/x_1 \oplus 3(x_1)^2/x_2. \end{cases} \quad (3.7)$$

Ce système est réduit au problème de point fixe $y = y^2/2 \oplus 1/y$, avec $y = x_2/x_1$ et $\lambda = 2$ qui n'a aucune solution ■

Exemple 5. Le problème de valeur propre (associé à un système homogène) suivant :

$$\begin{cases} \lambda x_1 = x_1 , \\ \lambda x_2 = (x_2)^2/x_1 \oplus 3(x_1)^2/x_2 , \end{cases} \quad (3.8)$$

est réduit au problème de point fixe $y = y^2 \oplus 3/y$, avec $y = x_2/x_1$ et $\lambda = e$. On voit facilement que ce problème admet deux solutions qui sont $y = e$ et $y = \sqrt{3}$ ($y = 0$ et $y = 3/2$ en notation standard) ■

Exemple 6. Le problème de valeur propre affine standard écrit en notation minplus :

$$\begin{cases} \lambda x_1 = c(x_1)^2/x_2 , \\ \lambda x_2 = d(x_2)^2/x_1 , \end{cases} \quad (3.9)$$

se réduit au problème de point fixe $y = (d/c)y^3$ qui est unique $y = \sqrt{c/d}$ (d'où $\lambda = \sqrt{cd}$) qui est instable (en notation standard $y^{k+1} = 3y^k + d - c$ est instable) ■

Exemple 7. Le problème de Kolmogorov ergodique standard écrit en notation minplus (sauf dans les exposants) :

$$\begin{cases} \lambda x_1 = c(x_1)^{1-\alpha}(x_2)^\alpha , \\ \lambda x_2 = d(x_1)^\beta x_1^{1-\beta} , \end{cases} \quad (3.10)$$

avec $0 \leq \alpha \leq 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$ se réduit au problème de point fixe $y = (d/c)y^{1-\alpha-\beta}$ qui est unique $y = \frac{\alpha+\beta\sqrt{d/c}}{\alpha+\beta\sqrt{c^\beta d^\alpha}}$ (d'où $\lambda = \frac{\alpha+\beta\sqrt{c^\beta d^\alpha}}{\alpha+\beta\sqrt{d/c}}$) qui est toujours stable et de plus contractant dès que $1 > \alpha > 0$ ou $1 > \beta > 0$ ■

Exemple 8. Le problème de valeur propre dans la cas minplus linéaire s'écrit :

$$\begin{cases} \lambda x_1 = ax_1 \oplus bx_2 , \\ \lambda x_2 = cx_1 \oplus dx_2 , \end{cases} \quad (3.11)$$

se réduit au problème de point fixe $y = (c \oplus dy)/(a \oplus by)$ qui a génériquement une solution unique. Pour pouvoir faire les calculs faisons l'hypothèse $a < \sqrt{cb} \oplus d$ alors on peut vérifier que le seul point est $y = c/a$ et que $\lambda = a$. De plus dans ce cas l'itération de point fixe $y^{k+1} = (c \oplus dy^k)/(a \oplus by^k)$ se stationarise en un nombre fini de coups bien que la dynamique soit stable mais pas contractante ■

Exemple 9. Le problème de valeur propre :

$$\begin{cases} \lambda x_1 = x_2 , \\ \lambda x_2 = x_2^3/(x_1)^2 \oplus 2x_1^2/x_2 , \end{cases} \quad (3.12)$$

se réduit au problème de point fixe $y = y^2 \oplus 2/y^2$ admet les deux points fixes $y = e$ et $y = 2/3$ qui sont instables et les deux valeurs propres $\lambda = 0$ et $\lambda = 2/3$. On verra dans la section suivante que ce genre de système est chaotique ■

La dynamique des y n'étant pas nécessairement contractante, on peut utiliser la méthode de Newton pour trouver un point fixe. On rappelle que résoudre l'équation du point fixe $y = g(y)$ ou résoudre l'équation $h(y) = y - g(y) = 0$ par la méthode de Newton consiste à déterminer \bar{y} solution de $h(\bar{y}) = 0$ par l'algorithme itératif défini par :

$$y^{k+1} = y^k - h'(y^k)^{-1}h(y^k).$$

On sait que sous des hypothèses de régularité par exemple h de classe C^1 dans un voisinage de \bar{y} solution de $h(y) = 0$ et si $h'(\bar{y}) \neq 0$, alors il existe $\mathcal{V}(\bar{y})$ un voisinage de \bar{y} tel que la méthode de Newton converge en partant d'un y^0 quelconque dans $\mathcal{V}(\bar{y})$. On s'intéresse ici aux systèmes polyédraux qui ne sont pas C^1 mais C^1 par morceaux, Dans ce cas en partant d'un point du "morceau" auquel appartient le point fixe l'algorithme de Newton converge en une itération puisque dans ce morceau trouver le point fixe revient à résoudre le système affine que résout Newton à la première étape. La méthode de Newton ne peut être considérée comme constructive que si on lui ajoute la façon de l'initialiser. On dira que la méthode de Newton est *globale* lorsqu'elle converge quelle que soit la condition initiale. Seulement dans certains cas particuliers des systèmes homogènes polyédraux que nous précisons la méthode de Newton est globale. Elle est capable de trouver des points fixes instables. Un fois trouvé un point fixe \bar{y} il suffit de calculer les valeurs propres de $g'(\bar{y})$ pour tester sa stabilité.

La valeur propre lorsqu'elle existe et qu'elle est stable donne le taux de croissance du système dynamique. Dans le cas instable c'est faux puisque le système peut exploser de façon exponentielle. De plus on a parfois des valeurs propres instables mais un taux de croissance bien défini. C'est l'objet de la section suivante.

3.2.2 Le chaos dans les systèmes homogènes

Un système dynamique additivement homogène polyédral peut avoir un comportement chaotique. Reprenons l'exemple 9.

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = x_2^k, \\ x_2^{k+1} = (x_2^k)^3 / (x_1^k)^2 \oplus 2(x_1^k)^2 / x_2^k. \end{cases}$$

Le problème de valeur propre correspondant est :

$$\begin{cases} \lambda x_1 = x_2 \\ \lambda x_2 = x_2^2 / (x_1)^2 \oplus 2(x_1)^2 / x_2. \end{cases}$$

Les solutions de ce problème sont $\lambda = 0$ et $\lambda = 2/3$ et $y = x_2/x_1$ satisfaisant l'équation $y = y^2 \oplus 2/y^2$, qui est le problème du point fixe associé système au système dynamique $y^{k+1} = g(y^k)$, où g est la fonction appelé *tente* dans la littérature sur le chaos (voir [Ber97] par exemple) définie par $g(y) = y^2 \oplus 2/y^2$.

On voit figure 3.1 que ce problème de point fixe a deux solutions instables $y = 0$ et $y = 2/3$. Sur la figure 3.1, on montre le graphe de f , $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, leurs points fixes et leurs trajectoires périodiques correspondantes. Sur la figure 3.2 on montre une trajectoire pour une condition initiale prise aléatoirement avec la loi uniforme sur l'intervalle $\{(i-1)/10^5, i = 1, \dots, 10^5\}$. La ligne diagonale montre le résultat du tri décroissant de l'ensemble $\{y^k, k = 1, \dots, 10^5\}$. Ce tri montre que la mesure invariante empirique est uniforme.

Remarque 1. La simulation numérique sur Scilab (ou sur Matlab) du système $y^{k+1} = (y^k)^2 \oplus 2/(y^k)^2$ sur l'intervalle $[0, 1]$ en utilisant les nombres flottants montre que le système atteint le point fixe 0 en quelques itérations pour toute condition initiale y^0 (même pour $y^0 = 2/3$), ce qui cache le comportement chaotique qui devrait correspondre à des

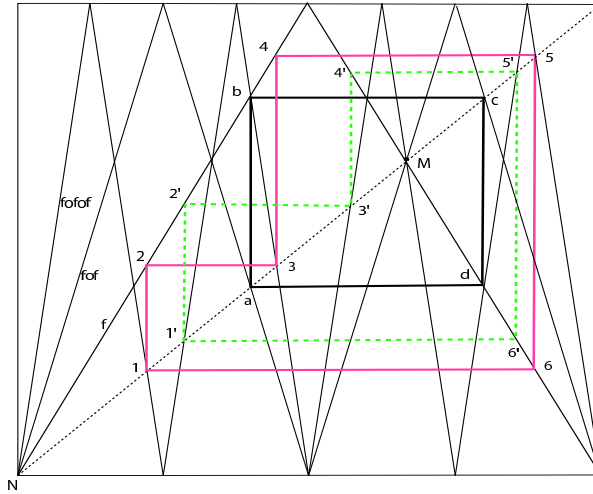


FIG. 3.1 – Les cycles de la transformation "tente".

trajectoires du type de celle montrée dans la figure 3.2 pour la majorité des conditions initiales.

Pour comprendre ce phénomène, prenons un nombre flottant quelconque qui admet nécessairement une représentation binaire fini $b_0.b_1 \cdots b_n$, alors à l'itération suivante on obtient : – soit $0.b_2 \cdots b_n$ si $b_0 = 0$ et $b_1 = 0$ (multiplication par 2 en binaire si $x \leq 1/2$) – soit $0.\bar{b}_2 \cdots \bar{b}_n + a$ si $b_0 = 1$ ou si $b_1 = 1$ ($2(1-x)$ en binaire si $x > 1/2$) (\bar{b} désigne le complémentaire de b et a est le nombre décimal binaire ayant 1 en $n-1$ position après la virgule). A chaque itération le nombre de bits non nuls de la représentation binaire diminue de 1 et donc l'itération converge vers 0 ■

Il a été montré que l'itération tente admet une unique mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, qui est la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On vérifie aussi que l'orbite d'une condition initiale y^0 dans $[0, 1]$ est périodique si et seulement si y^0 est rationnel. L'union des orbites périodiques est alors dense dans $[0, 1]$, cependant cet ensemble est dénombrable, donc de mesure de Lebesgue nulle. Si on définit la fonction $I : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ par :

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\{0, 1\}$, il existe x dans $[0, 1]$ tel que la suite $(I_{f^n(x)})_{n \in \mathbb{N}}$ coïncide avec $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La sensibilité de ce système aux conditions initiales est telle que lorsque x est donné dans $[0, 1]$ avec une précision δ , $f^n(x)$ devient imprédictible dès que $2^n \geq \frac{1}{\delta}$.

En général, lorsqu'un système minplus 1-homogène $x^{k+1} = f(x^k)$, écrit sous la forme (3.6), est chaotique, il croît linéairement avec une valeur λ donnée par :

$$\chi(f) = \int f_1(y) d\mu(y),$$

où μ est la mesure de probabilité invariante de y dépendant de l'état initial y^0 .

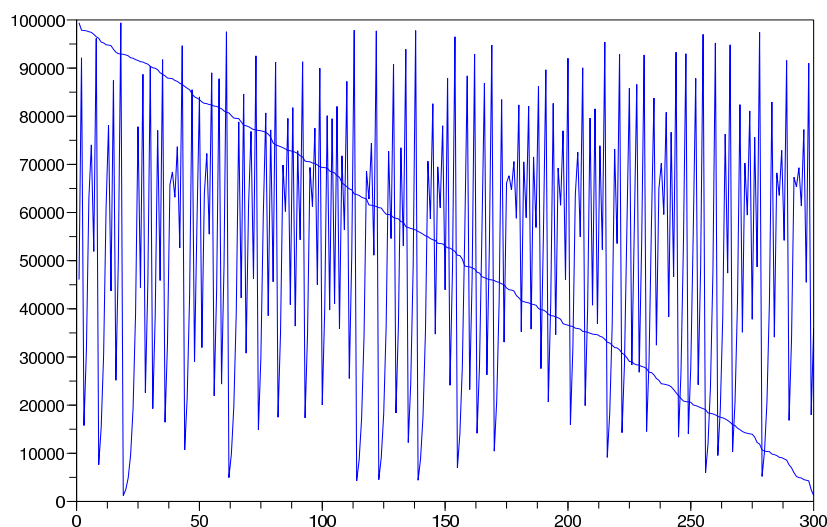


FIG. 3.2 – Simulation sur les entiers de 0 à 10^6 (grâce à un changement d'échelle) de la dynamique correspondant à la fonction chaotique “tente”.

Selon la valeur initiale de y^0 , les itérations de la fonction tente peuvent rester sur un circuit ou suivre des trajectoires sans circuits qui peuvent être denses dans l'intervalle $[0, 1]$. On a vu aussi que pour l'ensemble dense de nombres ayant une représentation binaire fini on avait convergence vers 0.

Dans notre exemple on peut calculer le taux de croissance correspondant à presque toutes les conditions initiales (pour la loi uniforme sur $[0, 1]$)

$$\chi(f) = \int_0^1 y dy = 1/2 ,$$

Ce nombre est différent des valeurs propres qui sont 0 et $2/3$.

En résumé cet exemple montre que le taux de croissance peut exister mais qu'il peut être différent des valeurs propres. De plus on voit que dans le cas chaotique on ne peut pas, certes, obtenir des résultats de simulation quantitativement fiables, mais que même le comportement qualitatif de la simulation peut être faux (impression erronée de stabilité). Une façon de se prémunir contre cette difficulté est de tester si le taux de croissance correspond à une valeur propre stable. En appliquant Newton à une condition initiale déduite du comportement asymptotique on peut vérifier que le taux de croissance correspond à une valeur propre dont on peut ensuite tester la stabilité.

3.3 Systèmes homogènes monotones

Dans cette section, on rappelle les principaux résultats existants concernant les applications homogènes monotones. Cette classe a été étudiée depuis longtemps dans différents

domaines séparés (systèmes dynamiques, théorie des jeux, systèmes à événements discrets), on fera largement référence aux travaux récents de S. Gaubert et J. Gunawerdena [GK95, GG98a, GG99, GG04].

Définition 6. Une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est monotone si : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, où $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \leq y$ signifie $x_i \leq y_i, \forall 1 \leq i \leq n$.

La propriété de monotonie, lorsqu'elle est combinée avec l'homogénéité devient très forte. En effet comme le montre le théorème 13 ci dessous, elle permet de garantir la non expansivité.

Définition 7. Une application f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n est dite non expansive s'il existe une norme $\| \cdot \|$ sur \mathbb{R}^n telle que : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \| f(x) - f(y) \| \leq \| x - y \|$.

Théorème 13. [CT80] Une application homogène et monotone $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est non expansive pour la norme sup., c'est à dire : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \| f(x) - f(y) \|_\infty \leq \| x - y \|_\infty$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \| f(x) - f(y) \|_\infty &= \| f(y + (x - y)) - f(y) \|_\infty \\ &\leq \| f(y + \| x - y \|_\infty \mathbf{1}) - f(y) \|_\infty \quad \text{car } f \text{ est monotone,} \\ &= \| x - y \|_\infty \quad \text{car } f \text{ est homogène} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

On rappelle ci-dessous un résultat important [GG98a] sur l'existence de valeur propre pour une fonction monotone qui est l'analogie du théorème de Perron-Frobenius pour une matrice carrée à éléments positifs irréductible. l'existence d'une valeur propre pour cette matrice.

Pour cela on définit d'abord le graphe associé à une fonction homogène et monotone.

Définition 8. [GG99] Le graphe $\mathcal{G}(f)$ associé à une fonction homogène et monotone $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est défini par l'ensemble des nœuds $\{1, 2, \dots, n\}$, et l'ensemble des arcs tels qu'il existe un arc d'un nœud i vers un nœud j si $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_i(\nu e_j) = \infty$, où e_j est le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n .

Exemple 10. Le graphe associé à la fonction homogène monotone $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f \left(\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 + \max(2 + x_2, \min(1 + x_1, x_3)) \\ \min(1 + x_2, 2 + x_3) \\ 2 + x_1 \end{bmatrix},$$

est le graphe de la figure (3.3).

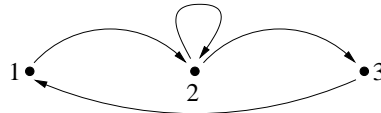


FIG. 3.3 – Graphe associé à une fonction homogène monotone.

Théorème 14. [GG98a] Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction homogène et monotone telle que $\mathcal{G}(f)$ est fortement connexe, alors f admet une valeur propre.

Des résultats plus récents [LMS01, Vir01] utilisent la transformation $g = \exp \circ f \circ \log$ pour se ramener à la théorie de Perron-Frobenius non linéaire [Nus88] développés sur les cônes positifs. On vérifie que g préserve l'ordre dans $\text{int } \mathbb{R}_+^n$, et qu'elle est positivement multiplicativement homogène de degré 1, c'est à dire : $g(tx) = tg(x)$, $\forall x \in \text{int } \mathbb{R}_+^n, \forall t \geq 0$.

Dans ce qui suit, on fait le lien entre la valeur propre d'un système 1-homogène monotone et son taux d'accroissement, définis dessous, lorsqu'ils existent.

On définit les deux applications \top et \perp de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} par : $\top(x) = \max_i x_i$ et $\perp(x) = \min_i x_i$.

Une application homogène et monotone $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet toujours un taux de croissance, car dans ce cas, f s'écrit forcément $f(x) = x + a$. Donc $\chi(f) = a$. Un résultat de [GK95] montre que toute application homogène et monotone $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ admet un temps de cycle. Un autre résultat de [GK95] construit une infinité d'applications homogènes et monotones $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui n'ont pas de taux de croissance.

Théorème 15. [GK95] Une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est homogène et monotone si, et seulement si : $\top(f(x) - f(y)) \leq \top(x - y)$.

Démonstration. • Soit f une application monotone homogène. On a :

$$\begin{aligned} \top(f(x) - f(y)) &= \top(f(y + (y - x)) - f(y)) \\ &\leq \top(f(y + \top(x - y)) - f(y)) \quad \text{car } f \text{ est monotone} \\ &= \top(x - y) \quad \text{car } f \text{ est homogène.} \end{aligned}$$

- Soit f telle que $\top(f(x) - f(y)) \leq \top(x - y)$.
 - f est monotone car

$$x \leq y \Rightarrow \top(x - y) \leq 0 \Rightarrow \top(f(x) - f(y)) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(y) .$$

- f est homogène car

$$\top(f(x + a) - f(x)) \leq \top(a) = a \text{ et } \perp(f(x + a) - f(x)) = -\top(f(x) - f(x + a)) \geq a.$$

C'est à dire $f(x + a) - f(x) = a$ ■

Proposition 1. [GG98a] Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application monotone homogène. La suite $(\top(f^k(0)))_{k \in \mathbb{N}}$ (resp. $(\perp(f^k(0)))_{k \in \mathbb{N}}$) est sous-additive. C'est à dire : $\top(f^{k+l}(0)) \leq \top(f^k(0)) + \top(f^l(0))$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \top(f^{k+l}(0)) &= \top(f^l(f^k(0))) , \\ &\leq \top(f^l(\top(f^k(0)))) , \quad \text{par monotonie ,} \\ &= \top(\top(f^k(0)) + f^l(0)) , \quad \text{par homogénéité ,} \\ &= \top(f^k(0)) + \top(f^l(0)) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Théorème 16. [GK95] Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction homogène et monotone et $x \in \mathbb{R}^n$. Les suites $(\top(f^k(x)/k))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\perp(f^k(x)/k))_{k \in \mathbb{N}}$ convergent, et leurs limites sont indépendantes de x .

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(y) + \top(x - y), && \text{par monotonie et homogénéité,} \\ f^k(x) &\leq f^k(y) + \top(x - y), && \text{par monotonie et homogénéité,} \\ \top(f^k(x)/k) &\leq \top(f^k(y)/k) + \top(x - y)/k, && \text{par les propriétés de } \top. \end{aligned}$$

En substituant x et y , on a : $\top(f^k(y)/k) \leq \top(f^k(x)/k) + \top(y - x)/k$, ce qui donne :

$$\top(y - x)/k \leq \top(f^k(x)/k) - \top(f^k(y)/k) \leq \top(x - y)/k,$$

qui veut que la limite $\lim_{k \rightarrow \infty} \top(f^k(x)/k)$ est indépendante de x lorsqu'elle existe.

Prenant $x = 0$, on obtient que : – la suite $\{\top(f^k(0))\}_{k \in \mathbb{N}}$ est sous additive, – la suite $\{\perp(f^k(0))\}_{k \in \mathbb{N}}$ est sur-additive, – $\forall k \in \mathbb{N}$, $\perp(f^k(0)) \leq \top(f^k(0))$.

On déduit du théorème ergodique sous-additif [Kin73] que les suites $\{\perp(f^k(0)/k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{\top(f^k(0)/k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergent ■

Définition 9. Le taux d'accroissement et les taux d'accroissement sup. et inf. d'une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, lorsqu'ils existent, sont définis respectivement par :

$$\chi(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x)/k, \quad \bar{\chi}(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \top(f^k(x)/k) \quad \text{et} \quad \underline{\chi}(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \perp(f^k(x)/k).$$

Corollaire 4. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application homogène et monotone et si elle admet une valeur propre $\lambda : f(x) = \lambda + x$, alors : $\underline{\chi}(f)\mathbf{1} = \bar{\chi}(f)\mathbf{1} = \chi(f) = \lambda\mathbf{1}$.

3.3.1 Le problème de valeur propre et la programmation linéaire

Dans ce qui suit on rappelle les notions de sur-valeur propre et de l'ensemble des sur-vecteurs propres associé, et un résultat qui fait le lien entre une valeur propre d'une fonction homogène et monotone, lorsqu'elle existe, et l'ensemble de ses sur-valeurs propres.

Définition 10. On dira que le réel λ est une sur-valeur propre d'une fonction f , associée au sur-vecteur propre x si $\lambda + x \leq f(x)$.

On note par $\mathcal{S}_\lambda(f)$ l'ensemble :

$$\mathcal{S}_\lambda(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda + x \leq f(x)\}.$$

On voit alors que si $\mathcal{S}_\lambda(f) \neq \emptyset$ alors que λ est une sur-valeur propre de f et que que $\mathcal{S}_\lambda(f)$ est l'ensemble des sur-vecteurs propres associé. L'ensemble des sur-valeurs propres de f est noté par $\Lambda(f)$ et est défini par :

$$\Lambda(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \mathcal{S}_\lambda(f) \neq \emptyset\}.$$

Proposition 2. [GG99] Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction homogène et monotone, alors $\Lambda(f)$ a l'une des formes : $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, a]$, avec $\underline{\chi}(f) \geq a$.

Proposition 3. [GG99] Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction homogène et monotone, alors : $\sup \Lambda(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \perp(f(x) - x) = \underline{\chi}(f)$.

Corollaire 5. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction homogène et monotone, et si elle admet une valeur propre λ , alors $\Lambda(f)$ est de la forme $]-\infty, \lambda]$.

On déduit de ce corollaire que si f est une fonction homogène et monotone, et si elle admet une valeur propre λ , alors le problème d'optimisation suivant :

$$\max\{\mu \mid \mu + x \leq f(x)\}, \quad (3.13)$$

admet comme solution (λ, x) où x est un vecteur propre associé à λ . On a alors : $\lambda + x = f(x)$, c'est à dire que les contraintes du problèmes (3.13) sont toutes saturées.

Exemple 11. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction homogène, monotone, affine, admettant une valeur propre λ , alors le problème (3.13) est un problème linéaire qui admet comme solution (λ, x) où x est un vecteur propre associé à λ , et cette solution sature toutes les contraintes du programme linéaire. Ce cas correspond aux fonctions f de la forme $f(x) = Mx + c$, où M est une matrice stochastique irréductible, et où c est un vecteur de \mathbb{R}^n ■

Exemple 12. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction homogène, monotone, de la forme :

$$f_i(x) = \min_{1 \leq j \leq p} g_{ij}(x), \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

où les fonctions g_{ij} sont affines.

Supposons que f admet une valeur propre λ . Dans ce cas le programme linéaire

$$\max\{\mu \mid \mu + x_i \leq g_{ij}(x), \forall j = 1, \dots, p, \forall i = 1 \dots n\},$$

admet la solution λ qui satisfait $\lambda + x = f(x)$ et le *problème linéaire de complémentarité* [MY97, CPS92, SM97] suivant :

$$\max\{\mu \mid \mu + x_i \leq g_{ij}(x), \prod_{j=1}^p (\mu + x_i - g_{ij}(x)) = 0, \forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p\}, \quad (3.14)$$

admet la solution λ .

Ce cas correspond aux fonctions f de la programmation dynamique d'un problème de contrôle optimal stochastique. La valeur propre est alors le coût moyen optimal ■

3.3.2 Systèmes homogènes monotones affines par morceaux

On rappelle ici un résultat important sur le problème de valeur propre généralisé d'applications affines par morceaux (que l'on a appelé aussi polyédrales) non expansives. Une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite affine par morceaux s'il existe une partition de \mathbb{R}^n en ensembles polyédraux fermés telle que f soit affine sur chacun de ces ensembles.

Théorème 17. [Koh80] *Si une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est affine par morceaux et non expansive, alors il existe un unique vecteur $\alpha \in \mathbb{R}^n$ et un vecteur $\beta \in \mathbb{R}^n$ tels que :*

$$\forall t \geq 0, f(\beta + t\alpha) = \beta + f(t+1)\alpha.$$

3.4 Systèmes homogènes monotones convexes

Dans cette section, on rappelle que les systèmes homogènes monotones convexes correspondent à des problèmes de commande optimale stochastique et que l'algorithme de Newton pour calculer les éléments spectraux n'est rien d'autre que l'algorithme de Howard et donc converge globalement.

3.4.1 Les systèmes homogènes monotones convexes correspondent à des problèmes de commande optimale stochastique

On rappelle ici les résultats de [AG01].

Définition 11. Le sous-différentiel d'une application convexe $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ en un point x est défini par l'ensemble $\partial f(x)$ tel que :

$$\partial f(x) = \{P \in \mathbb{R}^{n \times n}, f(y) - f(x) \geq P(y - x), \forall y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Théorème 18. [AG01] Si f est une fonction convexe alors les matrices P de l'ensemble $\partial f(x)$ sont des matrices stochastiques.

Démonstration. En effet, notons f^* la transformée de Fenchel définie par :

$$\begin{aligned} f^* : \mathbb{R}^{n \times n} &\rightarrow (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \\ P &\mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (Px - f(x)), \end{aligned}$$

le sup étant pris élément par élément. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ et $P \in \partial f(v)$. On a : $f^*(P) = Pv - f(v) < +\infty$. De l'homogénéité de f , on obtient alors :

$$+\infty > f^*(P) \geq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} (P\lambda \mathbf{1} - f(\lambda \mathbf{1})) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^n} (\lambda P \mathbf{1} - \lambda - f(0)) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \lambda (P \mathbf{1} - \mathbf{1}) - f(0).$$

Ce qui donne : $P \mathbf{1} = \mathbf{1}$. De la monotonie de f , on obtient :

$$+\infty > f^*(P) \geq \sup_{x \leq 0} (Px - f(x)) \geq \sup_{x \leq 0} Px - f(0).$$

Ce qui donne : $P_{ij} \geq 0, \forall i, j$. Donc P est une matrice stochastique ■

On vérifie alors que le graphe associé à l'application $x \mapsto Px$ ou à l'application $x \mapsto Px + c$, où P est une matrice stochastique de $\mathbb{R}^{n \times n}$ et c un vecteur de \mathbb{R}^n , n'est que le graphe de transition de la chaîne de Markov associée à P .

Lorsqu'une application homogène monotone convexe f admet un vecteur propre v , le graphe critique de f , noté $G^c(f)$, est défini par l'union des graphes finaux des matrices stochastiques $P \in \partial f(v)$. On note par G_1, G_2, \dots, G_s les composantes fortement connexes de $G^c(f)$, par $c(G_i)$, qu'on appelle la *cyclicité* de G_i , le *pgcd* des des longueurs des circuits de la composante G_i , et par $c(f)$, qu'on appelle la *cyclicité* de f , le *ppcm* des cyclicités des composantes G_1, G_2, \dots, G_s .

Exemple 13. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction homogène monotone convexe définie par :

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \max(x_1 + 1, x_2) \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

On vérifie que $\partial f(x)$ est donné par :

$$\partial f(x) = \text{Cvx} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \triangleq \left\{ \theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (1 - \theta) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, 0 \leq \theta \leq 1 \right\}.$$

c'est à dire :

$$\partial f(x) = \left\{ \begin{bmatrix} \theta & 1 - \theta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, 0 \leq \theta \leq 1 \right\}.$$

Le graphe associé à f est donc le graphe donné sur la figure (3.4).

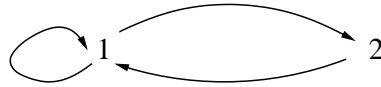


FIG. 3.4 – Graphe associé à la fonction homogène monotone convexe f .

3.4.2 L'algorithme de Newton est global

Soit f l'opérateur de la programmation dynamique d'un problème de contrôle optimal stochastique pour lequel on veut optimiser le coût moyen par unité de temps. Le problème de valeur propre (qui existe dans le cas ergodique) associé à f n'est alors que la résolution équation de la programmation dynamique. On sait que l'algorithme d'itération sur la politique de Howard qui converge globalement résout cette équation.

Montrons l'algorithme de Howard est l'algorithme de Newton pour la résolution du problème de point fixe associé au calcul de la valeur propre.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$f_i(x) = \min_{u \in \mathcal{U}} \{(M^u x)_i + c_i^u\}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Le problème de valeur propre associé à f est le suivant :

$$\lambda + x_i = \min_{u \in \mathcal{U}} \{(M^u x)_i + c_i^u\}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (3.15)$$

On note par \mathcal{S} l'ensemble des stratégies en boucle fermée associé à l'ensemble de commandes \mathcal{U} , c'est à dire l'ensemble des applications $s : \{1, 2 \dots, n\} \ni i \mapsto u \in \mathcal{U}$. On note alors par M^s (resp. $A^s = M^s - I_d$), avec $s \in \mathcal{S}$ la matrice dont les lignes sont données par : $M_i^s = M_i^{s(i)}$. De même on note par c^s , avec $s \in \mathcal{S}$ le vecteur colonne défini par : $c_i^s = c_i^{s(i)}$.

Algorithme 1. L'algorithme de l'itération sur les politiques de Howard.

- *Initialisation* : choisir $s^0 \in \mathcal{S}$,
- *Etape k* :
- Résoudre

$$\lambda^k = A^{s^k} x + c^{s^k},$$

et noter la solution par $(\bar{\lambda}, \bar{x})$.

- Déterminer $s^{k+1} : i \mapsto \bar{u}$ telle que :

$$(M^{\bar{u}} \bar{x})_i + c_i^{\bar{u}} = \min_{u \in \mathcal{U}} \{(M^u \bar{x})_i + c_i^u\} \blacksquare$$

On note ici $g(z) = f(z) - z$ et on donne une adaptation algorithme de Newton pour résoudre $\lambda = g(z)$ en tenant compte de $g(a\mathbf{1} + z) = g(z)$ ou a est un réel qui implique une singularité des matrices à inverser. Cet algorithme n'est pas l'algorithme de Newton pour le problème de point fixe de la section 3.2.1 (car les fonctions g définissant le même point fixe ne sont pas les mêmes) mais résout le même problème et est plus facile à analyser.

Algorithme 2. L'algorithme de Newton.

- *Initialisation* : choisir z^0 ,
- *Etape k* :

- Calculer $g'(z^k) = A^{s^k}$

$$A^{s^k} z^k + c^{s^k} = \min_{s \in S} \{A^s z^k + c^s\}.$$

- Calculer z^{k+1} de la façon suivante :

$$A^{s^k} (z^{k+1} - z^k) = -(A^{s^k} z^k + c^{s^k}) + \lambda^k$$

ce qui revient à résoudre $A^{s^k} z^{k+1} + c^{s^k} = \lambda^k$ ■

3.4.3 Applications homogènes monotones convexes et affines par morceaux

Lorsque l'ensemble des commandes d'un problème de commande optimale stochastique de chaîne de Markov est fini, l'opérateur de la programmation dynamique associé est affine par morceaux. On note par \mathcal{P} l'ensemble des fonctions de la programmation dynamique de ces problèmes auxquels on demande de plus d'être *ergodiques*. On a le résultat de cyclicité asymptotique suivant :

Théorème 19. [Lan67, SF77] *Si f appartient à \mathcal{P} alors la suite $\{f^{kc}(x) - kc\lambda\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge pour tout x dans \mathbb{R}^n , où c est la cyclicité de f et λ sa valeur propre additive.*

Ce théorème sera utilisé dans la section suivante pour montrer la périodicité asymptotique d'une classe de systèmes non nécessairement monotones.

3.5 Systèmes homogènes triangulaires périodiques

On s'intéresse à présent aux systèmes 1-homogènes non nécessairement monotones en étudiant une classe où un système 1-homogène monotone est paramétré par une sortie d'un autre système 1-homogène monotone¹.

On étudie d'abord le cas où les opérateurs monotones homogènes paramétrés sont linéaires dans l'algèbre minplus, puis le cas où ils sont des opérateurs homogènes monotones convexes généraux donc interprétables en terme de programmation dynamique stochastique.

Dans ces deux cas on a la périodicité amont qui implique la périodicité des coefficients du système aval. On en déduit la périodicité globale et donc l'existence d'un taux de croissance dans des cas non standard puisque le système n'est pas globalement monotone mais seulement homogène.

3.5.1 Systèmes linéaires périodiques

On fait ici quelques rappels sur les valeurs propres des matrices de l'algèbre minplus, on définit les systèmes linéaires périodiques et on fait quelques remarques sur leurs taux de croissance.

¹Le système obtenu reste 1-homogène mais pas nécessairement monotone car la dépendance par rapport au paramètre a une propriété d'homogénéité mais pas de monotonie.

Soient $x \in \mathbb{R}_{\min}^n$, et $A \in \mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$. On considère le système :

$$x^{k+1} = A \otimes x^k. \quad (3.16)$$

On sait [GM86, BCOQ92] que si la matrice A est irréductible, alors elle admet une valeur propre unique λ associée à un ou plusieurs vecteurs propres x , c-à-d :

$$\exists \lambda \neq \varepsilon, x \neq \varepsilon : A \otimes x = \lambda \otimes x.$$

On sait aussi [BCOQ92] qu'un système de type (3.16) est asymptotiquement périodique, c-à-d :

$$\exists K \in \mathbb{N}, T \in \mathbb{N}^* : \forall k \geq K, x^{k+T} = \lambda^T \otimes x^k.$$

Ce qui veut dire que le taux d'accroissement du système est unique. A partir d'un certain rang, les trajectoires de toutes les composantes croissent de façon périodique autour de droites ayant toutes la même pente λ . On appellera (de façon abusive) périodique ce comportement.

Lorsque la matrice A n'est pas irréductible, elle peut admettre plusieurs valeurs propres. On note par C_1, C_2, \dots, C_m les composantes fortement connexes du graphe $\mathcal{G}(A)$ associé à A , et on écrit $C_1 \preceq C_2$ s'il existe un chemin allant d'un nœud de C_2 vers un nœud de C_1 dans $\mathcal{G}(A)$. Si on note alors par μ_i la valeur propre minplus de la matrice correspondante à la classe C_i pour i allant de 1 à m , on a le résultat suivant[Gau92] :

$$\mu \in \text{spec}(A) \Leftrightarrow \exists i : \mu = \mu_i \leq \mu_j \forall j : C_j \preceq C_i.$$

Le taux d'accroissement du système (3.16) qui dépend de la condition initiale est égal à l'une des valeurs propres de A . Les trajectoires sont asymptotiquement périodiques. La période dépend de la valeur propre de la composante fortement connexe qui synchronise la partie du système définie par le support de la condition initiale.

Exemple 14. 1. Soit la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e & \varepsilon \end{pmatrix}$. On peut vérifier que A est irréductible, et donc qu'elle admet une seule valeur propre égale à $1/2$ associée à un seul vecteur propre égal à ${}^t(1/2 \ e)$. On vérifie aussi que le système est asymptotiquement périodique. Si par exemple $x_0 = {}^t(0 \ 0)$, on aura une période de 2.

2. Soit la matrice B définie par $B = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Le graphe associé à B a deux composantes fortement connexes, et B a deux valeurs propres 1 et 2 associées aux deux vecteurs propres ${}^t(e \ e)$ et ${}^t(\varepsilon \ e)$.

3. Soit la matrice C définie par $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 2 \end{pmatrix}$. Le graphe associé à C a deux composantes fortement connexes, mais C n'admet qu'une seule valeur propre égale à 1 associée au vecteur propre ${}^t(e \ \varepsilon)$ ■

Définition 12. Un système linéaire minplus temps variant donné par

$$\begin{cases} x^{k+1} = A^k \otimes x^k \oplus B^k \otimes u^k, \\ y^{k+1} = C^k \otimes x^k \end{cases}$$

est dit *périodique*, noté LP, si $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(B^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(C^k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont des suites périodiques de matrices minplus.

Soit $(A^i)_{i=0, \dots, r-1}$ une famille de matrices carrées minplus n'ayant pas de valeur propre nulle. On note :

$$\mathcal{A}^p = \bigotimes_{i=p}^{p+r-1} A^i, \quad p, i \in \mathbb{N}/r\mathbb{N}.$$

Proposition 4. *Les matrices $\mathcal{A}^p, p = 0, \dots, r-1$ ont les mêmes valeurs propres. Lorsque ces matrices sont irréductibles elles admettent donc toute la même unique valeur propre.*

Démonstration. Soit λ la valeur propre de la matrice \mathcal{A}^0 associée au vecteur propre $x \neq \varepsilon$. On a :

$$\mathcal{A}^0 \otimes x = \lambda \otimes x,$$

d'où :

$$\mathcal{A}^p \otimes \bigotimes_{i=0}^{p-1} A^i \otimes x = \bigotimes_{i=0}^{p-1} A^i \otimes \mathcal{A}^0 \otimes x = \lambda \otimes \bigotimes_{i=0}^{p-1} A^i \otimes x.$$

ce qui veut dire que λ est la valeur propre de la matrice \mathcal{A}^p associée au vecteur propre $\bigotimes_{i=0}^{p-1} A^i \otimes x$. Ceci est valable pour tout $p \in \{0, 1, \dots, r-1\}$.

Remarque 2. Dans le cas où les matrices \mathcal{A}^p (qui ont un même graphe associé) ne sont pas irréductibles, on a la même propriété sur chacune des composantes fortement connexes du graphe associé.

On suppose à présent que les matrices $A^i, 0 \leq i \leq r$ ont un même support, c'est à dire :

$$\forall p, q \in \{0, 1, \dots, r-1\}, \quad A_{ij}^p = \varepsilon \Leftrightarrow A_{ij}^q = \varepsilon,$$

et on associe à ces matrices, la matrice \bar{A} définie par :

$$\bar{A} = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} A^i.$$

On note par : \mathcal{C} l'ensemble des circuits du graphe associé aux matrices \mathcal{A}^p qui est le même que l'ensemble des circuits du graphe associé à la matrice $(\bar{A})^{\otimes r}$, $\tilde{\lambda}_p(c)$ (resp. $\bar{\lambda}(c)$) le poids moyen d'un circuit $c \in \mathcal{C}$ dans le graphe associé à \mathcal{A}^p (resp. à $(\bar{A})^{\otimes r}$).

Proposition 5. $\forall c \in \mathcal{C}, \quad \bar{\lambda}(c) \geq \min_{0 \leq p \leq r-1} \tilde{\lambda}_p(c).$

Ceci veut dire que toute valeur propre d'une matrice \mathcal{A}^p pour $p \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ quelconque, est inférieure ou égale à la valeur propre de la matrice $(\bar{A})^{\otimes r}$ donnée par la même composante fortement connexe du graphe associé aux deux matrices.

Démonstration. On montre d'abord que :

$$\forall c \in \mathcal{C}, \quad \frac{1}{r} \sum_{p=0}^{r-1} \tilde{\lambda}_p(c) = \bar{\lambda}(c).$$

On montre le résultat dans le cas $r = 2$ et un circuit c à trois arcs (dans le graphe associé aux matrices \mathcal{A}^p donc 6 arcs de matrices A^i) : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. On a :

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}(c) &= \frac{1}{3}[(\bar{A}^{\otimes 2})_{12} + (\bar{A}^{\otimes 2})_{23} + (\bar{A}^{\otimes 2})_{31}], \\ &= \frac{1}{3}[(\bar{A})_{1i} + (\bar{A})_{i2}] + [(\bar{A})_{2j} + (\bar{A})_{j3}] + [(\bar{A})_{3l} + (\bar{A})_{l1}], \\ &= \frac{1}{6}[(A_{1i}^1 + A_{1i}^2 + A_{i2}^1 + A_{i2}^2) + (A_{2j}^1 + A_{2j}^2 + A_{j3}^1 + A_{j3}^2) + (A_{3l}^1 + A_{3l}^2 + A_{l1}^1 + A_{l1}^2)].\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_p(c) &= \frac{1}{3}[\mathcal{A}_{12}^p + \mathcal{A}_{23}^p + \mathcal{A}_{31}^p], \quad p = 1, 2, \\ &= \frac{1}{3}[(A_{1i}^p + A_{i2}^{p+1}) + (A_{2j}^p + A_{j3}^{p+1}) + (A_{3l}^p + A_{l1}^{p+1})], \quad p = 1, 2.\end{aligned}$$

On déduit alors le résultat de l'inégalité :

$$\frac{1}{r} \sum_{p=0}^{r-1} \tilde{\lambda}_p(c) \geq \min_p \tilde{\lambda}_p(c) \quad \blacksquare$$

On en déduit le corollaire :

Corollaire 6. Les taux d'accroissements des systèmes $x^{k+1} = \mathcal{A}^p \otimes x^k$ pour $p = 1, \dots, r$, sont majorés par celui du système $x^{k+1} = (\bar{A})^{\otimes r} \otimes x^k$.

Démonstration. Découle directement des propositions 5 et 4 \blacksquare

3.5.2 Systèmes linéaires paramétrés

On étudie des systèmes minplus linéaires dépendant d'un signal v qui est une sortie d'un système linéaire minplus. Globalement le système est seulement homogène. On montre que ces systèmes se comportent asymptotiquement comme des systèmes minplus linéaires temps-variant périodiques. On donne quelques corollaires, notamment un résultat sur la réalisation de systèmes linéaires périodiques par des systèmes temps-invariants. On interprète ces résultats sur des exemples de réseaux de Pétri qui nous serviront dans le chapitre sur la modélisation d'intersections.

Définition 13. Un système est dit triangulaire 1-homogène noté T1H, s'il s'écrit :

$$\begin{cases} v^{k+1} = D \otimes v^k, \\ x^{k+1} = A(v^k) \otimes x^k \oplus B(v^k) \otimes u^k, \\ y^{k+1} = C(v^k) \otimes x^k. \end{cases} \quad (3.17)$$

où A [resp B, C] est une application 0-homogène de \mathbb{R}_{\min}^r dans $\mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$ [resp $\mathbb{R}_{\min}^{n \times p}, \mathbb{R}_{\min}^{m \times n}$] et $D \in \mathbb{R}_{\min}^{r \times r}$ est une matrice carrée minplus irréductible.

L'homogénéité de degré zéro des deux matrices A et B revient à l'existence de deux familles (α_{ij}) et (β_{ij}) de vecteurs dans \mathbb{R}^r , vérifiant $\alpha_{ij}\mathbf{1} = 0$ et $\beta_{ij}\mathbf{1} = 0$ où $\mathbf{1} = {}^t(1, 1, \dots, 1)$, et deux familles (a_{ij}) et (b_{ij}) de nombres dans \mathbb{R}_{\min} telles que :

$$\begin{cases} A(v)_{ij} = {}^t\alpha_{ij}v + a_{ij}, \\ B(v)_{ij} = {}^t\beta_{ij}v + b_{ij}. \end{cases} \quad (3.18)$$

On dira que l'application A est irréductible lorsqu'il existe v dans \mathbb{R}_{\min}^r tel que $A(v)$ le soit.

Théorème 20. *Tout système triangulaire 1-homogène se comporte asymptotiquement comme un système linéaire périodique.*

Démonstration. La matrice D étant irréductible, on sait [BCOQ92] que :

$$\exists K, T \in \mathbb{N}, \lambda \neq \varepsilon : \forall k \geq K, v^{k+T} = \lambda^T \otimes v^k,$$

d'où $\forall k \geq K, A(v^{k+T}) = A(v^k), B(v^{k+T}) = B(v^k)$ et $C(v^{k+T}) = C(v^k)$. Donc le système est asymptotiquement linéaire périodique ■

Exemple 15. On considère le système triangulaire 1-homogène défini par les $A(v), B(v), C(v), D$ suivantes :

$$D = \begin{bmatrix} \varepsilon & e \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A(v) = \begin{bmatrix} 1v_1/v_2 & \varepsilon & 1 \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix}, B(v) = \begin{bmatrix} \sqrt{v_2/v_1} \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}, C(v) = [2(v_1/v_2)^2 \quad e \quad 1].$$

On rappelle que $1v_1/v_2, \sqrt{v_2/v_1}$ et $2(v_1/v_2)^2$ s'écrivent en algèbre standard $1 + v_1 - v_2, \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_1$ et $2 + 2v_1 - 2v_2$ respectivement.

Ce système correspond à la dynamique du réseau de Pétri² déterministe (triangulaire) donné à gauche dans la figure 3.5, où on note par $u^k, v_1^k, v_2^k, x_1^k, x_2^k, x_3^k, y^k$ respectivement les nombres cumulés de brûlages des transitions $u, v_1, v_2, x_1, x_2, x_3, y$ jusqu'à l'instant k .

On vérifie que si $(v^0)^t = (e \ e)$ alors le système triangulaire 1-homogène se comporte comme le système linéaire périodique, de période 2, donné par :

$$A^0 = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & 1 \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix}, A^1 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & 1 \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix}, B^0 = \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}, B^1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix},$$

et $C^0 = [2 \quad e \quad 1], C^1 = [e \quad e \quad 1].$

Le système linéaire périodique est la dynamique du graphe d'événements temps-variant donné à droite de la figure 3.5 ■

Dans ce qui suit, on présente un résultat sur le taux d'accroissement des systèmes triangulaires 1-homogènes autonomes, c'est à dire de la forme :

$$\begin{cases} v^{k+1} = D \otimes v^k, \\ x^{k+1} = A(v^k) \otimes x^k \oplus B(v^k) \otimes v^k. \end{cases} \quad (3.19)$$

Lorsque la matrice A est irréductible, le taux d'accroissement de la variable x , qui dépend de la condition initiale v^0 , est unique. On le note par $\mu_x(v^0)$.

²Un rappel sur les réseaux de Pétri est donné dans le chapitre(4).

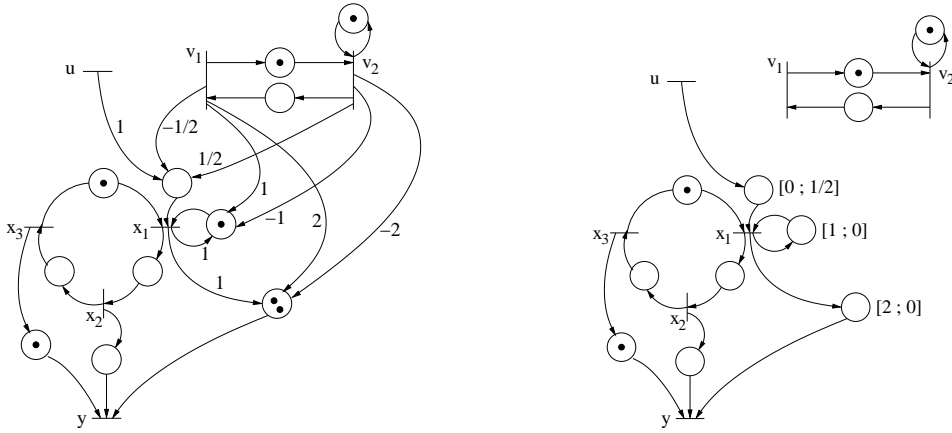


FIG. 3.5 – *A gauche* : un réseau de Pétri “triangulaire”. *A droite* : le graphe d’événements temps-variant correspondant.

Théorème 21. *Etant donné le système (3.19) avec A irréductible et D matrice de permutation, on a : $\max_{v \in \mathbb{R}_{\min}} \mu_x(v) = \mu_x(\bar{v})$, où \bar{v} est l’unique vecteur propre de D .*

Démonstration. Le vecteur \bar{v} défini par : $\bar{v} \triangleq \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} v^k$ est un vecteur propre minplus pour la matrice D et on définit la matrice \bar{A} par : $\bar{A} \triangleq A(\bar{v})$. On a alors : $\bar{A} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} A(v^k)$.

On a alors les deux cas :

1. Soit $v^0 \neq \bar{v}$, la suite $(v^k)_{k \geq 0}$ est périodique de période r . La dynamique de $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ s’écrit en terme de système avec r unités de retard comme suit :

$$x^{k+r} = \left(\bigotimes_{l=0}^{r-1} A(v^{k+l}) \right) \otimes x^k \oplus E(v) \otimes v^k,$$

où $E(v)$ est une matrice dépendant de $v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+r}$. En notant par \mathcal{A}^k la matrice $\bigotimes_{l=0}^{r-1} A(v^{k+l})$ le système (3.19) s’écrit :

$$\begin{bmatrix} v^{k+r} \\ x^{k+r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{\otimes r} & \varepsilon \\ E(v) & \mathcal{A}^k \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v^k \\ x^k \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

2. Soit $v^0 = \bar{v}$, la dynamique de $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ s’écrit aussi comme suit :

$$x^{k+r} = (\bar{A})^r \otimes x^k \oplus E(\bar{v}) \otimes v^k,$$

où $E(\bar{v})$ est une matrice dépendant de \bar{v} . Le système (3.19) s’écrit alors :

$$\begin{bmatrix} v^{k+r} \\ x^{k+r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{\otimes r} & \varepsilon \\ E(\bar{v}) & \bar{A}^{\otimes r} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v^k \\ x^k \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

En comparant les deux dynamiques (3.20) et (3.21), sachant que toute valeur propre d’une matrice minplus triangulaire par bloc est une valeur propre d’un des blocs, et en utilisant le corollaire 6, on obtient le résultat ■

Ce résultat peut être étendu au cas où A n’est pas irréductible.

Exemple 16. Soit le système triangulaire 1-homogène autonome donné par la matrice D et les deux applications $A(v)$ et $B(v)$ suivantes :

$$D = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ e & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad A(v) = \begin{bmatrix} v_1/v_2 & \varepsilon & 1 \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad B(v) = \varepsilon_{3 \times 2}.$$

Ce système est la dynamique du réseau de Pétri déterministe triangulaire et autonome de la figure (3.6).

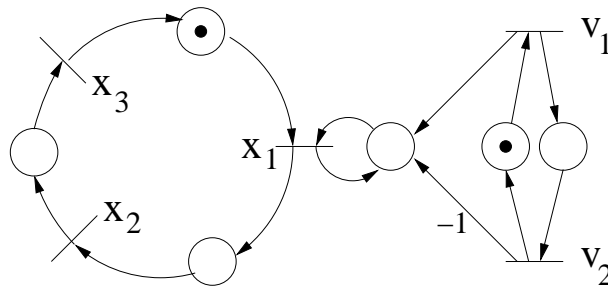


FIG. 3.6 – Optimisation du taux d'accroissement.

1. Si $(v^0)^t = (0 \ 0)$, la dynamique de x s'écrit $x^{k+1} = E^k \otimes x^k$, $k \in \mathbb{N}/2\mathbb{N}$ avec :

$$E^0 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & 1 \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E^1 = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & 1 \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Le taux moyen d'accroissement de la suite x^k vaut alors $\lambda/2$ où λ est l'unique valeur propre de la matrice $E^0 \otimes E^1$. On a alors un taux moyen d'accroissement de $1/4$.

2. Si $(v^0)^t = (1/2 \ 0)$, la dynamique de x s'écrit $x^{k+1} = E \otimes x^k$, avec :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & 1 \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Le taux moyen d'accroissement de x^k est alors l'unique valeur propre de la matrice E qui est $1/3$.

Théorème 22. *Tout système linéaire périodique dont les matrices A^k, B^k et C^k ont un même support est réalisable par un système triangulaire 1-homogène.*

Avant de donner la preuve de ce théorème, on donne d'abord un exemple qui facilitera la compréhension de la preuve.

Exemple 17. Soit le système linéaire périodique de période 2 donné par les matrices :

$$A_i = \begin{bmatrix} \varepsilon & c_i \\ d_i & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} a_i \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad C_i = [b_i \ \varepsilon], \quad i = 0, 1.$$

Ce système est la dynamique du graphe d'événements donné à gauche de la figure 3.7. Il est réalisable par le système triangulaire 1-homogène donné par les matrices :

$$D = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ e & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad A(v) = \begin{bmatrix} \varepsilon & c_0 v_1^{c_1 - c_0} v_2^{c_0 - c_1} \\ d_0 v_1^{d_1 - d_0} v_2^{d_0 - d_1} & \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$B(v) = \begin{bmatrix} a_0 v_1^{a_1 - a_0} v_2^{a_0 - a_1} \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad C(v) = [b_0 v_1^{b_1 - b_0} v_2^{b_0 - b_1} \quad \varepsilon],$$

représenté à droite de la figure 3.7 ■

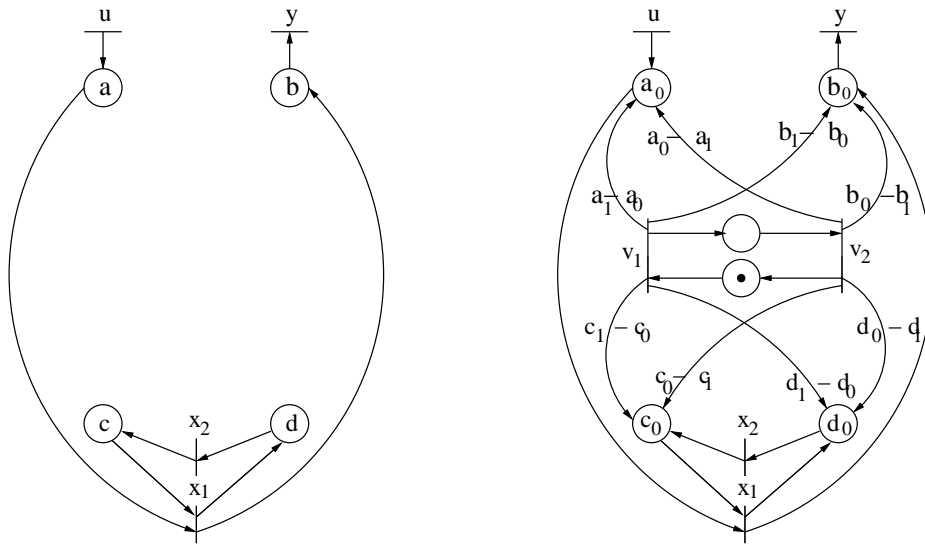


FIG. 3.7 – Réalisation d'un graphe d'événements temps-variant périodique.

Démonstration. On note par r la période commune des suites de matrices $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(B^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(C^k)_{k \in \mathbb{N}}$ du système périodique. La matrice D :

$$D_{ij} = \begin{cases} e & \text{si } i = j + 1, \\ 1 & \text{si } i = 1 \text{ et } j = r, \\ \varepsilon & \text{sinon,} \end{cases} \quad D = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \cdots & 1 \\ e & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & \cdot & & \vdots \\ \varepsilon & \cdots & e & \varepsilon \end{bmatrix},$$

et les applications $A(v)$, $B(v)$ et $C(v)$:

$$A(v)_{ij} = \sum_{s \in \mathbb{N}/r\mathbb{N}} (A^{s+1} - A^s)_{ij} v^s + (A^0)_{ij},$$

$$B(v)_{ij} = \sum_{s \in \mathbb{N}/r\mathbb{N}} (B^{s+1} - B^s)_{ij} v^s + (B^0)_{ij},$$

$$C(v)_{ij} = \sum_{s \in \mathbb{N}/r\mathbb{N}} (C^{s+1} - C^s)_{ij} v^s + (C^0)_{ij},$$

définissent un système triangulaire 1-homogène ayant les mêmes trajectoires que le système périodique ■

3.5.3 Systèmes homogènes monotones convexes paramétrés

Dans cette partie, on généralise les deux théorèmes (20) et (22) aux systèmes non linéaires autonomes définis avec des opérateurs homogènes monotones convexes polyédraux donc interprétable en terme de programmation dynamique stochastique.

Définition 14. Un système est dit *homogène monotone convexe périodique* (en abrégé convexe périodique) s'il s'écrit sous la forme :

$$x_i^{k+1} = f_i^k(x^k) = \min_{u \in \mathcal{U}} [M^{ku} x^k + c^{ku}]_i, \quad k \in \mathbb{N}/r\mathbb{N}, \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad (3.22)$$

où pour tout $u \in \mathcal{U}$, $k \in \mathbb{N}/r\mathbb{N}$, M^{ku} est une matrice stochastique de taille $(n \times n)$ et c^{ku} un vecteur de \mathbb{R}_+^n .

Définition 15. Un système est dit *homogène monotone convexe à coût périodique* (en abrégé convexe à coût périodique) s'il s'écrit sous la forme :

$$x_i^{k+1} = f_i^k(x^k) = \min_{u \in \mathcal{U}} [M^u x^k + c^{ku}]_i, \quad k \in \mathbb{N}/r\mathbb{N}, \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad (3.23)$$

où pour tout $u \in \mathcal{U}$, $k \in \mathbb{N}/r\mathbb{N}$, M^u est une matrice stochastique de taille $(n \times n)$ et c^{ku} un vecteur de \mathbb{R}_+^n .

Définition 16. Un système est dit *homogène convexe triangulaire* (en abrégé convexe triangulaire) s'il s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} v_i^{k+1} = h_i(v^k) = \min_{u \in \mathcal{U}} ([D^u v^k + d^u]_i), \quad \forall 1 \leq i \leq r, \\ x_i^{k+1} = f_i(v^k, x^k) = \min_{w \in \mathcal{W}} ([A^w x^k + B^w v^k + c^w]_i), \quad \forall 1 \leq i \leq n, \end{cases} \quad (3.24)$$

avec les deux hypothèses suivantes :

(H1) : Les matrices D^u sont stochastiques et irréductibles, et les vecteurs d^u sont dans \mathbb{R}_+^r ,

(H2) : Les matrices A^u sont sous-stochastiques, les vecteurs c^u sont dans \mathbb{R}^n , et on a $[A^u \ B^u] \mathbf{1} = \mathbf{1}$.

Remarque 3. On remarque que les systèmes convexes triangulaires sont 1-homogènes, pas nécessairement monotones à cause de la présence possible de coefficients négatifs dans la matrice B . Le système global ne peut donc pas s'interpréter comme une équation de la programmation dynamique stochastique ■

Le théorème suivant est la généralisation du théorème 20.

Théorème 23. *Tout système convexe triangulaire est asymptotiquement convexe à coût périodique.*

Démonstration. Pour tout $w \in \mathcal{W}$, on pose $B^w = B_1^w + B_2^w$ de façon à ce qu'on ait $[B_1^w \ A^w] \mathbf{1} = \mathbf{1}$, ce qui donnera $B_2^w \mathbf{1} = 0$. On a alors :

$$x^{k+1} = \min_{w \in \mathcal{W}} [(A^w x^k + B_1^w v^k) + (B_2^w v^k + c^w)].$$

Si on note par $\Upsilon = \mathcal{U} \times \mathcal{W}$ et si on définit :

$$E^\nu = \begin{bmatrix} D^u & 0 \\ B_1^w & A^w \end{bmatrix}, \quad z^t = [v \quad x], \quad b_k^\nu = [d^u \quad B_2^w v^k + c^w]^t, \quad \nu = (u, w) \in \Upsilon .$$

le système (3.24) s'écrit :

$$z^{k+1} = \min_{\nu \in \Upsilon} [E^\nu z^k + b_k^\nu], \quad (3.25)$$

où les E^ν sont des matrices stochastiques.

De l'hypothèse (H1) et du théorème 14, on déduit que l'application h admet une (unique) valeur propre, c'est à dire :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists \bar{v} \in \mathbb{R}^r, \min_{u \in \mathcal{U}} ([D^u \bar{v} + d^u]_i) = \lambda + \bar{v}_i \quad \forall 1 \leq i \leq r .$$

D'après le théorème 19, on sait que la suite $(h^{ks} - ks\lambda)_{k \in \mathbb{N}}$, où s est la cyclicité de h , converge, c'est à dire :

$$\exists a \in \mathbb{R}, \lim_{k \rightarrow \infty} (v^{ks} - ks\lambda) = a,$$

donc :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (v^{(k+1)s} - u^{ks}) = s\lambda ,$$

donc :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_2^w v^{k+s} + c^w = \lim_{k \rightarrow \infty} B_2^w (v^k + s\lambda) + c^w = \lim_{k \rightarrow \infty} B_2^w v^k + c^w ,$$

donc :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |b_{k+s}^\nu - b_k^\nu| = 0 ,$$

c'est à dire que la suite $(b_k^\nu)_{k \in \mathbb{N}}$ est asymptotiquement périodique de période s . On déduit que le système \mathcal{P} -triangulaire est asymptotiquement convexe à coût périodique ■

Le théorème suivant est la généralisation du théorème 22.

Théorème 24. *Tout système convexe à coût périodique est réalisable par un système convexe triangulaire.*

Démonstration. On adapte la preuve du théorème 22. Etant donné le système convexe à coût périodique de période r suivant :

$$x_i^{k+1} = \min_{u \in \mathcal{U}} ([E^u x^k + e^{ku}]_i), \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad k \in \mathbb{N}/r\mathbb{N} . \quad (3.26)$$

Le système \mathcal{P} -T1H réalisant le système (3.26) est construit de la façon suivante :

$$\begin{cases} v^{k+1} = Mv^k + c, \\ x_i^{k+1} = \min_{u \in \mathcal{U}} [A^u x^k + B^u v^k + b^u]_i, \quad \forall i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (3.27)$$

où :

$$- v^0 = 0_{\mathbb{R}^r},$$

- M est la matrice de permutation $r \times r$ associée à la permutation $\sigma = (r, 1, \dots, r-1)$, c'est à dire :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

- c est le vecteur colonne de taille r donné par : $c = {}^t(1 \ 0 \ \cdots \ 0)$,
- $A^u = E^u$, $\forall u \in \mathcal{U}$,
- $(B^u)_{u \in \mathcal{U}}$ est une famille de matrices de taille $n \times r$ données par :

$$B_{ij}^u = (e_{j+1}^w - e_j^w)_i, \quad \forall u \in \mathcal{U}, \forall 1 \leq i \leq n, j \in \mathbb{N}/r\mathbb{N},$$

c'est à dire :

$$B^u = \begin{bmatrix} (e_1^w - e_0^w)_1 & (e_2^w - e_1^w)_1 & \cdots & (e_0^w - e_{r-1}^w)_1 \\ (e_1^w - e_0^w)_2 & (e_2^w - e_1^w)_2 & \cdots & (e_0^w - e_{r-1}^w)_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (e_1^w - e_0^w)_n & (e_2^w - e_1^w)_n & \cdots & (e_0^w - e_{r-1}^w)_n \end{bmatrix},$$

- $b^u = e_0^u$, $\forall u \in \mathcal{U}$ ■

3.6 Conclusion

Plusieurs comportements peuvent apparaître dans un système dynamique additivement homogène $x^{k+1} = f(x^k)$. L'homogénéité additive de f permet de ramener le problème de valeur propre $\lambda + x = f(x)$ à un problème de point fixe qui peut exister, ne pas exister, être unique ou non, être stable ou non.

Lorsqu'il existe un vecteur propre attractif, partant d'une condition initiale dans la zone d'attraction, le système admet un taux d'accroissement qui est égal à la valeur propre associé à ce vecteur propre. Lorsque la condition initiale n'appartient à aucune zone d'attraction, le système peut aller vers l'infini de façon exponentielle, comme il peut osciller dans une zone bornée avec un comportement chaotique. Dans le cas d'un comportement chaotique, un taux d'accroissement moyen du système peut exister alors il s'exprime en fonction de la mesure invariante du système associé à cette condition initiale et n'est pas égal à une valeur propre.

Les éléments propres d'un système homogène peuvent être obtenus par l'algorithme du point fixe dans le cas stable ou par l'algorithme de Newton si on est capable de l'initialiser correctement (l'algorithme de Newton permet de calculer un point fixe même dans le cas instable).

Une des classes importantes des systèmes homogènes est la classe des systèmes homogènes monotones particulièrement étudiée par S. Gaubert et J. Gunawerdena [GG98a, GG98b, GG99, GG04]. Pour cette classe on peut introduire une notion de forte connexité

qui assure l'existence d'un taux d'accroissement unique et indépendant de la condition initiale, qui coïncide avec l'unique valeur propre additive du système. Cette classe de systèmes monotones inclut plusieurs sous-classes connues et étudiées séparément dans différents domaines. Il y a les systèmes homogènes monotones convexes qui correspondent aux équations de la programmation dynamique de problèmes de contrôle optimal stochastique. Pour cette sous-classe l'algorithme de Newton devient global ce qui signifie que quelle que soit la condition initiale l'algorithme converge. Dans cette sous-classe, on peut distinguer plusieurs cas particuliers. Dans le cas où le nombre de commandes est fini, la fonction f de la programmation dynamique est affine par morceaux. Dans le cas où le problème de contrôle optimal est déterministe, f est de plus linéaire minplus.

Une nouvelle classe de systèmes non monotones pour laquelle on est capable de montrer l'existence d'un taux d'accroissement a été aussi introduite. Ce sont des systèmes triangulaires 1-homogènes globalement non monotones dans lesquels un bloc de variables à une dynamique périodique. La dynamique du restant du système dépend du premier bloc de variables avec une structure particulière qui permet d'interpréter cette partie en terme de programmation dynamique stochastique. Cette dépendance particulière permet d'exploiter les résultats asymptotiques de la programmation dynamique stochastique, dans le cas où les données dépendent du temps de façon périodique, pour en déduire l'existence d'un taux de croissance.

Chapitre 4

Modélisation d'intersections

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente quelques modèles de systèmes élémentaires – une route circulaire avec ou sans retardateur, – deux routes circulaires avec une intersection. Le but est d'étendre le modèle de réseaux de Pétri et d'algèbre minplus qui donne le diagramme fondamental du trafic en 1D (une dimension) [LMQ05] au cas 2D. Déduire des comportements macroscopiques du trafic à partir d'une description microscopique est classique en physique statistique [FI96, FI01b, FI01a] comme dans la modélisation en automates cellulaires [CSS00, AS02]. On poursuit ici le même but avec des outils différents.

L'une des spécificités du trafic urbain est la présence d'intersections. Les véhicules doivent partager l'espace et le temps lors de leur passage par une même intersection. Ce partage de l'espace-temps est l'une des principales causes de la dégradation du flot des véhicules dans les villes, par comparaison au flot sur les autoroutes ou sur les routes interurbaines. Outre ce partage, tout modèle d'intersection doit modéliser les choix de la direction à la sortie de l'intersection.

Ce chapitre est divisé en trois parties. Une première partie porte sur la modélisation d'une seule route circulaire, la deuxième partie sur la modélisation d'une intersection gérée par la priorité à droite, et une troisième partie sur la modélisation d'une intersection contrôlée par un feu de signalisation.

Dans la première partie, il s'agit de présenter la modélisation du trafic routier à l'aide de réseaux de Pétri et d'écrire la dynamique du système modélisé en algèbre minplus. On rappelle dans cette partie le modèle classique d'une seule route circulaire, qu'on étendra en introduisant un retardateur (une section lente) dans la route pour étudier son effet sur le diagramme fondamental.

Dans la deuxième partie, on modélise une intersection gérée par la priorité à droite. Le modèle est fait en réseaux de Pétri déterministes avec des poids négatifs sur quelques arcs de production. On verra que ces poids négatifs sont inévitables pour modéliser le conflit pour l'accès à l'intersection. La densité des véhicules étant donnée, le flot moyen est calculé à partir du taux moyen d'accroissement du système. La présence de poids négatifs sur le réseau de Pétri conduit à une dynamique non monotone qui peut être expansive. Cependant, l'homogénéité additive est vérifiée pour les dynamiques de tous les systèmes présentés ici. Le modèle d'une intersection sans possibilité de tourner gérée par la

priorité à droite est étudié en détail. On obtient des résultats partiels sur la dynamique de ce système, et on détermine sa valeur propre dans le cas où la taille de la route prioritaire est inférieure à celle de la route non prioritaire. On vérifie numériquement l'existence d'un flot moyen des véhicules qui ne dépend que de leur densité. Dans le cas particulier indiqué précédemment, la valeur propre du système et le flot moyen obtenu numériquement, qui sont exprimés en fonction de la densité, ne sont pas toujours égaux. Cependant, les deux diagrammes fondamentaux correspondants expriment les mêmes phases du trafic et sont très proches.

Des résultats numériques qualitatifs importants sont obtenus sur le diagramme fondamental du trafic d'un système d'une route circulaire avec une intersection. La route a la forme d'un huit, l'intersection la coupe en deux : une route prioritaire et une route non prioritaire. On a observé l'existence de quatre phases sur ce diagramme :

- une phase libre où le système atteint un régime périodique durant lequel tous les véhicules (ou la quasi-totalité) circulent sans gêne,
- une phase de saturation où l'intersection est saturée et le flot est limité par la vitesse maximale de l'intersection. Durant cette phase, sauf un quart du nombre total de véhicules avance à chaque instant,
- une phase de récession où le flot décroît d'une façon discontinue avec la densité,
- une phase de blocage où la route non prioritaire est remplie et bloque l'intersection ce qui cause un blocage total du système.

Un autre résultat qualitatif important est la dépendance de la phase de saturation avec le rapport entre les tailles des deux routes. On observe que la durée de cette phase est identique au rapport de taille de la route non prioritaire sur la route prioritaire. Ceci est vérifié dans les cas où le problème est résolu théoriquement.

Pour modéliser la possibilité de tourner à une intersection, on introduit des poids rationnels non nécessairement entiers sur certains arcs du réseau de Pétri du modèle. Les mêmes raisonnements que ceux faits sur le modèle d'une intersection sans possibilité de tourner sont faits. Dans le cas où la taille de la route prioritaire est inférieure à celle de la route non prioritaire, on se ramène à résoudre un problème de contrôle optimal stochastique. Le problème de valeur propre associé à ce système n'est alors que l'équation de programmation dynamique du problème de contrôle. La résolution de cette équation donne la valeur propre du système. Cette valeur propre est égale à celle du système correspondant au modèle d'une route avec une intersection sans possibilité de tourner. De plus, la valeur propre et le taux moyen d'accroissement du système (obtenu numériquement) sont beaucoup plus proche dans ce cas que dans le cas d'une intersection sans possibilité de tourner, et les phases du trafic sont complètement interprétées dans ce cas.

On observe l'existence de quatre phases du trafic :

- une phase libre où le système atteint un régime périodique durant lequel tous les véhicules (ou la quasi-totalité) circulent sans gêne,
- une phase de saturation où l'intersection est saturée et le flot est limité par la vitesse maximale de l'intersection. Durant cette phase, peu de véhicules circulent sans gêne sur la prioritaire alors que le reste s'accumulent sur l'autre route sans causer de blocage,
- une phase de récession où le flot décroît d'une façon continue avec la densité et est donné par la route non prioritaire,
- une phase de blocage où la route non prioritaire est remplie et bloque l'intersection ce qui cause un blocage total du système.

On présente ensuite une façon d'améliorer la phase de saturation durant laquelle le flot atteint sa valeur maximale. En effet, cette phase étant à flot fixe donné par la capacité maximale de l'intersection, en augmentant cette capacité maximale en supposant que l'intersection peut contenir deux véhicules au lieu d'un seul, on obtient un diagramme fondamental à trois phases :

- la phase libre durant laquelle les véhicules circulent librement. Cette phase peut aller jusqu'à une densité $1/2$ à laquelle correspond le flot $1/2$,
- la phase de récession : $1/2$ étant la capacité maximale de toutes les sections du réseau, le flot se dégrade srement à partir de cette densité. Cette phase peut aussi commencer à une densité inférieure à $1/2$ dans le cas où la taille de la route prioritaire est supérieure à celle de la route non prioritaire,
- la phase de blocage : dès que le nombre de véhicules dans le système atteint la taille de la route non prioritaire, cette dernière se remplit et bloque le système.

Cet aménagement de l'intersection multiplie le flot maximal par deux, dans le cas où la taille de la route prioritaire est inférieure à celle de la route non prioritaire, et l'améliore considérablement dans l'autre cas.

Dans la troisième partie, on étudie d'abord le contrôle d'une intersection, sans possibilité de tourner, de deux routes circulaires avec un feu de signalisation. On propose un modèle de feux par un réseau de Pétri et on montre que dans ce cas la dynamique du système correspondant est triangulaire 1-homogène (voir la section 3.5 du chapitre 3). Ceci nous permet de calculer les flots moyens des deux routes. On s'intéresse aussi dans cette partie à l'optimisation des flots des deux routes, premièrement, en fixant le cycle du feu et en jouant sur la répartition des durées de vert, et deuxièmement en optimisant la durée du cycle.

On présente ensuite un modèle de deux routes circulaires et une intersection avec possibilité de tourner contrôlée par un feu de signalisation. On présente d'abord les résultats des simulations numériques de ce modèle et le diagramme fondamental obtenu. On propose, à l'aide de ce modèle, des contrôles en boucle ouverte et en boucle fermée sur l'état du trafic. On compare sur les diagrammes fondamentaux obtenus les différentes politiques de contrôle d'une intersection : la priorité à droite, le feu en boucle ouverte et le feu en boucle fermée. On compare également les régimes transitoires du trafic obtenus.

On montre finalement l'apport de la programmation linéaire dans le contrôle du trafic routier. On compare la résolution du problème de valeur propre associé à la dynamique d'un système de trafic à la résolution d'un programme linéaire déduit de cette dynamique. On montre que dans le cas où les deux problèmes admettent une solution, la valeur propre donnée par le programme linéaire est supérieure ou égale à celle donnée par le problème de valeur propre. Cette majoration est liée à la saturation de sous-ensembles de contraintes imposée par le problème de valeur propre, qui a par conséquent un ensemble de solutions admissibles plus restreint que celui du programme linéaire. On donne une interprétation de ce résultat en terme de trafic, qui consiste à dire : limiter le flot des véhicules sur certains endroits du réseau peut améliorer considérablement le flot moyen des véhicules, et évite des blocages du système dans certains cas. Ceci peut être utile pour déterminer les endroits d'implantation de feux de signalisation et pour le réglage des phases.

Tous les modèles qui sont présentés dans ce chapitre sont des modèles de réseaux de Pétri dont la dynamique est écrite en algèbre minplus, ou en combinant les opérateurs des algèbres standard et minplus. On commence par quelques rappels sur les réseaux de Pétri.

4.2 Les réseaux de Petri

Un réseau de Pétri est un graphe à deux types de nœuds appelés : transitions et places, et à deux types d'arcs appelés : arcs de production et arcs de synchronisation. On note l'ensemble des transitions par \mathcal{Q} et l'ensemble des places par \mathcal{P} . Un arc de production part d'une transition vers une place, et un arc de synchronisation part d'une place vers une transition. Graphiquement, les transitions sont représentées par des barres et les places par des cercles.

à un réseau de Pétri, on associe une matrice minplus $|\mathcal{Q}| \times |\mathcal{P}|$ notée D et appelée matrice de synchronisation, et une matrice standard $|\mathcal{P}| \times |\mathcal{Q}|$ notée H et appelée matrice de production. La matrice de synchronisation est définie par $D_{qp} = a_p$ s'il existe un arc de $p \in \mathcal{P}$ vers $q \in \mathcal{Q}$ et $D_{qp} = \varepsilon$ sinon, où a_p est le marquage initial sur la place p qui est représenté graphiquement par des jetons dans la place. Pour compter ces jetons, on utilise une matrice standard associée à D notée Γ (de même taille que D) définie par $\Gamma_{qp} = 1$ si $D_{qp} \neq \varepsilon$ et $\Gamma_{qp} = 0$ sinon.

La matrice de production est définie par $H_{pq} = m_{pq}$ s'il existe un arc de $q \in \mathcal{Q}$ vers $p \in \mathcal{P}$ et à 0 sinon ; où m_{pq} est le poids (ou la multiplicité) de l'arc ($q \rightarrow p$). Un réseau de Pétri est ainsi caractérisé par le quadruplet :

$$(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, H, D).$$

On dit qu'un réseau de Pétri est *déterministe* s'il ne sort qu'un seul arc de chaque place, sinon on dit qu'il est *non déterministe*. La dynamique d'un réseau de Pétri déterministe est définie par ce qu'on appelle le brûlage des transitions. A un instant donné, une transition est brûlée si en chaque place en amont, il y a au moins un (dans le cas discret) ou un nombre strictement positif de (dans le cas continu) jetons ayant séjourné un temps au moins égal à une unité ¹. Lorsqu'une transition brûle, elle prend de chaque place en amont un jeton (on dit qu'elle consomme des jetons), et elle génère un nombre de jetons, dans chaque place en aval, égal à la multiplicité de l'arc de production correspondant. Dans le cas d'un réseau de Pétri non déterministe, le brûlage des transitions ne définit pas complètement la dynamique du réseau, car des transitions en aval d'une place pourraient être en conflit de consommation de jetons. Dans ce cas, on doit donner des règles de consommation de jetons, par exemple en définissant un ordre de priorité pour les transitions en conflit, ou en imposant des proportions de consommation. Une fois ce type de conflit est réglé, le réseau de Pétri devient déterministe.

On note par $x = (x_q)_{q \in \mathcal{Q}}$ le vecteur des suites $x_q = (x_q^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tel que la composante x_q^k représente le nombre de brûlages de la transition q jusqu'à l'instant k .

Théorème 25. *La dynamique d'un réseau de Pétri déterministe est donnée par :*

$$x^{k+1} = D \otimes (Hx^k).$$

¹On a supposé ici que le temps minimum de production de jeton est unique et égal à une unité de temps. Dans le cas où ce temps minimum, qui doit être positif ou nul, dépend de l'arc de production correspondant la matrice standard H est remplacée par une matrice d'opérateur notée $H(\delta)$ définie par : $H_{pq}(\delta)$ est égal à $m_{pq}\delta^{\tau_{pq}}$ s'il existe un arc de $q \in \mathcal{Q}$ vers $p \in \mathcal{P}$ et à 0 sinon ; où m_{pq} est le poids (ou la multiplicité) de l'arc ($q \rightarrow p$), et τ_{pq} est le retard associé à cet arc. Un opérateur de retard s'applique sur des suites, il est défini par $m\delta^\tau : (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto m(X_{n-\tau})_{(n-\tau) \in \mathbb{N}}$.

Démonstration. Par définition du brûlage des transitions, le réseau de Pétri est tel qu'à chaque instant, au moins une place en amont de chaque transition est vide (a un nombre nul de jeton). Notons a le vecteur de dimension $|\mathcal{P}|$ qui donne le marquage initial (le nombre de jetons dans chaque place initialement). Le vecteur des suites représentant le nombre de jetons dans les places, fonction du temps, est alors donné par $a + Hx^k - {}^t\Gamma x^{k+1}$, où la transposée de Γ est notée par ${}^t\Gamma$. Le minimum des nombres de jetons dans les places en amont de chaque transition étant nul, et le réseau de Pétri étant déterministe, on déduit que :

$$D \otimes (Hx^k - {}^t\Gamma x^{k+1}) = 0,$$

où $(Hx^k)_p$ donne le nombre de jetons entrés dans la place p de l'instant initial jusqu'à l'instant k , $({}^t\Gamma x^{k+1})_p$ donne le nombre de jetons sortis de la place p de l'instant initial jusqu'à l'instant $k+1$. D'où $[D \otimes (Hx^k - {}^t\Gamma x^{k+1})]_q$ donne le minimum des bilans de jetons de toutes les places en amont de la transition q en tenant compte des jetons initiaux. Ce qui explique le résultat ■

Bien que la dynamique des réseaux de Pétri non déterministes n'est pas bien définie, il y a des contraintes sur la dynamique des jetons. On peut définir une dynamique sur les quantités invariantes vérifiée par tous les réseaux de Pétri. Soit σ une suite de brûlages des transitions, on note x^σ le vecteur colonne qui donne le nombre de brûlages des transitions, et a^σ le vecteur colonne qui donne le nombre de jetons dans les places après cette suite de brûlages. On a alors :

$$a^\sigma = a + (H - {}^t\Gamma)x^\sigma. \quad (4.1)$$

Théorème 26. *Pour tout vecteur colonne ρ vérifiant : $\rho(H - {}^t\Gamma) = 0$, on a : $\rho a^\sigma = \rho a$.*

Démonstration. Se déduit directement de l'équation (4.1) ■

Les nombres ρ sont les invariants à gauche des réseaux de Pétri.

Les graphes d'événements

Un réseau de Pétri déterministe dont chaque place a un seul arc de poids 1 en amont est appelé *un graphe d'événements*. La dynamique d'un graphe d'événements est linéaire en algèbre minplus et est donnée par :

$$x^{k+1} = A \otimes x^k,$$

où A est une matrice carrée minplus telle que : $A_{qq'} = a_p$ avec p l'unique place connectée aux transitions q et q' . Les temps de productions sont supposés égaux à une unité.

Dans le cas où les temps de production sont différents, les places ayant un et un seul arc de production en amont, ces temps sont représentés graphiquement par des bâtons dans les places. Dans ce cas, la dynamique du graphe d'événements s'écrit :

$$x = A(\delta) \otimes x,$$

où $A(\delta)_{qq'} = a_p \delta^{\tau_p} : x_q^k \mapsto a_p x_q^{k-\tau_p}$, avec p l'unique place connectée aux transitions q et q' , a_p le marquage initial associé à p et τ_p le temps de production correspondant appelé aussi la temporisation de la place p .

Du théorème 1 du chapitre 2, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 7. [BCOQ92] *Le taux d'accroissement d'un graphe d'événements fortement connexe défini par $\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_q^n/n$ est indépendant de la transition q et est égal à :*

$$\lambda = \min_{c \in \mathcal{C}} \frac{|c|_a}{|c|_t},$$

où \mathcal{C} est l'ensemble des circuits du graphe d'événements, $|c|_a$ est le nombre total de jetons dans le circuit c , et $|c|_t$ est le nombre total de temporisations dans le circuit c .

4.3 Modélisation d'une route circulaire

Dans cette section, on présente plusieurs façons de modéliser une route circulaire à l'aide de réseaux de Pétri et de l'algèbre minplus. Dans ce chapitre la route est coupée en sections et on compte le nombre de véhicules entrant dans une section. Ce point de vue que l'on peut qualifier d'Eulérien est à comparer à celui utilisé dans le chapitre 2 où on suit les véhicules, qui donc un point de vue Lagrangien. On commence par rappeler le modèle le plus simple où les véhicules roulent à une vitesse fixe sur toutes les sections. Le diagramme fondamental du trafic sur un tel système a deux phases symétriques (faible et haute densité). On étudie ensuite le cas où certaines sections peuvent être plus lentes que d'autres. La motivation pour l'étude de ce cas vient des intersections de routes qui peuvent être vues comme des sections plus lentes. Lors de la modélisation des intersections on comparera le diagramme d'une route avec un retardateur avec celui d'une route avec une intersection. L'introduction d'un retardateur fait apparaître une phase intermédiaire dans le diagramme fondamental correspondant à la saturation du retardateur.

4.3.1 Le modèle classique

On considère une route circulaire sur laquelle circulent des véhicules et on fait les hypothèses suivantes :

- La route circulaire est constituée de m sections pouvant contenir un véhicule au plus.
- On se donne p véhicules. Chaque véhicule occupe une section. On a alors $p \leq m$, et la densité des véhicules d est donnée par : $d = p/m$.
- Un véhicule non gêné occupe une section pendant au moins une unité de temps, avant de pouvoir avancer.
- A chaque instant, chaque véhicule non gêné avance d'une seule section.
- Les véhicules roulent dans un seul sens, et sans dépassement.

Ce système est schématisé sur la figure 4.1-I, et est modélisé par le graphe d'événements III de la même figure, où :

- Chaque section s_i est représentée par deux places a_i et \bar{a}_i . Les nombres initiaux de jetons dans ces places sont également notés a_i et \bar{a}_i respectivement.
- La présence des jetons dans les places a_i correspond à la position initiale des véhicules sur la route. Si une section s_i est occupée par un véhicule, alors on a $a_i = 1$ et $\bar{a}_i = 0$. Sinon, on a $a_i = 0$ et $\bar{a}_i = 1$ et la section est libre.
- Un véhicule qui se trouve dans une section s_i peut avancer vers la section s_{i+1} si i est inférieur à n , ou vers la section s_1 si i est égal à n . Ce mouvement est modélisé par le brûlage de la transition x_{i+1} (modulo m).

- Un véhicule se trouvant dans la section s_{i-1} ne peut avancer vers la section s_i que si celle-ci est libre. Ceci est modélisé par le fait que la transition x_i ne peut brûler que s'il y a un jeton dans chacune des places a_{i-1} et \bar{a}_i , c'est à dire si $a_{i-1} = 1$ et $\bar{a}_i = 1$.

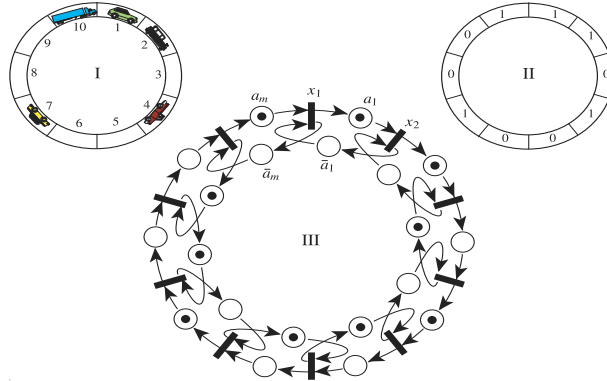


FIG. 4.1 – Une route circulaire.

Le flot (ou le débit) moyen en une section s_i est le nombre moyen de passages de véhicules par la section en une unité de temps. Sur toute la route, il est donné par la quantité :

$$f = d \cdot \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} P^k/k}{p} = \frac{1}{m} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P^k}{k},$$

où P^k est le nombre total de déplacements de véhicules dans la route jusqu'à l'instant k . Le flot moyen en une section s_i peut être calculé par le nombre moyen de brûlages de la transition x_i en une unité de temps, qui n'a de sens que si la limite $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_i^k/k$ existe, où x_i^k est le nombre cumulé de brûlages de la transition x_i jusqu'à l'instant k qui est le nombre cumulé de véhicules entrés dans la section i de l'instant initial à l'instant k .

Le réseau de Pétri de la figure 4.1 est un graphe d'événements autonome. Sa dynamique est donnée par le système linéaire minplus :

$$x^{k+1} = A \otimes x^k, \quad (4.2)$$

où x^k est le vecteur colonne de taille m qui donne en chaque composante i ($1 \leq i \leq m$) le nombre x_i^k . La matrice minplus A est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \bar{a}_1 & \varepsilon & \cdots & a_m \\ a_1 & \varepsilon & \bar{a}_2 & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & a_2 & \varepsilon & \ddots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \varepsilon & \bar{a}_{m-1} \\ \bar{a}_m & \varepsilon & \varepsilon & a_{m-1} & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Le processus d'exclusion.

Si on note par un 1 une section occupée par un véhicule et par un 0 une section libre, la position des véhicules (ou l'occupation de la route) peut être donnée à chaque instant

k par un mot binaire. La dynamique des véhicules est alors définie par la règle $10 \rightarrow 01$. Sur la table 4.1, on donne deux scénarios à densités différentes :

n	$d < 1/2$	$d > 1/2$
1	010100	110011
2	001010	101011
3	000101	010111
4	100010	101110
5	010001	011101

TAB. 4.1 – Le processus d'exclusion pour une route circulaire.

Deux situations sont distinguées :

1. $0 \leq d \leq 1/2$, ce qui correspond à $p \leq m/2$. Dans ce cas, après un régime transitoire de durée finie, les véhicules se séparent les uns des autres et circulent sans gêne. Après, tous les véhicules circulent librement et donc le flot moyen est égal à la densité : $f = d$.
2. $1/2 \leq d \leq 1$, ce qui correspond à $p \geq m/2$. Après un régime transitoire, ce sont les places libres qui circulent librement dans le sens inverse du trafic des véhicules. Ce qui veut dire que $m - p$ places libres circulent à chaque unité de temps. Chaque mouvement d'une place libre est en fait un mouvement d'un véhicule dans le sens contraire. Le flot moyen est donc donné par $f = (m - p)/p = 1 - d$.

On déduit alors que :

$$f = \begin{cases} d & \text{si } 0 \leq d \leq 1/2, \\ 1 - d & \text{si } 1/2 \leq d \leq 1. \end{cases}$$

Le diagramme fondamental (figure 4.2) comporte ainsi deux phases.

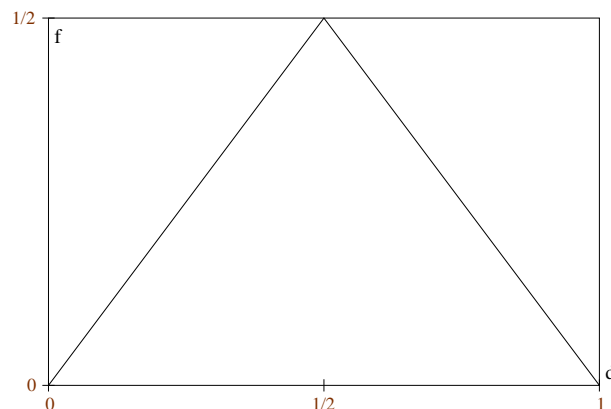


FIG. 4.2 – Le diagramme fondamental pour une route circulaire.

Dérivation du diagramme fondamental en utilisant l'algèbre minplus.

Le réseau de Pétri de la figure 4.1 étant un graphe d'événements, sa dynamique s'écrit linéairement en algèbre minplus (équation 4.2). Ainsi, pour appliquer le corollaire 7, il suffit de déterminer les circuits élémentaires du graphe d'événements. On distingue trois type de circuits élémentaires sur ce graphe :

- Le circuit extérieur de poids moyen $p/m = d$.
- Le circuit intérieur de poids moyen $(m - p)/m = 1 - d$.
- Les m circuit de longueur 2 passant par les deux places a_i et \bar{a}_i , de poids moyen $1/2$.

Ceci donne :

$$f(d) = \min(d, 1 - d, 1/2) = \min(d, 1 - d).$$

On obtient alors le diagramme de la figure 4.2.

4.3.2 Modélisation d'une route circulaire avec un retardateur

On considère une route circulaire comme dans la section précédente, mais avec un trafic plus lent sur l'une des sections de la route. Si un véhicule entre dans la section lente, appelée le retardateur, il l'occupera pendant deux unités de temps au lieu d'une seule. Ce modèle est présenté dans le but de le comparer avec un modèle comportant une intersection (partant de l'idée que l'intersection ralentit le trafic, elle induit un retard). Le système est

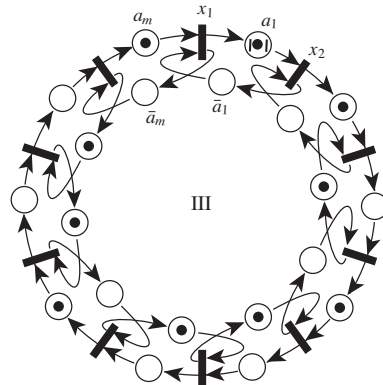


FIG. 4.3 – Une route circulaire avec un retardateur

modélisé par le graphe d'événements de la figure 4.3, où seules les temporisations de la place lente sont représentées (deux temporisations). Toutes les autres places sont supposées avoir une seule temporisation. La dynamique de ce graphe d'événements est donnée par :

$$x = A(\delta) \otimes x,$$

où $A(\delta)$ est donnée par :

$$A(\delta) = \delta \begin{pmatrix} \varepsilon & \bar{a}_1 & \varepsilon & \cdots & a_m \\ \delta a_1 & \varepsilon & \bar{a}_2 & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & a_2 & \varepsilon & \ddots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \varepsilon & \bar{a}_{m-1} \\ \bar{a}_m & \varepsilon & \varepsilon & a_{m-1} & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

n	$0 < d < 1/3$	$1/3 < d < 2/3$	$2/3 < d < 1$
1	00000010	10110001	11101111
2	0̄0000001	1̄0101001	1̄1011111
3	1̄0000000	0̄1010101	1̄0111111
4	1̄0000000	1̄0101010	0̄1111111
5	0̄1000000	1̄0010101	1̄1111110
6	0̄0100000	0̄1001011	1̄1111101
7	0̄0010000	1̄0100110	1̄1111011
8	0̄0001000	1̄0010101	1̄1110111
9	0̄0000100	0̄0001011	1̄1101111

TAB. 4.2 – Le processus d'exclusion pour une route circulaire avec un retardateur.

Le processus d'exclusion.

Dans la table 4.3, on donne trois simulations avec des densités différentes, en utilisant la même notation que précédemment (1 : section occupée, 0 : section libre), et la même règle $10 \rightarrow 01$ sur toutes les sections sauf sur le retardateur où la première apparition de 10 (le premier bit correspond au retardateur) donne 10 et sa deuxième apparition donne 01. Trois phases apparaissent :

- La phase à faible densité : $0 \leq d \leq 1/3$. Après un temps fini, tous les véhicules circulent sans gêne, ce qui donne $f \simeq d$.
- La phase à haute densité : $2/3 \leq d \leq 1$. Les espaces libres sont assez peu nombreux pour qu'ils puissent circuler sans gêne, ce qui donne pour un système de grande taille $f \simeq 1 - d$.
- La phase à moyenne densité : $1/3 \leq d \leq 2/3$. Ni les véhicules, ni les espaces libres n'arrivent à circuler sans gêne à cause du retardateur qui fixe le flot à $1/3$ qui est inférieur au flot des véhicules et au flot des espaces libres s'ils circulaient sans gêne. Dans ce cas, le retardateur est toujours en service. Il laisse passer un véhicule toutes les trois unités de temps. Le réseau étant connexe, on obtient alors $f = 1/3$.

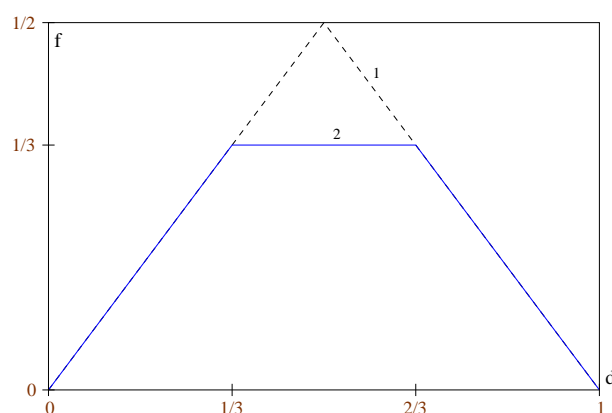


FIG. 4.4 – Les diagrammes fondamentaux d'une route circulaire dans les cas : 1. classique, 2. avec un retardateur.

Dérivation du diagramme fondamental en utilisant l'algèbre minplus

La dynamique étant linéaire en minplus, le corollaire 7 s'applique. Sur le graphe d'événements de la figure 4.3, on distingue quatre types de circuits élémentaires :

- Le circuit extérieur de poids moyen égal à $p/(m+1)$.
- Le circuit intérieur de poids moyen égal à $(m-p)/(m+1)$.
- Les m circuits de longueur 2 passant par les deux places a_i et \bar{a}_i pour $i > 1$, de poids moyen $1/2$.
- Le circuit de longueur 2 passant par les deux places a_1 et \bar{a}_1 , de poids moyen $1/3$.

Le flot moyen est donc donné par :

$$f(d) = \min \left\{ \frac{p}{m+1}, \frac{m-p}{m+1}, \frac{1}{3} \right\} = \min \left\{ \frac{d}{1+1/m}, \frac{1-d}{1+1/m}, \frac{1}{3} \right\}.$$

Pour une route de grande taille, on a :

$$f(d) = \min\{d, 1-d, 1/3\}.$$

On obtient alors le diagramme 2 de la figure 4.4.

4.4 Intersection gérée par la priorité à droite

Dans cette section, on présente un modèle d'une route circulaire avec une intersection avec ou sans possibilité de tourner. Pour utiliser la possibilité de tourner et la permission d'entrer à l'intersection, on a besoin de supposer des réseaux de Pétri non déterministes, c'est à dire pour lesquels l'existence de plusieurs arcs en aval d'une place est permise. Ceci impose des contraintes sur la dynamique du système, mais ne la définit pas complètement. Pour préciser la dynamique, on peut soit fixer les proportions empruntant chaque arc sortant de la place, soit se donner une règle de priorité. Pour gérer ces deux possibilités, on introduit des réseaux de Pétri fluides avec des poids éventuellement négatifs.

La modélisation d'une intersection avec un réseau de Pétri traditionnel pourrait être celle donnée dans la figure 4.5. Ce réseau de Pétri n'est pas un graphe d'événements ; cependant, suivant L. Libeaut[Lib96], on peut écrire les contraintes sur la dynamique exprimée par ce réseau de Pétri général :

$$\min_{p \in x^{in}} \left[a_p + \sum_{x' \in p^{in}} x'^{k-1} - \sum_{x'' \in p^{out}} x''^k \right] = 0, \forall x, \forall k, \quad (4.3)$$

où le nombre cumulé de brûlages d'une transition x jusqu'à l'instant k est noté par x^k , et une place du réseau de Pétri est notée par p .

Ces équations implicites ne déterminent pas complètement la dynamique du système, car le problème de Cauchy correspondant n'a pas une solution unique. Pour mieux comprendre le problème, considérons le réseau le plus simple de la figure 4.6-gauche.

Ce réseau donne seulement la contrainte sur la dynamique écrite en algèbre minplus : $x_4^n x_3^n = a x_1^{n-1} x_2^{n-1}$. Les deux composantes x_3 et x_4 ne sont pas définies d'une façon unique. On utilise ici deux façons pour compléter cette dynamique, utiles dans la modélisation du

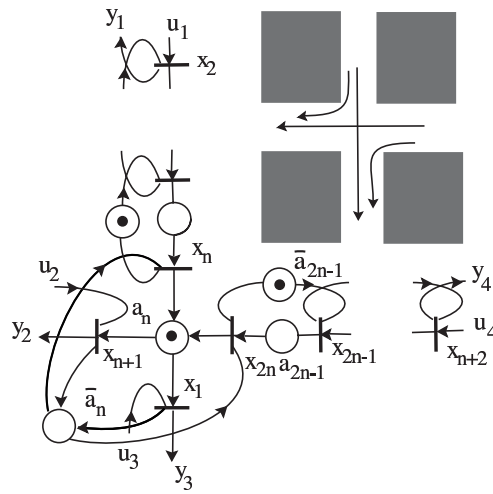


FIG. 4.5 – Un modèle non déterministe d'une intersection de deux routes.

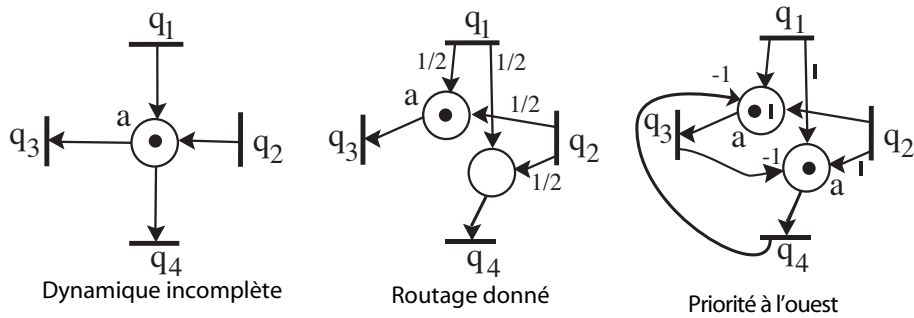


FIG. 4.6 – Résolution du conflit et obtention de dynamiques homogènes.

trafic routier.

– En se donnant une politique de routage :

$$x_4^n = x_3^n = \sqrt{ax_1^{n-1}x_2^{n-1}}, \quad (4.4)$$

ce qui signifie en algèbre standard :

$$x_4^n = x_3^n = \frac{a + x_1^{n-1} + x_2^{n-1}}{2}. \quad (4.5)$$

– En choisissant une règle de priorité :

$$\begin{cases} x_3^n = ax_1^{n-1}x_2^{n-1}/x_4^{n-1} \\ x_4^n = ax_1^{n-1}x_2^{n-1}/x_3^n. \end{cases} \quad (4.6)$$

ce qui signifie en algèbre standard :

$$\begin{cases} x_3^n = a + x_1^{n-1} + x_2^{n-1} - x_4^{n-1} \\ x_4^n = a + x_1^{n-1} + x_2^{n-1} - x_3^n \end{cases} \quad (4.7)$$

Dans les deux cas on obtient un système *minplus homogène de degré un*.

Finalement, préciser la dynamique du réseau de Pétri d'une manière à ce que les trajectoires soient définies d'une façon unique revient à donner un autre réseau de Pétri sur lequel chaque place n'a qu'un seul arc en aval. Le nouveau réseau de Pétri est obtenu en remplaçant chaque place ayant r arcs en aval, par r places ayant chacune un seul arc en aval, et en introduisant de nouveaux arcs de production, éventuellement à multiplicités négatives.

4.4.1 Intersection sans possibilité de tourner

Suivant les méthodes de gestion de conflit de la section précédente, on modélise une route circulaire avec une intersection sans possibilité de tourner, comme il est montré sur la figure 4.7.

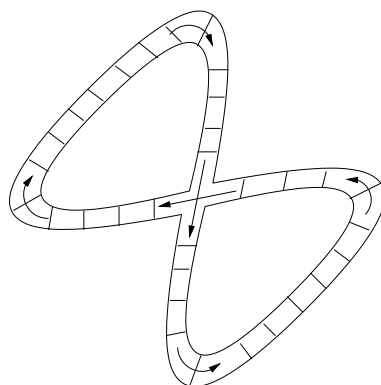


FIG. 4.7 – Une route circulaire avec une intersection sans possibilité de tourner.

- le déplacement des véhicules en dehors de l'intersection se fait de la même façon que dans les sections précédentes,
- si deux véhicules, un venant de l'est, l'autre du nord, se présentent à l'intersection, la priorité est au véhicule venant du nord d'entrer à l'intersection (figure 4.7). Plus généralement, la priorité est au véhicule qui est à droite de l'autre,
- l'intersection peut contenir un seul véhicule (le cas d'une intersection ayant plusieurs places est étudié plus loin).

Le réseau de Pétri correspondant à la figure 4.7 est donné sur la figure 4.8. Sur ce réseau de Pétri, l'intersection est représentée par quatre transitions x_1, x_n, x_{n+1} et x_{n+m} et quatre places $a_n, a_{n+m}, \bar{a}_n, \bar{a}_{n+m}$. Les nombres de jetons de l'intersection doivent vérifier les contraintes suivantes :

- si $a_n = 1$, alors $\bar{a}_n = \bar{a}_{n+m} = 0$. Dans ce cas l'intersection est occupée par un véhicule se dirigeant vers l'ouest,
- si $a_{n+m} = 1$, alors $\bar{a}_n = \bar{a}_{n+m} = 0$. Dans ce cas l'intersection est occupée par un véhicule se dirigeant vers le sud,
- si $a_n = a_{n+m} = 0$, alors l'intersection est libre, et $\bar{a}_n = \bar{a}_{n+m} = 1$ donnent la permission d'accéder à l'intersection.

Le réseau de Pétri de la figure 4.8 est déterministe. Si on note par x_i^k le nombre de brûlages de la transition x_i jusqu'à l'instant k , alors sur une route de taille $n + m$, la dynamique

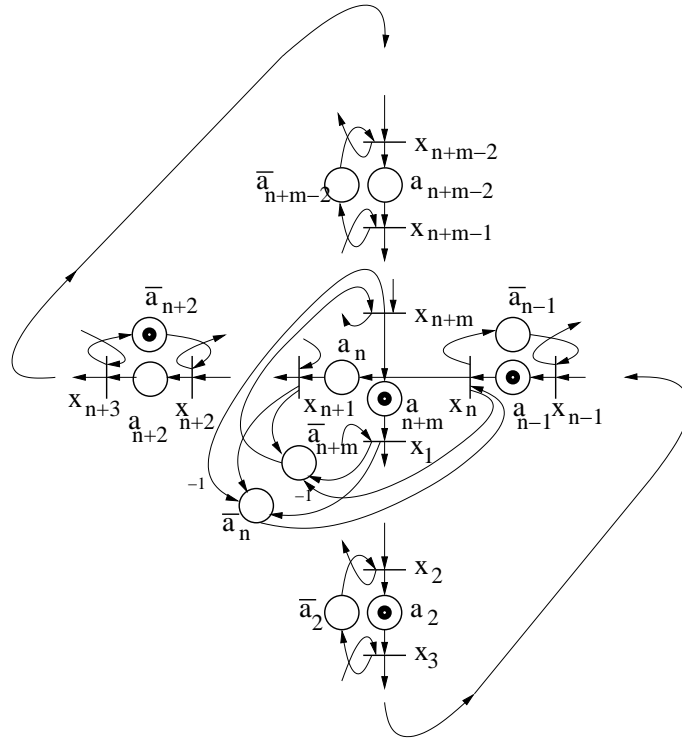


FIG. 4.8 – Une route circulaire avec une intersection gérée par la priorité à droite sans possibilité de tourner.

du réseau s'écrit en algèbre minplus comme suit :

$$x_i^{k+1} = a_{i-1}x_{i-1}^k \oplus \bar{a}_i x_{i+1}^k, \quad \forall i \neq n, n+m, \quad (4.8)$$

$$(S_a) \quad x_n^{k+1} = \bar{a}_n x_1^k x_{n+1}^k / x_{n+m}^k \oplus a_{n-1} x_{n-1}^k, \quad (4.9)$$

$$x_{n+m}^{k+1} = \bar{a}_{n+m} x_1^k x_{n+1}^k / x_n^{k+1} \oplus a_{n+m-1} x_{n+m-1}^k, \quad (4.10)$$

Par exemple l'équation 4.10 s'écrit en algèbre ordinaire comme suit :

$$x_{n+m}^{k+1} = \min \left\{ a_{n+m} + x_1^k + x_{n+1}^k - x_n^{k+1}, \bar{a}_{n+m-1} + x_{n+m-1}^k \right\}.$$

Le système d'équations obtenu est implicite mais triangulaire, donc sa trajectoire est définie d'une façon unique. Ce système peut s'écrire sous une forme matricielle en utilisant des opérateurs des algèbres ordinaire et minplus.

$$x = D_a \otimes (H(\delta)x),$$

où $a \in \mathcal{A} \triangleq \{a \in \{0, 1\} \mid a_n a_{n+m} = 0\}$ et $\bar{a}_i = 1 - a_i$, $i \neq n, n+m$ et $\bar{a}_n = \bar{a}_{n+m} = 1 - a_n - a_{n+m}$.

Ce système implicite triangulaire peut s'expliciter facilement comme suit :

$$x_i^{k+1} = a_{i-1}x_{i-1}^k \oplus \bar{a}_i x_{i+1}^k, \quad \forall i \neq n, n+m, \quad (4.11)$$

$$(S_a) \quad x_n^{k+1} = \bar{a}_n x_1^k x_{n+1}^k / x_{n+m}^k \oplus a_{n-1} x_{n-1}^k, \quad (4.12)$$

$$x_{n+m}^{k+1} = \bar{a}_{n+m} x_1^k x_{n+1}^k / (\bar{a}_n x_1^k x_{n+1}^k / x_{n+m}^k \oplus a_{n-1} x_{n-1}^k) \oplus a_{n+m-1} x_{n+m-1}^k, \quad (4.13)$$

On écrit alors : $x^{k+1} = S_a(x^k)$.

Dans ce système, la *densité* d des véhicules est :

$$d = \frac{1}{n+m-1} \sum_{i=1}^{n+m} a_i,$$

et le *flot moyen* f_i des véhicules au niveau d'une section i est égal au *taux moyen d'accroissement* χ_i défini par :

$$\chi_i = \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k / k.$$

On verra plus loin, qu'à cause de la connexité du réseau, les taux d'accroissement χ_i au niveau de chaque section s_i sont égaux :

$$\chi = \chi_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n+m.$$

Dans ce qui suit, on donne quelques résultats sur l'existence du flot moyen, et sa dépendance en la densité des véhicules.

On rappelle que l'ordre \leq sur \mathbb{R}^{n+m} est défini par $x \leq y$ si $x_i \leq y_i$ pour tout i allant de 1 à $n+m$.

Proposition 6. *La suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par le système S_a est monotone sur sa trajectoire, c'est à dire : $x^0 \leq x^1 \Rightarrow x^k \leq x^{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. On procède par récurrence : On a $x^0 \leq x^1$ par hypothèse. Supposons pour un certain k , que $x^k \leq x^{k+1}$, il est clair que

$$x_i^{k+1} \leq x_i^{k+2}, \forall i \in \{1, \dots, n-1, n+1, \dots, n+m-1\}.$$

Si $x_n^{k+2} = a_{n-1} x_{n-1}^{k+1}$ alors $x_n^{k+2} \geq a_{n-1} x_{n-1}^k \geq x_n^{k+1}$,

sinon :

$$\begin{aligned} x_n^{k+2} &= \bar{a}_n x_1^{k+1} x_{n+1}^{k+1} / x_{n+m}^{k+1} \\ &\geq \bar{a}_n x_1^{k+1} x_{n+1}^{k+1} / (\bar{a}_{n+m} x_1^k x_{n+1}^k / x_n^{k+1}) \\ &\geq (x_1^{k+1} / x_1^k) (x_{n+1}^{k+1} / x_{n+1}^k) x_n^{k+1} \\ &\geq x_n^{k+1}. \end{aligned}$$

Si $x_{n+m}^{k+2} = a_{n+m-1} x_{n+m-1}^{k+1}$ alors $x_{n+m}^{k+2} \geq a_{n+m-1} x_{n+m-1}^k \geq x_{n+m}^{k+1}$,

sinon :

$$\begin{aligned} x_{n+m}^{k+2} &= \bar{a}_{n+m} x_1^{k+1} x_{n+1}^{k+1} / x_n^{k+2} \\ &\geq \bar{a}_{n+m} x_1^{k+1} x_{n+1}^{k+1} / (\bar{a}_n x_1^{k+1} x_{n+1}^{k+1} / x_n^{k+1}) \\ &= x_{n+m}^{k+1}. \end{aligned}$$

Donc $x^k \leq x^{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$ ■

On définit l'ensemble C_a pour $a \in \mathcal{A}$ par $C_a = \{x \in \mathbb{R}^{n+m}, x \leq S_a(x)\}$.

Proposition 7. *Il existe une unique condition initiale x^0 (à une constante additive près) du système (S_a) qui garantit pour tout a dans \mathcal{A} la croissance de la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par (S_a) . Cette condition est $x^0 = \lambda \mathbf{1}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{1} = {}^t(1, 1, \dots, 1)$. C'est à dire : $\bigcap_{a \in \mathcal{A}} C_a = \{\lambda \mathbf{1}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.*

Démonstration. Si $x = \lambda \mathbf{1}$ alors $Hx = x$, d'où : $D \otimes (Hx) = D \otimes x \geq x$. Si $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \neq \lambda \mathbf{1}$, alors :

- ou bien $\exists i \neq n, n+m$ tel que : $x_i \neq x_{i+1}$, dans ce cas, si $x_i < x_{i+1}$ alors $a_i = 0$ donne $a_i x_i < x_{i+1}$, et si $x_i > x_{i+1}$ alors $a_i = 1$ donne $\bar{a}_i x_{i+1} < x_i$, ce qui veut dire que $x \notin \bigcap_{a \in \mathcal{A}} C_a$;
- ou bien $x_n \neq x_{n+1}$, dans ce cas, si $x_n < x_{n+1}$ alors, $a_n = 0$ donne $a_n x_n < x_{n+1}$, et si $x_n > x_{n+1}$ alors $x_1 > x_{n+m}$ et donc $a_{n+m} = 0$ donne $x_1 > a_{n+m} x_{n+m}$, ce qui veut dire aussi que $x \notin \bigcap_{a \in \mathcal{A}} C_a$.

D'où $\bigcap_{a \in \mathcal{A}} C_a = \{\lambda \mathbf{1}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ ■

Remarque 4. Dans la suite on prendra toujours la condition initiale $x = 0$. La proposition 7 nous assure que le flot moyen existe et qu'il est positif ou nul.

Proposition 8. *La suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est sous-linéaire (croît au plus linéairement), c'est à dire : $\exists \mu, \alpha \in \mathbb{R}, \forall 1 \leq i \leq n+m, \forall k \in \mathbb{N} : x_i^k \leq \mu k + \alpha$.*

Démonstration. On vérifie que $x^{k+1} = S_a(x^k) \leq A \otimes x^k$, où A est une matrice minplus de taille $n+m$ donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \bar{a}_1 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon & \varepsilon & \cdots & & & a_{n+m-1} \\ a_1 & \varepsilon & \bar{a}_2 & \varepsilon & \varepsilon & \vdots & & & & \vdots \\ \varepsilon & a_2 & \varepsilon & \ddots & \vdots & & & & & \\ \vdots & \varepsilon & \ddots & \ddots & \bar{a}_{n-1} & & & & & \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & a_{n-1} & \varepsilon & \varepsilon & \cdots & & & \varepsilon \\ \varepsilon & \cdots & & & a_n & \varepsilon & \bar{a}_{n+1} & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & & & & \vdots & a_{n+1} & \varepsilon & \bar{a}_{n+2} & \varepsilon & \varepsilon \\ & & & & & \varepsilon & a_{n+2} & \varepsilon & \ddots & \vdots \\ & & & & & \vdots & \varepsilon & \ddots & \ddots & \bar{a}_{n+m-1} \\ \varepsilon & \cdots & & & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \cdots & a_{n+m-1} & \varepsilon \end{bmatrix}$$

La suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc majorée par une suite donnée par un système linéaire minplus dont la matrice représentative est à coefficients positifs ou nuls ■

Proposition 9. *Partant de $x^0 = 0$, la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est sur-linéaire (croît au moins linéairement), c'est à dire : $\exists \eta, \beta \in \mathbb{R}, \forall 1 \leq i \leq n+m, \forall k \in \mathbb{N} : x_i^k \geq \eta k + \beta$.*

Démonstration. On a l'estimation :

$$\begin{cases} x_i^{k+1} = a_{i-1} x_{i-1}^k \oplus \bar{a}_i x_{i+1}^k, & \forall i \neq n, n+m, \\ x_n^{k+1} \geq \bar{a}_{n+m} x_1^k x_{n+1}^k / x_{n+m}^{k+1} \oplus a_1 x_1^k \geq (\bar{a}_{n+m} / a_{n+1} \oplus a_1) x_1^k, \\ x_{n+m}^{k+1} \geq (\bar{a}_{n+m} / a_1 \oplus a_{n+1}) x_{n+1}^k, \end{cases}$$

La suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc minorée par une suite donnée par un système linéaire minplus ■

Proposition 10. *Partant de $x^0 = 0$, la distance entre les trajectoires de chaque couple d'états de la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée. C'est à dire :*

$$\exists c_1 > 0, \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_i^k - x_j^k| \leq c_1, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n+m\}.$$

De plus

$$\forall T, \exists c_2 > 0, \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_i^k - x_i^{k+T}| \leq c_2 T, \quad \forall i \in \{1, \dots, n+m\}.$$

Démonstration. La suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est majorée par la suite donnée par le système linéaire minplus $x^{k+1} = A \otimes x^k$ où A est la matrice donnée dans la preuve de la proposition 8. Le résultat découle alors du fait que la matrice A est irréductible ■

Corollaire 8. *Partant de $x^0 = 0$, si le système (S) admet un vecteur taux d'accroissement χ , alors $\chi \geq 0$ et $\chi_i = \chi_j, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Démonstration. $\chi \geq 0$ résulte de la proposition 6, et $\chi_i = \chi_j, \forall i, j$ résulte de la proposition 10 ■

Lorsque le taux d'accroissement χ existe et vérifie $\chi_i = \chi_j, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on note aussi par χ le nombre réel positif ou nul χ_i .

Dans ce qui suit, on s'intéresse au cas où la route prioritaire est plus petite que la route non prioritaire. Dans ce cas on est capable de calculer une valeur propre du système.

Étude du problème de valeur propre

Le problème de valeur propre associé au système (4.8 - 4.10) s'écrit :

$$\lambda x_i = a_{i-1} x_{i-1} \oplus \bar{a}_i x_{i+1}, \quad i \neq 1, n, n+1, n+m \quad (4.14)$$

$$\lambda x_n = \bar{a}_n x_1 x_{n+1} / (\lambda x_{n+m}) \oplus a_{n-1} x_{n-1}, \quad (4.15)$$

$$\lambda x_{n+m} = \bar{a}_{n+m} x_1 x_{n+1} / x_n \oplus a_{n+m-1} x_{n+m-1}, \quad (4.16)$$

$$\lambda x_1 = a_{n+m} x_{n+m} \oplus \bar{a}_1 x_2, \quad (4.17)$$

$$\lambda x_{n+1} = a_{n+m} x_n \oplus \bar{a}_{n+1} x_{n+2}, \quad (4.18)$$

Dans ce qui suit on suppose $a \in \mathcal{A}$, et on introduit les notations suivantes $b_n = \otimes_{j=1}^{n-1} a_j$, $\bar{b}_n = \otimes_{j=1}^{n-1} \bar{a}_j$, $b_m = \otimes_{j=n+1}^{n+m-1} a_j$ et $\bar{b}_m = \otimes_{j=n+1}^{n+m-1} \bar{a}_j$.

Proposition 11. *Si le système (4.14 - 4.18) admet une solution (λ, x) , alors $\lambda \leq 1/4$ et ce système est équivalent au système suivant :*

$$\lambda x_i = a_{i-1} x_{i-1} \oplus \bar{a}_i x_{i+1}, \quad i \neq 1, n, n+1, n+m \quad (4.19)$$

$$\lambda x_n = \bar{a}_n x_1 x_{n+1} / (\lambda x_{n+m}) \oplus b_n x_1 / \lambda^{n-2}, \quad (4.20)$$

$$\lambda x_{n+m} = \bar{a}_{n+m} x_1 x_{n+1} / x_n \oplus b_m x_{n+1} / \lambda^{m-2}, \quad (4.21)$$

$$\lambda x_1 = a_{n+m} x_{n+m} \oplus \bar{b}_n x_n / \lambda^{n-2}, \quad (4.22)$$

$$\lambda x_{n+1} = a_n x_n \oplus \bar{b}_m x_{n+m} / \lambda^{m-2}, \quad (4.23)$$

Démonstration. Des équations (4.15),(4.17), et (4.18), on a :

$$\begin{aligned} x_n &\leq \bar{a}_n x_1 x_{n+1} / x_{n+m} / \lambda^2 \\ x_1 &\leq a_{n+m} x_{n+m} / \lambda \\ x_{n+1} &\leq a_n x_n / \lambda \end{aligned}$$

La produit (minplus) de ces trois inéquations terme à terme, sachant que $a_n + a_{n+m} + \bar{a}_{n+m} = 1$, donne $\lambda \leq 1/4$. L'équivalence des deux systèmes peut facilement être obtenue par récurrence sur n et m en utilisant $\lambda \leq 1/4$ ■

Proposition 12. *Si $\lambda > 0$ alors les deux systèmes (4.14 - 4.18) et (4.19 - 4.23) sont équivalents au système suivant :*

$$x_i = a_{i-1} x_{i-1} / \lambda \oplus \bar{a}_i x_{i+1} / \lambda, \quad i \neq 1, n, n+1, n+m \quad (4.24)$$

$$x_n = (\bar{a}_n / b_m) x_1 \lambda^{m-3} \oplus b_n x_1 / \lambda^{n-1}, \quad (4.25)$$

$$x_{n+m} = b_m x_{n+1} / \lambda^{m-1}, \quad (4.26)$$

$$x_1 = a_{n+m} x_{n+m} / \lambda \oplus \bar{b}_n x_n / \lambda^{n-1}, \quad (4.27)$$

$$x_{n+1} = a_n x_n / \lambda \oplus \bar{b}_m x_{n+m} / \lambda^{m-1}, \quad (4.28)$$

Démonstration. En multipliant (4.20) par x_{n+m} et (4.21) par x_n on obtient :

$$x_n x_{n+m} = \bar{a}_n x_1 x_{n+1} / \lambda^2 \oplus b_n x_1 x_{n+m} / \lambda^{n-2}, \quad (4.29)$$

$$x_n x_{n+m} = \bar{a}_{n+m} x_1 x_{n+1} / \lambda \oplus b_m x_{n+1} x_n / \lambda^{m-2}, \quad (4.30)$$

$\lambda > 0$ et $\bar{a}_n = \bar{a}_{n+m}$ donnent :

$$\bar{a}_n x_1 x_{n+1} / \lambda^2 < \bar{a}_{n+m} x_1 x_{n+1} / \lambda$$

et à droite de l'équation (4.30) le minimum est atteint à $b_m x_{n+1} x_n / \lambda^{m-2}$, donc (4.26) est vérifiée. En substituant x_{n+m} dans (4.20), on obtient (4.25). Ce qui donne le résultat ■

Théorème 27. *Si $\lambda > 0$ alors le système (4.24 - 4.28) est linéaire minplus. Si de plus $n > m$ alors ce système est causal et λ est donnée par :*

$$\lambda = \min \left\{ \frac{n+m-1}{n+m} d, \frac{1}{4}, \frac{n}{n-m+2} - \frac{n+m-1}{n-m+2} d \right\}. \quad (4.31)$$

avec $d = \frac{1}{n+m-1} \sum_{i=1}^{n+m} a_i$.

Démonstration. Les équations (4.25), (4.26), (4.27) et (4.28) forment un système autonome. Sur ce système, en effectuant le changement de variable suivant : $z_1 = x_1 \lambda^{m-1}$, $z_2 = x_n$, $z_3 = x_{n+1}$ et $z_4 = x_{n+m} \lambda^{m-1}$, on obtient :

$$z_2 = (\bar{a}_n / b_m) z_1 / \lambda^2 \oplus b_n z_1 / \lambda^{n+m-2},$$

$$z_4 = b_m z_3,$$

$$z_1 = a_{n+m} z_4 / \lambda \oplus \bar{b}_n z_2 / \lambda^{n-m},$$

$$z_3 = a_n z_2 / \lambda \oplus \bar{b}_m z_4 / \lambda^{2m-2},$$

Remarque 5. On n'a aucun résultat théorique sur la stabilité du vecteur propre associé à la valeur propre λ . Si c'était le cas, alors compte tenu du corollaire 8, le taux moyen d'accroissement du système, qui correspond au flot moyen des véhicules f , serait, dans le cas $n > m$, égal à λ si λ est strictement positif et à zéro sinon, c'est à dire f serait égal à λ^+ donné par :

$$\lambda^+ = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{n+m-1}{n+m} d, \frac{1}{4}, \frac{n}{n-m+2} - \frac{n+m-1}{n-m+2} d \right\} \right\}. \quad (4.32)$$

Si de plus n et m sont assez grands, λ^+ est donné par :

$$\lambda^+ = \max \left\{ 0, \min \left\{ d, \frac{1}{4}, \frac{1}{1-r} - \frac{1+r}{1-r} d \right\} \right\}, \quad (4.33)$$

On verra plus loin que les simulations numériques montrent que l'égalité $f = \lambda^+$ n'est pas toujours vérifiée. Cependant, les deux quantités sont très proches, et même égales dans plusieurs situations (voir les figures 4.16, 4.17 et 4.18).

Exemple 18. On fait varier r dans $]0, 1[$ et on obtient les quantités λ^+ correspondantes données dans la table 4.3 et sur la figure 4.10.

r	λ^+
1/5	$\max\{0, \min\{d, 1/4, 5/4 - 3/2 d\}\}$
1/4	$\max\{0, \min\{d, 1/4, 4/3 - 5/3 d\}\}$
1/3	$\max\{0, \min\{d, 1/4, 3/2 - 1/2 d\}\}$
1/2	$\max\{0, \min\{d, 1/4, 2 - 3d\}\}$
2/3	$\max\{0, \min\{d, 1/4, 3 - 5d\}\}$
3/4	$\max\{0, \min\{d, 1/4, 4 - 7d\}\}$

TAB. 4.3 – Dépendance de λ^+ avec le rapport r entre les tailles des deux routes.

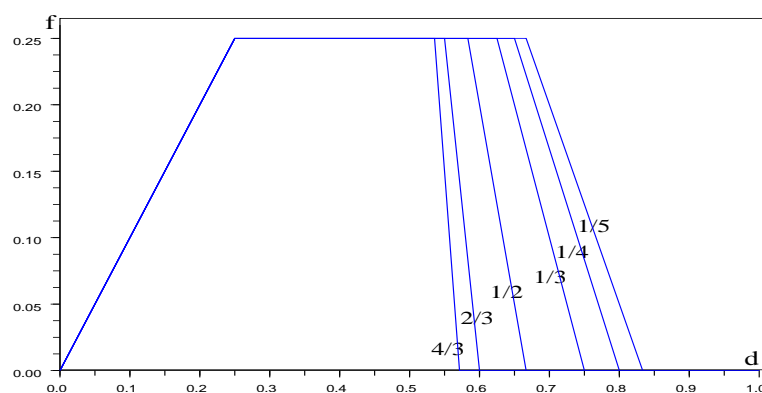


FIG. 4.10 – Dépendance de λ^+ avec le rapport r entre les tailles des deux routes.

Résultats numériques

La simulation du système de deux routes circulaires avec une intersection sans possibilité de tourner gérée par la priorité à droite revient à appliquer la dynamique :

$$x = D \otimes (H(\delta)x).$$

A l'aide de la boîte à outils *Maxplus* de *Scilab*, on construit les deux matrices $H(\delta)$ et D et on intègre cette dynamique pendant une durée de temps suffisante.

Sur les figures 4.16, 4.17 et 4.18 on compare, pour trois valeurs de r : $1/3$, $1/5$ et $1/9$, les deux quantités λ^+ (qui est la projection de la valeur propre λ sur \mathbb{R}_+) et f (qui est le flot des véhicules donné par le taux d'accroissement du système simulé). Sur ces diagrammes, les points (d, λ^+) sont représentés par des signes $+$ liés avec un trait discontinu, et les points (d, f) sont représentés par des losanges liés avec un trait continu.

Remarque 6. Sur les figures 4.11, 4.12, 4.13, 4.14 et 4.15 la taille d'une section sur la route prioritaire n'est pas égale (est supérieure) à la taille d'une section sur la route non prioritaire. Ceci est dû au fait que les deux routes ont des tailles différentes, et qu'elles sont représentées par deux cercles de même périmètre.

Ces diagrammes correspondent tous au cas $n > m$. On distingue quatre phases du trafic.

1. *La phase libre* : $0 \leq d \leq 1/4$. Dans ce cas f et λ^+ sont quasiment égaux (on sait qu'il existe des exemples où f est légèrement inférieur à λ^+). En général les véhicules se séparent de façon à circuler sans gêne. L'intersection n'a donc aucun effet, et le système se comporte comme une route circulaire. On a alors $f = d$.

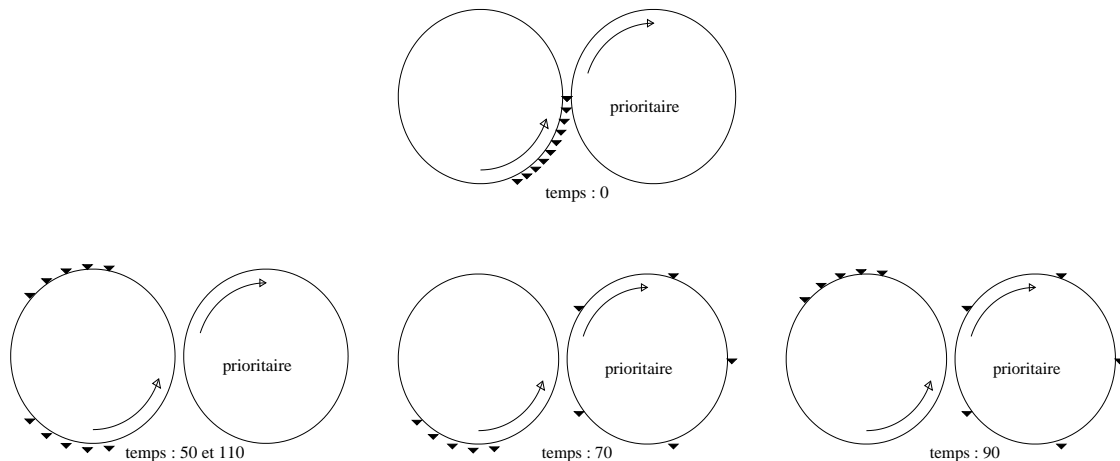


FIG. 4.11 – La position initiale et la position asymptotiquement périodique des véhicules dans le cas de la phase libre. $n = 50$, $m = 10$ et le nombre de véhicules est égal à 10.

2. *La phase de saturation* : $1/4 \leq d \leq (3 + r)/(4(1 + r))$. Dans ce cas, f et λ^+ sont quasiment égaux. Un régime périodique est atteint l'intersection sert sans arrêt sans qu'elle soit gênée, et où en moyenne un nombre de véhicules égal à un quart du nombre total de sections avance à chaque instant. On a alors $f = 1/4$.

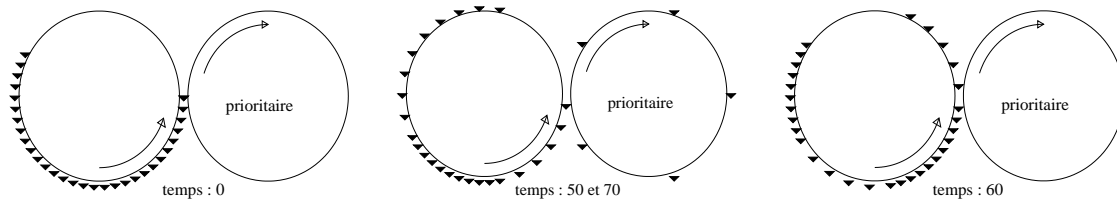


FIG. 4.12 – La position initiale et la position asymptotiquement périodique des véhicules dans le cas de la phase de saturation. $n = 50, m = 10$ et le nombre de véhicules est égal à 30.

3. *La phase de récession* : $(3 + r)/(4(1 + r)) \leq d \leq 1/(1 + r)$. Dans ce cas il y a suffisamment de véhicules à l'entrée de l'intersection pour qu'elle puisse servir sans arrêt, mais il y a aussi des véhicules à sa sortie qui l'empêchent de le faire. L'intersection n'est donc pas à sa vitesse maximale. f et λ^+ sont en général différents, mais la courbe de f , qui est décroissante par morceaux (en forme d'un escalier), reste autour de celle de λ^+ qui est linéairement décroissante. Le nombre de marches de l'escalier de la courbe de f augmente quand r tend vers zéro tandis que leur longueur diminue et que la pente des marches augmente en valeur absolue. On discutera ce phénomène en détail dans des publications à venir.

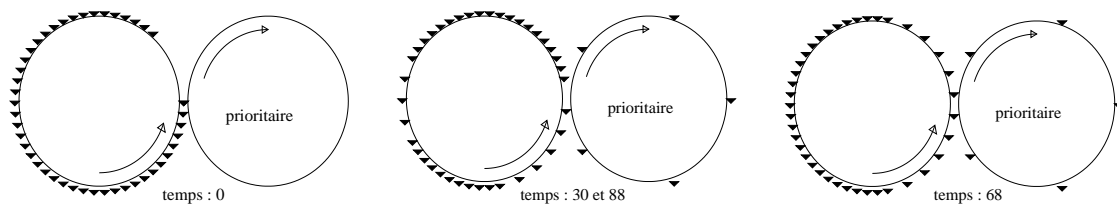


FIG. 4.13 – La position initiale et la position asymptotiquement périodique des véhicules dans le cas de la phase de récession. $n = 50, m = 10$ et le nombre de véhicules est égal à 44.

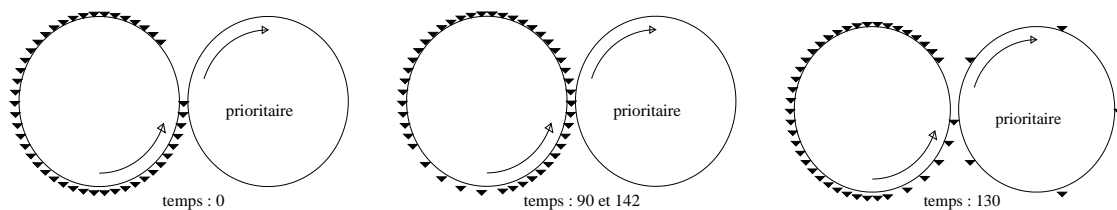


FIG. 4.14 – La position initiale et la position asymptotiquement périodique des véhicules dans le cas de la phase de récession. $n = 50, m = 10$ et le nombre de véhicules est égal à 45.

4. *La phase de blocage* : $1/(1 + r) \leq d \leq 1$. Dès que le nombre total de véhicules dépasse la taille de la route non prioritaire, cette dernière se remplit et bloque tout le système.

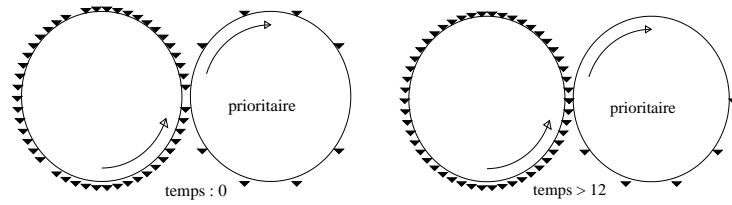


FIG. 4.15 – La position initiale et la position asymptotiquement périodique des véhicules dans le cas de la phase de blocage. $n = 50, m = 10$ et le nombre de véhicules est égal à 55.

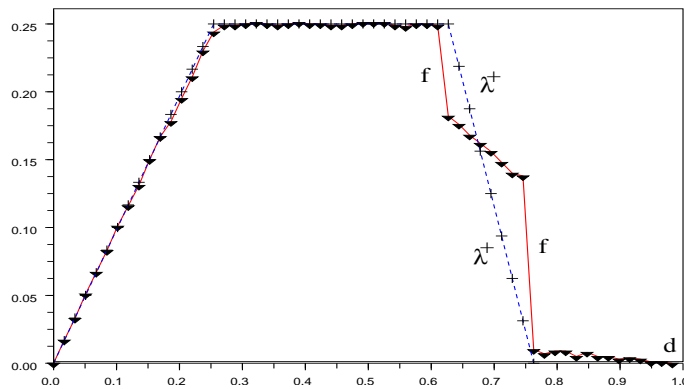


FIG. 4.16 – En continu le flot en fonction de la densité, et en discontinu, la quantité λ^+ en fonction de la densité. $n = 45, m = 15$ donc $r = 1/3$.

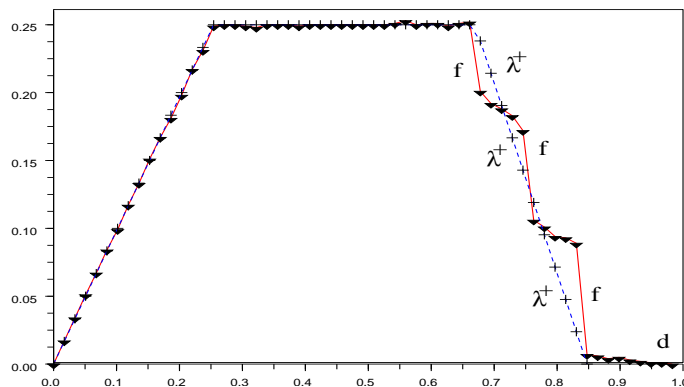


FIG. 4.17 – En continu le flot en fonction de la densité, et en discontinu, la quantité λ^+ en fonction de la densité. $n = 50, m = 10$ donc $r = 1/5$.

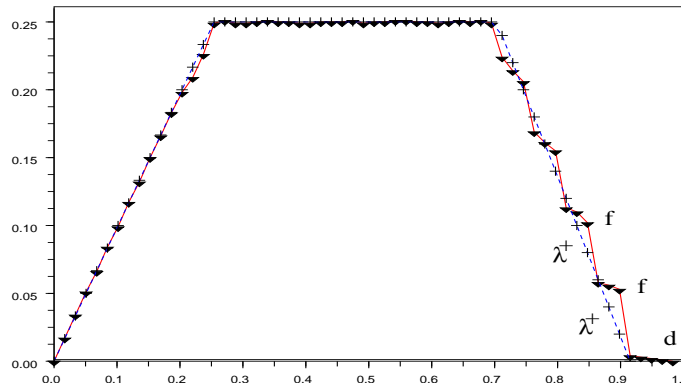


FIG. 4.18 – En continu le flot en fonction de la densité, et en discontinu, la quantité λ^+ en fonction de la densité. $n = 54, m = 6$ donc $r = 1/9$.

4.4.2 Intersection avec possibilité de tourner

Dans cette section on s'intéresse au cas d'un système de deux routes circulaires et une intersection avec possibilité de tourner gérée par la priorité à droite (figure 4.19). Pour

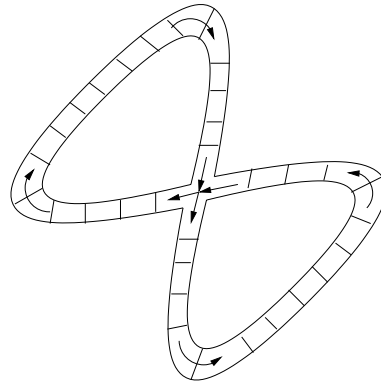


FIG. 4.19 – Deux routes circulaires et une intersection avec possibilité de tourner.

simplifier la discussion, on suppose que la moitié des véhicules choisissent une direction et l'autre moitié l'autre direction. On réalise cette contrainte en comptant les véhicules entrant dans l'intersection, les numéros pairs prennent une direction les impairs une autre (ce mécanisme s'adapte clairement à d'autres proportions). La priorité est au véhicule qui est à droite de l'autre. L'intersection peut contenir un seul véhicule.

Le réseau de Pétri qui modélise le système de deux routes circulaires et une intersection avec possibilité de tourner est donné sur la figure 4.20. Sur ce réseau, l'intersection est représentée par quatre transitions q_1, q_2, q_n et q_{n+m} et quatre places $a_n, a_{n+m}, \bar{a}_n, \bar{a}_{n+m}$. Si $a_n = 1$, alors $\bar{a}_n = \bar{a}_{n+m} = 0$ et l'intersection est occupée par un véhicule se dirigeant vers le sud. Si $a_{n+m} = 1$, alors $\bar{a}_n = \bar{a}_{n+m} = 0$ et l'intersection est occupée par un véhicule se dirigeant vers l'ouest. Si $a_n = a_{n+m} = 0$, alors l'intersection est libre, et $\bar{a}_n = \bar{a}_{n+m} = 1$ donnent la permission d'entrer à l'intersection.

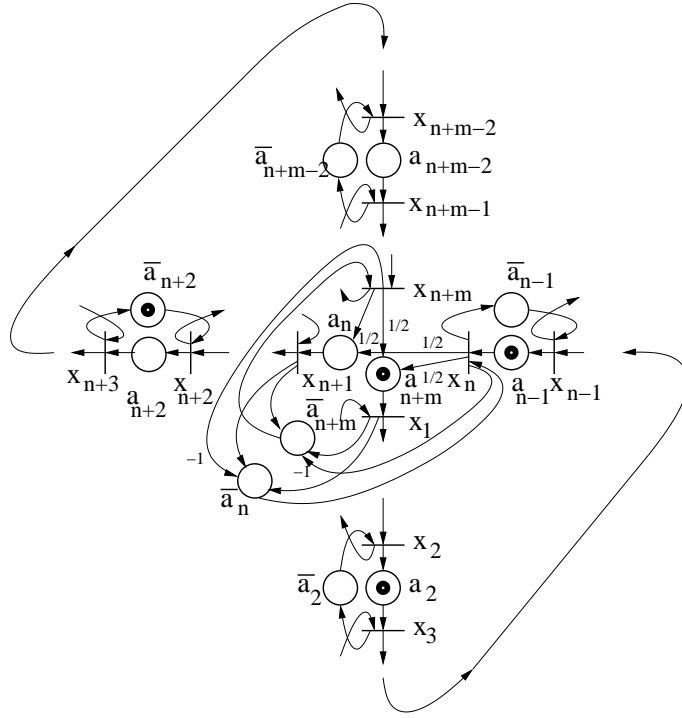


FIG. 4.20 – Une intersection gérée par la priorité à droite.

Le réseau de Pétri de la figure 4.20 est déterministe. Si on note par x_q^k le nombre de brûlages de la transition q jusqu'à l'instant k , alors sur un système de deux routes (la taille de la route non prioritaire étant égale à n et celle de la route prioritaire étant égale à m) la dynamique du réseau s'écrit en algèbre minplus :

$$x_q^{k+1} = a_{q-1}x_{q-1}^k \oplus \bar{a}_q x_{q+1}^k, \quad (4.34)$$

$$q \in \{2, \dots, n-1, n+2, \dots, n+m-1\},$$

$$x_n^{k+1} = \bar{a}_n x_1^k x_{n+1}^k / x_{n+m}^{k+1} \oplus a_{n-1} x_{n-1}^k, \quad (4.35)$$

$$(S'_a) : \quad x_{n+m}^{k+1} = \bar{a}_{n+m} x_1^k x_{n+1}^k / x_n^k \oplus a_{n+m-1} x_{n+m-1}^k, \quad (4.36)$$

$$x_1^{k+1} = a_{n+m} \left[\sqrt{x_n^k x_{n+m}^k} \right] \oplus \bar{a}_1 x_2^k, \quad (4.37)$$

$$x_{n+1}^{k+1} = a_n \left[\sqrt{x_n^k x_{n+m}^k} \right] \oplus \bar{a}_{n+1} x_{n+2}^k, \quad (4.38)$$

où la racine carrée minplus notée $\sqrt{\cdot}$ est la division standard par 2 et l'opérateur $[\cdot]$ (resp. $[\cdot]$) dénote la partie entière par défaut (resp. par excès), c-à-d : $[x] = \max y \in \mathbb{N}, y \leq x$ (resp. $\lceil x \rceil = \min y \in \mathbb{N}, y \geq x$). Par exemple l'équation (4.37) s'écrit en algèbre ordinaire comme suit :

$$x_1^{k+1} = \min \left\{ a_{n+m} + \left\lceil \frac{x_n^k + x_{n+m}^k}{2} \right\rceil, \bar{a}_1 + x_2^k \right\}.$$

Le système d'équations obtenu est implicite mais triangulaire, sa trajectoire est donc

définie d'une façon unique.

Une version continue de ce système, où il n'est pas nécessaire d'avoir des nombres entiers de jetons pour qu'une transition commence à brûler², est obtenue en négligeant les parties entières. Les deux équations (4.37) et (4.38) sont alors remplacées, respectivement par :

$$x_1^{k+1} = a_{n+m} \sqrt{x_n^k x_{n+m}^k} \oplus \bar{a}_1 x_2^k, \quad (4.39)$$

$$x_{n+1}^{k+1} = a_n \sqrt{x_n^k x_{n+m}^k} \oplus \bar{a}_{n+1} x_{n+2}^k. \quad (4.40)$$

Dans ce cas, le système peut s'écrire sous une forme matricielle en combinant des opérateurs de l'algèbre ordinaire avec ceux de l'algèbre minplus :

$$x = D \otimes (H(\delta)x).$$

On veut résoudre le système (S'_a) sans en négligeant les parties entières, c'est à dire résoudre le système :

$$\{(4.34), (4.35), (4.36), (4.39) \text{ et } (4.40)\}, \quad (4.41)$$

où les paramètres de marquages a_i et \bar{a}_i sont dans l'ensemble \mathcal{A} défini précédemment.

En suivant la même démarche utilisée dans la sous-section 4.4.1, on peut montrer que la résolution du problème de valeur propre associé au système (4.41) revient, sous l'hypothèse $\lambda > 0$ à résoudre le problème suivant :

$$z_1 = a_{n+m} \sqrt{z_2 z_4} / \lambda \oplus \bar{b}_n z_2 / \lambda^{n-m}, \quad (4.42)$$

$$z_2 = (\bar{a}_n / b_m) z_1 / \lambda^2 \oplus b_n z_1 / \lambda^{n+m-2}, \quad (4.43)$$

$$z_3 = a_n \sqrt{z_2 z_4} / \lambda \oplus \bar{b}_m z_4 / \lambda^{2m-2}, \quad (4.44)$$

$$z_4 = b_m z_3, \quad (4.45)$$

Ce système correspond à une équation de la programmation dynamique d'un problème de contrôle optimal stochastique. Il est causal si et seulement $n > m$.

Théorème 28. *La valeur propre du système $\{(4.42) - (4.45)\}$ est la même que celle donnée dans le théorème 27, c'est à dire :*

$$\lambda = \min \left\{ \frac{n+m-1}{n+m} d, \frac{1}{4}, \frac{n}{n-m+2} - \frac{n+m-1}{n-m+2} d \right\}.$$

où $d = \frac{1}{n+m-1} \sum_{i=1}^{n+m} a_i$.

Démonstration. Notons par μ la quantité $\mu = \min \left\{ \frac{n+m-1}{n+m} d, \frac{1}{4}, \frac{n}{n-m+2} - \frac{n+m-1}{n-m+2} d \right\}$.

- Si d est telle que $\mu = \frac{n+m-1}{n+m} d$, alors on vérifie que la solution (λ, z) du système $\{(4.42) - (4.45)\}$ est donnée par :

$$\lambda = \mu = \frac{n+m-1}{n+m} d,$$

²Le minimum des nombres réels de jetons dans les places en amont de chaque transition sont consommés.

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ b_n/\lambda^{n+m-2} \\ a_n/a_{n+m} \\ a_n b_m/a_{n+m} \end{bmatrix},$$

qui est solution du système :

$$\begin{cases} z_1 = a_{n+m} \sqrt{z_2 z_4} / \lambda, \\ z_2 = b_n z_1 / \lambda^{n+m-2}, \\ z_3 = a_n \sqrt{z_2 z_4} / \lambda, \\ z_4 = b_m z_3, \end{cases}$$

On vérifie que la solution du système dessus est aussi solution du système {(4.42) - (4.45)}. En effet :

- $[\bar{b}_n z_2 / \lambda^{n-m}] / z_1 = (1/\lambda^2)^{n-1} \geq e$ car $\lambda \leq 1/4$.
- $[(\bar{a}_n / b_m) z_1 / \lambda^2] / [b_n / \lambda^{n+m-2}] = 1 \geq e$
en utilisant $\lambda = (n+m-1)/(n+m) d$ et $d = [\sum_{i=1}^{n+m} a_i] / (n+m-1)$.
- $[\bar{b}_m z_4 / \lambda^{2m-2}] / [a_n / a_{n+m}] = (1/\lambda^2)^{m-1} \geq e$ car $\lambda \leq 1/4$.
- Si d est telle que $\mu = 1/4$, alors on vérifie que la solution (λ, z) du système {(4.42) - (4.45)} est donnée par :

$$\lambda = \mu = 1/4,$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ \bar{a}_n / b_m / \lambda^2 \\ a_n / a_{n+m} \\ a_n b_m / a_{n+m} \end{bmatrix},$$

qui est solution du système :

$$\begin{cases} z_1 = a_{n+m} \sqrt{z_2 z_4} / \lambda, \\ z_2 = (\bar{a}_n / b_m) z_1 / \lambda^2, \\ z_3 = a_n \sqrt{z_2 z_4} / \lambda, \\ z_4 = b_m z_3, \end{cases}$$

On vérifie de la même façon que précédemment que la solution du système dessus est aussi solution du système {(4.42) - (4.45)}.

- Si d est telle que $\mu = \frac{n}{n-m+2} - \frac{n+m-1}{n-m+2} d$, alors on vérifie que la solution (λ, z) du système {(4.42) - (4.45)} est donnée par :

$$\lambda = \mu = \frac{n}{n-m+2} - \frac{n+m-1}{n-m+2} d,$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ \bar{a}_n / b_m / \lambda^2 \\ 1/a_{n+m} / b_m / \lambda^3 \\ 1/a_{n+m} / \lambda^3 \end{bmatrix},$$

qui est solution du système :

$$\begin{cases} z_1 = \bar{b}_n z_2 / \lambda^{n-m}, \\ z_2 = (\bar{a}_n / b_m) z_1 / \lambda^2, \\ z_3 = a_n z_2 / \lambda, \\ z_4 = b_m z_3, \end{cases}$$

On vérifie de la même façon que précédemment que la solution du système dessus est aussi solution du système $\{(4.42) - (4.45)\}$.

d'où le résultat ■

Corollaire 10. *Si $\lambda > 0$ et n et m sont assez grands tels que $n > m$, alors la valeur propre λ du système (4.41) est donnée par :*

$$\lambda = \min \left\{ d, \frac{1}{4}, \frac{1}{1-r} - \frac{1+r}{1-r} d \right\},$$

où $r = m/n < 1$.

Remarque 7. Comme dans le cas d'une intersection sans possibilité de tourner, on n'a aucun résultat théorique sur la stabilité du vecteur propre associé à la valeur propre λ . Si c'était le cas le taux moyen d'accroissement du système, qui correspond au flot moyen des véhicules f , serait, dans le cas $n > m$, égal à λ si λ est strictement positif et à zéro sinon, c'est à dire f serait égal à λ^+ donné dans (4.32) (ou (4.33) dans le cas où n et m sont assez grands).

Les simulations numériques montrent que l'égalité $f = \lambda^+$ n'est pas toujours vérifiée. Cependant, les deux quantités sont très proches (voir les figures 4.25, 4.26 et 4.27), beaucoup plus proches que dans le cas d'intersection sans possibilité de tourner, et même égales dans plusieurs situations. De plus, dans ce cas (intersection avec possibilité de tourner), les quatre phases du trafic sont complètement interprétées, et les diagrammes fondamentaux sur chacune des deux routes (prioritaire et non prioritaire) sont déduits.

Interprétation des phases du trafic dans le cas $n > m$

Lorsque $n > m$, on obtient un diagramme fondamental à quatre phases qui s'interprète comme suit :

1. *La phase libre :* $0 \leq d \leq 1/4$. Dans ce cas, les véhicules se séparent d'une façon à circuler sans gêne. L'intersection n'a donc aucun effet, et le système se comporte comme une seule route circulaire. On a alors $f = d$.

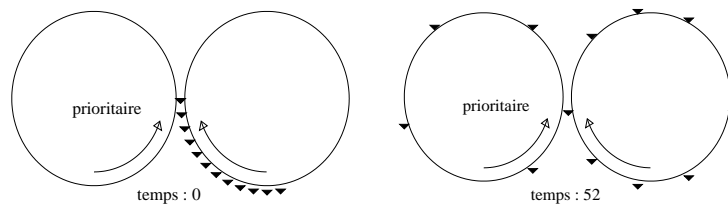


FIG. 4.21 – La position initiale (aléatoire) et la position asymptotiquement périodique des véhicules dans le cas de la phase libre. $n = 40, m = 20$ et le nombre de véhicules est égal à 12.

2. *La phase de saturation :* $1/4 \leq d \leq (3+r)/(4(1+r))$. Dans ce cas l'intersection est à sa vitesse maximale, la priorité s'applique et il y a plus de véhicules sur la route non prioritaire que sur l'autre. En effet, l'entrée de la route prioritaire est majorée par la vitesse maximale de l'intersection qui est égale à $1/4$, et sa sortie est prioritaire, donc

majorée aussi par $1/4$. Après une phase transitoire, le trafic sur cette route est donc fluide, et la densité est déterminée par son entrée qui est égale à $1/4$ pour des raisons d'équilibre entre les flots d'entrée et de sortie. La densité sur la route prioritaire reste fixe durant cette phase. Ceci veut dire que tous les véhicules supplémentaires, par rapport à la densité globale de $1/4$ s'accumulent sur la route non prioritaire. Notons par N le nombre total de véhicules dans le système. Durant cette phase, le nombre de véhicules sur la route prioritaire est égal à $m/4$. Le reste des véhicules, c'est à dire $N - m/4$ se trouve alors sur l'autre route. La route non prioritaire se comporte alors comme une route circulaire avec un retardateur, voir la section 4.3.2. La route prioritaire est juste servie par l'autre. L'intersection joue le rôle du retardateur. Le flot maximal est égal à $1/4$. Sur une route circulaire avec un retardateur le flot maximal $1/4$ est obtenu pour une densité d' vérifiant $1/4 \leq d' \leq 3/4$, voir la section 4.3.2. On déduit que la phase de saturation correspond à un nombre de véhicules N vérifiant : $n/4 \leq N - m/4 \leq 3n/4$. On vérifie alors que :

$$\frac{n}{4} \leq N - \frac{m}{4} \leq \frac{3n}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} \leq d \leq \frac{3+r}{4(1+r)}.$$

Notons que sur le diagramme donné dans 4.33, l'intersection entre les deux segments $f = d$ et $f = 1/4$ se fait à $d = 1/4$, et l'intersection des deux segments $f = 1/4$ et $f = 1/(1-r) - (1+r)/(1-r)d$ se fait à $d = (3+r)/(4(1+r))$.

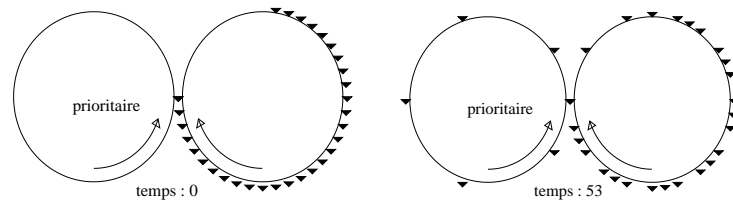


FIG. 4.22 – La position initiale et la position asymptotiquement périodique des véhicules dans le cas de la phase de saturation. $n = 40, m = 20$ et le nombre de véhicules est égal à 30.

3. *La phase de récession* : $(3+r)/(4(1+r)) \leq d \leq 1/(1+r)$. Durant cette phase, le nombre de véhicules dans la route non prioritaire est assez grand pour que le flot soit inférieur à $1/4$, mais reste insuffisant pour la remplir et provoquer un blocage (voir la phase de blocage ci-dessous). On a alors un flot global inférieur à $1/4$.

Durant cette phase, un phénomène de pompage de véhicules de la route prioritaire vers la route non prioritaire est observé, c'est à dire qu'en augmentant la densité globale des véhicules, la densité des véhicules sur la route prioritaire décroît, la densité des véhicules dans la route non prioritaire dépasse $3/4$, et son flot est inférieur à $1/4$. La route prioritaire étant alimentée avec un tel flot, et son flot de sortie pouvant monter jusqu'à $1/4$, la densité des véhicules sur la route prioritaire est égale au flot global qui est le flot dans la route non prioritaire, et qui est inférieur à $1/4$. Ainsi, en augmentant la densité totale des véhicules, la densité des véhicules dans la route prioritaire diminue, ce qui explique le pompage observé.

Le point $d = 1/(1+r)$ correspond à un nombre total de véhicules égal à la taille de la route non prioritaire ($N = n$), qui donne une densité $d = n/(n+m) = 1/(1+r)$. On a alors :

$$\frac{3n}{4} \leq N - \frac{m}{4} \leq n \Rightarrow \frac{3+r}{4(1+r)} \leq d \leq \frac{1}{1+r}.$$

Le flot obtenu durant cette phase s'interprète de la façon suivante : notons par x le nombre de véhicules sur la route prioritaire. Le trafic étant fluide sur cette route, le flot correspondant, qui est aussi le flot global, f est donné par :

$$f = \frac{x}{m}. \quad (4.46)$$

Sur la route non prioritaire on a alors $N - x$ véhicules. Cette route se comportant comme une route circulaire avec un retardateur sur laquelle on a une densité supérieur à $3/4$, le flot sur cette route, qui est aussi le flot global, f est donné par :

$$f = \frac{n - (N - x)}{n}. \quad (4.47)$$

Des deux expressions du flot (4.46) et (4.47), on déduit :

$$\frac{x}{m} = \frac{n - (N - x)}{n},$$

ce qui donne :

$$x = \frac{m(n - N)}{n - m},$$

d'où :

$$f = \frac{x}{m} = \frac{n - N}{n - m} = \frac{1}{1-r} - \frac{1+r}{1-r} d.$$

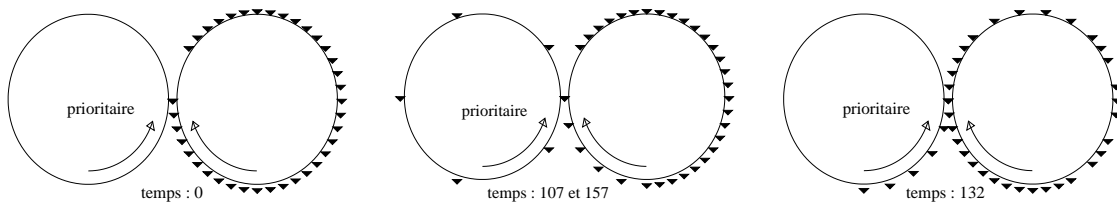


FIG. 4.23 – La position initiale et la position asymptotiquement périodique des véhicules dans le cas de la phase de récession. $n = 40, m = 20$ et le nombre de véhicules est égal à 37.

4. *La phase de blocage* : $1/(1+r) \leq d \leq 1$. Dès que le nombre total de véhicules dépasse la taille de la route non prioritaire, un blocage apparaît. Dans ce cas, la route non prioritaire se remplit et à un certain moment, le véhicule se trouvant dans l'intersection va vouloir entrer dans cette route et bloquera ainsi l'intersection donc tout le système. le flot durant cette phase est donc nul $f = 0$.

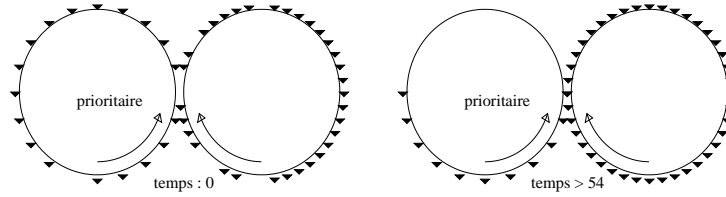


FIG. 4.24 – La position initiale et la position asymptotiquement périodique des véhicules dans le cas de la phase de blocage. $n = 40, m = 20$ et le nombre de véhicules est égal à 50.

Sur les figures 4.25, 4.26 et 4.27 on compare, pour trois valeurs de $r : 1/3, 1/5$ et $1/9$, les deux quantités λ^+ (qui est la projection de la valeur propre λ sur \mathbb{R}_+) et f (qui est le flot des véhicules donné par le taux d'accroissement du système simulé). Sur ces diagrammes, les points (d, λ^+) sont représentés par des signes $+$ liés avec un trait discontinu, et les points (d, f) sont représentés par des losanges liés avec un trait continu.

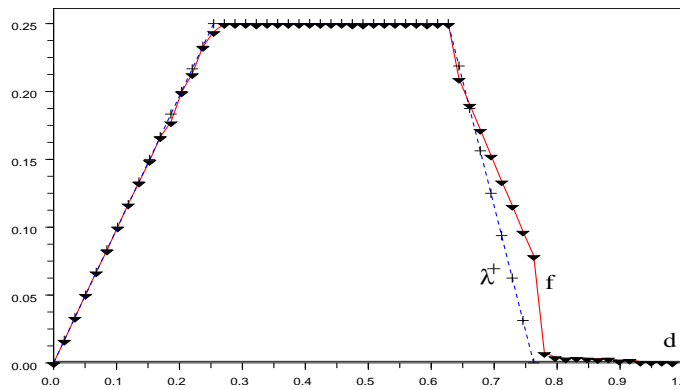


FIG. 4.25 – En continu le flot en fonction de la densité, et en discontinu, la quantité λ^+ en fonction de la densité. $n = 45, m = 15$ donc $r = 1/3$.

Le diagramme fondamental sur chaque route

Pour avoir les diagrammes fondamentaux sur chacune des routes, il suffit de déterminer les densités des véhicules sur les deux routes. On note par d_m et d_n les densités respectives des routes prioritaire et non prioritaire. Il est alors facile de vérifier la relation suivante :

$$d = \frac{r}{1+r} d_m + \frac{1}{1+r} d_n. \tag{4.48}$$

En raisonnant sur la densité d_m des véhicules sur la route prioritaire, on obtient les diagrammes fondamentaux sur chacune des deux routes, voir la figure (4.28).

1. *La phase libre.*

Dans ce cas, on a $d = d_m = d_n = f$ donc les deux diagrammes sont $f = d_m$ et $f = d_n$ avec $0 \leq d_m \leq 1/4$ et $0 \leq d_n \leq 1/4$.

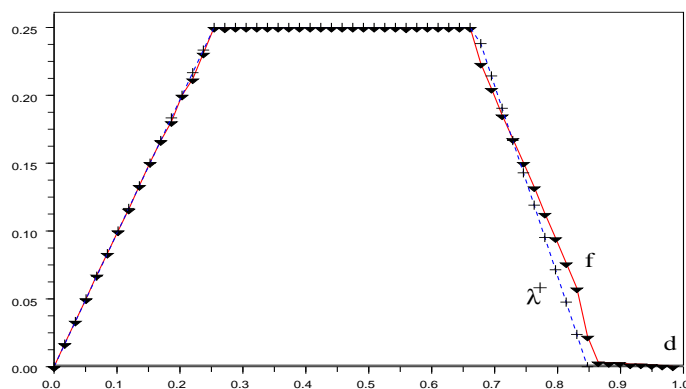


FIG. 4.26 – En continu le flot en fonction de la densité, et en discontinu, la quantité λ^+ en fonction de la densité. $n = 50, m = 10$ donc $r = 1/5$.

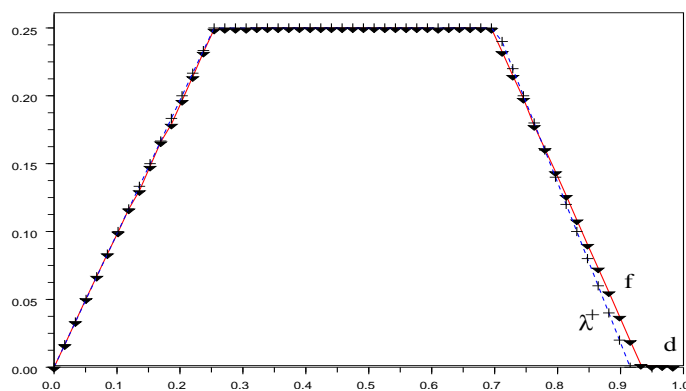


FIG. 4.27 – En continu le flot en fonction de la densité, et en discontinu, la quantité λ^+ en fonction de la densité. $n = 54, m = 6$ donc $r = 1/9$.

2. *La phase de saturation.*

Dans ce cas d_m est constant et est égal à $1/4$. Comme le flot aussi est constant et est égal à $1/4$, on déduit que le diagramme fondamental de la route prioritaire est donné par l'unique point $(1/4, 1/4)$.

De la relation (4.48), on déduit que $d_n = (1+r)d - r/4$, d'où :

$$\frac{1}{4} \leq d \leq \frac{3+r}{4(1+r)} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq d_n \leq \frac{3}{4}.$$

Donc le diagramme fondamental de la route non prioritaire est donné par le segment $[(1/4, 1/4), (3/4, 1/4)]$.

3. *La phase de récession.*

Dans ce cas, on a $d_m = f = 1/(1-r) - (1+r)/(1-r) d$. On remarque que d_m est inversement proportionnel à d , et on a :

$$\frac{3+r}{4(1+r)} \leq d \leq \frac{1}{1+r} \Rightarrow 0 \leq d_m \leq \frac{1}{4}.$$

d'où le diagramme fondamental de la route prioritaire est donné par le segment $[(1/4, 1/4), (0, 0)]$.

De la relation (4.48), on déduit que $d_n = (1+r)/(1-r) d - r/(1-r)$. On vérifie que :

$$1 - d_n = \frac{1}{1-r} - \frac{1+r}{1-r} d = f.$$

Donc le diagramme fondamental de la route non prioritaire est $f = 1 - d_n$ et est donné par le segment $[(3/4, 1/4), (1, 0)]$.

4. *La phase de blocage.*

Dans ce cas, on a $d_n = 1$ et $f = 0$, donc le diagramme fondamental de la route non prioritaire est donné par l'unique point $(1, 0)$.

De la relation (4.48), on déduit que $d_m = (1+r)/r d - 1/r$. On vérifie alors que :

$$\frac{1}{1+r} \leq d \leq 1 \Rightarrow 0 \leq d_m \leq 1.$$

Donc le diagramme fondamental de la route prioritaire est donné par le segment $[(0, 0), (1, 0)]$.

Le diagramme fondamental global

Sur les deux figures 4.29 et 4.30 on vérifie la dépendance du diagramme fondamental du trafic d'une route circulaire et une intersection avec le rapport entre la taille de la route prioritaire et la taille de la route non prioritaire. Sur la figure 4.29, on fait varier les tailles des deux routes en fixant le rapport entre elles, et on montre les diagrammes fondamentaux obtenus. on remarque qu'on a pratiquement le même diagramme. Sur la figure 4.30, on fait varier le rapport entre les tailles des deux routes et on montre les diagrammes fondamentaux obtenus. On remarque que le même type de dépendance que celui obtenu théoriquement dans le cas $n > m$ est obtenu dans le cas $n \leq m$, sauf que dans ce dernier, la phase de récession n'apparaît pas. On a alors une discontinuité du diagramme fondamental où on passe d'une façon brutale de la valeur maximale du flot sur la phase de saturation au blocage (flot nul) sur la phase de blocage.

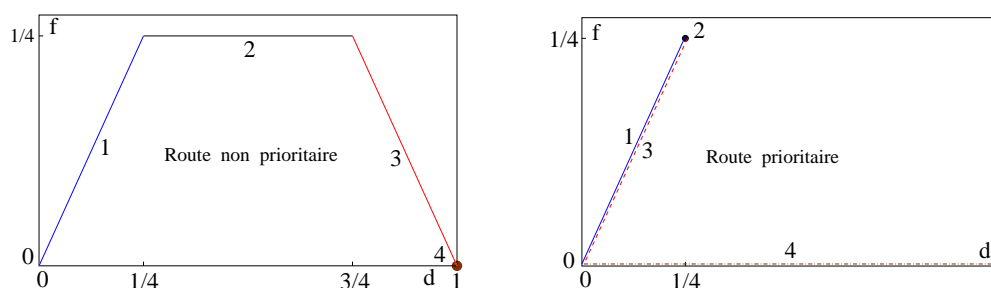


FIG. 4.28 – Le diagramme fondamental sur chaque route. 1 : phase libre, 2 : phase de saturation, 3 : phase de récession, 4 : phase de blocage.

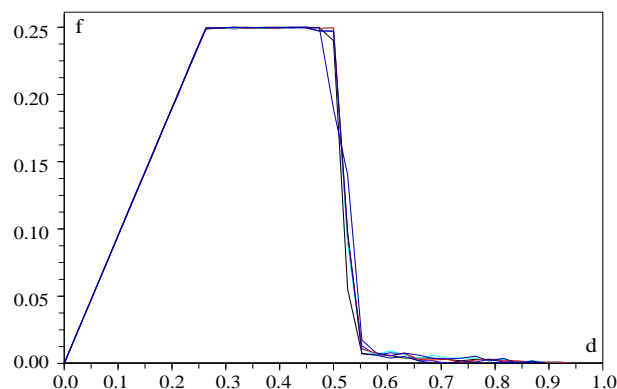


FIG. 4.29 – Le diagramme fondamental du trafic d'une route circulaire avec une intersection gérée par la priorité à droite sans possibilité de tourner, les tailles varient en fixant le rapport entre elles.

Analyse du diagramme fondamental

Les phases du diagramme fondamental peuvent être interprétées même dans le cas $n \leq m$ pour lequel on n'a pas de résultat théorique. Dans le cas $n > m$, le diagramme fondamental a quatre phases. Dans le cas $n \leq m$, il peut y avoir deux ou trois phases : une phase libre, éventuellement une phase de saturation, et une phase de blocage. La phase de récession ne peut pas apparaître dans le cas $n \leq m$, car le blocage anticipe la récession. En effet, on a :

$$n \leq m \quad \Rightarrow \quad n \leq \frac{n}{4} + \frac{3m}{4}.$$

Ceci veut dire que le nombre suffisant de véhicules pour avoir un blocage est inférieur au nombre nécessaire de véhicules pour avoir une récession. L'analyse des quatre phases du cas $n > m$ reste valable pour le cas $n \leq m$.

Le cas $n \leq m$

1. La phase libre. ($0 \leq d < \min\{1/4, 1/(1+r)\}$).

Dans ce cas, comme dans le cas $n > m$, les véhicules arrivent à se séparer suffisem-

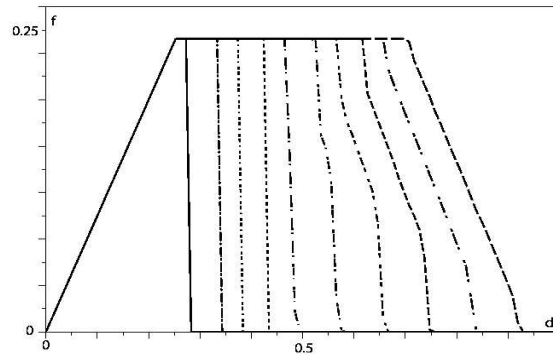


FIG. 4.30 – Le diagramme fondamental du trafic d’une route circulaire avec une intersection géré par la priorité à droite sans possibilité de tourner, le rapport entre les tailles des deux routes varie entre 1 et 10.

ment pour circuler sans gêne. On a alors $f = d$. Si $1/(1+r) < 1/4$ c’est à dire $r > 3$ ou encore $m > 3n$, un blocage apparaît avant d’atteindre la densité $1/4$.

2. La phase de saturation. ($1/4 \leq d < \max\{1/4, 1/(1+r)\}$).
 Cette phase n’apparaît que si $1/(1+r) > 1/4$ c’est à dire $r < 3$ ou encore $m < 3n$, car la phase de blocage débute à $d = 1/(1+r)$ qui correspond à $N = n$. Dans le cas où cette phase apparaît, le flot n’est limité que par la vitesse de l’intersection, on a alors $f = 1/4$.
3. La phase de blocage. ($1/(1+r) \leq d \leq 1$).
 Dès que $d \geq 1/(1+r)$, c’est à dire $N \geq n$, la route non prioritaire peut se remplir, et un blocage du système apparaît sûrement.

Exemple 19. Sur la figure 4.31, on montre, à gauche, l’exemple d’un diagramme fondamental à trois phases, et à droite l’exemple d’un diagramme fondamental à deux phases.

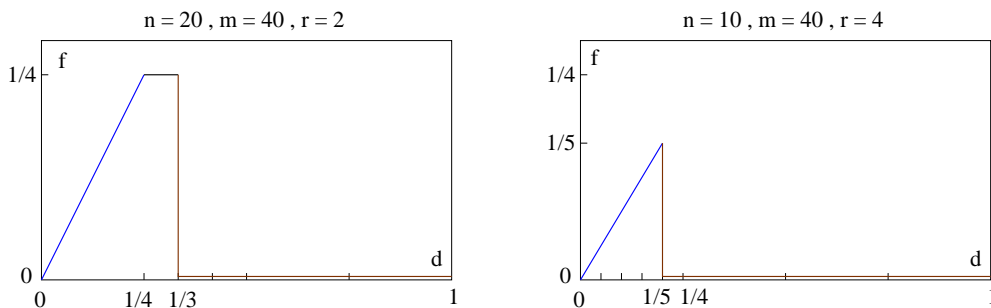


FIG. 4.31 – A gauche : un diagramme fondamental à trois phases, et à droite : un diagramme fondamental à deux phases.

Aménagement de l'intersection

Dans cette partie on améliore le flot maximal du diagramme fondamental en augmentant la vitesse maximale de l'intersection. La phase de saturation correspond à la densité critique, celle qui donne le flot maximal. Sur le diagramme fondamental obtenu dans la sous-section précédente, cette phase, quand elle existe est donnée par un segment horizontal correspondant à un flot de $1/4$.

L'idée pour améliorer cette phase est d'augmenter la capacité maximale de l'intersection. On suppose, dans le modèle qui suit, que l'intersection est assez large pour qu'elle puisse contenir deux véhicules en même temps au lieu d'un seul. La seule modification à faire sur le réseau de Pétri de la figure 4.8 est de remplacer la contrainte :

$$\begin{cases} a_n + a_{n+m} + \bar{a}_n = 1 \\ \bar{a}_{n+m} = \bar{a}_n \end{cases}$$

par la contrainte :

$$\begin{cases} a_n + a_{n+m} + \bar{a}_n = 2 \\ \bar{a}_{n+m} = \bar{a}_n \end{cases}$$

On peut vérifier que dans le cas $n > m$ le diagramme fondamental du trafic est donné par :

$$f = \max \left\{ 0, \min \left\{ d, \frac{1}{1-r} - \frac{1+r}{1-r} d \right\} \right\}. \quad (4.49)$$

Dans ce cas, le flot maximal atteint $1/2$ pour une densité égale à $1/2$. Sur la figure 4.32, on montre ce diagramme en faisant varier le rapport entre les tailles des deux routes.

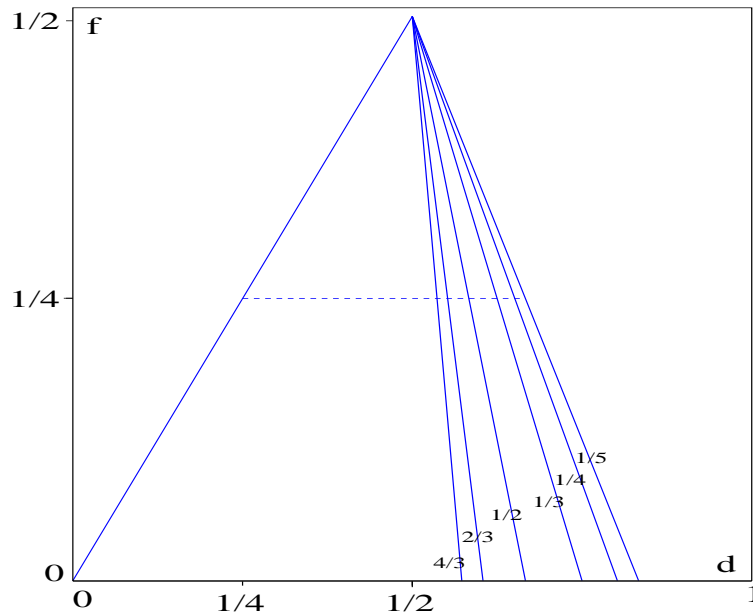


FIG. 4.32 – Le diagramme fondamental du trafic pour une route circulaire avec une *large* intersection gérée par la priorité à droite sans possibilité de tourner.

4.5 Contrôle d'intersection par des feux de signalisation

On a vu que la gestion d'une intersection par la priorité à droite conduit à une phase de blocage. Ce blocage apparaît dès que la densité des véhicules dépasse un certain seuil qui dépend du rapport entre la taille de la route prioritaire et la taille de la route non prioritaire. On présente dans cette section des modèles de feux de signalisation qui élimine cette phase de blocage.

4.5.1 Intersection sans possibilité de tourner

On étudie ici le contrôle d'une intersection de deux routes circulaires sans possibilité de tourner. La densité est constante sur chaque route. Les deux routes jouent des rôles analogues et ont des diagrammes fondamentaux analogues.

Sur le réseau de Pétri de la figure 4.33, les feux de signalisation sont modélisés par le sous-système correspondant aux transitions u_1, u_2, u_3, u_4 , qui est indépendant du reste. La dynamique de ce sous-système est linéaire minplus. Si la condition initiale u_0 est égale à $(0, 0, 0, 0)$, alors les nombres de jetons dans les places a_0 et b_0 sont booléens et périodiques.

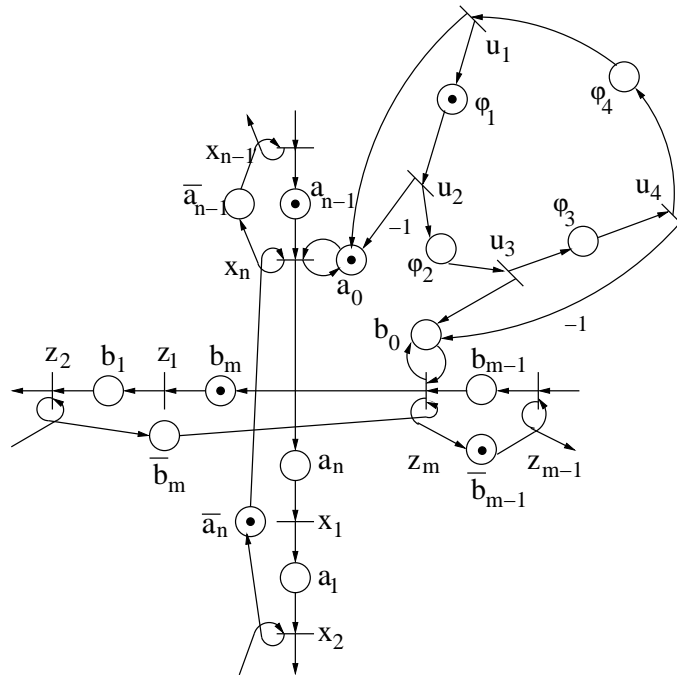


FIG. 4.33 – Contrôle d'une intersection de deux routes circulaires sans possibilité de tourner à l'aide d'un feu de signalisation.

Les quatre phases d'un cycle de temps sont montrées sur la table 4.4. Le brûlage de la transition x_1 (resp. z_1) n'est conditionné que par la présence d'un jeton dans la place a_n (resp. b_m). Ceci veut dire qu'un véhicule se trouvant dans l'intersection (a_n ou b_m) la quitte srement dans une unité de temps. L'accès à l'intersection est garanti par les

Phase	a_0	b_0	couleur du feu vertical	couleur du feu horizontal
1	1	0	vert	rouge
2	0	0	rouge	rouge
3	0	1	rouge	vert
4	0	0	rouge	rouge

TAB. 4.4 – Les phases du feu de signalisation.

contraintes :

$$\begin{cases} a_1 + a_n + \bar{a}_n = 1, \\ b_1 + b_n + \bar{b}_n = 1. \end{cases}$$

Ces contraintes sur le marquage initial garantissent la présence d'un seul véhicule au plus dans les deux places a_1 et a_n et d'un véhicule au plus dans les deux places b_1 et b_n . Ceci permet de garantir que la permission d'entrer à l'intersection, modélisée par la présence d'un jeton dans les places \bar{a}_n et \bar{b}_n , n'est donnée qu'une fois l'intersection libre.

Les phases 2 et 4 ferment l'accès au carrefour, le temps qu'il se libère. Les temps de vert des phases 1 et 3 sont les temps de séjours des jetons dans les places φ_1 et φ_3 . Les phases 2 et 4 ont une durée d'une unité de temps.

Proposition 13. *Le réseau de Pétri de la figure 4.33 a la dynamique triangulaire 1-homogène suivante :*

$$u^{k+1} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varphi_4 \\ \varphi_1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varphi_2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varphi_3 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes u^k, \quad \begin{bmatrix} x^{k+1} \\ z^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(u^k) & \varepsilon \\ \varepsilon & A_2(u^k) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x^k \\ z^k \end{bmatrix},$$

où

$$A_1(u)_{i,j} = \begin{cases} a_0 u_1 / u_2 & \text{si } (i, j) = (n, n), \\ \text{indépendant de } u & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$A_2(u)_{i,j} = \begin{cases} b_0 u_3 / u_4 & \text{si } (i, j) = (m, m), \\ \text{indépendant de } u & \text{sinon.} \end{cases}$$

En appliquant le théorème 20, cette dynamique se comporte asymptotiquement comme une dynamique d'un système linéaire périodique de laquelle on déduit les flots asymptotiques sur les deux routes. Ces flots sont a priori différents et dépendent des tailles des deux routes, de la longueur du cycle, ainsi que des durées de verts attribuées pour chaque route. Par exemple, dans le cas où le cycle est fixé à 4 unités de temps, et où toutes les durées des quatre phases sont égales à une unité de temps, on a le résultat suivant :

Théorème 29. *Si le cycle est fixé à 4 unités de temps, où toutes les durées des quatre phases sont égales à une unité de temps, alors le flot moyen sur la route horizontale (resp. verticale) est donné par $\lambda/4$ où λ est l'unique valeur propre de la matrice irréductible $\bigotimes_{k=0}^3 A_1(u^k)$ [resp. $\bigotimes_{k=0}^3 A_2(u^k)$].*

Démonstration. Découle du fait que le système est périodique de période 4 et que les matrices $A_1(u)$ et $A_2(u)$ sont irréductibles ■

Réseaux sans possibilité de tourner

Avec le même modèle de feux, on peut modéliser des réseaux de trafic sans possibilité de tourner où on a une seule densité de véhicules. Dans ce cas, on obtient un seul diagramme pour tout le réseau. A gauche de la figure 4.34, on montre une seule route circulaire avec une intersection sans possibilité de tourner. A droite, on a une seule route circulaire avec quatre intersections sans possibilité de tourner.

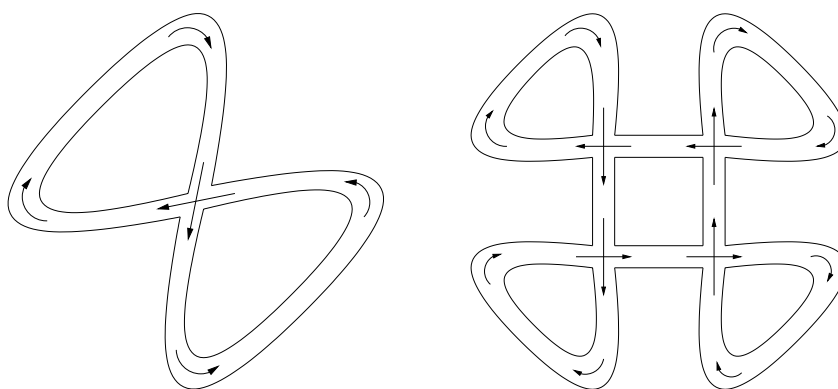


FIG. 4.34 – Réseaux sans possibilité de tourner.

4.5.2 Contrôle d'intersections avec possibilité de tourner

On présente ici un modèle de deux routes circulaires avec une intersection en commun contrôlée par un feu de signalisation figure (4.35). Le feu contrôle les entrées à l'intersection des deux routes en limitant le flot moyen sur chacune des deux entrées.

Comme dans les modèles précédents, chaque route est modélisée par un certain nombre de sections, représentées chacune par deux places a et \bar{a} sur le réseau de Petri. Lorsque $a = 1$, la section est occupée par un véhicule, et on a $\bar{a} = 0$. Lorsque $a = 0$, la section est libre et $\bar{a} = 1$ donne l'autorisation d'entrer dans la section.

Le feu est décrit sur la figure 4.35 par les transitions q_N , q_E et les places liées à ces transitions. On a, dans un premier temps, $a_c = a_g$ et $\bar{a}_c = \bar{a}_g = 1 - a_c$. Si $a_g = 1$, alors $\bar{a}_g = 0$, et le feu est vert pour les véhicules venant du nord, rouge pour les véhicules venant de l'est. On suppose que la phase de la période de feu prend une unité de temps³. à la fin de la première phase q_E brûle et consomme le jeton de a_c et produit un seul jeton dans \bar{a}_c , un jeton dans \bar{a}_g , et moins un jeton dans a_g (elle consomme le jeton). Le feu passe à l'autre phase où $\bar{a}_g = \bar{a}_c = 1$, ce qui correspond à un feu vert pour les véhicules venant de l'est, rouge pour les véhicules venant du nord. Cette phase prend également une unité de temps, puis q_N brûle et le système revient à la première phase.

³En général, les phases prennent des temps égaux aux nombres de temporisations dans les places a_c et \bar{a}_c .

le nombre binaire de jetons dans les places a_g et \bar{a}_g , avec $\bar{a}_g = 1 - a_g$, de l'état du trafic sur les deux routes donné par le nombre de véhicules sur chacune d'elles ou par leurs longueurs des files.

On applique ces deux contrôles et on approxime de la même façon le flot des véhicules en faisant varier leur densité dans le système pour déterminer les diagrammes fondamentaux correspondants. Ces diagrammes sont ensuite comparés au diagramme obtenu dans le cas de gestion de l'intersection par la priorité à droite, pour évaluer l'apport du contrôle.

Contrôle en boucle fermée

On présente ici une façon simple d'appliquer un contrôle en boucle fermée. On considère un système de deux routes avec une intersection contrôlée par une seule variable de contrôle. Il n'y a donc pas d'interaction entre plusieurs contrôles qui peut nécessiter la mise d'une boucle fermée globale (contrôle LQ), et qu'on verra dans le chapitre suivant quand on étendra ce modèle aux réseaux à plusieurs intersections et aux villes régulières.

On a deux feux complémentaires (quand l'un est au vert, l'autre est au rouge) qui contrôlent les sorties des deux routes et donc l'entrée des véhicules à l'intersection. On introduit les notations suivantes :

- $n_1 = \nu - 1$: La taille de la route verticale sans compter l'intersection,
- $n_2 = \mu - 1$: La taille de la route horizontale sans compter l'intersection,
- z_1^k : Le nombre de véhicules sur la route verticale à l'instant k ,
- z_2^k : Le nombre de véhicule sur la route horizontale à l'instant k ,
- $b_1^k = \begin{cases} 1 & \text{Si à l'instant } k, \text{ il y a un véhicule sur la section } q_{\nu-1} \text{ qui est l'entrée par} \\ & \text{le nord à l'intersection;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- $b_2^k = \begin{cases} 1 & \text{Si à l'instant } k, \text{ il y a un véhicule sur la section } q_{\nu-1} \text{ qui est l'entrée par} \\ & \text{le nord à l'intersection;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

La variable de commande u est définie par :

$$u = \begin{cases} 1 & \text{si le feu est vert pour les véhicules de la route verticale (venant du Nord),} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

On applique la boucle fermée suivante :

$$u^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n_2 b_1^k + z_1^k \geq n_1 b_2^k + z_2^k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On montre sur la figure 4.36 les trois diagrammes fondamentaux correspondants aux trois politiques.

Les trois diagrammes montrent que la commande par des feux de signalisation peut dégrader très peu le trafic dans le cas de faible densité mais elle l'améliore beaucoup dans le cas de la haute densité. L'amélioration de la phase à haute densité apportée par le contrôle en boucle fermée est plus importante que celle donnée par la boucle ouverte.

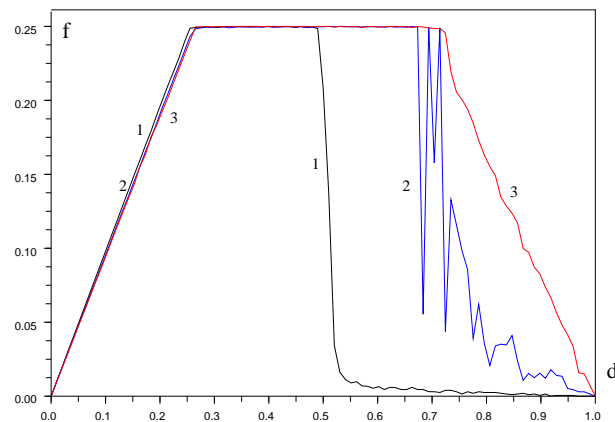


FIG. 4.36 – Comparaison de trois politiques de contrôle d'intersection. 1. priorité à droite, 2. feux en boucle ouverte, 3. feux en boucle fermée.

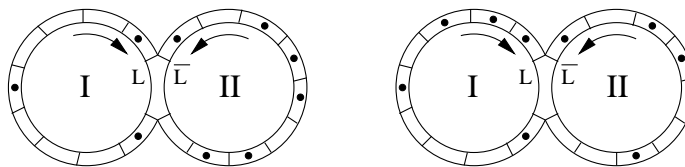


FIG. 4.37 – *A gauche* : un régime périodique asymétrique (contrôle en boucle ouverte). *A droite* : un régime périodique symétrique (contrôle en boucle fermée).

Comparaison des distributions de véhicules en régime stationnaire

On discute ici l'amélioration apportée par la mise en boucle fermée des feux de circulation sur l'état du trafic. Suivant une commande en boucle ouverte des feux de signalisation, les véhicules atteignent un régime périodique qui donne le flot moyen. Ce flot moyen ne dépend pas⁴ de la position initiale des véhicules ; cependant la distribution des véhicules dans le régime périodique peut en dépendre. Ceci est montré sur un petit système de deux routes et une intersection en commun où les routes ont une même taille, et où les routages et les durées de temps vert sur les feux sont équidistribués (un système complètement symétrique).

Ici on compare les régimes périodiques des véhicules atteints à partir d'une même position initiale en utilisant un contrôle en boucle ouverte puis en boucle fermée sur le nombre de véhicules dans chaque route. Dans le cas de la boucle fermée, le contrôleur compare les nombres de véhicules sur chaque route et donne une durée de vert plus importante pour la route encombrée.

Sur la figure 4.37 et dans les tables 4.5 et 4.6 la lettres V et R indiquent la couleur du feu (F) correspondant. Dans le cas d'un contrôle en boucle ouverte, même si le système est complètement symétrique (même taille et même durée de vert pour les deux routes), il existe des distributions initiales de véhicules qui donnent des distributions périodiques

⁴Au moins asymptotiquement sur la taille du système.

k	F	route I		route II
0	V	1 0 0 0 1 0 0 0 1	0	0 1 1 0 1 1 1 0 1
1	V	0 1 0 0 0 1 0 0 0	1	0 1 0 1 1 1 0 1 1
2	R	0 0 1 0 0 0 1 0 0	0	1 0 1 1 1 0 1 1 1
3	R	0 0 0 1 0 0 0 1 0	1	0 1 1 1 0 1 1 1 0
4	V	1 0 0 0 1 0 0 0 1	0	0 1 1 0 1 1 1 0 1
		moyenne=5/2		moyenne=6

TAB. 4.5 – Contrôle en boucle ouverte. Régime périodique asymétrique.

k	F	route I		route II
0	R	1 0 0 0 1 0 0 0 1	0	0 1 1 0 1 1 1 0 1
1	R	0 1 0 0 0 1 0 0 1	1	0 1 0 1 1 1 0 1 0
10	R	0 0 1 0 0 1 1 0 1	0	1 0 0 0 1 0 1 1 1
11	R	0 0 0 1 0 1 0 1 1	1	0 1 0 0 0 1 1 1 0
12	V	1 0 0 0 1 0 1 1 1	0	0 0 1 0 0 1 1 0 1
		moyenne=17/4		moyenne=17/4

TAB. 4.6 – Contrôle en boucle fermée. Régime périodique symétrique.

non symétriques. En utilisant une commande en boucle fermée sur le nombre de véhicules, la symétrie du régime périodique atteint est obtenue. Ce phénomène est observé aussi sur des grands réseaux, voir le Chapitre 5.

Relaxation du problème de valeur propre pour en faire un programme linéaire

Dans le cas où le réseau de trafic routier est connexe, la résolution d'un programme linéaire associé au problème de valeur propre correspondant à la dynamique du réseau donne le meilleur flot moyen *commun* des véhicules. Ce flot respecte toutes les contraintes du trafic routier sans les saturer forcément. La solution de ce programme linéaire nous aide à redéfinir la dynamique du système d'une façon à ce que le régime stationnaire correspondant donne un flot moyen commun maximum. La redéfinition de la dynamique du système peut être réalisée, en terme de trafic, par l'implantation de feux en des endroits bien précis donnés par la solution du programme linéaire. Cette idée est inspirée de [Cor07].

Dans le but d'améliorer le diagramme fondamental du trafic, on réécrit le problème de valeur propre d'une façon à maximiser le flot moyen des véhicules sous les contraintes du trafic. Au problème de valeur propre associé au système (4.34 - 4.38) (sans tenir compte des arrondis aux entiers), on associe le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max \lambda \\ (\lambda, x) \in \mathcal{C}. \end{cases} \quad (4.50)$$

où \mathcal{C} est l'ensemble défini par les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda + x_q - x_{q-1} &\leq a_{q-1} \\ \lambda + x_q - x_{q+1} &\leq \bar{a}_q \\ 2\lambda + x_n - x_1 - x_{n+1} + x_{n+m} &\leq \bar{a}_n \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \lambda + x_n - x_{n-1} &\leq a_{n-1} \\ \lambda + x_{n+m} - x_1 - x_{n+1} + x_n &\leq \bar{a}_{n+m} \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \lambda + x_{n+m} - x_{n+m-1} &\leq a_{n+m-1} \\ \lambda + x_1 - \frac{1}{2}x_n - \frac{1}{2}x_{n+m} &\leq a_n \\ \lambda + x_1 - x_2 &\leq \bar{a}_1 \\ \lambda + x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n - \frac{1}{2}x_{n+m} &\leq a_{n+m} \\ \lambda + x_{n+1} - x_{n+2} &\leq \bar{a}_{n+1} \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$x_n = 0 \quad (4.54)$$

En plus des contraintes déduites du problème de valeur propre, on a rajouté les deux contraintes (4.53) et (4.54). La contrainte $\lambda > 0$ est rajoutée pour tenir compte de la proposition 6 qui dit que lorsqu'on part de $x^0 = 0$ le taux d'accroissement du système, lorsqu'il existe est positif ou nul. Pour tenir compte de l'homogénéité (additive) du système par rapport au vecteur x qui dit que si (λ, \bar{x}) est solution, alors $(\lambda, \gamma + \bar{x})$ l'est aussi pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, on a rajouté la contrainte $x_{n+m} = 0$ qui nous permet de chercher la solution dans un ensemble borné.

Une fois le programme linéaire est résolu, on pourra faire la procédure inverse qui consiste à saturer les sous-ensembles de contraintes d'une façon à ce que le flot moyen maximum obtenu puisse correspondre à une dynamique écrite avec des minimisations (c-à-d en minplus). Par exemple si la solution du programme linéaire ne sature pas les deux contraintes :

$$\begin{cases} \lambda + x_{n+m} - x_1 - x_{n+1} + x_n \leq \bar{a}_{n+m} \\ \lambda + x_{n+m} - x_{n+m-1} \leq a_{n+m-1} \end{cases}$$

alors une façon de les écrire en minplus est la suivante :

$$\lambda x_{n+m} = \bar{a}_{n+m} x_1 x_{n+1} / x_n \oplus a_{n+m-1} x_{n+m-1} \oplus \lambda x_{n+m}, \quad (4.55)$$

ce qui correspond, au régime instantané, à l'équation :

$$x_{n+m}^{k+1} = \bar{a}_{n+m} x_1^k x_{n+1}^k / x_n^k \oplus a_{n+m-1} x_{n+m-1}^k \oplus \lambda x_{n+m}^k. \quad (4.56)$$

Les contraintes qu'on rajoute, après la résolution du programme linéaire, pour saturer les sous-ensembles de contraintes sont du type :

$$x_i^{k+1} \leq \lambda x_i^k. \quad (4.57)$$

En terme de trafic, cela revient à limiter le flot à λ au niveau de la section i , dans le but d'obtenir un flot moyen *commun* maximum. Ceci peut être réalisé en mettant des feux de

signalisation au niveau des sections dont les contraintes associées ne sont pas saturées par la solution du programme linéaire associé. La proportion de la durée de vert des feux par rapport à la durée d'un cycle doit être égale à λ . Ce contrôle est surtout important sur les sections correspondant aux entrées d'intersections x_n et x_{n+m} .

Remarque 8. Le contrôle des feux par la programmation linéaire, présentée ci-dessus reste un contrôle autour de l'équilibre, car le programme linéaire résout un problème en régime stationnaire. Le trafic dans les phases transitoires doit donc être traité d'une autre façon.

Exemple 20. Sur un système simple de deux routes de taille deux chacune, et pour deux paramètres différents, on donne les résultats du programme linéaire correspondant au problème de valeur propre, ainsi que sa résolution avec la méthode de Newton. Le problème dans ce cas s'écrit :

$$\lambda x_2 = \bar{a}_2 x_1 x_3 / x_4 \oplus a_1 x_1, \quad (4.58)$$

$$\lambda x_4 = \bar{a}_4 x_1 x_3 / (x_2 \lambda) \oplus a_3 x_3, \quad (4.59)$$

$$\lambda x_1 = a_2 \sqrt{x_2 x_4} \oplus \bar{a}_1 x_2, \quad (4.60)$$

$$\lambda x_3 = a_4 \sqrt{x_2 x_4} \oplus \bar{a}_3 x_4. \quad (4.61)$$

Le programme linéaire correspondant s'écrit :

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda \\ & \lambda + x_2 - x_1 - x_3 + x_4 \leq \bar{a}_2, \\ & \lambda + x_2 - x_1 \leq a_1, \\ & 2\lambda + x_4 - x_1 - x_3 + x_2 \leq \bar{a}_4, \\ & \lambda + x_4 - x_3 \leq a_3, \\ & \lambda + x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \leq a_2, \\ & \lambda + x_1 - x_2 \leq \bar{a}_1, \\ & \lambda + x_3 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \leq a_4, \\ & \lambda + x_3 - x_4 \leq \bar{a}_3, \\ & \lambda \geq 0, \\ & x_4 = 0. \end{aligned}$$

1. Pour $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 0, 0, 0)$, le programme linéaire donne $\lambda = 1/4$ et $x = (1/4, 1, 1/4, 0)$. Dans ce cas il y a au moins une contrainte saturée en chaque couple, ce qui veut dire que la solution obtenue est aussi une solution du problème de valeur propre. La méthode de Newton appliquée au problème de valeur propre donne $\lambda = 1/4$ et $x = (-1/8, 5/8, -1/8, -3/8) = 3/8 + (1/4, 1, 1/4, 0)$ qui est donc la même solution que celle donnée par la programmation linéaire.
2. Pour $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 0, 1, 0)$, le programme linéaire donne $\lambda = 1/4$ et $x = (-1/4, 0, -1/4, 0)$. Dans ce cas les deux premières contraintes (du premier couple) ne sont pas saturées, ce qui veut dire que la solution obtenue n'est pas une solution du problème de valeur propre. La méthode de Newton appliquée au problème de valeur propre donne $\lambda = 0$ et $x = (1, 2, 0, 0)$ qui est une solution du problème de valeur propre.

4.6 Conclusion

Le but de ce chapitre était de généraliser le diagramme fondamental 1D au cas 2D (présence d'intersections). On a vu qu'en terme de modélisation, l'intersection ne peut être modélisée par un réseau de Pétri déterministe sans permettre des poids négatifs sur les arcs de production du réseau.

Dans le cas d'une intersection gérée par la priorité à droite, sans possibilité de tourner, le diagramme fondamental du trafic, dans le cas où la taille de la route prioritaire est inférieure à celle de la route non prioritaire, est approximé par la résolution d'un problème de valeur propre d'un système linéaire minplus. On a vérifié numériquement que la valeur propre et le taux d'accroissement du système résolu ne sont pas toujours égaux. Cependant ils sont très proches. En effet sur les quatre phases du trafic observées, ces deux quantités sont quasi-égales dans trois phases, et ne sont pas très différentes dans la quatrième. La dépendance du diagramme fondamental avec le rapport entre les tailles des deux routes a été mise en évidence.

Le résultat important est la description des quatre phases de ce diagramme ainsi que la mise en évidence de sa dépendance en le rapport entre la taille de la route prioritaire et celle de la route non prioritaire.

Le cas d'une intersection gérée par la priorité à droite avec possibilité de tourner revient à résoudre une équation de la programmation dynamique d'un problème de contrôle optimal stochastique. La valeur propre de ce problème est égale à celle qu'on a obtenue dans le cas "sans possibilité de tourner". De plus, dans ce cas, on a vérifié numériquement que cette valeur propre est très proche du flot moyen des véhicules. La description complète des quatre phases de ce diagramme a été aussi mise en évidence ainsi que sa dépendance en le rapport entre la taille de la route prioritaire et celle de la route non prioritaire.

Dans le cas d'une intersection contrôlée par un feu de signalisation, le diagramme fondamental existe et est calculé par la résolution d'un système linéaire minplus temps-variant périodique.

On a également comparé trois politiques de gestion d'une intersection : la priorité à droite, le contrôle en boucle ouverte et le contrôle en boucle fermée. Enfin, on a montré une formulation relaxée du problème de valeur propre qui est un programme linéaire et qui a une interprétation intéressante en terme de trafic.

Chapitre 5

Construction de grands réseaux réguliers

5.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étendre le modèle des deux routes circulaires avec une intersection aux grands réseaux. On s'intéresse à la fois à la généralisation des résultats qualitatifs obtenus sur le diagramme fondamental dans le cas d'une seule intersection et à la façon de construire de grands réseaux de trafic à partir de systèmes élémentaires.

On commence par étendre le modèle de deux routes circulaires avec une intersection, au cas de deux routes circulaires avec deux intersections. Ceci permet d'analyser, dans le cas d'un réseau à plusieurs intersections, au moins numériquement, le diagramme fondamental du trafic et d'étendre sa dépendance avec les tailles des routes, l'effet de la *priorité à droite* et les régimes transitoires, notamment dans le cas de la phase à haute densité où un blocage apparaît.

On étudie ensuite l'aspect système pour construire le modèle d'une ville régulière. Moyennant trois petits systèmes élémentaires (qui sont une section de route, une entrée à l'intersection et une sortie de l'intersection) et quelques opérateurs définis sur l'ensembles de ces systèmes, on peut construire le modèle d'une ville régulière de taille quelconque sur un tore. On montre ensuite, numériquement, que le diagramme fondamental du trafic existe sur ce type de réseaux, et on le calcule pour différentes politiques de gestion d'intersections. On présente notamment le modèle de contrôle d'une ville régulière par des feux mis en boucle fermée *globale* sur l'état du trafic. Il s'agit d'un modèle LQ déjà étudié avec des modèles macroscopiques [DPA02].

Dans la dernière section, on donne un aperçu de l'implémentation informatique dans *Scilab* de la composition de systèmes de réseaux de Pétri déterministes. On donne les structures de données informatiques utilisée, les constructeurs d'objets, les opérateurs de composition d'objets avec *Scilab*, ainsi que les fonctions de simulation. On présente enfin la spécialisation au trafic, où on montre les systèmes élémentaires nécessaires à la construction d'une ville régulière, et un exemple complet de construction d'une route.

5.2 Deux routes circulaires avec deux intersections

Le but de cette section est d'obtenir des résultats qualitatifs sur le diagramme fondamental d'un système à deux intersections gérées par la priorité à droite. Après avoir étudié l'effet d'une intersection gérée par la priorité à droite sur le diagramme fondamental, on s'intéresse ici à l'effet de l'interaction entre deux intersections. Pour cela, on considère deux routes circulaires s'intersectant en deux endroits comme le montre la figure (5.1). Ce

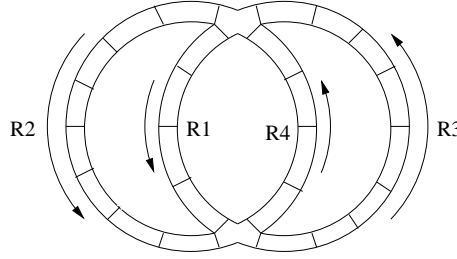


FIG. 5.1 – Système de deux routes circulaires avec deux intersections.

système forme quatre routes. Comme dans les chapitres précédents, on suppose que les véhicules circulent sans dépassement, et qu'ils se déplacent de la même façon que dans la section (4.4.2) du chapitre (4). Les deux intersections sont gérées par la priorité à droite, ce qui donne deux routes non circulaires prioritaires et deux routes non circulaires non prioritaires.

5.2.1 Le modèle de réseau de Pétri et la dynamique minplus associée

Le système est modélisé par le réseau de Pétri de la figure (5.2). Pour faciliter l'écriture de la dynamique de ce système, on suppose de nouveau que les quatre routes sont de même taille ν , et qu'elles sont numérotées comme dans la figure (5.1).

On note par $q_{i,j}$ la $j^{\text{ème}}$ transition ($j \in \{1, \dots, \nu\}$) de la route i , et par $x_{i,j}^k$ le nombre cumulé de brûlages de la transition $q_{i,j}$ jusqu'à l'instant k . En utilisant les opérateurs minplus, la dynamique de ce système est donnée par les équations suivantes :

- En dehors des intersections, on a les équations suivantes :

$$x_{i,j}^{k+1} = a_{i,j-1} x_{i,j-1}^k \oplus \bar{a}_{i,j} x_{i,j+1}^k, \quad (5.1)$$

$$i \in \{1, 2, 3, 4\}; j \in \{2, \dots, \nu - 1\}. \quad (5.2)$$

- A l'entrée et à la sortie de la route 1, on a les équations suivantes :

$$x_{1,1}^{k+1} = a_{3,\nu} \sqrt{x_{3,\nu}^k x_{4,\nu}^k} \oplus \bar{a}_{1,1} x_{1,2}^k, \quad (5.3)$$

$$x_{1,\nu}^{k+1} = \bar{a}_{1,\nu} x_{3,1}^k x_{4,1}^k / x_{2,\nu}^{k+1} \oplus a_{1,\nu-1} x_{1,\nu-1}^k. \quad (5.4)$$

- A l'entrée et à la sortie de la route 2, on a les équations suivantes :

$$x_{2,1}^{k+1} = a_{4,\nu} \sqrt{x_{3,\nu}^k x_{4,\nu}^k} \oplus \bar{a}_{2,1} x_{2,2}^k, \quad (5.5)$$

$$x_{2,\nu}^{k+1} = \bar{a}_{2,\nu} x_{3,1}^k x_{4,1}^k / x_{1,\nu}^k \oplus a_{2,\nu-1} x_{2,\nu-1}^k. \quad (5.6)$$

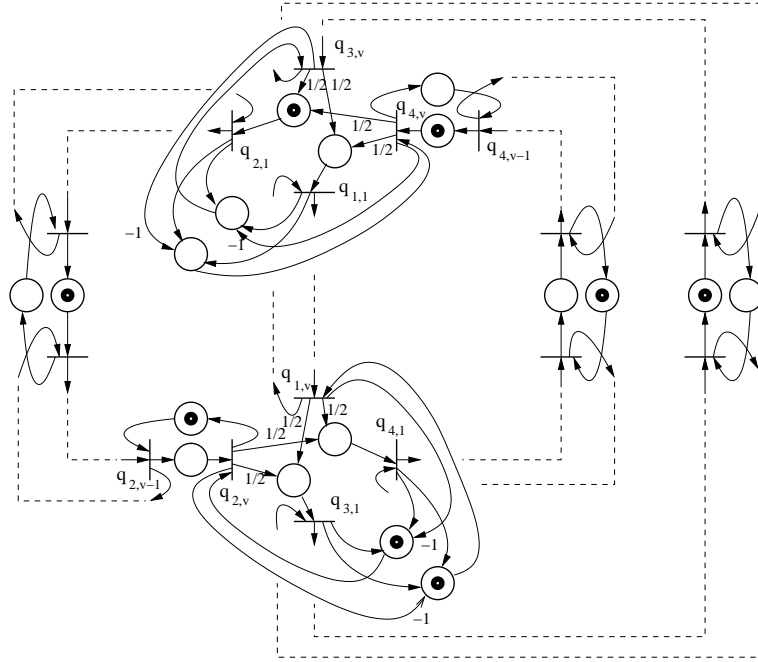


FIG. 5.2 – Le réseau de Pétri correspondant au système de deux routes circulaires avec deux intersections en commun.

- A l'entrée et à la sortie de la route 3, on a les équations suivantes :

$$x_{3,1}^{k+1} = a_{1,\nu} \sqrt{x_{1,\nu}^{k+1} x_{2,\nu}^k} \oplus \bar{a}_{3,1} x_{3,2}^k, \quad (5.7)$$

$$x_{3,\nu}^{k+1} = \bar{a}_{3,\nu} x_{1,1}^k x_{2,1}^k / x_{4,\nu}^k \oplus a_{3,\nu-1} x_{3,\nu-1}^k. \quad (5.8)$$

- A l'entrée et à la sortie de la route 4, on a les équations suivantes :

$$x_{4,1}^{k+1} = a_{2,\nu} \sqrt{x_{1,\nu}^k x_{2,\nu}^k} \oplus \bar{a}_{4,1} x_{4,2}^k, \quad (5.9)$$

$$x_{4,\nu}^{k+1} = \bar{a}_{4,\nu} x_{1,1}^k x_{2,1}^k / x_{3,1}^{k+1} \oplus a_{4,\nu-1} x_{4,\nu-1}^k. \quad (5.10)$$

Le système s'écrit matriciellement :

$$x^{k+1} = D \otimes (H(\delta)x^k),$$

Les matrices D et $H(\delta)$ peuvent être données comme dans le cas d'une seule intersection (sous-section 4.4.1).

5.2.2 Le diagramme fondamental global

Comme dans le cas de deux routes avec une intersection en commun, on montre la relation entre le flot moyen et la densité des véhicules en faisant varier le rapport entre les tailles des routes. On remarque d'abord que si on fait varier les tailles des quatre routes en gardant le même rapport entre la somme des tailles des routes prioritaires et la somme

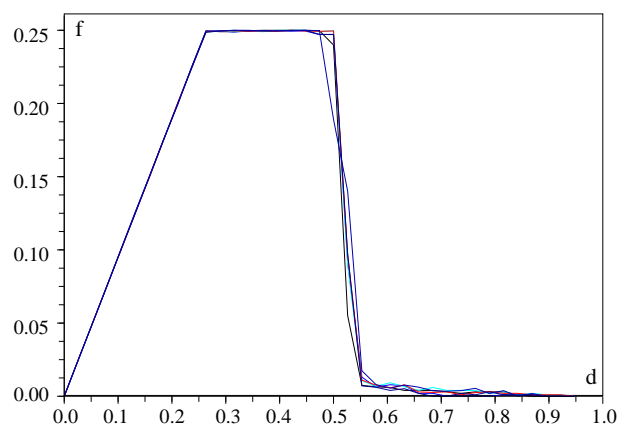


FIG. 5.3 – Le diagramme global en variant les tailles des quatre routes sans varier le rapport entre la somme des tailles des routes prioritaires et la somme des tailles des routes non prioritaires

des tailles des routes non prioritaires, on obtient le même diagramme, comme le montre la figure (5.3).

En faisant varier le rapport, on montre sur la figure (5.4) la dépendance du diagramme fondamental à ce rapport. Comme pour le cas de deux routes, on voit que pour un rapport

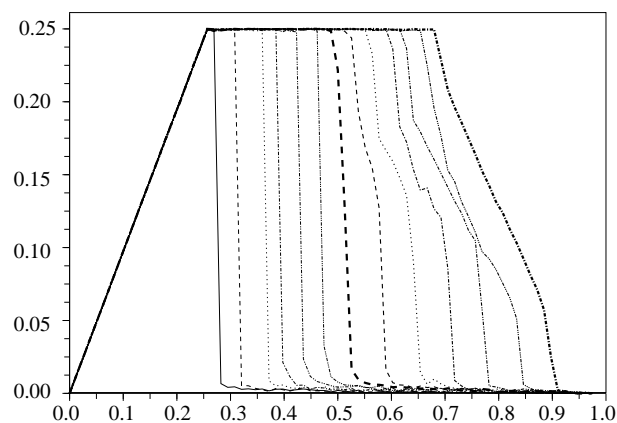


FIG. 5.4 – Dépendance du diagramme global du rapport entre la somme des tailles des routes prioritaires et la somme des tailles des routes non prioritaires.

raisonnable entre ces deux tailles (une taille n'est pas négligeable devant l'autre), le flot maximal est égal à la moitié du flot maximal obtenu sur le diagramme d'une seule route circulaire, ce qui veut dire que *le système de deux routes avec deux intersections se comporte comme un système de deux routes avec une seule intersection où la taille de la route prioritaire est la somme des tailles des deux routes prioritaires, et la taille de la route non prioritaire est la somme des tailles des deux routes non prioritaires.*

Sur la figure (5.5) on montre les diagrammes fondamentaux pour deux systèmes, le premier, en continu, correspond à deux routes de tailles égales à 20 sections chacune avec

un carrefour en commun, et le deuxième, en discontinu, à quatre routes de tailles égales à 10 sections chacune avec deux carrefours.

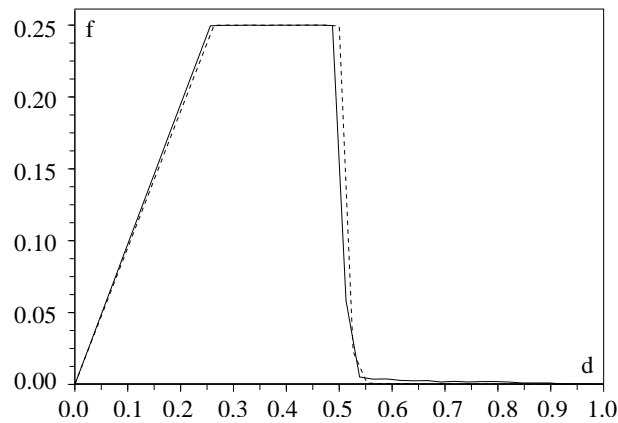


FIG. 5.5 – Le diagramme fondamental d'un système de deux routes avec une intersection, et celui d'un système de deux routes avec deux intersections.

Les quatre phases du diagramme fondamental sont donc, numériquement, similaires à celles d'un système de deux routes avec un carrefour en commun, données dans le chapitre (4). Les figures (5.6), (5.7) et (5.9) montrent les régimes stationnaires observés durant les quatre phases.

1. *La phase libre* : dans ce cas un régime périodique apparaît où les véhicules circulent sans gêne, et où la priorité n'est jamais appliquée (figure (5.6)). Durant cette phase les véhicules arrivent à atteindre un régime périodique où ils sont suffisamment séparés pour qu'aucun véhicule ne gêne un autre ni sur les routes ni aux intersections. Dans ce cas, tous les véhicules avancent, ce qui donne un même flot sur toutes les routes, qui est égal à la densité des véhicules dans le réseau. Cette phase correspond aux densités de 0 à $1/4$.

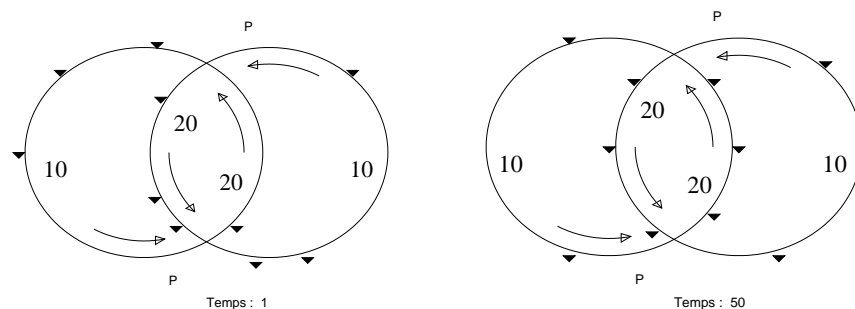


FIG. 5.6 – Les configurations initiale et asymptotique (périodique) pour la phase libre.

2. *La phase de saturation* : là on a un régime périodique où le carrefour est à sa vitesse maximale et où la priorité s'applique, ce qui conduit à l'accumulation des véhicules dans les routes non prioritaires (figure (5.7)). Durant cette phase, le nombre moyen de véhicules circulant sur les routes prioritaires reste le même que dans le cas d'une

densité $d = 1/4$, ce qui veut dire que tous les véhicules ajoutés (par rapport à la densité $d = 1/4$) sont absorbés par les routes non prioritaires. Dans ce cas les intersections servent à plein régime. On a donc un flot moyen égal à $1/4$. Sur le diagramme global (figure (5.4)) et sur les diagrammes des routes non prioritaires (figures (5.10-Route 1), (5.11-Route 4) et (5.12-Routes 1 et 4)), cette phase correspond à un segment horizontal. Sur les diagrammes des routes prioritaires (figures (5.10-Route 2), (5.11-Route 3) et (5.12-Routes 2 et 3)), cette phase correspond à un seul point, car le nombre de véhicules dans les routes prioritaires reste inchangé.

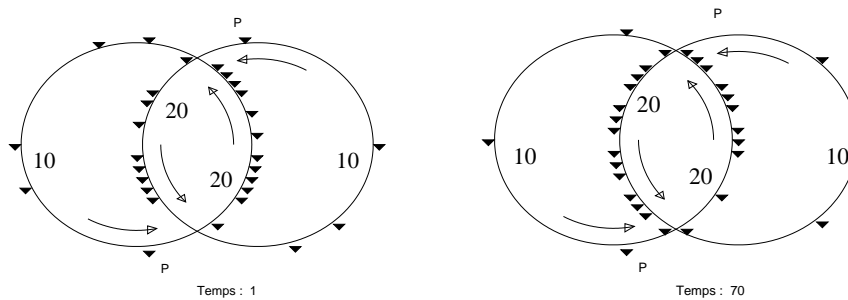


FIG. 5.7 – Les configurations initiale et asymptotique (périodique) pour la phase de saturation.

3. *La phase de récession* : cette phase n'apparaît que lorsque la somme des tailles des routes prioritaires est inférieure à la somme des tailles des routes non prioritaires. Durant cette phase, le nombre de véhicules dans les routes non prioritaires est assez grand pour que le flot soit inférieur à $1/4$, mais reste insuffisant pour les remplir et provoquer un blocage (voir la phase de blocage ci-dessous). On a alors un flot global inférieur à $1/4$. Durant cette phase, un phénomène de pompage de véhicules des routes prioritaires vers les routes non prioritaires est observé. Ceci se voit sur le diagramme fondamental des routes prioritaires des figures (5.10) (5.11) et (5.12) où la densité des véhicules dans ces routes décroît lorsqu'on augmente la densité globale des véhicules. Dans ce cas la densité des véhicules dans les routes non prioritaires dépasse $3/4$, et ceci donne un flot inférieur à $1/4$. Les routes prioritaires étant alimentées avec un tel flot, et leur flot de sortie n'étant majoré que par les vitesses maximales des deux intersections qui est égale à $1/4$, la densité des véhicules dans les routes prioritaires sera égale au flot global qui est le flot dans les routes non prioritaires, et qui est inférieur à $1/4$. Ainsi, lorsqu'on augmente la densité totale des véhicules, la densité des véhicules dans les routes prioritaires diminue, ce qui explique le pompage observé.
4. *La phase de blocage* : dès que le nombre de véhicules dans le réseaux dépasse la somme des tailles des routes non prioritaires, un blocage apparaît. Dans ce cas, les routes non prioritaires se remplissent et à un certain moment, deux véhicules se trouvant dans les deux intersections vont vouloir entrer dans ces routes et bloqueront ainsi les deux intersections, ce qui bloquera tout le système (figure (5.9)).

Sur les deux figures (5.10) et (5.11) on montre le diagramme fondamental pour les quatre routes (de taille égale à 20 sections pour chacune). On remarque que les deux routes prioritaires ont pratiquement le même diagramme, idem pour les routes non prioritaires.

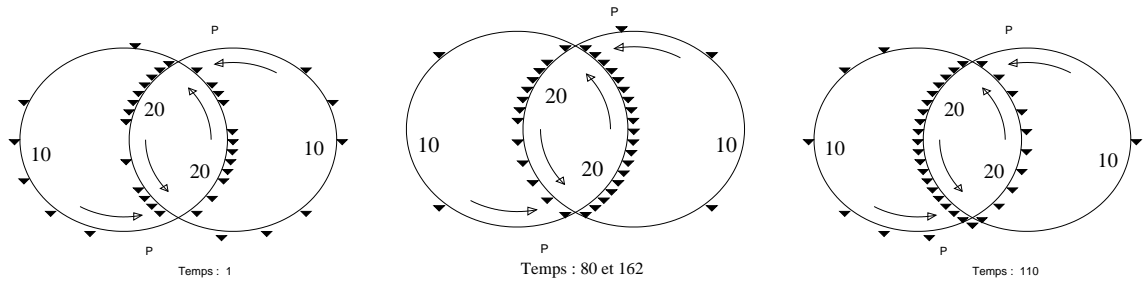


FIG. 5.8 – Les configurations initiale et asymptotique (périodique) pour la phase de récession.

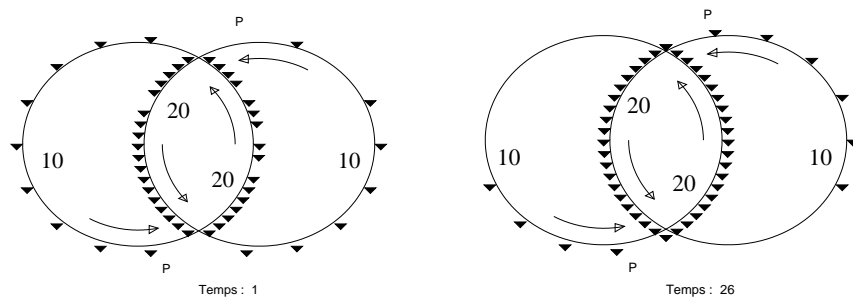


FIG. 5.9 – Les configurations initiale et asymptotique (périodique) pour la phase de blocage.

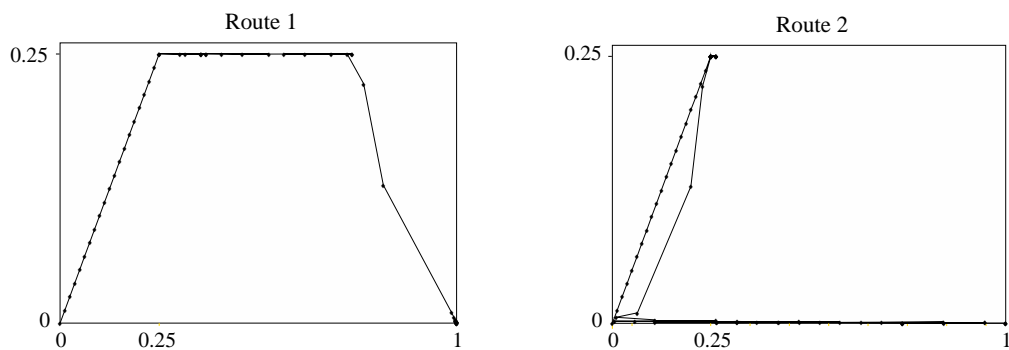


FIG. 5.10 – Les diagrammes fondamentaux des routes 1 et 2.

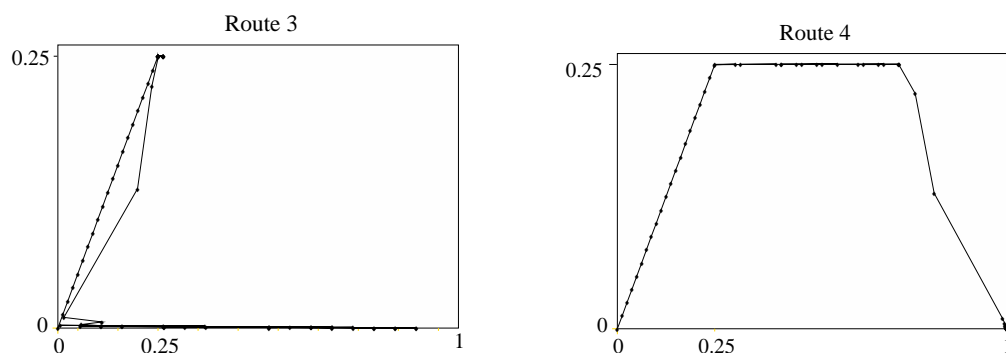


FIG. 5.11 – Les diagrammes fondamentaux des routes 3 et 4.

Sur la figure (5.12) on montre le diagramme fondamental des deux routes prioritaires et celui des deux routes non prioritaires. Ces deux figures confirment l'hypothèse que le système se comporte comme un système de deux routes avec une intersection gérée par la priorité à droite.

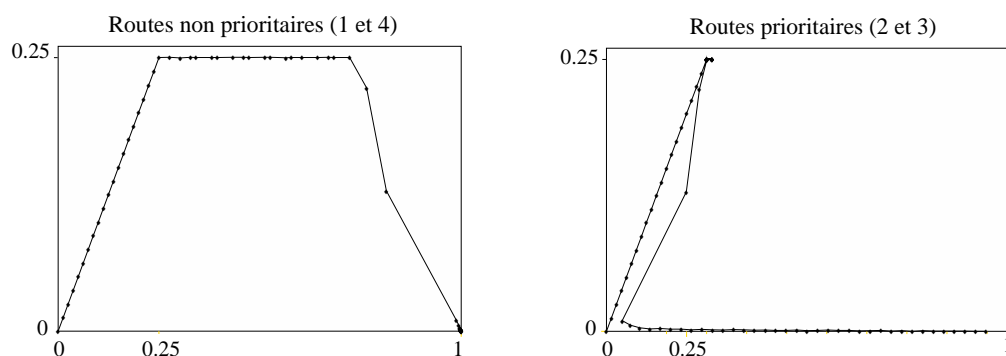


FIG. 5.12 – Le diagramme fondamental des routes prioritaires et celui des routes non prioritaires.

Les routes non prioritaires se comportent comme un système d'une seule route circulaire avec un retardateur (voir la section (4.3.2) du chapitre (4)). Les routes prioritaires ont un diagramme fondamental différent sur lequel on voit que des flots différents peuvent correspondre à une même densité. Ceci est dû à la phase de récession durant laquelle la densité des routes prioritaires redécroit. La phase de saturation des routes prioritaires est réduite à un seul point. Durant cette phase, tous les véhicules ajoutés en incrémentant la densité totale se mettent dans les routes non prioritaires et le flot global reste constant et reste à sa valeur maximale.

Pour éviter le blocage du système pour des densités élevées, l'accès aux intersections peut être géré par des feux de signalisation. Sur un système symétrique (où la taille de chaque route est égale à 10 sections), la comparaison des trois politiques : *priorité à droite*, *feux en boucle ouverte*, et *feux en boucle fermée* confirme les résultats de la section (4.5.2) du chapitre (4), et des diagrammes similaires à ceux donnés sur la figure (4.36) sont obtenus et donnés plus loin.

5.3 Construction de réseaux de Pétri

Dans cette section, on commence par définir des systèmes de réseaux de Pétri déterministes *autonomes*. Sur l'ensemble de ces systèmes, on définit des opérateurs d'assemblage : mise en série, mise en parallèle, mise en feedback et concaténation. Ensuite on se donne trois systèmes élémentaires du trafic routier. Il suffit alors de combiner ces systèmes élémentaires à l'aide des opérateurs définis pour pouvoir construire le réseau d'une ville régulière.

Les trois systèmes élémentaires sont : une section, une entrée d'intersection, et une sortie d'intersection. Comme opérateur, on aura besoin d'une concaténation de plusieurs sections pour former une route, d'une concaténation de deux entrées et de deux sorties d'intersection pour former une intersection, de concaténer des routes avec des intersections pour avoir un réseaux. Pour pouvoir fermer un réseau de trafic (le rendre circulaire), on aura besoin aussi d'un opérateur de mise en boucle fermée. Le réseau de Pétri modélisant une ville régulière sur un tore peut alors être obtenu.

Ces outils informatiques sont développés dans Scilab Gtk. Une fois l'outil de construction existe, on fait des simulations de grands réseaux réguliers dans le but de dériver des diagrammes fondamentaux du trafic, d'observer les régimes transitoires et périodiques des véhicules et d'étudier le contrôle du trafic à l'aide de feux de signalisation en comparant les différentes politiques de gestion d'intersections vues précédemment.

5.3.1 Réseaux de Pétri non autonomes

Dans cette section, nous partitionnons les deux ensembles des transitions et des places en trois parties.

- *L'ensemble d'entrées* : noté par \mathcal{U} pour les places n'ayant pas de transition en amont, et par \mathcal{V} pour les transitions et il contient les transitions n'ayant pas de places en amont.
- *L'ensembles des états* : noté par \mathcal{P} pour les places et il contient les places ayant des transitions en amont et en aval, et par \mathcal{Q} pour les transitions et il contient les transitions ayant des places en amont et en aval ;
- *L'ensemble des sorties* : noté par \mathcal{Y} pour les places et il contient les places n'ayant pas de transition en aval, et par \mathcal{Z} pour les transitions et il contient les transitions n'ayant pas de places en aval.

La dynamique d'un réseau de Pétri non autonome peut alors s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} P^{k+1} \\ Q^{k+1} \\ Y^{k+1} \\ Z^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A & 0 & B \\ C & \varepsilon & D & \varepsilon \\ 0 & E & 0 & 0 \\ F & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \boxtimes \begin{bmatrix} P^{k+1} \\ Q^k \\ U^{k+1} \\ V^k \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} AQ^k + BV^k \\ C \otimes P^{k+1} \oplus D \otimes U^{k+1} \\ EQ^k \\ F \otimes P^{k+1} \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

On note cette dynamique par S . Elle est définie par les matrices (A, B, C, D, E, F) et associe aux signaux d'entrée $(U^k, V^k)_{k \in \mathbb{N}}$ les signaux de sortie $(Y^k, Z^k)_{k \in \mathbb{N}}$. On écrit :

$$(Y, Z) = S(U, V).$$

Exemple 21. Sur la figure (5.13) on a un réseau de Pétri homogène non autonome. Le système caractérisant sa dynamique est donné par les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}.$$

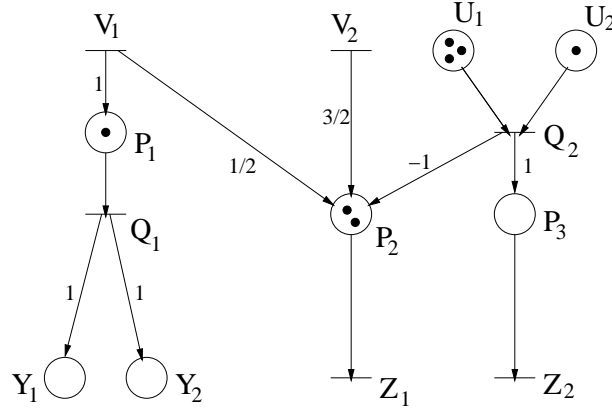


FIG. 5.13 – Exemple d'un réseau de Pétri déterministe homogène non autonome.

Sur ces systèmes, on définit les opérateurs suivants :

- **Mise en parallèle.** étant donné deux systèmes $S_1(A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1)$ et $S_2(A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2)$, on définit le système $S = S_1 \boxplus S_2$ obtenu en mettant en commun les entrées et en additionnant les sorties. Les places sont additionnées dans l'algèbre ordinaire et les transitions dans l'algèbre minplus. Le système S est donné par les matrices A, B, C, D, E et F suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 & \varepsilon \\ \varepsilon & C_2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix},$$

$$E = [E_1 \ E_2], F = [F_1 \ F_2].$$

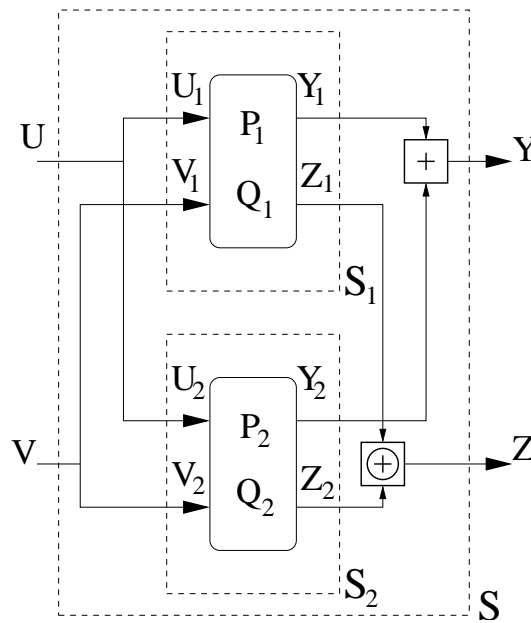
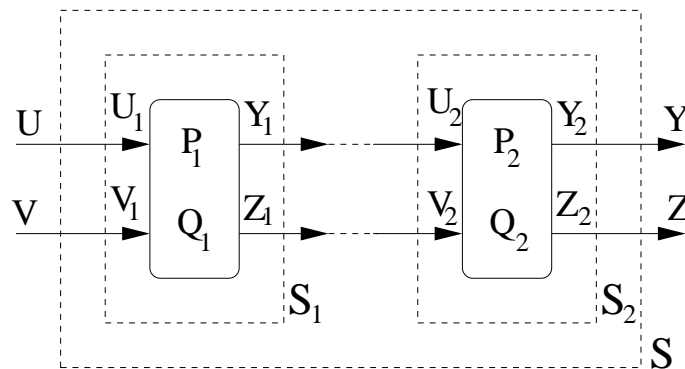
- **Mise en série.** étant donné deux systèmes $S_1(A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1)$ et $S_2(A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2)$, on définit le système $S = S_1 \boxtimes S_2$ obtenu par la composition des deux systèmes S_1 et S_2 comme suit :

$$S(U, V) = S^1(S^2(U, V)).$$

Le système S est donné par les matrices A, B, C, D, E et F suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 & \varepsilon & D_1 \\ \varepsilon & C_2 & \varepsilon \\ \varepsilon & F_2 & \varepsilon \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ D_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$E = [E_1 \ 0 \ 0], F = [F_1 \ \varepsilon \ \varepsilon].$$

FIG. 5.14 – Mise en parallèle des deux systèmes S_1 et S_2 .FIG. 5.15 – Mise en série des deux systèmes S_1 et S_2 .

- **Mise en boucle fermée.** La mise en boucle fermée d'un système $S(A, B, C, D, E, F)$ donne le système S^{\boxplus} solution en (Y, Z) de :

$$(Y, Z) = S((U, V) \boxplus (Y, Z)) = S(U \oplus Y, V + Z).$$

Le système S^{\boxplus} est donné par les matrices $A^{\boxplus}, B^{\boxplus}, C^{\boxplus}, D^{\boxplus}, E^{\boxplus}$ et F^{\boxplus} suivantes :

$$A^{\boxplus} = \begin{bmatrix} A & B \\ E & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{\boxplus} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C^{\boxplus} = \begin{bmatrix} C & D \\ F & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad D^{\boxplus} = \begin{bmatrix} D \\ \varepsilon \end{bmatrix},$$

$$E^{\boxplus} = [E \ 0], \quad F^{\boxplus} = [F \ \varepsilon].$$

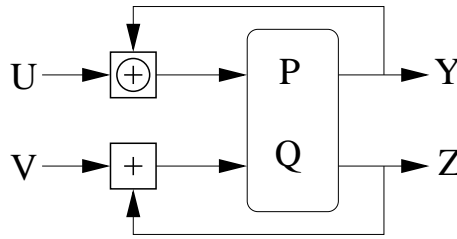


FIG. 5.16 – Mise en boucle fermée d'un système.

- **Contraction.** Contracter deux systèmes S et \bar{S} revient à confondre une partie de l'ensemble d'entrées de chacun avec une partie de l'ensemble de sorties de l'autre. On doit donc partitionner leurs ensembles d'entrées et leurs ensembles de sorties. On note par exemple $S_{(YZ, Y'Z')}^{(UV, U'V')}$ et $\bar{S}_{(Y''Z'', U'V'')}^{(U''V'', Y'Z')}$ où $U'V'$ sont des entrées pour S et des sorties pour \bar{S} , et $Y'Z'$ sont des entrées pour \bar{S} et des sorties pour S . La contraction des deux systèmes S et \bar{S} , notée par $S\bar{S}$ est le système $\hat{S}_{(YZ, Y''Z'')}^{(UV, U''V'')}$ donné comme solution en Y, Y'', Z, Z'' du système :

$$\begin{cases} (YY', ZZ') = S(UU', VV'), \\ (U'Y'', V'Z'') = \bar{S}(Y'U'', Z'V''), \end{cases}$$

Le système \hat{S} est alors donné par les matrices $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{E}$ et \hat{F} suivantes :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & B' \\ 0 & \bar{A} & \bar{B}' & 0 \\ E' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{E}' & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & \bar{B}'' \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} C & \varepsilon & \varepsilon & D' \\ \varepsilon & \bar{C} & \bar{D}' & \varepsilon \\ F' & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \bar{F}' & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} D & \varepsilon \\ \varepsilon & \bar{D}'' \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix},$$

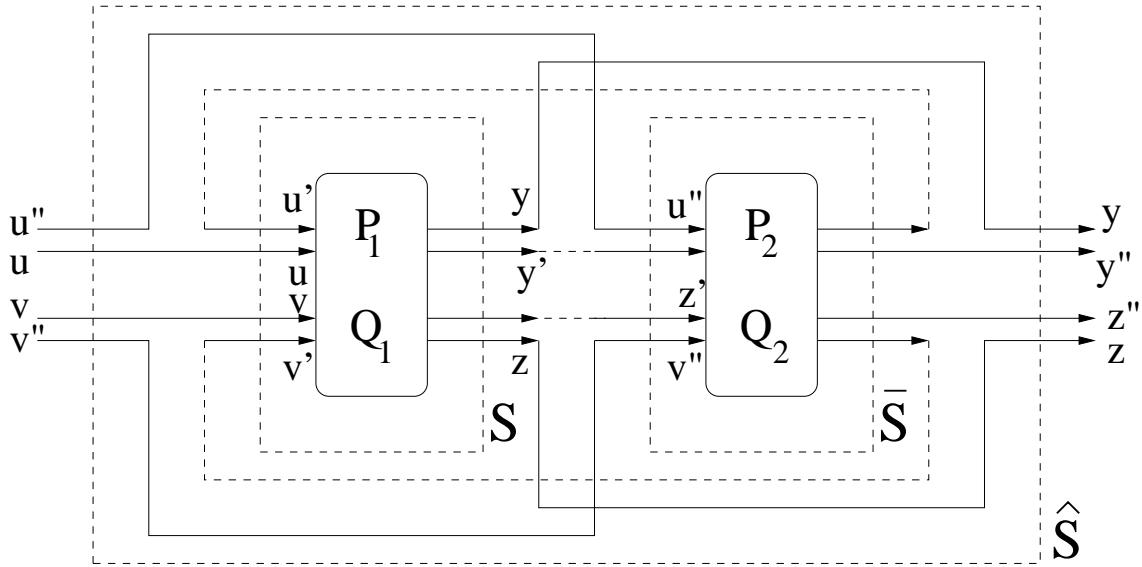
$$\hat{E} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{E}'' & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = \begin{bmatrix} F & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \bar{F}'' & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix},$$

où les matrices-entrées de S et de \bar{S} ont été partitionnées en :

$$[BB'], [\bar{B}'\bar{B}''], [DD'], [\bar{D}'\bar{D}''],$$

et les matrices-sorties ont été partitionnées en :

$$\begin{bmatrix} E \\ E' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{E}' \\ \bar{E}'' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} F \\ F' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{F}' \\ \bar{F}'' \end{bmatrix}.$$

FIG. 5.17 – Contraction des deux systèmes S et \bar{S} .

Des cas simples de réseaux de Pétri non autonomes

Il est clair que les systèmes linéaires standard et les systèmes linéaires minplus sont des cas particuliers des systèmes présentés dessus. Il y a aussi d'autres classes où l'opérateur de composition devient plus simple. Par exemple le système¹ :

$$\begin{cases} Q^{k+1} = C \otimes (AQ^k + BV^k), \\ Z^{k+1} = EQ^k. \end{cases}$$

a un feedback simple :

$$\begin{cases} Q^{k+1} = C \otimes (AQ^k + BEQ^{k-1} + BW^k), \\ Z^{k+1} = EQ^k. \end{cases}$$

La dynamique en boucle ouverte correspond au système défini par :

$$\bar{A} = A + BE, \bar{B} = B, \bar{C} = C, \bar{D} = \emptyset, \bar{E} = E, \bar{F} = \emptyset.$$

5.4 Modélisation du trafic

Dans cette section, on construit le réseau de Pétri décrivant le trafic dans une ville régulière. Pour cela, on utilise trois systèmes élémentaires qu'on combine à l'aide des opérateurs définis dessus, notamment la concaténation et la boucle fermée. Le réseau de Pétri obtenu est ensuite simulé pour avoir les diagrammes fondamentaux du trafic ainsi que les régimes transitoires et stationnaires existants.

¹Le meilleur exemple serait $Z^k = EQ^k$, il peut être traité avec une version implicite du système étudiée ici.

On précise d'abord les hypothèses du trafic sur une ville régulière. Toutes les intersections de la ville sont gérées par la priorité à droite. Les véhicules roulent sans dépassement, et à chaque intersection, comme dans les modèles précédents, lorsqu'un véhicule va tout droit, le véhicule suivant tournera à droite ou à gauche selon l'intersection. Le sens des voies est alterné comme le montre la figure (5.18).

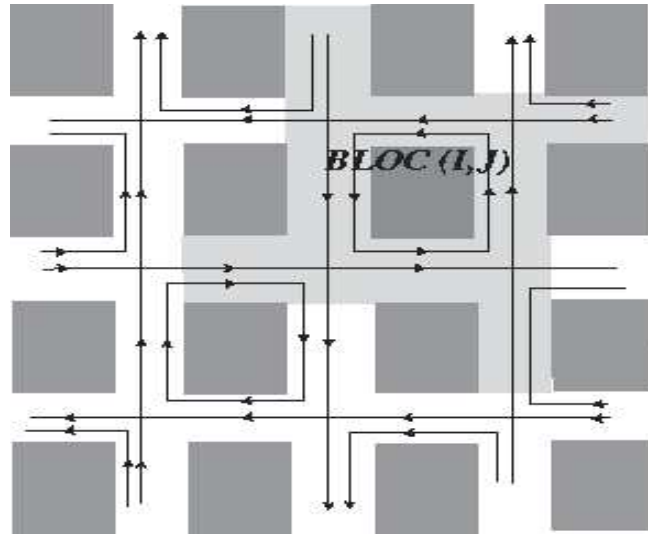


FIG. 5.18 – Une ville régulière.

5.4.1 Modélisation de la ville régulière.

Dans ce qui suit, on donne la construction d'une ville sur un tore, voir la figure (5.21), c'est à dire que les routes est-ouest et nord-sud sont circulaires et sont coupées dans la représentation de la figure (5.18). Pour modéliser la ville régulière, on utilise les trois systèmes élémentaires suivants : (montrés sur la figure 5.19)

- Une section notée par $\mathcal{T}_{Z\bar{Z}}^{V\bar{V}}(a, b)$, où la lettre \mathcal{T} signifie qu'il s'agit d'une section de route, les transitions V et \bar{V} sont les entrées du système, les transitions Z et \bar{Z} sont ses sorties, et les nombres a et b sont ses paramètres.
- Une entrée d'intersection notée par $\mathcal{E}_{Z_s Z_w Z_0}^{V_n V_e V_0}(a, b, c, d)$, où la lettre \mathcal{E} signifie qu'il s'agit d'une entrée d'intersection, les transitions V, V_n, V_e et V_0 sont les entrées du système, les transitions Z, Z_s, Z_w et Z_0 sont ses sorties et les nombres a, b, c et d sont ses paramètres.
- Une sortie d'intersection notée par $\mathcal{X}_{Z_s Z_w Z}^{V_n V_e V}(a, b)$, où la lettre \mathcal{X} signifie qu'il s'agit d'une sortie d'intersection, les transitions V_n, V_e et V sont les entrées du système, les transitions Z_s, Z_w et Z sont ses sorties, et les nombres a et b sont ses paramètres.

Les trois systèmes élémentaires sont composés à l'aide des deux opérateurs de concaténation et de boucle fermée définis dans la section précédente. Par exemple, une intersection est obtenue en concaténant deux entrées d'intersection \mathcal{E} avec deux sorties d'intersection \mathcal{S} . Ci-dessous, on explicite la construction de systèmes (circulaires ou non circulaires) de trafic, en commençant par une route, puis deux routes avec une intersection en commun, un

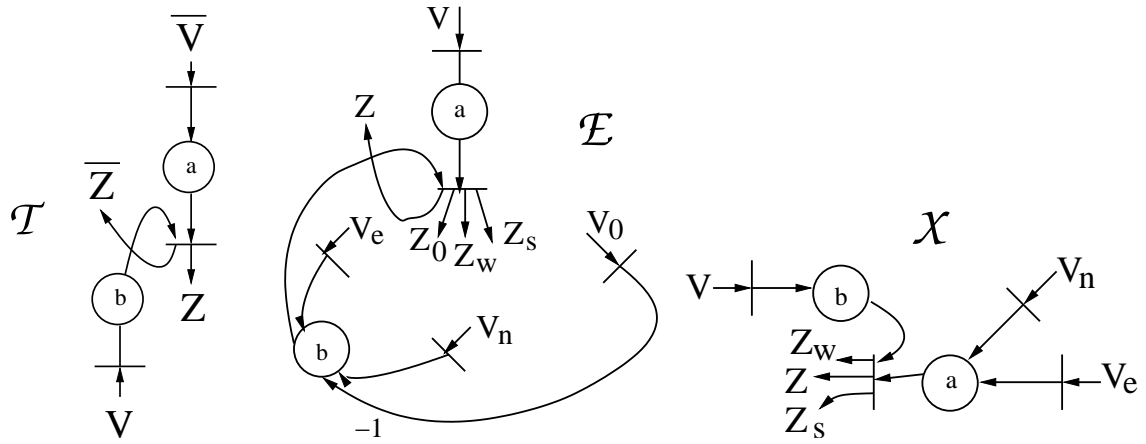


FIG. 5.19 – Les trois systèmes élémentaires.

bloc de quatre intersections, une ligne de blocs, pour arriver à construire une ville régulière et une ville régulière circulaire (sur un tore).

- Une route non circulaire de taille n est obtenue en concaténant, n sections \mathcal{T} de la route. La route est définie par récurrence comme suit :

$${}^1\mathcal{T} = \mathcal{T}, \quad {}^n\mathcal{T}_{ZZ}^{V\bar{V}}(a, c) = {}^{n-1}\mathcal{T}_{2\bar{Z}}^{1\bar{V}}(a, \bar{b})\mathcal{T}_{Z1}^{V2}(b, c). \quad (5.12)$$

- Une route circulaire de taille n est alors obtenue en appliquant l'opérateur de la boucle fermée sur une route non circulaire de même taille. Elle est donnée par :

$${}^n\mathcal{T} = {}^n\mathcal{T}_{21}^{12}(a, \bar{a}) \boxplus. \quad (5.13)$$

- Une route à $n - 1$ sections avec une intersection est donnée par :

$$\mathcal{R}_{ZZZ_wZ_0Z'_w}^{V\bar{V}V_eV_0V'_e}(a, d, e, f) = {}^{n-1}\mathcal{T}_{2\bar{Z}}^{1\bar{V}}(a, \bar{b})\mathcal{E}_{14Z_wZ_0}^{23V_eV_0}(b, \bar{c}, d, e)\mathcal{X}_{3Z'_wZ}^{4V'_eV}(c, f). \quad (5.14)$$

- Un système de deux routes avec une intersection en commun est donné par :

$$\mathcal{C}_{ZZZ'\bar{Z}'}^{\bar{V}V\bar{V}'V'}(a, b, e, f) = \mathcal{R}_{ZZ567}^{\bar{V}V012}(a, b, c, d)\mathcal{R}_{Z'\bar{Z}'012}^{\bar{V}'V'567}(e, \bar{b}, \bar{c}, f). \quad (5.15)$$

- Un système de deux routes circulaires avec une intersection en commun est donné par :

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{1234}^{1234}(a, \bar{a}, b, \bar{b}) \boxplus. \quad (5.16)$$

- Un bloc de quatre intersections comme montré sur la figure 5.20 est donné par :

$$\mathcal{B}_{ZZ}^{\bar{V}V} = \mathcal{C}_{3\bar{Z}^nZ^w4}^{1\bar{V}^nV^w2}\mathcal{C}_{2\bar{Z}^wZ^s6}^{4\bar{V}^wV^s5}\mathcal{C}_{5\bar{Z}^sZ^e8}^{6\bar{V}^sV^e7}\mathcal{C}_{7\bar{Z}^eZ^n1}^{8\bar{V}^eV^n3}, \quad (5.17)$$

où on note par un vecteur sans index, le vecteur donnant toutes les composantes du nord, de l'ouest, du sud et de l'est. Par exemple $Z = (Z^n, Z^w, Z^s, Z^e)$.

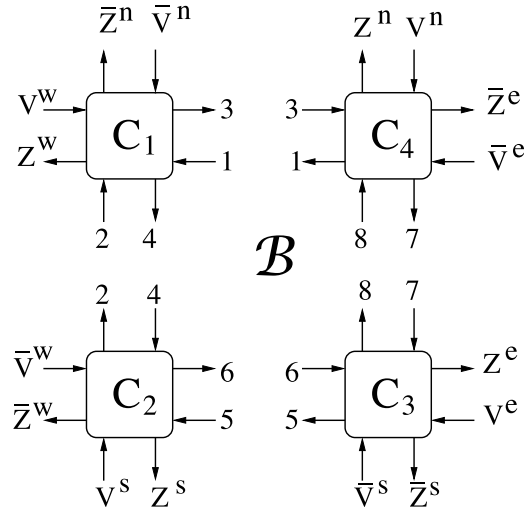


FIG. 5.20 – Un bloc de quatre intersections.

- Une ligne horizontale de m blocs contractés, notée \mathcal{L} est donnée par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} {}^1\mathcal{L}_{ZZ}^{V\bar{V}} = \mathcal{B}_{ZZ}^{V\bar{V}}, \\ m\mathcal{L}_{ZZ}^{V\bar{V}} = m-1\mathcal{L}_{Z^n Z^w Z^s 3 Z^n \bar{Z}^w \bar{Z}^s 4}^{V^n V^w V^s 1 \bar{V}^n \bar{V}^w \bar{V}^s 2} \mathcal{B}_{z^n 2 z^s z^e \bar{z}^n 1 \bar{z}^s \bar{z}^e}. \end{cases} \quad (5.18)$$

où on note par un vecteur sans index, le vecteur donnant toutes les composantes du nord, de l'ouest, du sud et de l'est. Par exemple $Z = (Z^n, z^n, Z^w, z^w, Z^s, z^s, Z^e, z^e)$.

- Une ville régulière, notée \mathcal{W} est obtenue en contractant un certain nombre m de lignes horizontales :

$$\begin{cases} {}^1\mathcal{W}_{ZZ}^{V\bar{V}} = \mathcal{L}_{ZZ}^{V\bar{V}}, \\ m\mathcal{W}_{ZZ}^{V\bar{V}} = m-1\mathcal{W}_{Z^n Z^w 3 Z^e \bar{Z}^n \bar{Z}^w 4 Z^e}^{V^n V^w 1 V^e \bar{V}^n \bar{V}^w 2 \bar{V}^e} \mathcal{L}_{2 z^w z^s z^e 1 \bar{z}^w \bar{z}^s \bar{z}^e}. \end{cases} \quad (5.19)$$

où on note, comme avant, par un vecteur sans index, le vecteur donnant toutes les composantes du nord, de l'ouest, du sud et de l'est.

- Une ville régulière sur un tore, notée \mathcal{V} est obtenue en appliquant une boucle fermée sur une ville régulière qui consiste à connecter les entrées du nord aux sorties du sud ainsi que les entrées de l'est aux sorties de l'ouest. Plus précisément :

$$\mathcal{V} = \mathcal{W}_{21}^{12 \boxplus}. \quad (5.20)$$

5.4.2 Le diagramme fondamental

La dynamique du réseau de Pétri correspondant à une ville régulière avec intersections gérée par la priorité à droite est de la forme :

$$\begin{bmatrix} P^{k+1} \\ Q^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A & B \\ C & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \boxtimes \begin{bmatrix} P^{k+1} \\ Q^{k+1} \\ Q^k \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} A Q^{k+1} + B Q^k \\ C \otimes P^{k+1} \end{bmatrix},$$

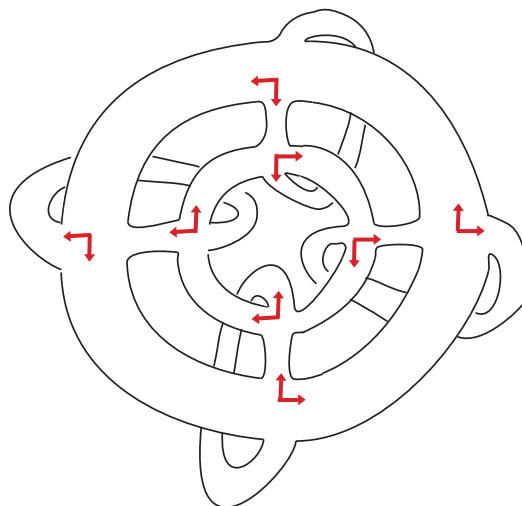


FIG. 5.21 – Une ville régulière sur un tore.

qui est implicite mais triangulaire². Ce système peut s'écrire aussi comme suit :

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A(\delta) \\ C & \varepsilon \end{bmatrix} \boxtimes \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} A(\delta)Q \\ C(\delta) \otimes P \end{bmatrix},$$

où, comme dans le chapitre (4), la matrice $A(\delta)$ est une matrice d'opérateurs du type $a\delta^\tau$ tels que : $a\delta^\tau Q_i^k \triangleq aQ_i^{k-\tau}$.

La simulation de ces systèmes est alors faite en Scilab à l'aide de la boîte à outils Maxplus, et le diagramme fondamental du trafic de la ville régulière sur un tore est obtenu. La figure 5.22 montre le diagramme fondamental obtenu sur une ville de quatre lignes horizontales et quatre lignes verticales de routes de taille dix chacune.

Tous les résultats qualitatifs obtenus dans la section (5.2) sur un système de deux routes circulaires avec deux intersections en commun restent vérifiés sur une ville régulière. Ainsi, sur un système symétrique, le diagramme fondamental du trafic présente trois principales phases, comme sur la figure (5.22).

En effet, lorsque les tailles des routes sont assez grandes, le réseau se comporte comme un système de deux routes circulaires avec une intersection en commun où la taille de la route prioritaire (resp. non prioritaire) est la somme des tailles des routes prioritaires (resp. non prioritaires) du réseau. Ceci veut dire que le diagramme fondamental pour la ville dépend du rapport entre ces deux tailles. Cette dépendance est vérifiée numériquement et des résultats similaires à ceux qui sont montrés sur la figure 5.4 sont obtenus.

5.4.3 Les régimes transitoires et stationnaires

On montre dans cette partie, la simulation du trafic durant les quatre principales phases. Durant la phase libre, comme dans le cas de petits systèmes, les véhicules roulent

²c'est à dire que les variables P_i^{k+1} dont dépendent les variables Q^{k+1} ne dépendent que des variables Q^k .

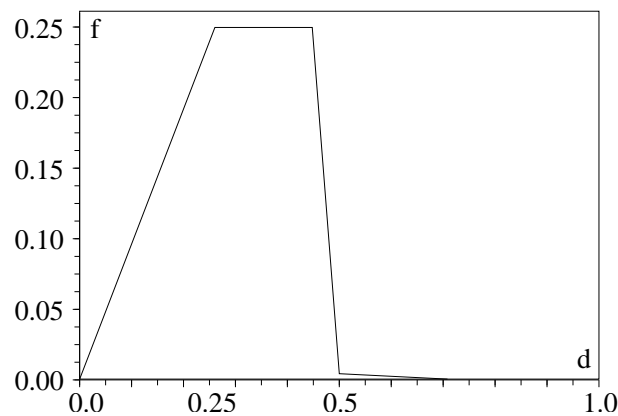


FIG. 5.22 – Diagramme fondamental du trafic d'une ville régulière gérée par la priorité à droite.

sans gêne, et le flot est égal à la densité. Cette phase correspond aux densités d vérifiant $0 \leq d \leq 1/4$. Voir la table 5.1.

Durant la phase de saturation, le flot est à sa valeur maximale qui est $1/4$ donné par la vitesse des intersections. Dans ce cas, la densité des véhicules dans les routes prioritaires est de $1/4$, et le reste des véhicules se met dans les routes non prioritaires.

Durant la phase de récession, lorsqu'elle apparaît, le cumul des véhicules dans les routes non prioritaires donne un flot inférieur à $1/4$ mais reste strictement positif. Dans ce cas, la densité des véhicules dans les routes prioritaires redevient inférieure à $1/4$.

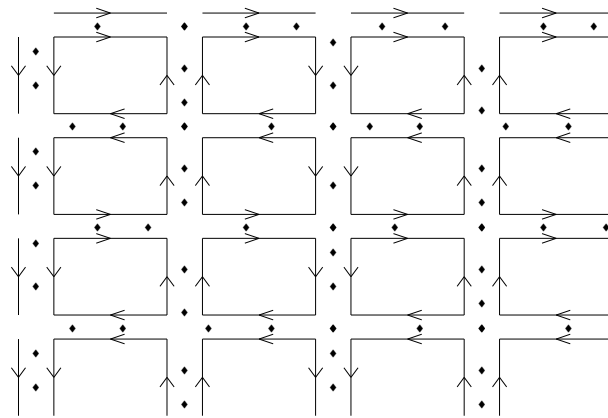
Sur une ville régulière dont les routes sont très grandes, la phase de blocage n'apparaît que lorsque le nombre total de véhicules sur la ville est supérieur ou égal à la somme des tailles des routes non prioritaires. Dans ce cas, le cumul des véhicules sur les routes non prioritaires les remplit et cause un blocage total de la ville. Cependant, si les tailles des routes ne sont pas assez grandes, le blocage peut apparaître bien avant. En effet, si le cumul des véhicules dans les routes non prioritaires forme un circuit plein de véhicules sur ces routes, et si les véhicules se trouvant aux intersections de ce circuit veulent accéder aux routes du circuit, un blocage apparaît.

5.5 Le contrôle du trafic de villes régulières

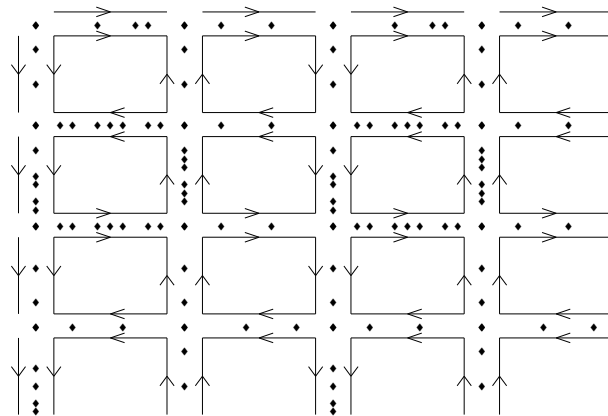
Pour contrôler le trafic dans une ville régulière, on utilise des feux de signalisation. On utilise le modèle d'un feu en réseau de Pétri présenté dans le chapitre 4. On construit la ville régulière contrôlée de la même façon avec laquelle on a construit la ville non contrôlée. Cependant, le système élémentaire *entrée d'intersection* doit être modifié pour tenir compte de la présence d'un feu de signalisation sur chaque entrée d'intersection. Pour cela, on a remplacé ce système par le système élémentaire montré sur la figure 5.23.

5.5.1 Le contrôle en boucle ouverte

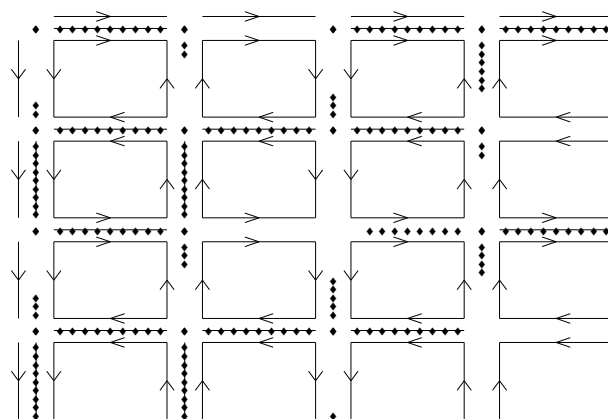
Le contrôle d'intersections par des feux mis en boucle ouverte se fait en appliquant la dynamique du système correspondant à la ville régulière obtenue à base des trois systèmes



- a -



- b -



- c -

TAB. 5.1 – Le régime périodique du trafic dans les cas : (a) de la phase libre ($d = 64/304 \approx 0.21$), (b) de la phase de saturation ($d = 120/304 \approx 0.39$), et (c) de la phase de blocage ($d = 188/304 \approx 0.61$).

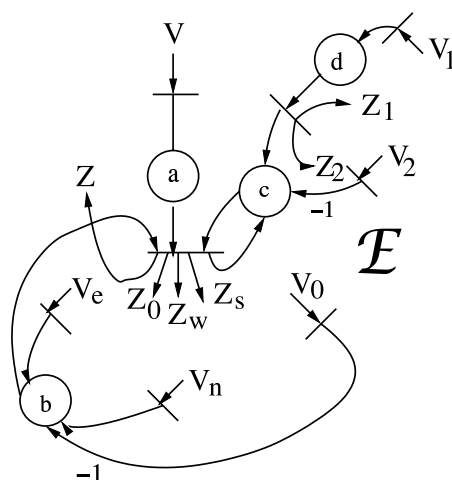


FIG. 5.23 – L'entrée d'une intersection contrôlée.

élémentaires, l'entrée d'intersection étant représentée sur la figure 5.23, et en choisissant les paramètres d de cette figure qui fixent les durées de vert sur chaque entrée d'intersection. Par exemple, si sur une intersection on fixe la durée de vert de l'entrée nord à $d_N = 2$ et la durée du vert de l'entrée est à $d_E = 2$, on aura un cycle de 4 unité de temps, comme sur la figure 4.35.

Le diagramme fondamental obtenu sur un système symétrique est montré sur la figure 5.26 où on compare plusieurs politiques de contrôle d'intersections sur un réseau régulier.

5.5.2 Le contrôle en boucle fermée sur l'état du trafic

On applique d'abord le contrôle en boucle fermée locale. Ceci revient à appliquer en chaque intersection la boucle fermée présentée dans la section 4.5.2 du chapitre 4, qui consiste à faire dépendre les durées du vert en chaque intersection, et à chaque instant, des nombre de véhicules circulant sur les routes entrantes.

Sur la figure 5.24, on revient au phénomène observé dans la section 4.5.2 du chapitre 4 qui montre que sur un système complètement symétrique, les véhicules en régime stationnaire sont mieux distribués (uniformément) en utilisant un contrôle en boucle fermée qu'avec un contrôle en boucle ouverte. Ceci est obtenu sur une ville régulière de grande taille comme le montre la figure 5.24. à gauche de cette figure on montre la distribution stationnaire (périodique) d'un certain nombre de véhicules dans une ville régulière sur un tore dont les intersection sont contrôlées par des feux de signalisation mis en boucle ouverte. On voit que cette distribution n'est pas uniforme. à droite de la figure, on montre la distribution périodique du même nombre de véhicules sur la même ville où les feux sont mis en boucle fermée (locale). Dans ce cas, une distribution uniforme des nombres de véhicules sur les routes est obtenue.

Le diagramme fondamental sur une ville régulière symétrique contrôlée avec une boucle fermée (locale) est montré sur la figure 5.26.

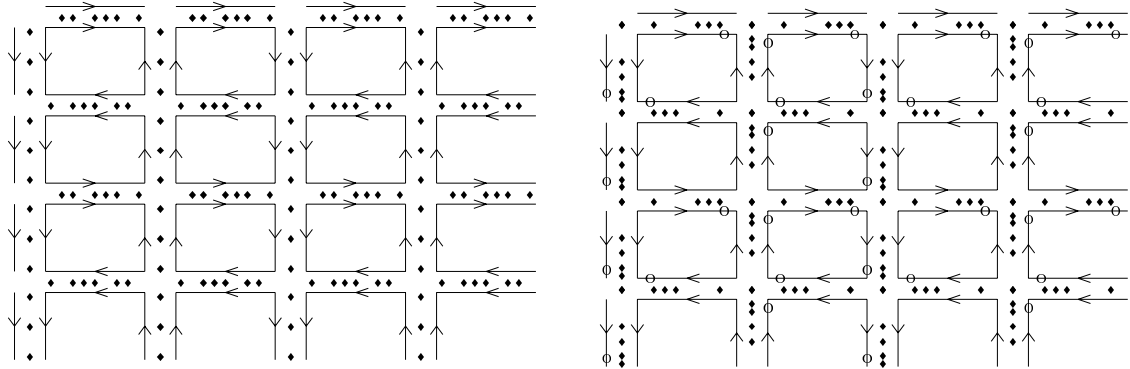


FIG. 5.24 – Régimes périodiques : – à gauche : feux en boucle ouverte, – à droite : feux en boucle fermée.

Le contrôle par résolution d'un problème linéaire quadratique (LQ)

On adapte à notre modèle un contrôle du trafic en boucle fermée basé sur la méthode LQ. Il s'agit de la stratégie TUC (Traffic Urban Control) [DPA02] qui est développée sur un modèle macroscopique. Ce contrôle est global car les commandes en chaque point de la ville sont obtenues simultanément, et chacune d'elles dépend de l'état du trafic sur toute la ville.

Cette méthode suppose une trajectoire et un contrôle nominaux et résout un problème linéaire quadratique qui régule le trafic autour de ces valeurs. La stratégie TUC a été appliquée sur un modèle macroscopique du trafic. Pour expliquer l'adaptation de cette méthode au modèle microscopique présenté ici, on utilise les notations suivantes :

- T : le nombre total de véhicules que la ville peut contenir,
- t_i : la taille de la route i ,
- N : le nombre total de véhicules dans la ville,
- x_i^k : le nombre de véhicules dans la route i à l'instant k ,
- \bar{x}_i : le nombre nominal de véhicules sur la route i , on peut le choisir proportionnel à la taille de la route, c'est à dire : $\bar{x}_i = \frac{N}{T}t_i$,
- u_i^k : le flot sortant de la route i à l'instant k si le feu contrôlant la sortie de cette route est vert, appelé aussi *le débit de saturation*,
- \bar{u} : le flot nominal sur chaque route. On le prend indépendant de la route car $\bar{u}_i = \bar{x}_i/t_i = N/T$.

On résout alors le problème suivant :

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \sum_{k=0}^{+\infty} (x^k - \bar{x})' Q (x^k - \bar{x}) + (u^k - \bar{u})' R (u^k - \bar{u})$$

$$(x^{k+1} - \bar{x}) = (x^k - \bar{x}) + B(u^k - \bar{u}). \quad (5.21)$$

Par exemple, sur une seule intersection (figure 5.25), la dynamique (5.21) s'interprète comme suit :

$$x_1^{k+1} = x_1^k + \alpha u_2^k + (1 - \alpha) u_3^k - u_1^k,$$

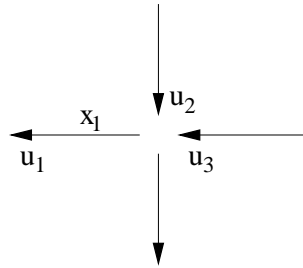


FIG. 5.25 – Dynamique macroscopique sur une intersection.

qui peut s'écrire aussi :

$$(x_1^k - \bar{x}_1) = (x_1^k - \bar{x}_1) + \alpha(u_2^k - \bar{u}) + (1 - \alpha)(u_3^k - \bar{u}) - (u_1^k - \bar{u}).$$

La matrice B obtenue pour un modèle d'une ville régulière est de rang $n - 1$. Ceci est dû au fait qu'on a un degré de liberté sur le nombre de véhicules sur chaque route, car en fixant la densité des véhicules, le nombre total de véhicules est fixe, donc le nombre de véhicules sur l'une des routes de la ville peut être obtenu à partir des nombres de véhicules sur les autres routes. Pour avoir un système commandable, il suffit alors de réduire la dimension du système en exprimant une des variables (la dernière par exemple) en fonction des autres. On aura alors une matrice B de rang plein. Et comme la matrice A est la matrice identité, le système devient commandable.

Le diagramme fondamental du trafic obtenu avec ce contrôle est montré sur la figure 5.26.

Comparaison des diagrammes fondamentaux des différentes politiques

La figure 5.26, montre les diagrammes fondamentaux obtenus par les quatre politiques de gestion d'intersections. Pour les faibles densités des véhicules dans le réseau, le flot donné par les différentes politiques est à peu près le même et est égal à la densité. Cependant, on note que, durant cette phase, le contrôle en boucle ouverte (courbe 2) et le contrôle en boucle fermée globale (courbe 4) ralentit très légèrement le flot des véhicules, par rapport à une gestion par la priorité à droite (courbe 1) ou au contrôle en boucle fermée locale (courbe 3). Dans le cas d'un contrôle en boucle ouverte, ceci s'explique par le fait qu'en chaque intersection, un véhicule peut être arrêté par un feu sur une route, alors qu'il n'y a pas un véhicule voulant entrer à l'intersection de l'autre route. Cette même situation peut se produire dans le cas d'un contrôle en boucle fermée globale à cause qu'on ait imposé des durées minimales (et maximale) de la couleur rouge d'un feu, c'est à dire qu'on ne permet qu'un feu soit vert pendant longtemps. Le contrôle en boucle fermée locale quant à lui, est fait sans notion de cycle.

Pour les hautes densités, le flot donné par la gestion par la priorité à droite dépend du rapport entre la somme des tailles des routes prioritaires et la somme des tailles des routes non prioritaires, comme on l'a vu dans le chapitre 4. Le diagramme donné sur la figure 5.26 correspond à une ville régulière symétrique, c'est à dire où la somme des tailles des routes prioritaires est la même que celle des routes non prioritaires. Dans ce cas le flot donné est très mauvais par rapport à celui qui est donné avec un contrôle par des feux.

Dans ce cas, le contrôle en boucle ouverte est moins bon que les deux autres contrôles. Cependant la comparaison des deux contrôles en boucle fermée n'est pas évidente. Sur la figure 5.26, on voit que, pour les densités qui ne sont pas très élevées, le contrôle en boucle fermée global est meilleur que le contrôle en boucle fermée local, ce qui est logique, alors que pour les très hautes densités on a l'inverse. On a conclu que ceci revient de nouveau au fait que les deux politiques ne sont pas appliquées de la même façon. Pour le contrôle en boucle fermée globale, on a considéré un cycle, ce qu'on n'a pas fait pour le contrôle en boucle fermée locale. Le contrôle en boucle fermée globale ne réagit donc pas à tout instant. La décision est de mettre en chaque intersection, le feu au vert pour une route et rouge pour l'autre pendant un certain temps (inférieur au cycle) et d'inverser les couleurs durant le temps restant du cycle. Une telle décision est prise à un instant donné, et la prochaine décision est prise un cycle après. Ceci est très coûteux durant les très hautes densités. Une comparaison à conditions égales de ces deux politiques doit être effectuée pour conclure.

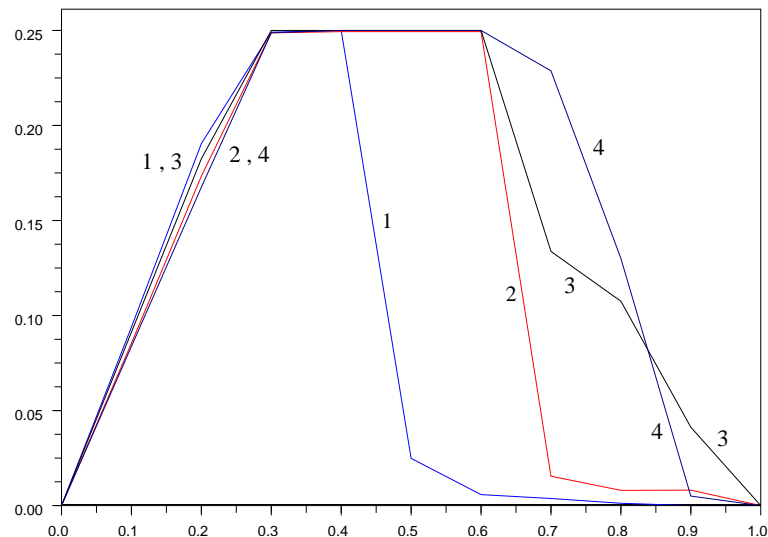


FIG. 5.26 – Comparaison de politiques de gestion des carrefours dans une ville régulière. **1.** Priorité à droite, **2.** Feux en boucle ouverte, durée de vert partagée, **3.** Feedback local sur l'état du trafic, **4.** Feedback global sur l'état du trafic.

5.5.3 Le temps de réponse

Les figures 5.27 et 5.28 montrent les temps de réponse des trois contrôles : – le contrôle en boucle ouverte, – le contrôle en boucle fermée locale, et – le contrôle en boucle fermée globale (LQ). Sur ces figures, on donne pour chaque instant k la (ou une) distance de la distribution des véhicules dans une ville régulière sur un tore par rapport à la distribution uniforme. On considère une ville de quatre lignes de routes horizontales et quatre colonnes de routes verticales. Sur la figure 5.27 (resp. 5.28) on donne la réponse du système dans le cas d'une faible (resp. haute) densité. Le trait continu (resp. discontinu gras, resp. discontinu alterné) correspond à la distance de la distribution des véhicules par rapport à

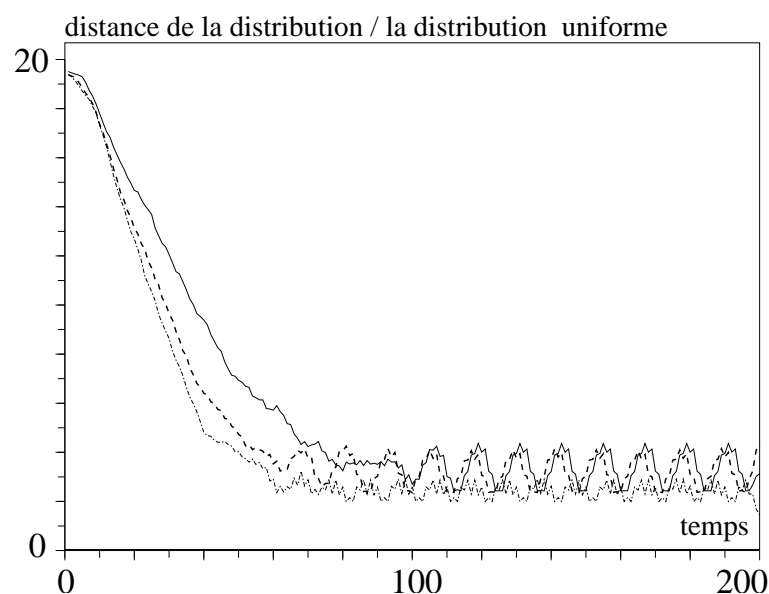


FIG. 5.27 – La distance de la distribution des véhicules dans un réseau de trafic par rapport à leur distribution uniforme, en fonction du temps, dans le cas de faibles densités. Trait continu : contrôle en boucle ouverte, trait discontinu gras : contrôle en boucle fermée locale, trait discontinu alterné : contrôle en boucle fermée globale.

la distribution uniforme, en fonction du temps, dans le cas d'un contrôle en boucle ouverte (resp. boucle fermée locale, resp. boucle fermée globale).

Comme première remarque, indépendamment de la densité des véhicules sur la ville, le contrôle en boucle fermée donne un meilleur temps de réponse par rapport au contrôle en boucle ouverte, c'est à dire que lorsque les feux sont mis en boucle fermée sur l'état du trafic, la distribution des véhicules sur la ville se rapproche plus rapidement de la distribution uniforme que dans le cas où les feux sont mis en boucle ouverte.

Dans les deux cas de densités (faible et haute), le contrôle en boucle fermée globale est meilleur que le contrôle en boucle fermée locale. Dans le cas d'une densité faible, le temps de réponse des trois contrôles sont très proches, alors que dans le cas d'une haute densité, la différence est plus importante.

On voit sur les deux figures 5.27 et 5.28 que les trois contrôles arrivent à stabiliser le trafic sur la ville. Dans le cas de hautes densités, la figure 5.28 montre que la distribution stable donnée par le contrôle en boucle fermée globale est meilleure que les distributions stables données par les deux autres contrôles.

5.6 La boîte à outils Trafic Microscopique

On discute ici de la boîte à outils Scilab spécialisée réseaux de Pétri déterministes. La dynamique (5.11) est généralisée pour inclure des termes implicites triangulaires. Plus

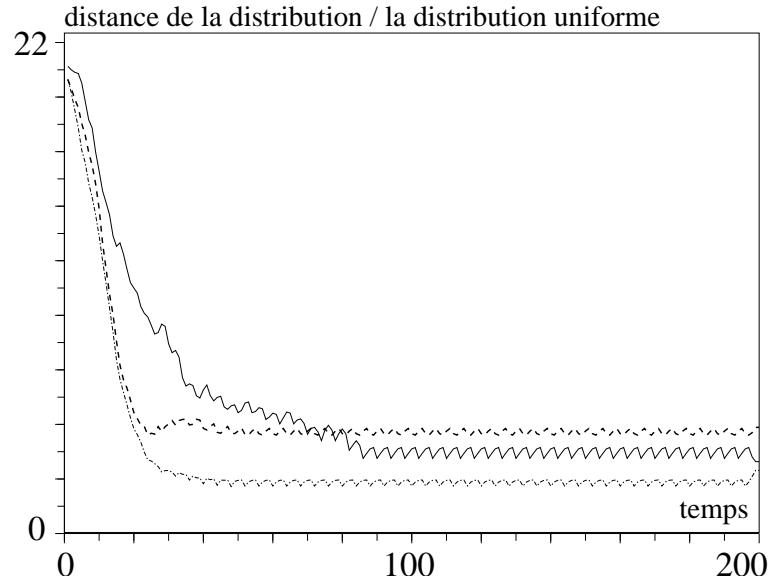


FIG. 5.28 – La distance de la distribution des véhicules dans un réseau de trafic par rapport à leur distribution uniforme, en fonction du temps, dans le cas de moyennes densités. Trait continu : contrôle en boucle ouverte, trait discontinu gras : contrôle en boucle fermée locale, trait discontinu alterné : contrôle en boucle fermée globale.

précisément, on considère les systèmes :

$$\begin{bmatrix} P^{k+1} \\ Q^{k+1} \\ Y^{k+1} \\ Z^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_1 & A_2 & 0 & B \\ C & \varepsilon & \varepsilon & D & \varepsilon \\ 0 & E_1 & E_2 & 0 & 0 \\ F & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \boxtimes \begin{bmatrix} P^{k+1} \\ Q^k \\ Q^{k+1} \\ U^{k+1} \\ V^k \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} A_1 Q^k + A_2 Q^{k+1} + B V^k \\ C \otimes P^{k+1} \oplus D \otimes U^{k+1} \\ E_1 Q^k + E_2 Q^{k+1} \\ F \otimes P^{k+1} \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

où A_1, A_2, B, E_1 et E_2 sont des matrices standards et C, D et F sont des matrices minplus. On donne quelques exemples de construction de réseaux de trafic routier modélisés par des réseaux de Pétri. Un système de type (5.22) est complètement défini par les matrices $A_1, A_2, B, C, D, E_1, E_2$ et F .

L'objet Petri

L'objet Pétri est la structure Scilab comportant toutes les informations nécessaires à la description d'un système dynamique de type (5.22). On a défini des constructeurs de l'objet *Petri* (avec des champs obligatoires et facultatifs), un destructeur, des opérateurs qui permet de combiner des objets Petri et des méthodes s'appliquant à un objet Petri. L'objet est une *tlist* Scilab :

```
petri(A1,A2,B,C,D,E1,E2,F,U,V,Y,Z);
```

Si p est une telle *tlist*, on a accès par exemple à la matrice A_2 par : $p.A2$.

Les constructeurs de l'objet Petri

Un objet de type `petri` peut être construit en utilisant le constructeur `MakePetri()` à un nombre variable d'arguments. Plus précisément, la construction se fait de la façon suivantes :

```
p=MakePetri(A1,A2,B,C,D,E1,E2,F);
p=MakePetri(A1,A2,B,C,D,E1,E2,F,U,V,Y,Z);
```

Ces constructeurs renvoient un objet de type `petri`. Les arguments `U,V,Y` et `Z` sont facultatifs. ce sont des tableaux de numéros d'entrées et de sorties sélectionnées pour appliquer une concaténation ou une boucle fermée. Ces sélections peuvent être faites après la construction de l'objet, à l'aide des opérateurs de sélection donnés plus loin. Il s'agit ici d'une option pour sélectionner des entrées-sorties d'un objet en même temps de le construire. Ces tableaux sont initialisés à des tableaux vides lorsqu'ils ne sont pas donnés.

Les opérateurs de sélection d'entrées-sorties

Les deux opérateurs de sélection d'entrées sorties sont notés par deux points (`:`). Plus précisément, pour sélectionner des entrées d'un système `p`, on met leur numéros dans un vecteur `e`, et on exécute :

```
p=e:p;
```

et pour sélectionner des sorties d'un système `p`, on met leurs numéros dans un vecteurs `s`, et on exécute :

```
p=p:s;
```

On peut également sélectionner des entrées et des sorties en même temps en exécutant :

```
p=e:p:s;
```

On obtient un nouvel objet `petri` avec les nouvelles entrées et sorties.

L'opérateur de mise en parallèle

La mise en parallèle de deux systèmes `p1` et `p2` de type `petri` donne un objet `p` de même type. Cette opération est expliquée en détail dans la section 5.3.1 où elle est notée \boxplus . Elle est exécutée comme suit :

```
p=p1+p2;
```

L'opérateur de mise en série

La mise en série deux de systèmes `p1` et `p2` de type `petri` donne un objet `p` de même type. Cette opération est expliquée en détail dans la section 5.3.1 où elle est notée \boxtimes . Elle est exécutée comme suit :

```
p=p1*p2;
```

L'opérateur de mise en boucle fermée

La mise en boucle fermée d'un système p de type `petri` nécessite une sélection d'entrées et de sorties à connecter. Cette opération est expliquée en détail dans la section 5.3.1 où elle est notée \boxplus . Elle est exécutée comme suit :

```
p=e:p:s;
p=!p;
```

L'opérateur de concaténation

La concaténation de deux systèmes $p1$ et $p2$ de type `petri` nécessite la sélection d'entrées et de sorties des deux systèmes. Les détails de cette opération sont donnés dans la section 5.3.1 où le résultat est noté $p1 \cdot p2$. Elle est exécutée comme suit :

```
p1=e1:p1:s1;
p2=e2:p2:s2;
p=p1.p2;
```

Simulation

Une fois un système de type `petri` est complètement construit, il peut être simulé en utilisant la fonction `simul` comme suit :

```
[P,Q,Y,Z]=simul(S,T,<U,V>);
```

où on note par S le système de type `petri`, par T le temps de simulation, par U et V ses entrées (places et transitions respectivement) qui sont facultatives dans le cas d'un système autonome, par P et Q les états du système, et par Y et Z ses sorties (places et transitions).

5.6.1 Le module de trafic

On montre ici la construction des trois éléments élémentaires T , E et X nécessaires à la construction de réseaux de trafic routier. Ces éléments sont montrés sur la figure 5.19. On rappelle que l'arithmétique MaxPlus est disponible en utilisant Scilab Gtk où elle est incluse, ou bien dans Scilab standard en chargeant la boîte à outils Maxplus. chargée sur Scilab. On rappelle aussi que l'exécution de la fonction $\#(A)$ convertit la matrice standard A en une matrice maxplus. L'élément section T est construit de la façon suivante :

```
B=[0 1;1 0];
F=#([a b;a b]);
T=MakePetri([],B,#([]),#([]),[],F);
```

l'élément entrée d'intersection E est construit de la façon suivante :

```
B=[1 0 0 0;0 1 1 -1];
F=#([a b;a b;a b;a b]);
E=MakePetri([],B,#([]),#([]),[],F);
```

l'élément sortie d'intersection X est construit de la façon suivante :

```

B=[0 1/2 1/2;1 0 0];
F=#([a b;a b;a b]);
X=MakePetri([],B,#([],),#([],),[],F);

```

Construction d'une route à n sections

On montre ici, comme exemple, la construction d'une route à n sections. On donne d'abord la fonction `road` qui construit une route non circulaire à n sections. Cette fonction prend comme paramètre obligatoire le nombre n de sections, et comme paramètre facultatif un vecteur booléen de taille $n + 1$ qui indique la présence ou non d'un véhicule dans chaque section de la route. La fonction `road` est l'interprétation de la récurrence (5.12). La fonction `circularroad` est l'interprétation de la récurrence (5.13). Plus précisément,

Algorithm 1 function $R = \text{road}(n, \langle h \rangle)$

```

1: if  $h$  n'est pas donné then
2:    $h = \text{round}(\text{rand}(n + 1))$ ;
3: end if
4:  $R = T(h(1), 1 - h(2))$ ;
5: if  $n \geq 2$  then
6:    $R = 2 : R : 2$ ;
7:    $r = \text{road}(n - 1, h(2 : \$))$ ;
8:    $r = 1 : r : 1$ ;
9:    $R = R \cdot r$ ;
10: end if

```

ces deux fonctions sont données par les algorithmes 1 et 2.

Algorithm 2 function $S = \text{circularroad}(n, \langle h \rangle)$

```

1: if  $h$  n'est pas donné then
2:    $h = \text{round}(\text{rand}(n))$ ;
3: end if
4:  $S = \text{road}(n, [h, h(1)])$ ;
5:  $S = [1 \ 2] : S : [2 \ 1]$ ;
6:  $S = !S$ ;

```

La construction d'une ville régulière complète est faite suivant le même principe. On a ainsi les fonctions suivantes :

`crossingroad`($n, \langle h \rangle$)

Cette fonction renvoie une route à n sections avec une entrée et une sortie d'intersection. Il s'agit de concaténer une route (non circulaire) obtenue par la fonction `road` avec une entrée d'intersection, puis avec une sortie d'intersection. Ceci traduit la construction (5.14).

`tworoads`($n_1, n_2, \langle h_1, h_2 \rangle$)

Cette fonction concatène deux systèmes obtenus à l'aide de la fonction `crossingroad` pour obtenir un système de deux routes avec une intersection en commun. Ceci traduit la construction (5.15).

`twocircularroads(n1,n2,<h1,h2>)`

Cette fonction ferme le système obtenu à l'aide de la fonction `tworoads` pour avoir un système de deux routes circulaires avec une intersection en commun. Ceci traduit la construction (5.16).

`block(N,<H>)`

Cette fonction construit un bloc d'habitations en concaténant quatre systèmes obtenus à l'aide de la fonction `tworoads`. N est un vecteur de taille huit donnant les taille des huit routes, et H est un vecteur facultatif de taille $\sum_{i=1}^8 N(i)$ qui donne les positions des véhicules sur chacune des routes. Ceci traduit la construction (5.17).

`line(N,<H>)`

Cette fonction concatène horizontalement des blocs d'habitations pour avoir une ligne horizontale d'habitations. N est un vecteur de taille égale à huit fois le nombre de blocs à concaténer, et H est un vecteur facultatif qui donne les positions des véhicules sur chacune des routes. Ceci traduit la construction (5.18).

`town(N,<H>)`

Cette fonction concatène verticalement des lignes d'habitations pour avoir une ville régulière. N est un vecteur de taille égale à huit fois le nombre de blocs à concaténer, et H est un vecteur facultatif qui donne les position des véhicules sur chacune des routes. Ceci traduit la construction (5.19).

`torustown(N,<H>)`

Cette fonction ferme la ville régulière obtenue à l'aide de la fonction `town` pour avoir une ville régulière sur un tore. Ceci traduit la construction (5.20).

Visualisation

Pour visualiser le trafic des véhicules dans une ville régulière sur un torus, on utilise la fonction `visual` :

`J=visual(Q);`

où Q est une matrice dont les lignes correspondent aux trajectoires des transitions du système, renvoyé par la fonction `simul`, et J est une matrice booléenne dont les lignes donnent la position des véhicules.

On note que les détails donnés ici correspondent à la version 2 de la boîte à outils. Cette version n'est pas encore complète, cependant une version complète existe, la version 1, avec une syntaxe un peu différente. Un manuel complet de la boîte à outils sera disponible prochainement sur le web. La boîte à outils fera partie de l'arithmétique Maxplus de Scilab Gtk.

5.7 Conclusion

Le diagramme fondamental du trafic d'un système de deux routes circulaires avec deux intersections gérées par la priorité à droite présente les mêmes phases que celui d'un système de deux routes avec une intersection. Ces phases se généralisent à une ville régulière sur un tore. En général, quatre phases peuvent être distinguées sur un diagramme fondamental d'un réseau de trafic routier dont les intersections sont gérées par la priorité à droite. On note que le diagramme fondamental dépend du rapport entre la somme des tailles des routes prioritaires et la somme des tailles des routes non prioritaires. Ces phases sont déjà commentées dans le chapitre 4. On note aussi, que dans le cas d'un grand réseau régulier, où les tailles des routes ne sont pas très grandes, la phase de blocage peut apparaître pour des densités plus faibles que dans le cas de deux routes circulaires avec une ou deux intersections. En effet, dans le cas d'un grand réseau, s'il y a suffisamment de véhicules pour former un circuit de routes non prioritaires pleines, alors dès qu'un tel circuit se forme, un blocage total du système apparaît.

Pour construire de grands réseaux de trafic routier comme une ville régulière par exemple, on a développé un outil informatique dans Scilab Gtk qui sert à modéliser les systèmes de réseaux de Pétri déterministes en général. Pour implémenter une dynamique d'un grand système, on détermine d'abord les sous-systèmes élémentaires qui le constituent, et à l'aide des opérateurs d'assemblage de systèmes, on construit le réseau. On a construit les villes régulières sur un tore à partir de trois systèmes élémentaires de cette façon.

Le contrôle du trafic de grands réseaux a été étudié numériquement en comparant les diagrammes fondamentaux associés aux différentes façons de contrôler les intersections du réseau. D'abord, le contrôle d'intersections par des feux de signalisation améliore nettement le diagramme fondamental par rapport à la gestion par la priorité à droite. Le contrôle des feux en boucle fermée améliore le diagramme fondamental pour les hautes densités par rapport au contrôle en boucle ouverte. La comparaison du contrôle local et global en boucle fermée n'a pas été très déterminante. En effet, le contrôle global est meilleur, sauf dans le cas de très haute densité où le contrôle global n'a pas le temps de réguler le système avant qu'un blocage n'apparaisse.

Chapitre 6

Commande optimale du trafic bimodal

6.1 Introduction

Le contrôle du trafic routier au moyen des feux de circulation en feedback sur l'état complet ou partiel a la capacité d'améliorer la circulation dans les zones urbaines par comparaison aux traditionnels contrôles en boucle ouverte. La complexité du calcul de feedback optimal pour des systèmes de grandes tailles rend obligatoire l'utilisation de modèle simplifié de circulation. Ici nous suivrons les travaux de M. Papageorgiou [DPA02] utilisant des modèles linéaires dans l'algèbre standard pour représenter l'évolution de stocks de voitures dans les routes d'une ville et des coûts quadratiques à optimiser pour être en mesure de calculer des feedbacks globaux facilement. Nous considérons ici un cas bimodal où grâce au feu, non seulement on régule la circulation des voitures individuelles mais aussi on améliore un système de transport collectif. Ce problème a été étudié aussi dans [BL05] avec un point de vue un peu différent que nous comparerons à notre approche.

Plus précisément, sur un réseau de trafic urbain à deux modes (véhicules particuliers et véhicules de transport en commun), on veut commander les feux de circulation d'une façon $\frac{1}{2}n$ à permettre aux véhicules de transport en commun de respecter des horaires fixes. Pour le faire, on résout un problème de commande optimale à critère quadratique et à dynamique affine, dont l'état est le nombre de véhicules particuliers sur les routes, et les commandes sont les flots de véhicules au carrefours à la fin de chaque rue. Le problème consiste à réguler le système (en minimisant un critère quadratique) autour d'une trajectoire *idéale* à déterminer, la dynamique exprimant l'évolution des stocks de véhicules particuliers dans les rues en fonction des flots de sortie qui sont les variables de commande. La résolution de ce problème détermine les flots de sortie des rues en boucle fermée sur les nombres de véhicules particuliers sur chacune des routes.

La trajectoire idéale est obtenue en résolvant un problème d'affectation de flot des véhicules individuels obtenu en résolvant un équilibre de Wardrop. L'équilibre obtenu donne le nombre de véhicules sur chaque route. La trajectoire idéale s'en déduit en réduisant ce nombre dans les routes fréquentées par les véhicules de transport en commun aux moments de leurs passages.

On étudie la robustesse du feedback obtenu en faisant des simulations avec de grosses

perturbations des nombres de véhicules particuliers et/ou des horaires de passage des véhicules de transport en commun prévus grâce au problème d'affectation. Les tests montrent la robustesse de la commande obtenue. Enfin, on fait une comparaison entre ces résultats et ceux obtenus dans [BL05] qui ne nécessite pas la résolution du problème d'affectation mais qui néglige certaines contraintes de positivité rendant peu réaliste la dynamique des stocks utilisés.

6.2 Modélisation

Un réseau de trafic routier est représenté par un graphe dont les nœuds correspondent aux intersections et les arcs aux routes. Une route peut joindre deux intersections, comme elle peut être une entrée ou une sortie du réseau. Les véhicules de transport en commun suivent des chemins fixes que l'on appelle *ligne de bus*. Sur la figure (6.1), les routes du

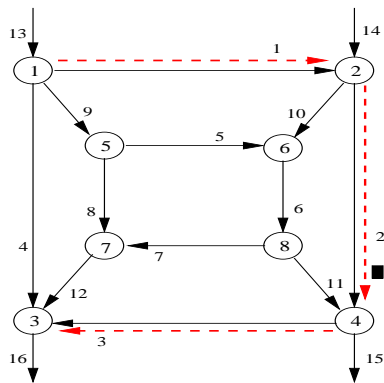


FIG. 6.1 – Exemple d'un petit réseau

réseau sont représentées par des arcs continus, l'unique ligne de bus est représentée par une suite d'arcs discontinus, et l'unique arrêt (sur la route 2) est représenté par un carré plein.

Les véhicules particuliers et les véhicules de transport en commun sont les deux modes de transport possible du réseau. La priorité est donnée aux bus. On se donne un horaire à respecter par les bus. On essaie de faciliter leurs circulations en réduisant les véhicules particuliers sur leur passage en utilisant des feux commandant les flots de sortie des routes.

6.2.1 La dynamique des véhicules particuliers

La dynamique des véhicules particuliers est basée sur la conservation du nombre de véhicules. Plus précisément, le nombre de véhicules particuliers sur une route à l'instant $(k + 1)$ est donné par le nombre de véhicules sur la route à l'instant k plus le nombre de véhicules qui entrent dans la route à l'étape k moins le nombre de véhicules qui quittent la route à l'étape k . On se donne à chaque carrefour pour chaque route entrante dans le carrefour les proportions du flot se dirigeant vers les différentes routes possibles. On a alors la dynamique des nombres de véhicules des routes du réseau donné par :

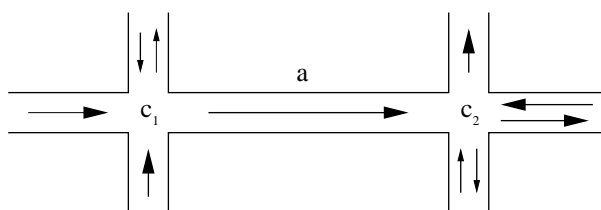


FIG. 6.2 – Dynamique des véhicules particuliers

$$x_a^{k+1} = x_a^k + \sum_{a' \in \mathcal{I}_a} b_{aa'} u_{a'}^k + e_a^k - u_a^k, \forall a \in \mathcal{A},$$

qui peut s'écrire :

$$x^{k+1} = x^k + B u^k + e^k, \quad (6.1)$$

où B désigne la matrice de routage définie par :

$$B_{ij} = \begin{cases} b_{ij} & \text{si la route } i \text{ succède à la route } j, \\ -1 & i = j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où on utilise les notations :

\mathcal{A} : l'ensemble des arcs du graphe,

\mathcal{I}_a : l'ensemble des arcs entrant au carrefour d'entrée de la route a ,

x_a^k : le nombre de véhicules particuliers circulant à l'instant k sur la route a (variables d'état),

u_a^k : le flot des véhicules particuliers, sortant de la route a à l'instant k (variables de commande),

e_a^k : le nombre de véhicules particuliers entrés de l'extérieur dans la route a à l'étape k ,

$b_{aa'}$: la proportion des véhicules particuliers empruntant la route a parmi ceux quittant la route a' .

6.2.2 La dynamique des véhicules de transport en commun

Pour calculer la dynamique des véhicules de transport en commun, on considère un certain nombre d'arrêts sur chaque ligne, et on suppose que les bus reste à l'arrêt pendant τ étapes de temps. Une ligne est représentée par un chemin du graphe et un mot binaire indiquant les arrêts de la ligne ; par exemple l'unique ligne du réseau de la figure (6.1) est représentée par le chemin (1, 2, 3) et le mot 010 qui indique un arrêt sur l'arc 2. Notons :

y_{ha}^k : le nombre de véhicules de transport de la ligne h circulant sur la route a à l'instant k ,

y_a^k : le nombre de véhicules de transport circulant sur la route a à l'instant k ,

$\mathcal{H}(a)$: l'ensemble des lignes de transport qui passent par la route a ,

$\text{pred}(a, h)$: la rue précédant a dans la ligne h ,

τ : le temps pendant lequel un véhicule de transport reste à l'arrêt (dans tous les essais effectué ici, τ est pris égal à une unité).

La dynamique des véhicules de transport en commun sur une ligne h s'écrit alors :

$$y_{ha}^k = y_{h \text{ pred}(a,h)}^{k-\tau}, \quad (6.2)$$

ce qui donne :

$$y_a^k = \sum_{h \in \mathcal{H}(a)} y_{h \text{ pred}(a,h)}^{k-\tau}. \quad (6.3)$$

6.2.3 Le problème linéaire quadratique

Pour déterminer le feedback sur l'état global du système on minimise le critère quadratique calculant une distance à une trajectoire idéale obtenu en résolvant d'un problème d'affectation donné ci-dessous. Le problème d'optimisation à résoudre est :

$$\begin{cases} \min_u \sum_{k=0}^{T-1} \{ (x^k - \bar{x}^k(y))' Q (x^k - \bar{x}^k(y)) + (u^k - \bar{u}^k)' R (u^k - \bar{u}^k) \}, \\ x^{k+1} = x^k + B u^k + e^k, \end{cases} \quad (6.4)$$

où : $-Q$ et R sont des matrices de pondération, que l'on prendra diagonales ($Q = \lambda_1 I_1$ et $R = \lambda_2 I_2$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+^2$ et I_1 et I_2 sont les matrices identité correspondantes), $-$ les états $\bar{x}^k(y)$ et commandes \bar{u}^k idéaux sont obtenus après résolution du problème d'affectation décrit au paragraphe suivant, $-T$ est un horizon correspondant à une période du système (typiquement une journée).

6.2.4 Le problème d'affectation

On considère que l'état idéal du trafic des voitures pendant une période correspondant à une demande stable de transport est donné par un équilibre de Wardrop à savoir à l'équilibre les temps de parcours de tous les chemins utilisés d'un couple origine-destination sont égaux et sont inférieurs aux temps de parcours des chemins non utilisés. On obtient nos trajectoires optimales en perturbant le moins possible ces équilibres par des perturbations améliorant la circulation des bus.

Pour pouvoir calculer cet équilibre il faut se donner pour chaque rue a une fonction $t_a(f_a)$ donnant le temps de parcours de cette rue en fonction du flot et il faut se donner les demandes de transport pour chaque couple origine-destination. On calcule alors cet équilibre en résolvant un problème d'optimisation dont on montre que les conditions d'optimalité coïncident avec les conditions d'équilibre.

Plus précisément, on note :

\mathcal{D} : l'ensemble des paires de la demande du trafic : origine-destination,

\mathcal{R}_{pq} : l'ensemble des chemins menant de l'origine p à la destination q ,

\mathcal{R}^a : l'ensemble de tous les chemins qui passent par l'arc a ,

d_{pq} : la demande de l'origine p vers la destination q ,

f_r : le flot sur un chemin $r \in \mathcal{R}_{pq}$,

f_a : le flot sur l'arc a ,

t_r : le temps de parcours sur un chemin $r \in \mathcal{R}_{pq}$,

t_{pq}^* : le temps du plus court chemin de parcours parmi tous les chemins de \mathcal{R}_{pq} ,

$t_a(f_a)$: le temps de parcours sur l'arc a fonction du flot f_a sur cet arc.

Un vecteur f dont chaque composante f_r représente le flot sur le chemin r est un équilibre de Wardrop (individuel) si :

$$\begin{cases} f_r(t_r - t_{pq}^*) = 0, & t_r - t_{pq}^* \geq 0, & t_{pq}^*, t_r, f_r \geq 0, \\ \sum_{r \in R_{pq}} f_r = d_{pq}, & \forall r \in R_{pq}, \forall p, q \in \mathcal{D}. \end{cases}$$

La formulation variationnelle de cet équilibre est :

$$\min_{f_a} \sum_a \int_0^{f_a} t_a(s) ds, \quad (6.5)$$

sous les contraintes :

$$f_a = \sum_{r \in R^a} f_r, \quad \sum_{r \in R_{pq}} f_r = d_{pq}, \quad f_r \geq 0.$$

Le problème (6.5) étant statique, on considère un certain nombre de tranches horaires formant une partition \mathcal{S} de l'ensemble des temps $\{0, \dots, T-1\}$ et on résout un problème d'affectation sur chaque tranche. La résolution numérique du problème (6.5) est faite à l'aide de la boîte à outils CiudadSim de Scilab.

Une fois résolus ces équilibres de Wardrop indexés par la tranche horaire on définit la trajectoire idéale que l'on va poursuivre par la procédure suivante. Notons :

f^S : la solution optimale du problème (6.5) sur une tranche horaire $S \in \mathcal{S}$,

t_a^S : le temps de parcours sur l'arc $a \in \mathcal{A}$ pour le flot optimal de la tranche horaire S .

La trajectoire idéale $(\bar{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et le contrôle idéal $(\bar{u}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont alors définis comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{u}^k &= f^S, \quad \forall S \in \mathcal{S}, \forall k \in S, \\ \bar{x}_a^k &= f_a^S t_a^S, \quad \forall S \in \mathcal{S}, \forall k \in S, \forall a \in \mathcal{A}, \\ \bar{x}^k(y) &= \frac{\beta}{1 + \sum_h y_h^k} \bar{x}^k, \quad 1 \geq \beta \geq 0. \end{aligned}$$

On veut que les commandes réduisent le trafic des voitures au moment du passage des bus.

6.3 Résultats numériques

La résolution du problème (6.4) se ramène classiquement à l'intégration d'une équation de Riccati à partir de laquelle on détermine un feedback affine :

$$u^k - \bar{u}^k = K_k(x^k - \bar{x}^k) + L_k.$$

6.3.1 L'exemple

On considère le réseau figure (6.1) qui possède 16 routes dont 2 entrées et 2 sorties, et une seule ligne de transport en commun. On a considéré 4 demandes de trafic : $\{1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4\}$ où $1 \rightarrow 3$ réfère à la demande du nœud 1 vers le nœud 3. La demande est donnée par la fréquence des entrées de véhicules particuliers sur les routes 13 et 14 de la figure (6.3), comme on peut le voir sur le tableau (6.1). La ligne de bus est

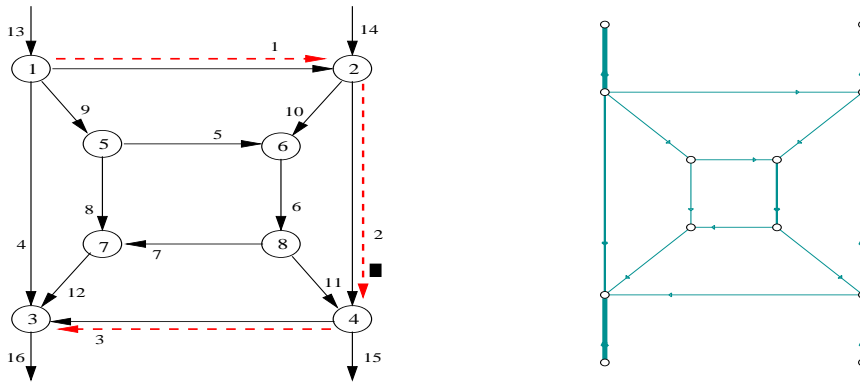


FIG. 6.3 – Exemple et affectation du flot associé.

le chemin (1, 2, 3) avec un arrêt sur la route (2). Pour vérifier que le trafic que les routes se vident de voitures aux moments de passage des bus on a considéré un trafic variable comportant trois tranches horaires (par exemple matin, midi, et soir) partitionnant un ensemble de 100 unités de temps selon le tableau le tableau (6.1).

Tranche horaire	S_1	S_2	S_3
Temps	0 à 20	21 à 70	71 à 100
Fréquences des véhicules part.	100 partout	100 partout	100 partout
Fréquences des entrées de véhicules de transport	1	1/3	1/2

TAB. 6.1 – Entrées des véhicules.

A droite de la figure (6.3), on a donné le résultat de l'affectation du flot des véhicules particuliers sur le réseau. L'épaisseur d'un arc sur le graphe de cette figure est proportionnelle au flot passant par l'arc. Rappelons que cette affectation ne tient pas compte des véhicules de transport en commun, comme on peut le constater sur cette figure.

On a résolu le problème quadratique (6.4) avec $\lambda_1 = 1$, et $\lambda_2 = 0.2$, et on a appliqué le gain obtenu sans aucune perturbation de l'état. Les résultats sont montrés sur les deux figures (6.4) et (6.5). Sur ces deux figures, on a représenté en haut, le nombre de véhicules particuliers x , et en bas le nombre de véhicules de transport en commun y multiplié par 10 (pour de raisons de clarté des figures).

Sur les trois graphiques de la figure (6.4), lesquels correspondent aux routes fréquentées par des véhicules de transport en commun, on voit que le nombre de véhicules particuliers obtenu x est complémentaire au nombre de véhicules de transport y , c'est à dire que ces routes se vident pour laisser passer les véhicules de transport en commun aux moments de leurs passages. Sur la figure (6.5), et sur le graphique qui correspond à l'arc 4, le nombre x_4 de véhicules particuliers suit parfaitement le nombre idéal \bar{x}_4 , contrairement à x_{10} qui n'arrive pas à suivre \bar{x}_{10} parce qu'il est influencé par x_1 et x_2 comme le montre le graphique

correspondant à l'arc 10 (voir aussi l'arc 4 et l'arc 10 sur la figure (6.3)).

6.3.2 La robustesse du feedback

Pour mesurer la robustesse de la régulation, on applique le gain obtenu en introduisant des perturbations instantanées sur le nombre de véhicules particuliers. Sur les figures (6.6) et (6.7), on a donné la simulation obtenue avec une perturbation de l'ordre de 50% de l'état des véhicules particuliers. Le système perturbé auquel on applique le feedback suit alors la dynamique suivante :

$$x^{k+1} = (1 + w^k)x^k + Bu^k + e^k$$

où w^k sont des bruits gaussiens $N(0, 1/2)$. On voit (figures 6.6) et 6.7) que le modèle résiste bien, et sur les arcs représentant la ligne de transport, et sur les autres arcs.

Sur les figures (6.8) et (6.9), on donne les résultats d'une simulation avec une perturbation de l'ordre de 50% du nombre de véhicules de transport en commun. Cette perturbation est introduite en remplaçant $\frac{1}{2}nt$, lors de la simulation, y_h^k par $(1 + w^k)y_h^k$.

6.3.3 Comparaison avec [BL05]

L'objectif de cette étude étant le même que celui de [BL05], on présente ici une comparaison des résultats des deux études. En utilisant les mêmes notations que dans les sections précédentes, le problème résolu dans [BL05] est le suivant :

$$\begin{cases} \min_u \sum_{k=0}^{\infty} \alpha x^k y^k + \beta (x^k)^2 + (u^k)^2, & \alpha > 0, \beta > 0, \\ x^{k+1} = x^k + Bu^k \end{cases} \quad (6.6)$$

où y_k suit la dynamique donnée par (6.2) et (6.3).

Le critère (6.6) peut s'écrire aussi :

$$\min_u \sum_{k=0}^{\infty} \beta (x^k + \frac{\alpha}{2\beta} y^k)^2 + (u^k)^2 .$$

puisque les y^k ne dépendent pas des commandes.

Le critère dans (6.6) tire la variable x^k vers $-\frac{\alpha}{2\beta} y^k$ et correspond à $\bar{x}^k(y) = -\frac{\alpha}{2\beta} y^k$ dans le problème (6.4). L'application du feedback correspondant peut conduire à des $x^k \leq 0$. On considère donc la dynamique projetée interdisant aux flots de sorties d'être non nuls lorsque les stocks sont vides. Plus précisément, la boucle fermée étant donnée par :

$$u^k = K(x^k + \frac{\alpha}{2\beta} y^k),$$

si on note : $-B^+ = \max\{B, 0\}$, $-B^- = \min\{B, 0\}$, $-u_{\max}$ la valeur maximale de u , $-u_{\min}$ la valeur minimale de u , alors pour éviter d'avoir des stocks négatifs de véhicules ($x_a^k < 0$), on projette la commande de la façon suivante :

$$\begin{aligned} v^k &= \min\{u_{\max}, \max\{u_{\min}, u^k\}\}, \\ w^k &= \min\{u_{\max}, \max\{u_{\min}, u^k\}, (B^-)^{-1}[x^k + B^+ v^k]\}, \end{aligned}$$

et on obtient la dynamique :

$$x^{k+1} = x^k + B^+ v^k + B^- w^k .$$

On voit que la commande a été calculée à partir d'une dynamique assez éloignée de la réalité.

Sur les figures (6.10) et (6.11)), on donne les résultats d'une simulation sans perturbation du nombre de véhicules. On peut constater que les résultats des deux études sont semblables. Notons que l'étude présentée dans [BL05] exige moins de données sur l'état du trafic. En particulier, on n'a pas besoin de connaître la demande du trafic avec toutes les imprécisions que ce genre de données peut comporter.

Remarque 9. A partir d'une commande obtenue par l'une ces deux méthodes, un plan de feux peut être déduit. Une façon de procéder est de définir un cycle (une période de temps de commande des feux de signalisation) à chaque intersection, et de partager les durées de vert selon les flots de sortie donnés par la commande. Si le débit de l'intersection est insuffisant pour réaliser les débits souhaité il faudra modifier les coefficients de pondération du critère pour obtenir des flots réalisables ou ajouter des contraintes au problème d'optimisation.

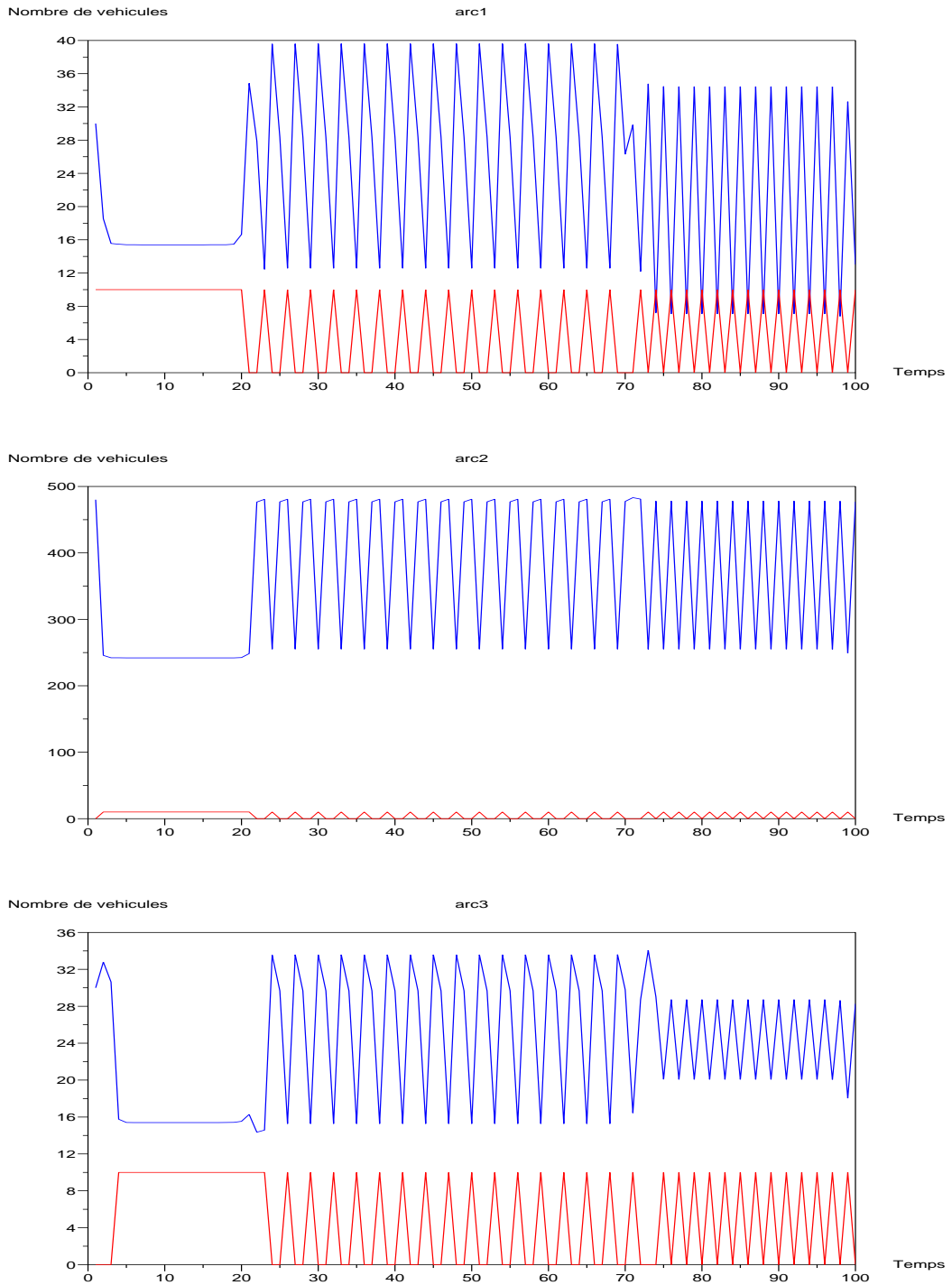


FIG. 6.4 – Nombre de véhicules respectivement sur les arcs 1,2 et 3 - Résolution sans perturbation de l'état (Résolution en boucle ouverte du problème (6.4)).

tel-00349753, version 1 - 4 Jan 2009

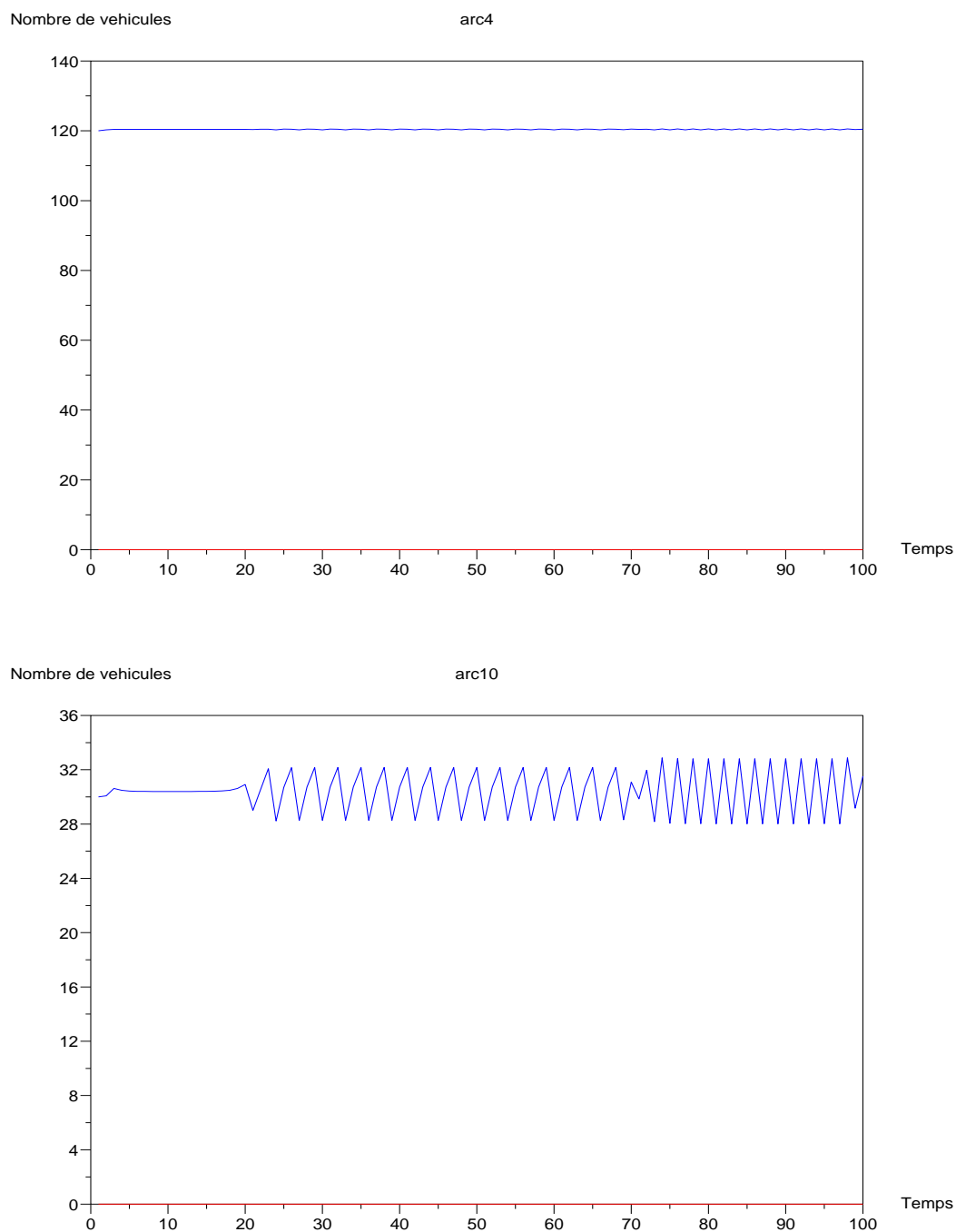


FIG. 6.5 – Nombre de véhicules respectivement sur les arcs 4 et 10 - Résolution sans perturbation de l'état (Résolution en boucle ouverte du problème (6.4)).



FIG. 6.6 – Nombre de véhicules respectivement sur les arcs 1,2 et 3 - Résolution avec perturbation de l'état (Résolution en boucle fermée du problème (6.4)).

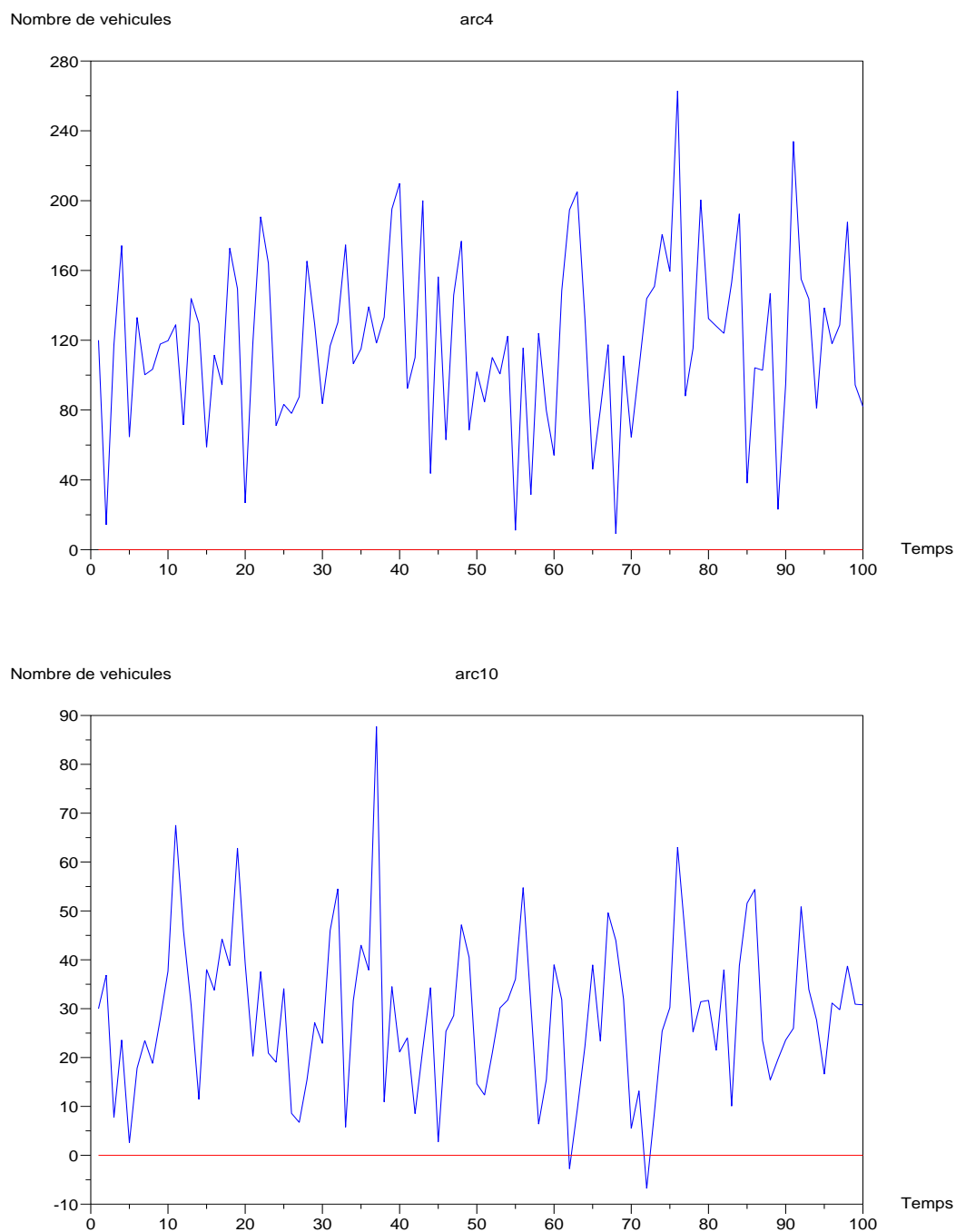


FIG. 6.7 – Nombre de véhicules respectivement sur les arcs 4, et 10 - Résolution avec perturbation de l'état (Résolution en boucle fermée du problème (6.4)).

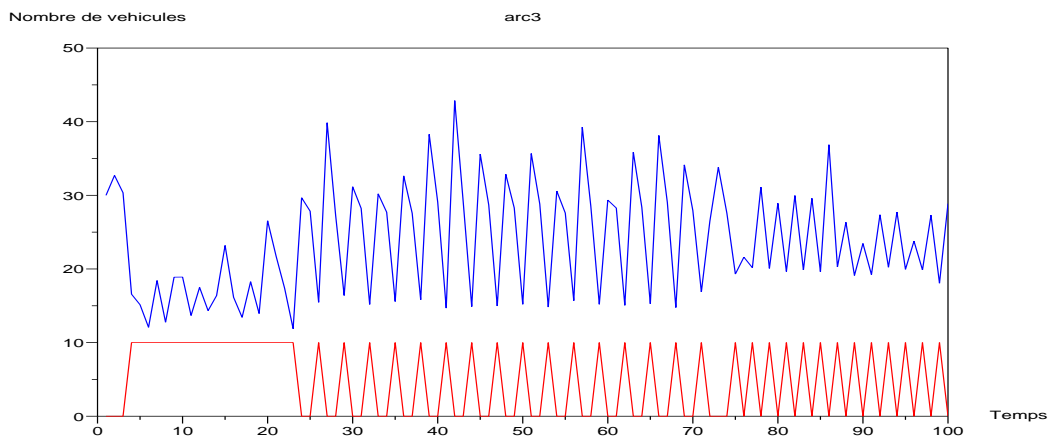
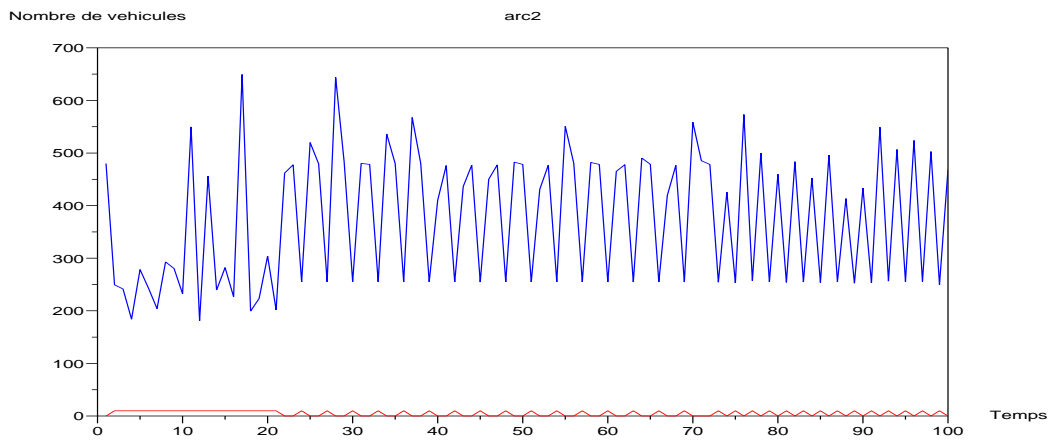
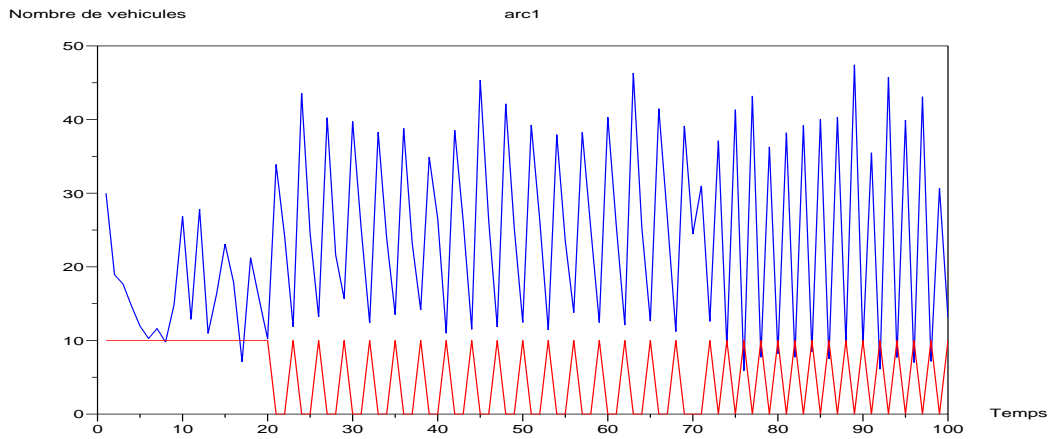


FIG. 6.8 – Nombre de véhicules respectivement sur les arcs 1,2 et 3 - Résolution avec perturbation du nombre de véhicules de transport en commun (Résolution en boucle fermée du problème (6.4)).

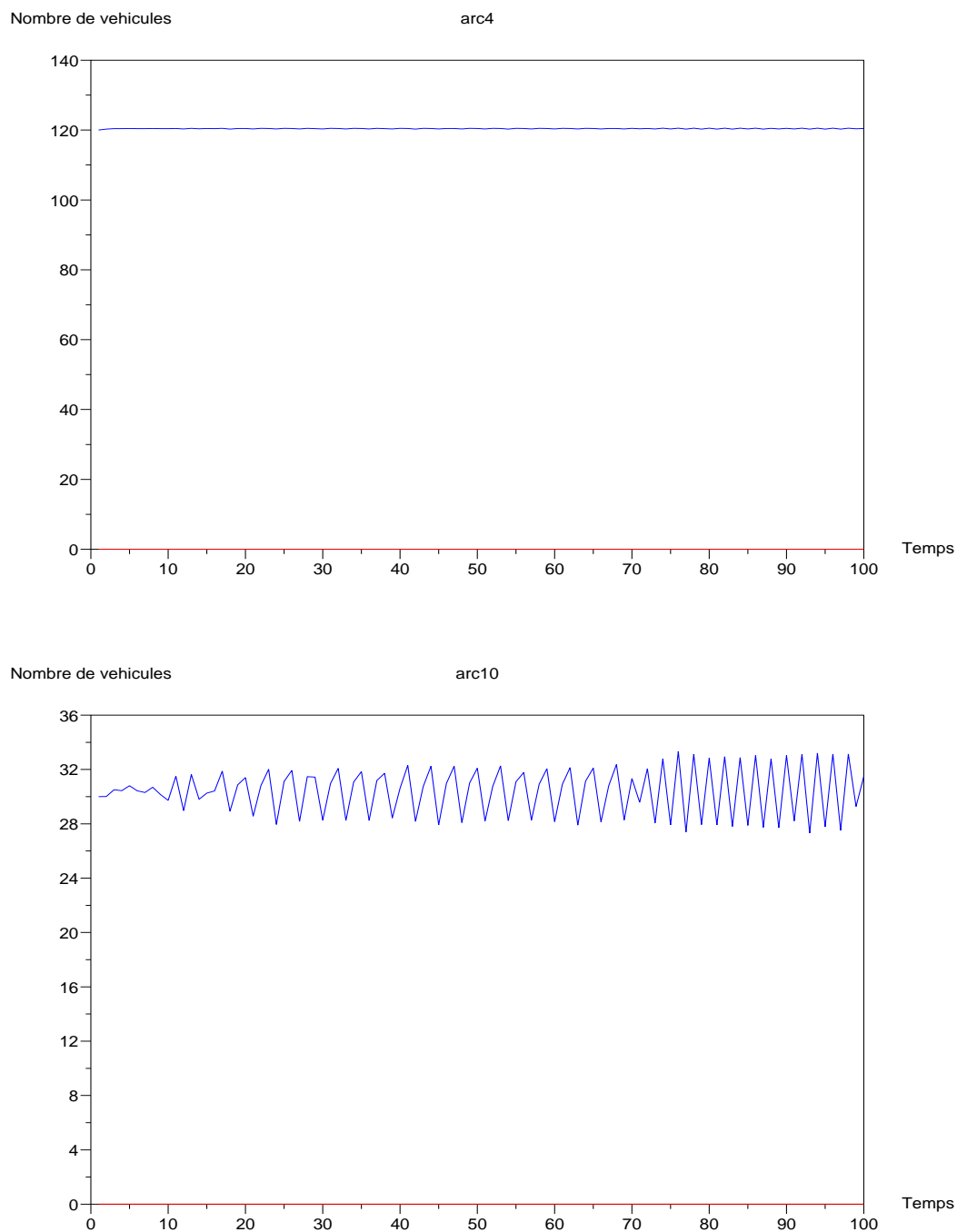


FIG. 6.9 – Nombre de véhicules respectivement sur les arcs 4, et 10 - Résolution avec perturbation du nombre de véhicules de transport en commun (Résolution en boucle fermée du problème (6.4)).

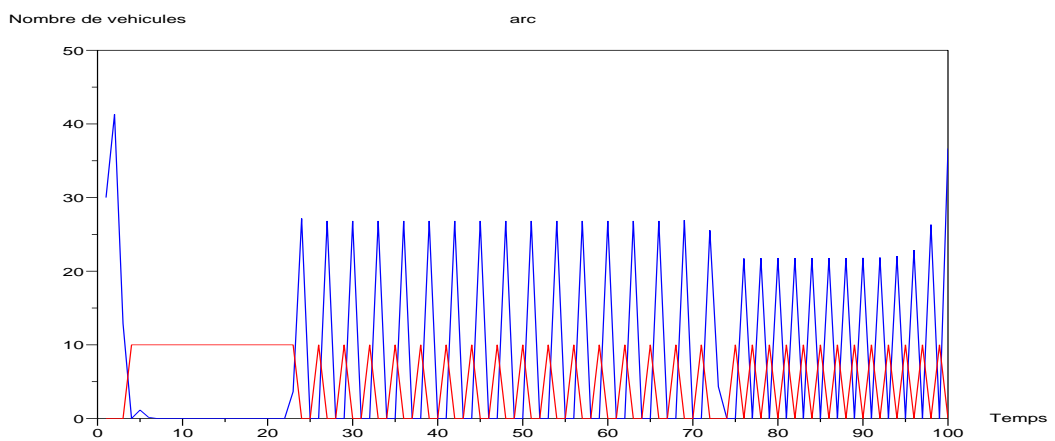
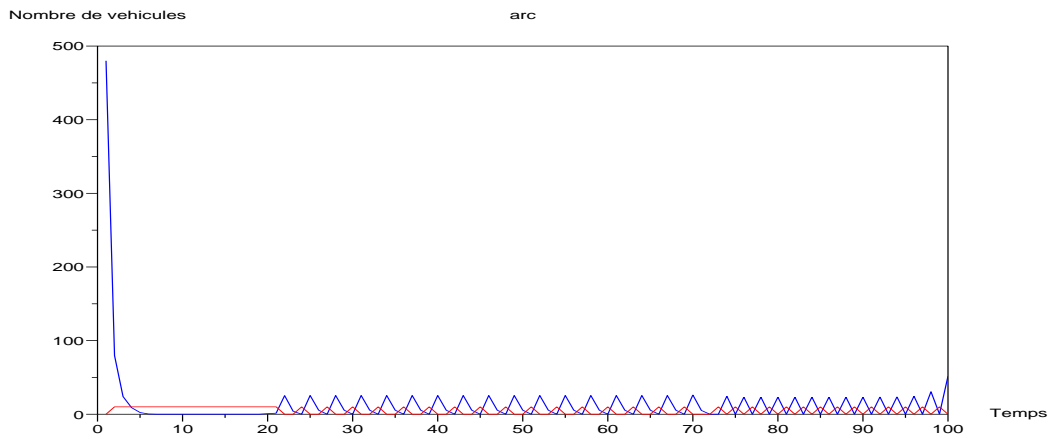
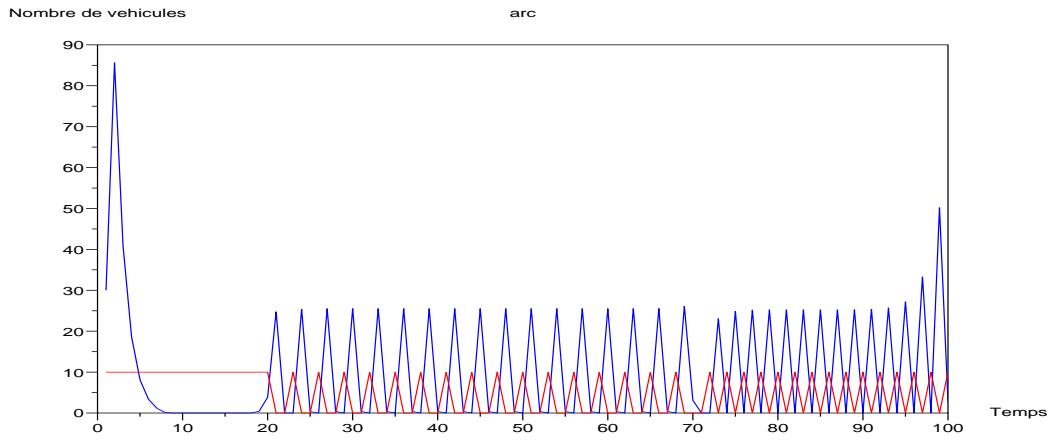


FIG. 6.10 – Nombre de véhicules respectivement sur les arcs 1,2 et 3 - Résolution sans perturbation du problème (6.6).

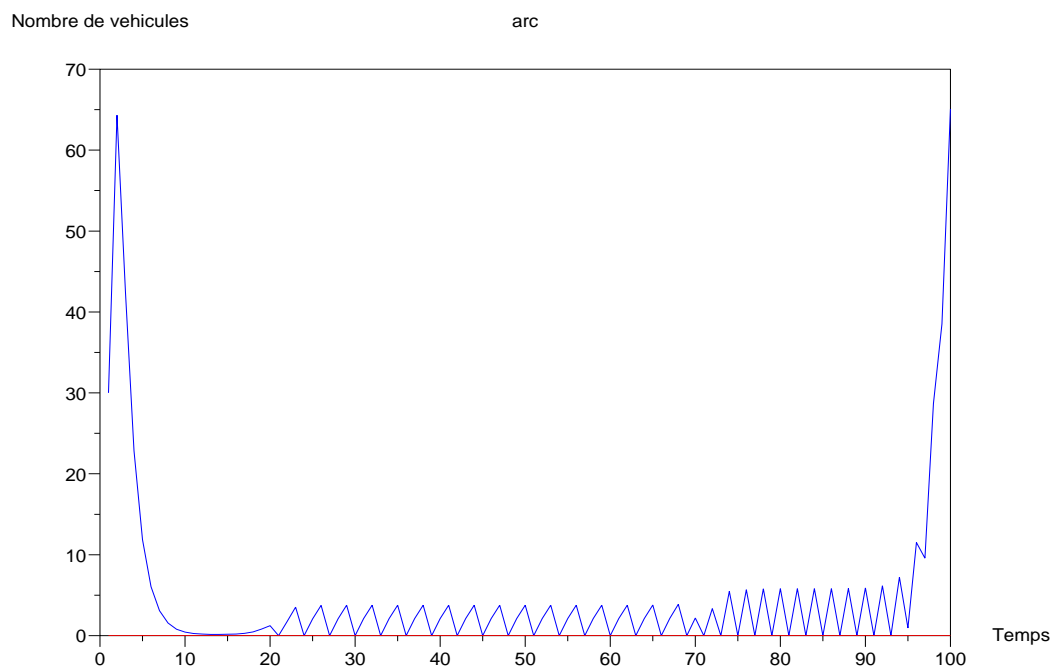
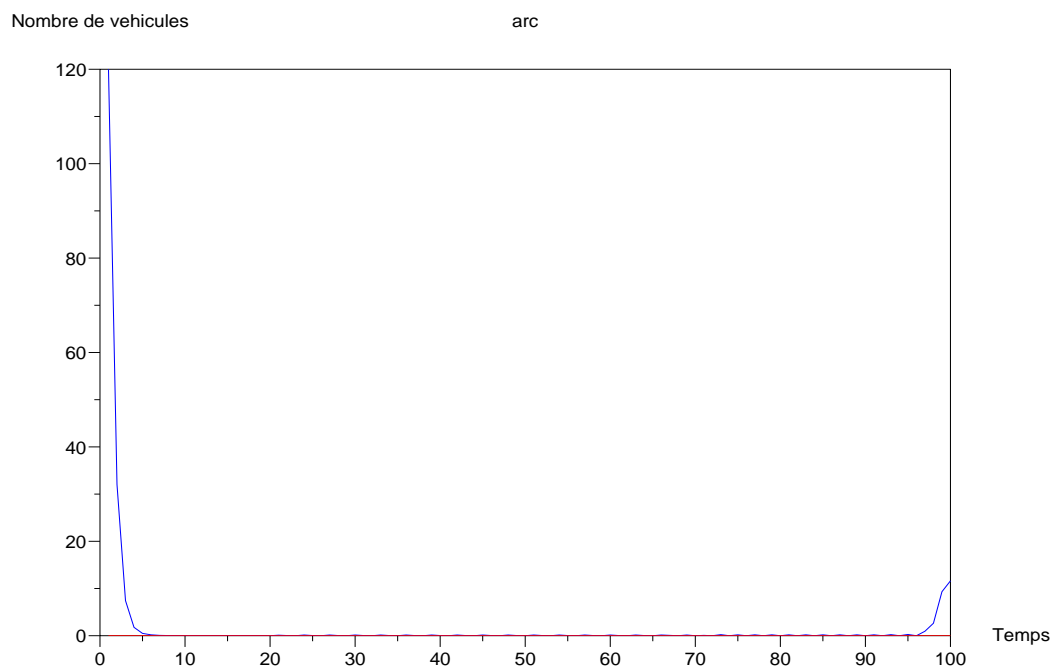


FIG. 6.11 – Nombre de véhicules respectivement sur les arcs 4, et 10 - Résolution sans perturbation du problème (6.6).

6.4 Conclusion

Cette étude nous a permis de calculer, pour un réseau de trafic routier urbain à deux modes, une commande robuste du trafic qui donne la priorité aux véhicules de transport en commun par rapport aux véhicules particuliers. L'étude est basée sur la résolution d'un problème de commande optimale de type LQ, et d'un problème d'affectation de trafic calculant des équilibres de Wardrop. On note que cette étude suppose un phasage simple, c'est à dire que sur chaque route menant à une intersection, on a un contrôle indépendant des autres contrôle du réseau. On suppose aussi que les véhicules quittant une intersection peuvent emprunter n'importe quelle route sortante de l'intersection ce qui nous garantit la commandabilité du système et donc nous permet d'être assuré de pouvoir vider les rues au passage des bus.

Ces hypothèses simplificatrices et le présupposé concernant la possibilité de disposer des données nécessaires pour pouvoir calculer les affectations idéales mériterait d'être validé sur des exemples plus réalistes que l'exemple académique utilisé ici.

Conclusion générale

Dans ce travail on a modélisé divers systèmes de transport avec des techniques basées sur la programmation dynamique. On a pu généraliser les diagrammes fondamentaux à des réseaux de routes et interpréter les phases apparaissant sur les diagrammes fondamentaux. On a fait un résumé assez complet des apports de ce travail dans la deuxième partie de l'introduction. Donnons en guise de conclusion quelques points restant à améliorer à préciser ou à développer.

Les deux généralisations du modèle de trafic minplus du chapitre 2 nous ont permis d'obtenir une bonne approximation des diagrammes fondamentaux obtenus expérimentalement. Pour modéliser les routes en présence d'intersections nous avons utilisé le modèle le plus simple. On peut modéliser les routes en présence d'intersections en utilisant des modèles plus précis pour obtenir des diagrammes 2D plus réalistes à condition de disposer de diagrammes 2D expérimentaux (qui n'existe pas à notre connaissance) pour pouvoir juger de l'amélioration obtenue. Ce sujet semble abordable avec les techniques utilisées dans ce chapitre.

Les modèles d'intersections présentés dans le chapitre 4 et 5 ont pu être analysés de façon satisfaisante d'un point de vue pratique. On comprend bien les phases, dans certains cas on a des résultats explicites très satisfaisants. La partie théorique a pu être réalisée avec une hypothèse restrictive sur les tailles des routes. Les liens entre les valeurs propres et les taux de croissance ne sont pas complètement élucidés même dans le cas le plus simple du trafic sur la route en forme de huit. De plus on ne sait pas si en présence d'intersections, le trafic peut avoir ou non un comportement chaotique. Les systèmes homogènes peuvent être chaotiques. Les modèles de trafic ont expérimentalement un taux de croissance linéaire qui pourrait a priori s'expliquer par un comportement chaotique même si on a réussi à l'expliquer dans certains cas en terme de valeur propre. On a réussi à isoler la propriété de croissance de ces systèmes partant de 0. Il serait souhaitable : – soit d'isoler un système de trafic chaotique, – soit de prouver que le chaos n'est pas possible pour ces systèmes.

Dans le modèle d'une intersection gérée par un feu de signalisation mis en boucle ouverte, on a pu dériver théoriquement le diagramme fondamental du trafic par la résolution d'un système linéaire minplus temps variant périodique. Comme on l'a mentionné dans la sous-section correspondante cette dérivation peut être généralisée aux cas de grands réseaux réguliers. L'optimisation du trafic par rapport au temps de cycle des feux est bien sûr possible numériquement mais l'obtention de formules explicites des diagrammes fondamentaux devrait permettre d'aller plus loin.

La boîte à outils permet la manipulation des réseaux de Pétri déterministes généraux. Elle n'est pas spécialisée aux problèmes de trafic et devrait donc être utile pour d'autres applications.

Références

- AG01. M. Akian and S. Gaubert. Spectral theorem for convex monotone homogeneous maps, and ergodic control. *INRIA - RR-4273*, 2001.
- AS02. Cécile Appert and Ludger Santen. Modélisation du trafic routier par des automates cellulaires. *Actes INRETS 100 et Ecole d'automne de modélisation du trafic*, 2002.
- Bat73. J. Bather. Optimal decision procedures for finite markov chains. part ii. communicating systems. *Adv. Appl. Prob.*, 5 :521–540, 1973.
- BBSS01. Elman Brockfeld, Robert Barlovic, Andrea Schadschneider, and Michael Schreckenberg. Optimizing traffic lights in a cellular automaton model for city traffic. *Physical Review E*, Vol. 64, 056132, 2001.
- BCOQ92. F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, and J.-P. Quadrat. *Synchronization and linearity : an algebra for discrete event systems*. John Wiley and Sons, 1992.
- Ben82. A. Bensoussan. Stochastic control by functional analysis methods. *North Holland, Studies in mathematics and its application*, (11), 1982.
- Ber97. N. Berglund. geometrical theory of dynamical systems. *ArXiv :math*, 1997.
- BFZ97. N. Boccara, H. Fuks, and Q. Zeng. *J. Phys. A*, 30(3329), 1997.
- BGM05. Anne Bouillard, Bruno Gaujal, and Jean Mairesse. Throughput in stochastic free-choice nets under various policies. *Proceedings of the 44th IEEE CDC & ECC*, 2005.
- BHSS05. R. Barlovic, T. Huisinga, A. Schadschneider, and M. Scheckenberg. Adaptive traffic light control in the chsch model for city traffic. *Traffic and Granular Flow 03 Publisher : Springer Berlin Heidelberg*, 2005.
- Bir67. G. Birkhoff. Lattice theory, 1967.
- BL05. N. Bhourri and P. Lotito. An intermodal traffic control strategy for private vehicle and public transport. In *Proceedings of 10th Euro Working Group on Transportation*, 2005.
- Bla00. M. Blank. Variational principles in the analysis of traffic flows. *Markov Processes and Related fields*, 7(3) :pp. 287–305, 2000.
- BM95. F. Baccelli and J. Mairesse. Ergodic theorems for stochastic operators and discrete event network. *RR-INRIA*, 2641, 1995.
- BML92. O. Biham, A. A. Middleton, and D. Levine. Self-organisation and a dynamical transition in traffic flow models. *Phys. Rev.*, A 46 R6124, 1992.
- CDQV83. G. Cohen, D. Dubois, J.-P. Quadrat, and M. Viot. Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des diodes. *RR-INRIA*, (191), 1983.
- CG79. R. Cuninghame-Green. Minimax algebra. *L.N. on Economics and Math. Systems*, N. 166 Springer Verlag, 1979.
- CGQ95. G Cohen, S. Gaubert, and J.-P. Quadrat. Asymptotic throughput of continuous timed petri nets. In *proceedings of the 34th IEEE - CDC, New Orleans*, 1995.

- CGQ97. G. Cohen, S. Gaubert, and J.P. Quadrat. Linear projectors in the max-plus algebra. *IEEE Mediterranean Conference on Control*, 1997.
- CL86. M. Cremer and J. Ludwig. *Mathematics and Computers in Simulation*, 28(297), 1986.
- CMMS93. J.A. Cuesta, F.C. Martinez, J.M. Molera, and A. Sanchez. Phase transition in two dimensional traffic-flow models. *Physical Review E*, Vol. 48, N.6 :pp. R4175–R4178, 1993.
- Coh90. Simon Cohen. Ingénierie du trafic routier. *Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées*, 1990.
- Cor07. A. Corrêa. Modélisation de conflits dans l'algèbre des diodes : Application à la régulation de trafic dans les carrefours. *Thèse de l'université de technologie de Belfort-Montbéliard*, 2007.
- Cou77. Patrick Cousot. Méthodes itératives de construction et d'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur un treillis, analyse sémantique des programmes. *Thèse de l'INPG*, 1977.
- CPS92. Richard W. Cottle, Jong-Shi Pang, and Richard E. Stone. The linear complementarity problem. *Academic Press*, 1992.
- CSS00. D. Chowdhury, L. Santen, and A. Schadschneider. Statistical physics of vehicular traffic and some related systems. *Physics Reports*, N. 329 :pp. 199–329, 2000.
- CT80. M. G. Candrall and L. Tartar. Some relations between non expansive and order preserving maps. *Proceedings of the AMS*, 78(3) :385–390, 1980.
- CT01a. J. Cochet-Terrasson. *Algorithmes d'itération sur les politiques pour les applications monotones contractantes*. PhD thesis, Paris 6, 2001.
- CT01b. Jean Cochet-Terrasson. *Algorithmes d'itération sur les politiques pour les applications monotones contractantes*. *Thèse de L'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris*, 2001.
- CTG06. J. Cochet-Terrasson and S. Gaubert. Policy iteration for zero-sum stochastic games with mean payoff. *CRAS*, I(343) :377–382, 2006.
- CTGG99. J. Cochet-Terrasson, S. Gaubert, and J. Ginawardena. A constructive fixed point theorem for min-max functions. *Dynamics and stability of systems*, 14(4) :407–433, 1999.
- DE94. B. Derrida and M.R. Evans. Exact steady state properties of the one dimensional asymmetric exclusion model. *Probability and Phase Transition ed G. Grimmett, Kluwer Ac. Pub.*, pages pp. 1–16, 1994.
- Der98. B. Derrida. An exactly soluble non-equilibrium system : the asymmetric simple exclusion process. *Physics Reports*, 301 :pp. 65–83, 1998.
- DGLR01. B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, and B. Roulet. *Physique statistique*. *Hermann*, 2001.
- DPA02. C. Diadaki, M. Papageorgiou, and K. Aboudolas. A multivariable regulator approach to traffic-responsive network-wide signal control. *Control Eng. Practice*, N. 10 :pp. 183–195, 2002.

- FI96. M. Fukui and Y. Ishibashi. Phase diagram for the traffic on two one-dimensional roads with a crossing. *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 65, N. 9 :pp. 2793–2795, 1996.
- FI01a. M. Fukui and Y. Ishibashi. Phase diagram on the crossroad. *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 70, N. 9 :pp. 2793–2797, 2001.
- FI01b. M. Fukui and Y. Ishibashi. Phase diagram on the crossroad ii : the cases of different velocities. *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 70, N. 12 :pp. 3747–3750, 2001.
- Gau92. S. Gaubert. Théorie des systèmes linéaires dans les dioides. *Thesis dissertation, École des Mines de Paris*, 1992.
- GG98a. S. Gaubert and J. Gunawardena. A non-linear hierarchy for discrete event dynamical systems. *In Proceedings of the 4th IEE - WODES, Cagliari*, 1998.
- GG98b. S. Gaubert and J. Gunawardena. The duality theorem for min-max functions. *CRAS Série I*, I(326) :43–48, 1998.
- GG99. S. Gaubert and J. Gunawardena. Existence of eigenvectors for monotone homogeneous functions. *Hewlett-Packard Technical Report HPL-BRIMS-99-08*, 1999.
- GG04. Stéphane Gaubert and Jeremy Gunawardena. The perron - frobenius theorem for homogeneous monotone functions. *Transactions of AMS*, Volume 356, Number 12 :Pages 4931–4950, 2004.
- GHR61. D. C. Gazis, R. Herman, and R. Rothery. Non-linear follow -the-leader models of traffic flow. *Opns. Res.*, 9(545), 1961.
- GK95. J. Gunawardena and M. Keane. On the existence of cycle times for some nonexpansive maps. *Technical Report HPL-BRIMS-95-003, Hewlett-Packard Labs*, 1995.
- GM77. M. Gondran and M. Minou. Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioides et leurs interprétations en théorie des graphes. *Bull. Direction Études Recherche Sér. C Math. Informat.*, 2(i) :25–41, 1977.
- GM86. M. Gondran and M. Minoux. *Graphs and Algorithms*. John Wiley and Sons, 1986.
- Gun98. J. Gunawardena. Idempotency. *Publications of the Isaac Newton Institute. Cambridge University Press*, 1998.
- Gun01. J. Gunawardena. From max-plus algebra to nonexpansive maps : a nonlinear theory of discrete event systems. *Theoretical Computer Science*, 2001.
- Hel01. D. Helbing. Traffic and related self-driven many-particle systems. *Reviews of modern physics*, Vol. 73 :pp.1067–1141, 2001.
- HK66. A. J. Hoffman and R. M. Karp. On nonterminating stochastic games. *Management sciences*, 12(5) :359–370, 1966.
- HMPR59. R. Herman, E. W. Montroll, R. B. Potts, and R. Rothery. Traffic dynamics : Analysis of stability in car-following. *Opns. Res.*, 7(86), 1959.
- HOvdW06. B. Heidergott, G. J. Olsder, and J. va der Woude. *Max Plus at Work*. Princeton University Press, 2006.

- How60. R. Howard. *Dynamic programming and Markov Processes*. Wiley, 1960.
- Ker04. B. S. Kerner. The physics of traffic. *Springer*, 2004.
- Kin73. J. Kingman. Subadditive ergodic theory. *Ann. Probability*, 1 :883–909, 1973.
- KM97. V. N. Kolokoltsov and V. P. Maslov. Idempotent analysis and applications. *Kluwer Acad. Publisher*, 1997.
- Koh80. E. Kohlberg. Invariant half-lines of nonexpansive piecewise-linear transformations. *Math. Oper. Res.*, 5(3) :366–372, 1980.
- KR50. M. G. Krein and M. A. Rutman. Linear operators leaving invariant a cone in a banach space. *Amer. Math. Soc. Translation*, 26, 1950.
- Lan67. E. Lanery. Etude asymptotique des systèmes markovien à commande. *Rev. Française Informat. Rech. Opér.*, 1(5) :3–56, 1967.
- Lib96. L. Libeaut. Sur l'utilisation des diodes pour la commande des systèmes à événements discrets. *Thèse du Laboratoire d'Automatique de Nantes*, 1996.
- LMQ03. P. Lotito, E. Mancinelli, and J.-P. Quadrat. Traffic assignment & gibbs - maslov semirings. *Rapport INRIA, RR-4089, & Idempotent Mathematics and Mathematical Physics*, 2003.
- LMQ05. P. Lotito, E. Mancinelli, and J.P. Quadrat. A min-plus derivation of the fundamental car-traffic law. *IEEE-AC*, V.50, N.5 :pp.699–705, 2005.
- LMS01. G. L. Litvinov, V. P. Maslov, and G. B. Shpiz. Idempotent functional analysis : an algebraical approach. *Math. Notes*, 65(5) :696–726, 1995/2001.
- LW55. J. Lighthill and J. B. Whitham. On kinetic waves : Ii) a theory of traffic flow on long crowded roads. *Proc. Royal Society*, A229 :pp. 281–345, 1955.
- Mar76. A. Martelli. An application of heuristic search methods to edge and contour detection. *Comm. ACM*, 19(2) :pp. 73–83, 1976.
- MCG⁺01. E. Mancinelli, Guy Cohen, S. Gaubert, J.-P. Quadrat, and E. Rofman. On traffic light control of regular towns. *INRIA Report*, (4276), 2001.
- MCMB95. F.C. Martinez, J.A. Cuesta, J.M. Molera, and R. Brito. Random versus deterministic two-dimensional traffic flow models. *Physical Review E*, Vol. 51, N. 2 :pp. R835–R838, 1995.
- MMCB95a. J.M. Molera, F.C. Martinez, J.A. Cuesta, and R. Brito. Random versus deterministic two dimensional traffic flow models. *Physical Review E*, Vol.51, N.2, 1995.
- MMCB95b. J.M. Molera, F.C. Martinez, J.A. Cuesta, and R. Brito. Theoretical approach to two-dimensional traffic flow models. *Physical Review E*, Vol.51, N.1 :pp. 175–187, 1995.
- Mor64. M. Morishima. Equilibrium, stability, and growth : A multisectorial analysis. *Clarendon Press, Oxford*, 1964.
- MS92. V.P. Maslov and S.N. Samborskii. Idempotent analysis. *AMS*, 1992.
- Mur89. T. Murata. Petri nets : Properties, analysis and applications. *Proceedings of the IEEE*, Vol. 77, No. 4 :pp. 541–580, 1989.

- MY97. Katta G. Murty and Feng-Tien Yu. Linear complementarity, linear and non-linear programming. <http://ioe.engin.umich.edu/people/fac/books/murty/>, 1997.
- NS92a. K. Nagel and M. Schreckenberg. *J. Physique I*, 2(2221), 1992.
- NS92b. K. Nagel and M. Schreckenberg. A cellular automaton model for free way traffic. *Journal de Physique I*, Vol. 2, No. 12 :pp. 2221–2229, 1992.
- Nus88. R. D. Nussbaum. Hilberts projective metric and iterated nonlinear maps. *Memoirs of the AMS*, 75(391), 1988.
- Ols91. Geert Jan Olsder. Eigenvalues of dynamic max-min systems. *Discrete Event Dynamic Systems : theory and applications*, 1 :pp. 177–207, 1991.
- Pat94. M. Patriksson. *The traffic Assignment Problem Models and Methods*. VSP, Utrecht, 1994.
- PH71. I. Prigogine and R. Herman. Kinetic theory of vehicular traffic. *Elsevier*, 1971.
- QG97. J.-P. Quadrat and Max-Plus Working Group. Min-plus linearity and statistical mechanics. *Markov Processes and Related Fields*, Vol. 3, N. 4 :pp. 565–587, 1997.
- Rev05. Spyros Reveliotis. A linear characterization of the petri net reachability space corresponding to bounded-length fireable transition sequences and its implications for the structural analysis of process-ressource nets with acyclic, quasi-live and strongly reversible process subnets. *Proceedings of 44th IEEE CDC & ECC*, 2005.
- Ric56. P. I. Richards. Shock waves on the highway. *Operations Res.*, 4(42), 1956.
- RS01. D. Rosenberg and S. Sorin. An operator approach to zero-sum repeated games. *Israel J. Math.*, 121 :221–243, 2001.
- SF77. P. J. Schweitzer and A. Federgruen. The asymptotic behaviour of undiscounted value iteration in markov descision problems. *Math. Oper. Res.*, 2(4) :360–381, 1977.
- SM97. B. De Schutter and B. De Moor. The extended linear complementarity problem and its applications in the maxplus algebra. in *Complementarity and Variational Problems : State of the Art (M.C. Ferris and J.S. Pang, eds)*, Philadelphia, Pennsylvania. SIAM, pages 22–39, 1997.
- TG06. Jean Cochet Terrasson and Stéphane Gaubert. A policy iteration algorithm for zero-sum stochastic games with mean payoff. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 343 :pp. 377–382, 2006.
- Ush89. T. Ushio. On controllability of controlled petri nets. *controll-theory and advanced technology*, Vol. 5, No 3 :pp. 265–275, 1989.
- Vir01. O. Viro. Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper. *Progr. Math.*, 201 :135–146, 2001.
- Whi86. P. Whittle. *Optimization over time, Vol. 2*. Wiley, 1986.
- Wol86. S. Wolfram. Theory and applications of cellular automata (86) and and cellular automata and complexity (94). *World Scientific, Singapore (86) and Addison-Wesley, Reading, MA (94)*, 1986.

- WWHH00. B.-H. Wang, L. Wang, P.M. Hui, and B. Hu. The asymptotic steady states of deterministic one-dimensional traffic flow models. *Physica. B*, Vol. 279, N. 1-3 :pp. 237–239, 2000.
- Yos95. K. Yoshida. *Functional analysis. Classics in Mathematics*. Springer-Verlag, 1995.