NON ANNULATION DES FONCTIONS L AUTOMORPHES AU POINT CENTRAL

D. ROUYMI

Résumé. Les travaux sur les formes modulaires sont nombreux et divers ; concernant leurs annulations Michel, Kowalski & Vanderkam montrent (en autre) qu'il existe une proportion positive des formes qui ne s'annulent pas au point critique. Ce résultat fut montré par ces derniers pour des formes de niveau premier ; d'autre part Iwaniec, Luo & Sarnak montrent que ceci se généralise aux formes dont le niveau est sans facteur carré. Dans le but de comprendre l'influence de l'arithmétique du niveau sur les zéros de ces formes, cet article présente une étude de la généralisation aux formes primitives dont le niveau est la puissance d'un nombre premier.

Table des matières

1. Introduction

L'objet de cet article est d'étudier la non-annulation des fonctions L de formes primitives de poids k et de niveau $\mathfrak{p}^\nu$, où $\mathfrak{p}$ est un nombre premier fixé et $\nu \to \infty$.

Date: 29 décembre 2008.

Nous commençons par un rappel rapide de quelques notions. On appelle forme parabolique de poids $k \geqslant 2$ pair et de niveau q, toute fonction f holomorphe sur le demi plan de Poincaré $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \Im m\, z > 0\}$ telle que

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \tag{1}$$

pour tout élément

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : q \mid c \right\}.$$

et que la fonction $z \mapsto (\Im m\, z)^{k/2} f(z)$ est bornée sur $\mathbb{H}$. On désigne par $S_k(q)$ l'espace des formes paraboliques de poids k et de niveau q, que l'on munit du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_q := \int_F f(z)\overline{g}(z) y^k \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2},$$

où F désigne un domaine fondamental par l'action homographique de $\Gamma_0(q)$ sur $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Pour chaque $f \in S_k(m)$ avec $m \mid q$, $m < q$ et $l \mid (q/m)$ alors $z \mapsto f(lz)$ est une forme parabolique de $\Gamma_0(q)$. De telles formes s'appellent des formes anciennes de niveau q. L'orthogonal de l'espace engendré par ces formes est l'espace des formes nouvelles, notée par $S_k^*(q)$. Désignons par $\mathrm{H}_k^*(q)$ la base orthogonale de $S_k^*(q)$ consituée des formes primitives. Ses éléments sont des fonctions propres des opérateurs de Hecke (cf. [5, Paragraphes 2.7 et 3.3]).

Toute forme $f \in S_k(q)$ a un dévelopeent de Fourier en ∞ :

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 1} a_f(n) e(nz), \tag{2}$$

où $e(t) := e^{2\pi i t}$. On pose

$$\lambda_f(n) := a_f(n) n^{-(k-1)/2}. \tag{3}$$

Quand $f \in \mathrm{H}_k^*(q)$, on a

$$\lambda_f(1) = 1, \tag{4}$$

$$\lambda_f(n) \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$\lambda_f(m)\lambda_f(n) = \sum_{\substack{d \mid (m,n) \\ (d,q)=1}} \lambda_f\left(\frac{mn}{d^2}\right) \tag{6}$$

pour tous les entiers m et $n \geqslant 1$. En particulier, on utilisera dans la suite, que si $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$ avec m' entier $\geqslant 2$ tel que $m' \mid q$ et si on a r et r' entiers $\geqslant 1$ tels que $r \mid q^\infty$ ou $r' \mid q^\infty$ alors :

$$\lambda_f(rr') = \lambda_f(r)\lambda_f(r') \tag{7}$$

de plus les travaux de Deligne montrent que si $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$ alors

$$\lambda_f(p)^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } p^2 \mid m', \\ 1/p & \text{si } p \parallel m'. \end{cases} \tag{8}$$

La fonction L automorphe associée à $f \in \mathrm{H}_k^*(q)$ est définie par

$$L(s,f) := \sum_{n\geqslant 1} \lambda_f(n) n^{-s} \qquad (\Re e\, s > 1). \tag{9}$$

Définissons la fonction L complète

$$\Lambda(s,f) := \hat{q}^s \Gamma\Big(s + \frac{k-1}{2}\Big) L(s,f), \tag{10}$$

où

$$\hat{q} := \sqrt{q}/(2\pi). \tag{11}$$

Alors cette fonction peut être prolongée analytiquement sur $\mathbb{C}$ et vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\Lambda(s,f) = \varepsilon_f \Lambda(1-s,f) \qquad (s \in \mathbb{C}) \tag{12}$$

où $\varepsilon_f = 1$ ou -1.

Les valeurs spéciales de $L(s,f)$ (par exemple, valeurs centrales et valeurs au bord de la bande critique) contiennent des informations intéressantes. En particulier, la non annulation de $L(s,f)$ au point central $s = \frac{1}{2}$ est une des questions centrales en théorie des fonctions L automorphes et a beaucoup d'applications dans divers problèmes. D'après Gross et Zagier [4], nous savons que

$$L(\tfrac{1}{2}, f) \geqslant 0. \tag{13}$$

Un lien surprenant avec le zéro de Landau-Siegel a été decouvert par Iwaniec & Sarnak [7]. En désignant par $\varphi(q)$ la fonction d'Euler et $\mathrm{H}_k^+(q)$ (resp. $\mathrm{H}_k^-(q)$) est l'ensemble de $f \in \mathrm{H}_k^*(q)$ avec $\varepsilon_f = 1$ (resp. $\varepsilon_f = -1$), leur résultat s'énonce comme suit : si q est sans facteur carré assez grand tel que $\varphi(q) \gg q$ alors

$$\frac{1}{\big|\mathrm{H}_k^+(q)\big|} \sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^+(q)\\ L(\frac12,f)\geqslant(\log q)^{-2}}} 1 \geqslant \frac{1}{2}$$

et si l'on peut remplacer $\frac{1}{2}$ par une constante $c > \frac{1}{2}$, alors il n'existe pas le zéro de Landau-Siegel pour les fonctions L de Dirichlet.

Le premier résultat concernant la non annulation de $L(\frac{1}{2}, f)$ a été obtenu par Duke [3]. Il a démontré que si q est un nombre premier avec $q \geqslant 11$ et $q \neq 13$ alors il existe une constante absolue $C > 0$ telle que :

$$\frac{1}{|\mathrm{H}_2^*(q)|} \sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_2^*(q)\\ L(\frac12,f)\neq 0}} 1 \geqslant \frac{C}{(\log q)^2}\cdot \tag{14}$$

Cette minoration est obtenue avec la formule de Petersson [3, Lemma 1, p.167]. Par la suite, Kowalski & Michel [8] obtiennent une proportion positive de non-annulation, à savoir : si q est un nombre premier assez grand alors

$$\frac{1}{|\mathrm{H}_2^*(q)|} \sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_2^*(q)\\ L(\frac12,f)\neq 0}} 1 \geqslant \frac{19}{54}\cdot \tag{15}$$

Ce résultat est démontré avec la formule de trace de Petersson et le calcul des moments 1 et 2 des fonctions L mollifié [1]. En même temps (indépendemment), Vanderkam [14] applique la formule de trace de Selberg [12, Propopsition 4] aux deux premiers moments de la fonction L pour obtenir (15) avec une constante légèrement moins bonne $\frac{1}{48}$ à la place de $\frac{19}{54}$. Notons que ce résultat est obtenu également (sous une forme différente) par Kowalski, Michel & Vanderkam [9]. Enfin quand q est sans facteur carré, Iwaniec, Luo & Sarnak [6] montrent

$$\liminf_{q\to\infty} \frac{1}{\left|\mathrm{H}_k^+(q)\right|} \sum_{\substack{f\in\mathrm{H}_k^+(q)\\ L(\frac{1}{2},f)\neq 0}} 1 \geqslant \frac{9}{16}.$$

Dans le même article ils établissent une fomule de trace spécifique au cas où q est sans facteur carré.

D'autre part, l'étude sur les valeurs extrêmes de $L(1, \mathrm{sym}^m f)$ (fonction L de la m-ème puissance symétrique associée à f) a reçu beaucoup d'attention (voir [1], [11] et [10]). En particulier, les résultats de Royer & Wu [11] montrent que les valeurs extrêmes de $L(1, \mathrm{sym}^m f)$ dépendent, d'une manière suprenante, des propriétés arithmétiques du niveau. Donc il est naturel d'étudier l'influence de l'arithmétique du niveau sur le problème de non annulation de $L(\frac{1}{2}, f)$. Dans cet article, nous proposons de minorer le quotient

$$\frac{1}{|\mathrm{H}_k^*(q)|} \sum_{\substack{f\in\mathrm{H}_k^*(q)\\ L(\frac{1}{2},f)\neq 0}} 1$$

pour des entiers q de la forme p^ν, où p est un nombre premier et $\nu \geqslant 1$ est un entier. Le choix de cette forme de niveau a deux raisons : premièrement en prenant $\nu = 1$, nous retrouvons le cas classique qui a été étudié par Duke [3], Kowalski & Michel [8] et Vanderkam [14], mentionné ci-dessus ; deuxièmement, en fixant p et faisant $\nu \to \infty$, on obtient un cas de niveau vraiment friable (i.e. il n'y a que les facteurs premiers petits). Ce cas extrême arithmétiquement contraire au cas de niveau premier nous aidera à comprendre l'influence de l'arithmétique du niveau sur le problème de non annulation.

On notera

$$\omega_q(f) := \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \langle f, f\rangle_q . \tag{16}$$

Pour une partie A de $S_k(q)$ on définit la somme harmonique :

$$\sum_{f\in A}{}^{\mathrm{h}} \alpha_f := \sum_{f\in A} \alpha_f \omega_q(f).$$

Dans cet article, nous montrerons le résultat suivant.

---

[1]C'est cette technique de mollification qui permet de supprimer le facteur log dans le résultat de Duke

Théorème 1. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair et $\mathfrak{p}$ un nombre premier. Alors il existe une constante $\nu_0(k,\mathfrak{p})$ telle que pour $\nu \geqslant \nu_0(k,\mathfrak{p})$ et $q=\mathfrak{p}^\nu$ on a*

$$\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^*(q)\\ L(\frac12,f)\neq 0}}^{\mathrm{h}} 1 \gg \frac{1}{(\log q)^3},$$

où la constante impliquée ne dépend que de k et $\mathfrak{p}$.

Pour ce faire, dans un premier temps, on établira une formule de trace sur les formes primitives de niveau $\mathfrak{p}^\nu$ qui prendra la forme suivante :

$$\begin{aligned}\Delta_q^*(m,n) &:= \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)} \omega_q(f)\lambda_f(m)\lambda_f(n)\\ &= \frac{\varphi(q)}{q}\delta_{m,n} + R(m,n,k,q),\end{aligned} \tag{17}$$

où $\varphi(q)$ est la fonction d'Euler et $\delta(m,n)$ est le symbole de Kronecker (voir le Théorème 2 ci-dessous). Cette formule de trace sera établie de la manière suivante :

– Nous commençons par une formule de trace sous la forme

$$\Delta_q(m,n) := \sum_{f\in B_k(q)} \omega_q(f)\lambda_f(m)\lambda_f(n), \tag{18}$$

où $B_k(q)$ est une base orthogonale quelconque de $S_k(q)$. Il est à noter que cette définition est indépendante du choix de la base orthogonale puisque $\Delta_q(m,n)$ est le coefficient de Fourier d'une série de Poincaré [2, Lemma 3.3]. À l'aide d'une décomposition permettant de passer des formes paraboliques aux formes primitives de niveaux inférieurs, on peut exprimer $\Delta_q(m,n)$ en fonction des nombres $\Delta_{q'}^*(m,n)$, où $q' \mid q$, tout en rendant négligeable la contribution des formes de niveau 1. Puis par inversion de Möbius on pourra exprimer $\Delta_q^*(m,n)$ en fonction des nombres $\Delta_{q'}(m,n)$.

– Après avoir établi une formule de trace dans $S_k(q)$ (de type [6] égalité (2.12)) provenant de l'expression de $\Delta_q(m,n)$ comme des sommes de sommes de Kloosterman, on en déduit alors une formule de trace dans $\mathrm{H}_k^*(q)$.

Dans un second temps, on calculera au quatrième et cinquième paragraphe, le deuxième et le troisième moment au point critique et ce à l'aide de la formule trace, pour obtenir :

$$\begin{aligned}M_2 &= \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2 \log q + O_{k,\mathfrak{p}}(1),\\ M_3 &= \frac16\left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^4 (\log q)^3 + O_{k,\mathfrak{p}}\big((\log q)^2\big),\end{aligned}$$

où

$$M_r := \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)}^{\mathrm{h}} L(\tfrac12,f)^r. \tag{19}$$

Enfin une simple application de l'inégalité de Hölder donne le Théorème 1.

Notations. Dans ce texte, $\tau(n)$ (resp. $\omega(n)$) est le nombre des diviseurs de n (resp. le nombre de facteurs premiers distincts) et $\varphi(n)$ la fonction indicatrice d'Euler.

Remerciements. L'auteur tient à remercier ses directeurs de thèse Jie Wu (Nancy) et Emmanuel Royer (Clermont-Ferrand) pour toute leur patience et leurs encouragements réguliers durant l'élaboration de ce travail.

2. Formule de trace harmonique au niveau $\mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 1$

Le but de ce paragraphe est d'établir une formule de trace au niveau $\mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 1$. Notre résultat peut être considéré comme complémentaire au Corollaire 2.10 de Luo, Iwaniec & Sarnak [6].

2.1. Enoncé du résultat.

Théorème 2. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 1$. Alors pour tous entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, on a*

$$\Delta_q^*(m,n) = \begin{cases} \phi(\nu,\mathfrak{p})\delta_{m,n} + O(\mathscr{R}) & si\ \mathfrak{p} \nmid mn\ et\ \nu \geqslant 1, \\ 0 & si\ \mathfrak{p} \mid mn\ et\ \nu \geqslant 2, \end{cases} \tag{20}$$

où $\delta_{m,n}$ est le symbole de Kronecker,

$$\phi(\nu,\mathfrak{p}) := \begin{cases} 1 & si\ \nu = 1 \\ 1 - (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}^{-1})^{-1} & si\ \nu = 2 \\ 1 - \mathfrak{p}^{-1} & si\ \nu \geqslant 3 \end{cases} \tag{21}$$

et

$$\mathscr{R} := \frac{\sqrt{mn\mathfrak{p}}\{\log(2(m,n))\}^2}{k^{4/3}q^{3/2}} + \frac{\tau(m)\tau(n)}{q}. \tag{22}$$

La constante impliquée est absolue. Le deuxième terme d'erreur $\tau(m)\tau(n)/q$ n'existe que s'il y a des formes de poids k et de niveau 1.

Corollaire 3. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 3$. Alors pour tous entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, on a*

$$\Delta_q^*(m,n) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(q)}{q}\delta_{m,n} + O_{k,\mathfrak{p}}\left(\dfrac{\sqrt{mn}\{\log(2(m,n))\}^2}{q^{3/2}} + \dfrac{\tau(m)\tau(n)}{q}\right) & si\ \mathfrak{p} \nmid mn, \\ 0 & si\ \mathfrak{p} \mid mn, \end{cases}$$

où la constante impliquée ne dépend que de k et $\mathfrak{p}$.

Remarque 1. Si on applique le Théorème 2 à $\nu = 1$, on retrouve si $k \in \mathcal{K} = \{2,4,6,8,10,14\}$, la formule de trace (20) en tenant compte du fait qu'alors $S_k(\mathfrak{p}) = S_k^*(\mathfrak{p})$ [12, Chap. 7] et que donc $\Delta_\mathfrak{p}^* = \Delta_\mathfrak{p}$ et du fait qu'alors le deuxième terme de droite dans (22) est nul.

2.2. **Lemmes auxiliaires.** Commençons par établir une formule de trace vraie dans tout l'espace des formes paraboliques de niveau $\mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 1$ et de poids k.

Lemme 4. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier, $m \geqslant 1, n \geqslant 1$ et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 0$. Alors*

$$\Delta_q(m,n) = \delta_{m,n} + O\bigg(\frac{\sqrt{mn(m,n,q)}\{\log(2(m,n))\}^2}{k^{4/3}q^{3/2}}\bigg) \tag{23}$$

où la constante impliquée est absolue.

Démonstration. Selon [2, Page 248-9], on a

$$\Delta_q(m,n) = \delta_{m,n} + 2\pi i^k \sum_{c\equiv 0 (\mathrm{mod}\, q)} \frac{S(m,n;c)}{c} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right),$$

où $S(m,n;c)$ est la somme de Kloosterman définie par

$$S(m,n;c) = \sum_{dd'\equiv 1 (\mathrm{mod}\, c)} \exp\left(2\pi i\left(\frac{dm+d'n}{c}\right)\right)$$

et J_{k-1} est la fonction de Bessel de première espèce. En utilisant les majorations classiques ([5, Pages 60-1] et [2, Page 245]) :

$$|S(m,n;c)| \leqslant 2^{\omega(c)}(m,n,c)^{1/2}c^{1/2}, \qquad J_{k-1}(x) \ll k^{-4/3}x,$$

on peut déduire

$$\Delta_q(m,n) = \delta_{m,n} + O\bigg(\frac{\sqrt{mn}}{k^{4/3}q^{3/2}} \sum_{r\geqslant 1} \frac{2^{\omega(qr)}}{r^{3/2}}(m,n,qr)^{1/2}\bigg).$$

Puisque $\omega(qr) \leqslant \omega(r) + 1$ et $(m,n,qr) \mid (m,n,q)(m,n,r)$, il suit, en posant $d = (m,n,r)$ et $r = d\ell$,

$$\begin{aligned}\Delta_q(m,n) &= \delta_{m,n} + O\bigg(\frac{\sqrt{mn(m,n,q)}}{k^{4/3}q^{3/2}} \sum_{r\geqslant 1} \frac{2^{\omega(r)}(m,n,r)^{1/2}}{r^{3/2}}\bigg)\\ &= \delta_{m,n} + O\bigg(\frac{\sqrt{mn(m,n,q)}}{k^{4/3}q^{3/2}} \sum_{d|(m,n)} \frac{2^{\omega(d)}}{d} \sum_{\ell\geqslant 1} \frac{2^{\omega(\ell)}}{\ell^{3/2}}\bigg)\\ &= \delta_{m,n} + O\bigg(\frac{\sqrt{mn(m,n,q)}}{k^{4/3}q^{3/2}} \log^2(2(m,n))\bigg),\end{aligned}$$

où l'on a déjà utilisé les estimations classiques (voir (76) du Lemme 13 ci-dessous)

$$\begin{aligned}\sum_{d|(m,n)} \frac{2^{\omega(d)}}{d} \leqslant \sum_{d\leqslant (m,n)} \frac{\tau(d)}{d} &= \int_{1-}^{(m,n)} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\sum_{d\leqslant t}\tau(d)\\ &= \int_{1-}^{(m,n)} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}O(t\log t) \ll \log^2(2(m,n)).\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration. □

Dans le but d'exprimer $\Delta_q(m,n)$ en fonction de $\Delta_q^*(m,n)$, on utilise la décomposition orthogonale :

$$S_k(q) = \bigoplus_{\ell m'=q} \bigoplus_{f\in \mathrm{H}_k^*(m')} S_k(\ell, f) \tag{24}$$

où (si $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$), $S_k(\ell, f)$ est l'espace engendré par les formes :

$$f_{|d}(z) := d^{k/2} f(dz) \tag{25}$$

où d désigne un diviseur de ℓ.

Étant donné la définition intrinsèque (18) de Δ_q, il sera nécessaire de déterminer une base orthogonale de $S_k(\ell, f)$ pour tout diviseur ℓ de q. Pour cela, on introduit des fonctions de la forme :

$$f_d = \sum_{c|\ell} x_d(c,f) f_{|c}$$

où $q = \ell m'$, d est un diviseur de ℓ, $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$.

Si $m' > 1$, les coefficients $x_d(c,f)$ sont définis de la façon suivante :

$$x_d(c,f) := \begin{cases} \dfrac{\mu(r)\lambda_f(r)}{\sqrt{r\rho_{f,m'}(d)}} & \text{si } d = rc\ , \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{26}$$

où

$$\rho_{f,m'}(d) := \sum_{n|d} \mu(n)\lambda_f(n)^2 n^{-1}. \tag{27}$$

Si $m' = 1$, on définit

$$f_{\mathfrak{p}^r} := \begin{cases} f & \text{si } r = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\sigma_f}}\left(f_{|\mathfrak{p}} - \dfrac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}} f_{|1}\right) & \text{si } r = 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{(1-\mathfrak{p}^{-2})\sigma_f}}\left(f_{|\mathfrak{p}^r} - \nu'(\mathfrak{p})\dfrac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}} f_{|\mathfrak{p}^{r-1}} + \dfrac{1}{\mathfrak{p}} f_{|\mathfrak{p}^{r-2}}\right) & \text{si } r \geqslant 2, \end{cases} \tag{28}$$

où

$$P_1(X) := \frac{X}{\nu'(\mathfrak{p})}, \qquad \sigma_f := 1 - \frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))^2}{\mathfrak{p}}, \qquad \nu'(\mathfrak{p}) := 1 + \frac{1}{\mathfrak{p}}. \tag{29}$$

Remarque 2. Dans le cas où $m' > 1$, en posant $d = \mathfrak{p}^\delta$, alors :

$$\rho_{f,m'}(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta = 0 \text{ ou } \delta \geqslant 1 \text{ et } \mathfrak{p}^2 \mid m', \\ 1 - \mathfrak{p}^{-2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons un premier résultat :

Lemme 5. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 1$. Si m' est un entier tel que $m' \mid q$ et $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$, alors pour tout entier $r \geqslant 0$ la série de Dirichlet*

$$R_f(\mathfrak{p}^r, s) := \sum_{n\geqslant 1} \lambda_f(n)\lambda_f(n\mathfrak{p}^r) n^{-s}$$

vérifie

$$R_f(\mathfrak{p}^r, s) = Z_f(\mathfrak{p}^r, m', s)L(s, f \otimes f) \tag{30}$$

où

$$L(s, f \otimes f) := \sum_{n \geqslant 1} \lambda_f(n)^2 n^{-s} \tag{31}$$

et

$$Z_f(\mathfrak{p}^r, m', s) := \begin{cases} P_r(\lambda_f(\mathfrak{p}), s) & \textit{si } m' = 1 \\ \lambda_f(\mathfrak{p}^r) & \textit{sinon} \end{cases} \tag{32}$$

avec

$$\begin{cases} P_0(X, s) := 1, \\ P_1(X, s) := X/(1 + \mathfrak{p}^{-s}), \\ P_r(X, s) := XP_{r-1}(X, s) - P_{r-2}(X, s) \quad (r \geqslant 2). \end{cases} \tag{33}$$

Démonstration. Si on utilise l'hypothèse $m' > 1$ dans l'égalité (7), on a[2] :

$$R_f\,(\mathfrak{p}^r, s) = \lambda_f(\mathfrak{p}^r)L(s, f \otimes f). \tag{34}$$

Ensuite on considère le cas où $m' = 1$. Si on écrit chaque entier $n \geqslant 1$ de façon unique $n = n^{(\mathfrak{p})} n_{\mathfrak{p}}$ avec $n_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p}^\infty$ et $(n^{(\mathfrak{p})}, \mathfrak{p}) = 1$, alors

$$R_f(\mathfrak{p}^r, s) = \sum_{n \mid \mathfrak{p}^\infty} \lambda_f(n)\lambda_f(n\mathfrak{p}^r)n^{-s} \sum_{(n,\mathfrak{p})=1} \lambda_f(n)^2 n^{-s}. \tag{35}$$

Notons $R^*(\mathfrak{p}^r, s)$ la première de ces deux sommes (on n'a pas indiqué la dépendance en f pour alléger les notations).

Pour le cas $r = 0$:

$$R_f(1, s) = L(s, f \otimes f)$$

avec la notation (31).

Quand $r = 1$, on applique (6) sous la forme (avec $r = 1$)

$$\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+r}) = \lambda_f(\mathfrak{p})\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+r-1}) - \lambda_f(\mathfrak{p}^{k+r-2}) \tag{36}$$

pour écrire

$$\begin{aligned} R^*(\mathfrak{p}, s) &= \sum_{k \geqslant 0} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+1})}{\mathfrak{p}^{ks}} \\ &= \lambda_f(\mathfrak{p}) + \sum_{k \geqslant 1} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+1})}{\mathfrak{p}^{ks}} \\ &= \lambda_f(\mathfrak{p}) + \lambda_f(\mathfrak{p}) \sum_{k \geqslant 1} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)^2}{\mathfrak{p}^{ks}} - \frac{1}{\mathfrak{p}^s} \sum_{k \geqslant 0} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+1})}{\mathfrak{p}^{ks}} \\ &= \frac{\lambda_f(\mathfrak{p})}{1 + \mathfrak{p}^{-s}} \sum_{k \geqslant 0} \frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)^2}{\mathfrak{p}^{ks}}. \end{aligned}$$

[2] C'est ici qu'intervient la différence entre les cas $m' = 1$ et $m' > 1$ due à la multiplicité des coefficients $\lambda_f(r)$. Voir la différence entre (34) et (30).

Avec l'égalité (35), on a :

$$R_f(\mathfrak{p},s)=\frac{\lambda_f(\mathfrak{p})}{1+\mathfrak{p}^{-s}}L(s,f\otimes f). \tag{37}$$

Si $r\geqslant 2$, on utilise (36) pour écrire pour tout $k\geqslant 0$

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+r})}{\mathfrak{p}^{ks}}=\lambda_f(\mathfrak{p})\sum_{k\geqslant 0}\frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+r-1})}{\mathfrak{p}^{ks}}-\sum_{k\geqslant 0}\frac{\lambda_f(\mathfrak{p}^k)\lambda_f(\mathfrak{p}^{k+r-2})}{\mathfrak{p}^{ks}}$$

ce qui signifie que :

$$R^*(\mathfrak{p}^r,s)=\lambda_f(\mathfrak{p})R^*(\mathfrak{p}^{r-1},s)-R^*(\mathfrak{p}^{r-2},s)$$

en particulier cela donne, pour tout entier $r\geqslant 2$:

$$R_f(\mathfrak{p}^r,s)=\lambda_f(\mathfrak{p})R_f(\mathfrak{p}^{r-1},s)-R_f(\mathfrak{p}^{r-2},s). \tag{38}$$

Les résultats précédents concernant $R_f(\mathfrak{p}^r,s)$ permettent de terminer la preuve de ce lemme. □

On a aussi le résultat suivant :

Lemme 6. *Soient $k\geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q=\mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu\geqslant 1$. On note $q=\ell m'$ et ℓ_1,ℓ_2 des entiers tels que $\ell_1,\ell_2\mid\ell$. Soit $f\in \mathrm{H}_k^*(m')$ alors*

$$\left\langle f_{|\ell_1},f_{|\ell_2}\right\rangle_q=\begin{cases}\dfrac{\lambda_f(\overline{\ell})}{\sqrt{\overline{\ell}}}\left\langle f,f\right\rangle_q & \text{si } m'>1,\\ \dfrac{P_j(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\overline{\ell}}}\left\langle f,f\right\rangle_q & \text{si } m'=1,\end{cases} \tag{39}$$

où $\overline{\ell}:=\ell_1\ell_2/(\ell_1,\ell_2)^2=\mathfrak{p}^j$, $P_0=1$, P_1 est donné en (29) et

$$P_{n+2}=XP_{n+1}-P_n\quad(n\geqslant 0). \tag{40}$$

Démonstration. On note

$$\Gamma_\infty:=\left\{\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}:b\in\mathbb{Z}\right\}$$

et on considére

$$G(s):=\left\langle E(z,s)f(\ell_1z),f(\ell_2z)\right\rangle_q,$$

où la série d'Eisenstein

$$E(z,s)=\sum_{\gamma\in\Gamma_0(q)/\Gamma_\infty}(\Im m\,\gamma z)^s. \tag{41}$$

est définie pour $z\in\mathbb{H}$ et se prolonge en une fonction holomorphe si $\Re e\,s>\frac{1}{2}$ sauf en un pôle simple en 1 [2, Lemma 3.7].

En utilisant la méthode classique de déroulement exposée dans [6, Pages 72-3], on obtient si $\ell':=\ell_1/(\ell_1,\ell_2)$, $\ell'':=\ell_2/(\ell_1,\ell_2)$ et $[\ell_1,\ell_2]=\ell_1\ell_2/(\ell_1,\ell_2)$:

$$G(s)=(4\pi)^{1-k-s}\Gamma(s+k-1)(\ell_1\ell_2)^{-(k-1)/2}[\ell_1,\ell_2]^{-s}R_f(\ell'\ell'',s), \tag{42}$$

où

$$R_f(\ell'\ell'',s):=\sum_n\lambda_f(\ell'n)\lambda_f(\ell''n)n^{-s}=\sum_n\lambda_f(n)\lambda_f(\ell'\ell''n)n^{-s} \tag{43}$$

car $(\ell',\ell'')=1$ implique que $\ell'=1$ ou $\ell''=1$.

En appliquant (30) du Lemme 5, l'égalité (42) devient

$$G(s) = (4\pi)^{1-k-s}\Gamma(s+k-1)(\ell_1\ell_2)^{(1-k)/2}[\ell_1,\ell_2]^{-s}Z_f(\ell'\ell'',m',s)L(s,f\otimes f).$$

Cette égalité appliquée à $\ell_1 = \ell_2 = 1$ montre que $L(s, f\otimes f)$ a un pôle simple en $s=1$ étant donné que c'est le cas pour les séries d'Eisenstein $E(z,s)$. De plus (32) et (33) montrent que $Z_f(\ell'\ell'',m',s)$ est holomorphe en $s=1$, on posera $Z_f(\ell'\ell'',m') = Z_f(\ell'\ell'',m',1)$.

On passe alors aux résidus en $s=1$, pour cela, rappelons la formule classique [2] qui concerne les séries d'Eisenstein :

$$\operatorname*{Res}_{s=1} E(z,s) = \frac{3}{\pi\nu(q)}$$

qui montre que ce résidu r est indépendant de z.

On trouve donc

$$r\left\langle f(\ell_1 z), f(\ell_2 z)\right\rangle_q = \frac{\Gamma(k)}{(4\pi)^k}\frac{(\ell_1\ell_2)^{-(k-1)/2}}{[\ell_1,\ell_2]}Z_f(\ell'\ell'',m')\operatorname*{Res}_{s=1} L(s,f\otimes f)$$

ce qui s'écrit encore à l'aide de (25) :

$$r\left\langle f_{|\ell_1}, f_{|\ell_2}\right\rangle_q = \frac{\Gamma(k)}{(4\pi)^k}\frac{(\ell_1\ell_2)^{1/2}}{[\ell_1,\ell_2]}Z_f(\ell'\ell'',m')\operatorname*{Res}_{s=1} L(s,f\otimes f). \tag{44}$$

Le cas $\ell_1 = \ell_2 = 1$ donne

$$r\left\langle f, f\right\rangle_q = \frac{\Gamma(k)}{(4\pi)^k}\operatorname*{Res}_{s=1} L(s,f\otimes f). \tag{45}$$

Enfin les égalités (44) et (45) donnent

$$\left\langle f_{|\ell_1}, f_{|\ell_2}\right\rangle_q = \frac{Z_f(\overline{\ell},m')}{\sqrt{\overline{\ell}}}\left\langle f, f\right\rangle_q. \tag{46}$$

Mais puisqu'on a :

$$Z_f(\mathfrak{p}^r,m') = \begin{cases} P_r(\lambda_f(\mathfrak{p}),1) & \text{si } m'=1 \\ \lambda_f(\mathfrak{p}^r) & \text{sinon}\end{cases}$$

en posant

$$P_r(X) = P_r(X,1)$$

on retrouve (39) et (40) grâce aux relations (46) et (33). □

On aura aussi besoin d'un autre résultat :

Lemme 7. *Si $f \in \mathrm{H}_k^*(1)$, on a les égalités suivantes :*

$$\left\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_1\right\rangle_q = \left\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_{\mathfrak{p}}\right\rangle_q = 0 \quad (r \geqslant 1), \tag{47}$$

$$\left\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_{\mathfrak{p}^2}\right\rangle_q = 0 \quad (r \geqslant 2), \tag{48}$$

$$\left\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_{\mathfrak{p}^j}\right\rangle_q = \left\langle f_{\mathfrak{p}^r}, f_{\mathfrak{p}^{j-1}}\right\rangle_q \quad (3 \leqslant j \leqslant r). \tag{49}$$

Démonstration. En ce qui concerne (47), $\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_1\rangle_q$ vaut à un facteur multiplicatif près :

$$\left\langle f_{|\mathfrak{p}^{r+1}} - \nu'(\mathfrak{p})\frac{P_1\left(\lambda_f\left(\mathfrak{p}\right)\right)}{\sqrt{\mathfrak{p}}} f_{|\mathfrak{p}^r} + \frac{1}{\mathfrak{p}} f_{|\mathfrak{p}^{r-1}}, f_{|1}\right\rangle_q$$

qui vaut avec (39)

$$\frac{P_{r+1}\left(\lambda_f\left(\mathfrak{p}\right)\right)}{\sqrt{\mathfrak{p}^{r+1}}} - \frac{\nu' P_1\left(\lambda_f\left(\mathfrak{p}\right)\right) P_r\left(\lambda_f\left(\mathfrak{p}\right)\right)}{\sqrt{\mathfrak{p}^{r+1}}} + \frac{P_{r-1}\left(\lambda_f\left(\mathfrak{p}\right)\right)}{\sqrt{\mathfrak{p}^{r+1}}}$$

ce qui vaut aussi (à un facteur multiplicatif près) :

$$P_{r+1}\left(\lambda_f\left(\mathfrak{p}\right)\right) - \nu'\left(P_1\left(\lambda_f\left(\mathfrak{p}\right)\right) P_r\left(\lambda_f\left(\mathfrak{p}\right)\right) + P_{r-1}\left(\lambda_f\left(\mathfrak{p}\right)\right)\right).$$

Mais la récurrence (40) donne $P_{r+1} = \nu' P_1 P_r - P_{r-1}$. Donc on a bien $\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_1\rangle_q = 0$.

Pour ce qui concerne $\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_{\mathfrak{p}}\rangle_q$ et $\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_{\mathfrak{p}^2}\rangle_q$ les calculs sont similaires et la récurrence (40) permet d'établir qu'ils sont nuls.

Passons à (49) avec $3 \leqslant j \leqslant r$ on a $\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_{\mathfrak{p}^j}\rangle_q$ qui vaut :

$$\left\langle f_{|\mathfrak{p}^{r+1}} - \nu'(\mathfrak{p})\frac{P_1\left(\lambda_f(\mathfrak{p})\right)}{\sqrt{\mathfrak{p}}} f_{|\mathfrak{p}^r} + \frac{1}{\mathfrak{p}} f_{|\mathfrak{p}^{r-1}}, f_{|\mathfrak{p}^j} - \nu'(\mathfrak{p})\frac{P_1\left(\lambda_f(\mathfrak{p})\right)}{\sqrt{\mathfrak{p}}} f_{|\mathfrak{p}^{j-1}} + \frac{1}{\mathfrak{p}} f_{|\mathfrak{p}^{j-2}}\right\rangle_q.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}&\langle f_{\mathfrak{p}^r}, f_{\mathfrak{p}^{j-1}}\rangle_q\\ &= \left\langle f_{|\mathfrak{p}^r} - \nu'(\mathfrak{p})\frac{P_1\left(\lambda_f(\mathfrak{p})\right)}{\sqrt{\mathfrak{p}}} f_{|\mathfrak{p}^{r-1}} + \frac{f_{|\mathfrak{p}^{r-2}}}{\mathfrak{p}}, f_{|\mathfrak{p}^{j-1}} - \nu'(\mathfrak{p})\frac{P_1\left(\lambda_f(\mathfrak{p})\right)}{\sqrt{\mathfrak{p}}} f_{|\mathfrak{p}^{j-2}} + \frac{f_{|\mathfrak{p}^{j-3}}}{\mathfrak{p}}\right\rangle_q.\end{aligned}$$

Avec (39) on peut développer ce produit scalaire et on retrouve le même résultat qu'avec $\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_{\mathfrak{p}^j}\rangle_q$ car les indices r et j ont diminué de 1 mais leur différence elle reste la même, plus précisément :

$$\left\langle f_{|\mathfrak{p}^k}, f_{|\mathfrak{p}^{j-k'}}\right\rangle_q = \left\langle f_{|\mathfrak{p}^{k-1}}, f_{|\mathfrak{p}^{j-k'-1}}\right\rangle_q$$

pour $k = r-1, r$ ou $r+1$ et $k' = 0, 1$ ou 2. □

Lemme 8. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 1$. Soit $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$ avec $q = \ell m'$.*

- *Si $m' > 1$, alors la famille $E_\ell^f := \{f_d : d \mid \ell\}$ est une base orthogonale de l'espace $S_k(\ell, f)$ vérifiant $\|f_d\|_q = \|f\|_q$ pour tout d.*
- *Si $m' = 1$, alors la famille $E_q^f := \{f_d : d \mid q\}$ est une base orthogonale de $S_k(q, f)$ vérifiant $\|f_d\|_q = \|f\|_q$ pour tout d.*

Démonstration. Dans un premier temps, supposons $m' > 1$ et montrons l'égalité (26). On pose :

$$\delta_f(d_1, d_2) = \frac{\langle f_{d_1}, f_{d_2}\rangle_q}{\langle f, f\rangle_q}$$

pour $d_1, d_2 \mid \ell$ (où on rappelle que $f_d = \sum_{n|\ell} x_d(n, f) f_{|n}$). Selon (39) on a :

$$\delta_f(d_1, d_2) = \sum_{\ell_1, \ell_2 | \ell} x_{d_1}(\ell_1, f)\overline{x}_{d_2}(\ell_2, f)\frac{\lambda_f(\overline{\ell})}{\sqrt{\overline{\ell}}}.$$

Écrivant $\ell_1 = a\ell'$ et $\ell_2 = a\ell''$ avec $a = (\ell_1, \ell_2)$, on a, à l'aide de (6) et (7) :

$$\begin{aligned}\delta_f(d_1, d_2) &= \sum_{a|\ell} \sum_{\substack{\ell', \ell''|(\ell/a) \\ (\ell', \ell'')=1}} x_{d_1}(a\ell', f)\overline{x}_{d_2}(a\ell'', f)\frac{\lambda_f(\ell')\lambda_f(\ell'')}{\sqrt{\ell'\ell''}} \\ &= \sum_{a|\ell} \sum_{b|(\ell/a)} \mu(b) \sum_{\ell', \ell''|(\ell/(ab))} x_{d_1}(ab\ell', f)\overline{x}_{d_2}(ab\ell'', f)\frac{\lambda_f(b\ell')\lambda_f(b\ell'')}{b\sqrt{\ell'\ell''}} \\ &= \sum_{a|\ell} \sum_{b|(\ell/a)} \frac{\mu(b)\lambda_f(b)^2}{b} \sum_{\ell'|(\ell/(ab))} x_{d_1}(ab\ell', f)\frac{\lambda_f(\ell')}{\sqrt{\ell'}} \sum_{\ell''|(\ell/(ab))} \overline{x}_{d_2}(ab\ell'', f)\frac{\lambda_f(\ell'')}{\sqrt{\ell''}}.\end{aligned}$$

En posant désormais $c = ab$, on trouve :

$$\delta_f(d_1, d_2) = \sum_{c|\ell} \rho_{f,m'}(c) y_{d_1}(c, f)\overline{y}_{d_2}(c, f) \tag{50}$$

où on a noté :

$$\rho_{f,m'}(c) = \sum_{n|c} \frac{\mu(n)\lambda_f^2(n)}{n}, \qquad y_d(c, f) := \sum_{r|(\ell/c)} x_d(rc, f)\frac{\lambda_f(r)}{\sqrt{r}}.$$

La formule d'inversion de Möbius appliquée à l'égalité ci-dessus donne :

$$x_d(c, f) = \sum_{r|(\ell/c)} y_d(rc, f)\mu(r)\frac{\lambda_f(r)}{\sqrt{r}}. \tag{51}$$

Pour que E_ℓ^f soit une base orthogonale de $S_k(\ell, f)$ il suffit (par la définition de $\delta_f(d_1, d_2)$) que δ_f soit le symbole de Kronecker, ce qui est expliqué [3] par :

$$y_d(c, f) = \begin{cases} 1/\sqrt{\rho_{f,m'}(c)} & \text{si } d = c, \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

L'égalité définissant $y_d(c, f)$ équivaut d'après (51) à :

$$x_d(c, f) = \begin{cases} \dfrac{\mu(r)\lambda_f(r)}{\sqrt{r\rho_{f,m'}(d)}} & \text{si } d = rc, \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ceci termine la preuve de l'othogonalité dans le cas $m' > 1$.

Passons à la preuve de la base orthogonale de $S_k(q, f)$. On supposera désormais $m' = 1$ dans le reste de la preuve du Lemme 8. Pour vérifier que la famille proposée en (28) existe, montrons que σ_f est strictement positif, en effet on sait que pour toute forme parabolique :

$$0 \leqslant \lambda_f(\mathfrak{p})^2 \leqslant \tau(\mathfrak{p})^2 = 4$$

puisque d'autre part $\mathfrak{p} \geqslant 2$ alors $9/2 \leqslant \mathfrak{p}(1 + \mathfrak{p}^{-1})^2$ ainsi on en conclut (d'après (29)) :

$$\sigma_f \geqslant 1/9. \tag{52}$$

[3]Notons que $y_d(c, f)$ existe puisque $\rho_{f,m'}(c) = \prod_{p|c}(1 - \lambda_f(p)^2/p)$ implique que $\rho_f(c) \in]0, 1]$ étant donné l'égalité (8).

Montrons que les formes proposées ont toutes la même norme que celle de f. Pour f_1 c'est immédiat. Pour $f_{\mathfrak{p}}$, d'après (28) :

$$\|f_{\mathfrak{p}}\|_q^2 = \frac{1}{\sigma_f}\left(\left\|f_{|\mathfrak{p}}\right\|_q^2 + \frac{P_1^2(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\mathfrak{p}}\left\|f_{|1}\right\|_q^2 - 2\frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}}\left\langle f_{|\mathfrak{p}}, f_{|1}\right\rangle_q\right).$$

Mais en utilisant (39) on a :

$$\|f_{|\mathfrak{p}^r}\|_q^2 = \|f\|_q^2$$

et

$$\left\langle f_{|\mathfrak{p}}, f_{|1}\right\rangle_q = \frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}}\|f\|_q^2.$$

On trouve alors, étant donné (29) :

$$\|f_{\mathfrak{p}}\|_q^2 = \|f\|_q^2.$$

Il reste à traiter le cas de $f_{\mathfrak{p}^r}$ où $r \geqslant 2$. On notera ν' au lieu de $\nu'(\mathfrak{p})$ pour allï¿½$\frac{1}{2}$ger. D'après (28) :

$$\begin{aligned}\|f_{\mathfrak{p}^r}\|_q^2 = \frac{1}{(1-\mathfrak{p}^{-2})\sigma_f}\Bigg(&\|f_{|\mathfrak{p}^r}\|_q^2 + \frac{\nu'^2 P_1^2(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\mathfrak{p}}\|f_{|\mathfrak{p}^{r-1}}\|_q^2 + \frac{\|f_{|\mathfrak{p}^{r-2}}\|_q^2}{\mathfrak{p}^2}\\ &- 2\nu'\frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}}\left\langle f_{|\mathfrak{p}^r}, f_{|\mathfrak{p}^{r-1}}\right\rangle_q + \frac{2}{\mathfrak{p}}\left\langle f_{|\mathfrak{p}^r}, f_{|\mathfrak{p}^{r-2}}\right\rangle_q\\ &- 2\nu'\frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\mathfrak{p}\sqrt{\mathfrak{p}}}\left\langle f_{|\mathfrak{p}^{r-1}}, f_{|\mathfrak{p}^{r-2}}\right\rangle_q\Bigg).\end{aligned}$$

En utilisant (39), on trouve que $\|f_{\mathfrak{p}^r}\|_q^2$ vaut au facteur multiplicatif $\|f\|_q^2$ près :

$$\frac{1}{(1-\mathfrak{p}^{-2})\sigma_f}\left(1 + \frac{\nu'(\nu'-2)P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))^2}{\mathfrak{p}} + \frac{1+2P_2(\lambda_f(\mathfrak{p})) - 2\nu' P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))^2}{\mathfrak{p}^2}\right).$$

Utilisons la relation de récurrence (40) qui peut se réécrire (à l'aide de (29)) :

$$P_2 = \nu' P_1^2 - 1$$

pour transformer le terme précédent en :

$$\frac{1}{\sigma_f(1-\mathfrak{p}^{-2})}\left(1 - \frac{P_1^2(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\mathfrak{p}}\right)\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{p}^2}\right)$$

ce qui donne bien $\|f_{\mathfrak{p}^r}\|_q = \|f\|_q$. pour tout $r \geqslant 2$.

Montrons maintenant par récurrence sur $r \geqslant 1$ que $\langle f_{\mathfrak{p}^r}, f_{\mathfrak{p}^k}\rangle_q = 0$ pour tout $k < r$. Pour $r = 1$: $\langle f_{\mathfrak{p}}, f_1\rangle_q$ vaut à un facteur multiplicatif près :

$$\left\langle f_{|\mathfrak{p}} - \frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}} f_{|1}, f_{|1}\right\rangle_q$$

ce qui vaut selon (39)

$$\frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}}\|f\|_q{}^2 - \frac{P_1(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\sqrt{\mathfrak{p}}}\left\|f_{|1}\right\|_q^2 = 0.$$

On suppose l'orthogonalité vraie jusqu'à r et montrons que c'est le cas en $r+1$. Appliquons alors le Lemme 7. Ce résultat permet de terminer la récurrence car le cas $r+1$ peut lui-même se traiter par récurrence sur $j \leqslant r$ en montrant que

$\langle f_{\mathfrak{p}^{r+1}}, f_{\mathfrak{p}^j}\rangle_q = 0$, on en conclut donc que la famille proposée dans le Lemme 8 est orthogonale. □

Remarque 3. Il est à noter que le choix que l'on a fait de y_d implique que la norme de tous les f_d est la même et plus particulièrement : $\|f_d\|_q = \|f\|_q$.

Remarque 4. Il est important de noter que la démonstration du cas où $m' > 1$ devient fause si $m' = 1$. Il est alors plus difficile de décrire une base orthogonale de $S_k(q, f)$ (voir ce qui précède).

Toujours dans le but d'exprimer $\Delta_q(m, n)$ en fonction de $\Delta^*_q(m, n)$, on aura recours au résultat suivant :

Lemme 9. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 1$. Soit $f \in \mathrm{H}^*_k(m')$ avec $q = \ell m'$. Alors*

$$\omega_q(f) = \begin{cases} \dfrac{\omega_{m'}(f)}{\ell} & \text{si } m' > 1 \\ \dfrac{\omega_1(f)}{\nu(q)} & \text{si } m' = 1 \end{cases}$$

où on a noté

$$\nu(n) = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Démonstration. Puisque $\Gamma_0(q)$ et $\Gamma_0(m')$ sont des sous-groupes de $SL(2,\mathbb{Z})$ d'indices respectifs $\nu(q)$ et $\nu(m')$ (voir [5, p 35]), en utilisant la formule de multiplicité des indices, on obtient l'indice suivant :

$$[\Gamma_0(m'); \Gamma_0(q)] = \frac{\nu(q)}{\nu(m')} = \begin{cases} \ell & \text{si } m' > 1 \\ \nu(q) & \text{si } m' = 1. \end{cases}$$

Notons F' un domaine fondamental de $\Gamma_0(m')$. Prenons $\{\sigma_j, j \in J\}$ un ensemble de représentants de $\Gamma_0(m')/\Gamma_0(q)$ (d'après ce qui précède J est de cardinal $\nu(q)/\nu(m')$) ; d'après [5, p 32], on a $\bigcup_{j\in J} \sigma_j(F')$ est un domaine fondamental de $\Gamma_0(q)$ ainsi :

$$\begin{aligned} \|f\|_q^2 &= \int_{\bigcup_{j\in J}\sigma_j(F')} |f(z)|^2 y^k \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2} \\ &= \sum_{j\in J} \int_{\sigma_j(F')} |f(z)|^2 y^k \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2} \end{aligned}$$

avec les changements de variables $z \mapsto \sigma_j^{-1}(z)$, on obtient, puisque $y^{-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ est $SL(2,\mathbb{R})$-invariante :

$$\|f\|_q^2 = \sum_{j\in J} \int_{F'} |f(\sigma_j z)|^2 (\Im m\, \sigma_j(z))^k \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}.$$

On utilise alors la relation (1) pour obtenir :

$$\|f\|_q^2 = \mathrm{Card}(J) \int_{F'} |f(z)|^2 y^k \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}.$$

Connaissant désormais la valeur de Card(J), on obtient :

$$\|f\|_q^2 = \frac{\nu(q)}{\nu(m')}\|f\|_{m'}^2.$$

Ce qui donne enfin (à l'aide de l'égalité (16)) :

$$\omega_q(f) = \begin{cases} \dfrac{\omega_{m'}(f)}{\ell} & \text{si } m' > 1, \\ \dfrac{\omega_1(f)}{\nu(q)} & \text{si } m' = 1. \end{cases}$$

Cela achève la démonstration. □

Le résultat suivant sera également utile :

Lemme 10. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 1$. Soit $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$ avec $q = \ell m'$. Alors les coefficients $x_d(1, f)$ (pour $d \mid \ell$) définis de* (26) *à* (29) *vérifient*

$$\sum_{d\mid\ell} x_d(1,f)^2 = \big(1 - \mu(m')^2/\mathfrak{p}^2\big)^{-\omega(\ell)} \quad (m' > 1), \tag{53}$$

$$\sum_{d\mid q} x_d(1,f)^2 \ll 1 \quad (m' = 1). \tag{54}$$

La constante impliquée est absolue.

Démonstration. Commençons par le cas $m' > 1$. D'après (26)-(27) et le fait que $\ell \mid \mathfrak{p}^\infty$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{d\mid\ell} x_d(1,f)^2 &= \sum_{d\mid\ell} \frac{\mu(d)^2\lambda_f(d)^2}{d\rho_{f,m'}(d)} = \left(1 + \frac{\lambda_f(\mathfrak{p})^2}{\mathfrak{p}\rho_{f,m'}(\mathfrak{p})}\right)^{\omega(\ell)} \\ &= \frac{1}{\rho_{f,m'}(\mathfrak{p})^{\omega(\ell)}} = \frac{1}{\rho_{f,m'}(\ell)}. \end{aligned} \tag{55}$$

D'autre part, les relations (27) et (8) nous permettent d'écrire

$$\rho_{f,m'}(\ell) = \left(1 - \frac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}^2}\right)^{\omega(\ell)} \qquad (m' > 1). \tag{56}$$

En conclusion, d'après (55) et (56), si $m' > 1$:

$$\sum_{d\mid\ell} x_d(1,f)^2 = \left(1 - \frac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}^2}\right)^{-\omega(\ell)}. \tag{57}$$

Passons au cas où $m' = 1$. D'après (28), $x_{\mathfrak{p}^r}(1, f) = 0$ pour tout $r \geqslant 3$ et donc :

$$\sum_{d\mid q} x_d(1,f)^2 = \sum_{d\mid\mathfrak{p}} x_d(1,f)^2 + (x_{\mathfrak{p}^2}(1,f))$$

le terme entre parenthèses n'existant que si $q \geqslant \mathfrak{p}^2$.

D'après (28) et avec les notations précédentes, on obtient

$$\sum_{d|q} x_d(1,f)^2 = 1 + \frac{P_1^2(\lambda_f(\mathfrak{p}))}{\mathfrak{p}}\sigma_f + \left(\frac{1}{\mathfrak{p}^2(1-\mathfrak{p}^{-2})\sigma_f}\right).$$

À l'aide de l'expression (29) de σ_f, on a :

$$\sum_{d|q} x_d(1,f)^2 = \frac{1}{\sigma_f} + \left(\frac{1}{(\mathfrak{p}^2-1)\sigma_f}\right)$$

ce qui donne si $m'=1$:

$$\sum_{d|q} x_d(1,f)^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_f} & \text{si } q=\mathfrak{p}, \\ \dfrac{1}{(1-\mathfrak{p}^{-2})\sigma_f} & \text{si } q \geqslant \mathfrak{p}^2. \end{cases} \tag{58}$$

Ce résultat et la minoration (52) montrent que si $m'=1$ alors

$$\sum_{d|q} x_d(1,f)^2 \ll 1. \tag{59}$$

Cela achève la démonstration. □

On en vient au résultat liant $\Delta_q(m,n)$ et $\Delta_q^*(m,n)$:

Lemme 11. *Soient $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q=\mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 1$. Alors pour tous entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ tels que $\mathfrak{p} \nmid mn$, on a*

$$\Delta_q(m,n) = \sum_{\substack{q=\ell m' \\ m'>1}} \frac{1}{\ell}\left(1-\frac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}^2}\right)^{-\omega(\ell)} \Delta_{m'}^*(m,n) + O\left(\frac{\tau(m)\tau(n)}{q}\right), \tag{60}$$

$$\Delta_q^*(m,n) = \sum_{\substack{q=\ell m' \\ m'>1}} \mu(\ell)\left(\mathfrak{p}-\frac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}}\right)^{-\omega(\ell)} \Delta_{m'}(m,n) + O\left(\frac{\tau(m)\tau(n)}{q}\right). \tag{61}$$

Les constantes impliquées sont absolues.

Démonstration. Rappelons que si $q=\ell m'$, si ℓ est un diviseur de q, d un diviseur de ℓ et qu'on a $f \in \mathrm{H}_k^*(m')$ alors

$$f_d = \sum_{c|\ell} x_d(c,f) f_{|c}$$

donc

$$f_d(z) = \sum_{c|\ell} c^{k/2} x_d(c,f) f(cz).$$

Rappelons que $a_g(j)$ désigne le j-ème coefficient de Fourier d'une forme parabolique g, on a alors

$$a_{f_d}(j) = \sum_{\substack{c|\ell \\ j=rc}} c^{k/2} x_d(c,f) a_f(r).$$

Ainsi si $\mathfrak{p} \nmid j$ alors $a_{f_d}(j) = x_d(1,f) a_f(j)$ et avec (3) on a (puisque $\mathfrak{p} \nmid mn$)

$$\lambda_{f_d}(j) = x_d(1,f)\lambda_f(j) \quad (j = m,n). \tag{62}$$

Utilisons maintenant la relation (24), avec les termes f_d désignant les éléments d'une base orthogonale de $S_k(\ell, f)$ dans le sens du Lemme 8 :

$$\Delta_q(m,n) = \sum_{q=\ell m'} \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(m')} \sum_{d|\ell} \omega_q(f_d)\lambda_{f_d}(m)\lambda_{f_d}(n).$$

Étant donné que le Lemme 8 donne $\|f_d\|_q = \|f\|_q$ pour tout $d \geqslant 1$ alors d'après (16), on a pour tout $d \geqslant 1$: $\omega_q(f_d) = \omega_q(f)$. D'après (62), on a :

$$\begin{aligned}\Delta_q(m,n) &= \sum_{q=\ell m'} \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(m')} \omega_q(f) \sum_{d|\ell} \lambda_{f_d}(m)\lambda_{f_d}(n)\\ &= \sum_{q=\ell m'} \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(m')} \omega_q(f)\lambda_f(m)\lambda_f(n) \sum_{d|\ell} x_d(1,f)^2.\end{aligned}$$

D'après le Lemme 8, les coefficients $x_d(c,f)$ diffèrent que m' soit égal ou pas à 1, on va donc distinguer les 2 cas dans le calcul de Δ_q :

$$\begin{aligned}\Delta_q(m,n) = &\sum_{\substack{q=\ell m'\\ m'>1}} \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(m')} \omega_q(f)\lambda_f(m)\lambda_f(n) \sum_{d|\ell} x_d(1,f)^2\\ &+ \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(1)} \omega_q(f)\lambda_f(m)\lambda_f(n) \sum_{d|q} x_d(1,f)^2.\end{aligned} \tag{63}$$

On utilise alors le Lemme 10 qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\Delta_q(m,n) = &\sum_{\substack{q=\ell m'\\ m'>1}} \left(1 - \frac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}^2}\right)^{-\omega(\ell)} \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(m')} \omega_q(f)\lambda_f(m)\lambda_f(n)\\ &+ \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(1)} \omega_q(f)\lambda_f(m)\lambda_f(n) \sum_{d|q} x_d(1,f)^2.\end{aligned} \tag{64}$$

Afin de faire apparaitre dans (64) les nombres $\Delta^*_{m'}$ exprimons $\omega_q(f)$ en fonction de $\omega_{m'}(f)$, on a alors recours au Lemme 9, ce résultat appliqué à (64), donne :

$$\begin{aligned}\Delta_q(m,n) = &\sum_{\substack{q=\ell m'\\ m'>1}} \frac{1}{\ell}\left(1 - \frac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}^2}\right)^{-\omega(\ell)} \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(m')} \omega_{m'}(f)\lambda_f(m)\lambda_f(n)\\ &+ \frac{1}{\nu(q)} \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(1)} \omega_1(f)\lambda_f(m)\lambda_f(n) \sum_{d|q} x_d(1,f)^2\\ = &\sum_{\substack{q=\ell m'\\ m'>1}} \frac{1}{\ell}\left(1 - \frac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}^2}\right)^{-\omega(\ell)} \Delta^*_{m'}(m,n)\\ &+ \frac{1}{\nu(q)} \sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(1)} \omega_1(f)\lambda_f(m)\lambda_f(n) \sum_{d|q} x_d(1,f)^2.\end{aligned} \tag{65}$$

Il reste à majorer la valeur absolue du dernier terme de cette égalité. Pour cela on utlise les majorations classiques $|\lambda_f(j)| \leqslant \tau(j)$ pour $j \geqslant 1$. De plus avec la majoration absolue (59), l'égalité (65) devient

$$\begin{aligned}\Delta_q(m,n) = &\sum_{\substack{q=\ell m'\\ m'>1}} \frac{1}{\ell}\left(1-\frac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}^2}\right)^{-\omega(\ell)} \Delta^*_{m'}(m,n)\\ &+O\biggl(\frac{\tau(m)\tau(n)}{\nu(q)}\sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(1)}\omega_1(f)\biggr).\end{aligned} \tag{66}$$

Pour calculer la dernière somme on utilise le Lemme 4 appliqué au cas $q = m = n = 1$ ce qui donne

$$\sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(1)}\omega_1(f) = 1 + O(k^{-4/3})$$

Les deux égalités précédentes donnent bien l'égalité (60). Par inversion de Möbius, il est rapide de vérifier (61). Ceci termine la preuve du Lemme 11. □

2.3. **Fin de la preuve du Théorème 2.** D'abord on traite le cas où $\mathfrak{p} \mid mn$ et $\nu \geqslant 1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathfrak{p} \mid m$. À l'aide de (7) et (8), on voit que

$$\lambda_f(m) = \lambda_f(\mathfrak{p})\lambda_f(m/\mathfrak{p}) = 0.$$

Ainsi par la définition de Δ_q^*, on a $\Delta_q^*(m,n) = 0$.

Ensuite on suppose que $\mathfrak{p} \nmid mn$ et $\nu \geqslant 2$. En reportant (23) dans (61) et en remarquant que

$$\sum_{\substack{\ell m'=q\\ m'>1}} \mu(\ell)\left(\mathfrak{p}-\frac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}}\right)^{-\omega(\ell)} = \phi(\nu,\mathfrak{p}),$$

on obtient

$$\Delta_q^*(m,n) = \phi(\mathfrak{p},\nu)\delta_{m,n} + O\left(\frac{\tau(m)\tau(n)}{q}\right) + \mathscr{R}_1,$$

où

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_1 &\ll \frac{\sqrt{mn}\{\log(2(m,n))\}^2}{k^{4/3}} \sum_{\substack{\ell m'=q\\ m'>1}} \frac{|\mu(\ell)|}{m'^{3/2}}\left(\mathfrak{p}-\frac{\mu(m')^2}{\mathfrak{p}}\right)^{-\omega(\ell)}\\ &\ll \frac{\sqrt{mn\mathfrak{p}^{1-\delta_{\nu,1}}}\{\log(2(m,n))\}^2}{k^{4/3}q^{3/2}}.\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration.

3. Lemmes auxiliaires

Soient $\zeta(s)$ la fonction de Riemann et

$$\zeta^{(q)}(s) := \zeta(s)\prod_{p\mid q}\left(1-p^{-s}\right). \tag{67}$$

3.1. **Fonctions $U(y)$ et $T(y)$.** Soit G est un polynôme pair de degré $\geqslant 2$ tel que :

$$G(0)=1 \qquad \text{et} \qquad G(-1)=G(-2)=0. \tag{68}$$

Pour $y>0$, on définit

$$T(y):=\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\frac{\Gamma(s+k/2)}{\Gamma(k/2)}\frac{G(s)}{s}y^{-s}\mathrm{d}s, \tag{69}$$

$$U(y):=\frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int_{(2)}\zeta^{(q)}(1+2s)\frac{\Gamma(s+k/2)^2}{\Gamma(k/2)^2}\frac{G(s)^2}{s}y^{-s}\mathrm{d}s. \tag{70}$$

Lemme 12. *Sous les notations précédentes, on a*

$$\begin{cases} T(y)=1+O_k(y) & \text{si } y\to 0,\\ T(y)\ll_{j,k} y^{-j} & \text{si } y\to\infty, \end{cases} \tag{71}$$

et

$$\begin{cases} U(y)=\dfrac{\varphi(q)}{q}\left\{\log\dfrac{1}{y}+g_k(\mathfrak{p})+O_k(y)\right\} & \text{si } y\to 0,\\ U(y)\ll_{j,k} y^{-j} & \text{si } y\to\infty, \end{cases} \tag{72}$$

pour tout j réel >0, où

$$g_k(\mathfrak{p}):=2\left(\frac{\log\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1}+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(k/2)+\gamma\right) \tag{73}$$

et γ est la constante d'Euler.

Démonstration. On ne va démontrer que la formule asymptotique pour $U(y)$ quand $y\to 0$. Les autres peuvent être trouvées dans [8, Paragraphe 2.4]. En désignant par $\zeta(s)$ la fonction de Riemann, on a

$$\zeta(1+s)=\frac{1}{s}+\sum_{0\leqslant i\leqslant 2}\frac{(-1)^i}{i!}\gamma_i s^i+O(s^3), \tag{74}$$

où γ_i désignent les constantes de Stieltjes. [4] D'autre part, on peut écrire

$$1-\mathfrak{p}^{-(1+s)}=\frac{\varphi(q)}{q}\left\{1+\sum_{1\leqslant j\leqslant 3}\frac{(-1)^{j+1}}{j!}\frac{(\log\mathfrak{p})^j}{\mathfrak{p}-1}s^j+O(s^4)\right\}. \tag{75}$$

Donc

$$\begin{aligned}\zeta^{(q)}(1+2s)&=\big(1-\mathfrak{p}^{-(1+2s)}\big)\zeta(1+2s)\\ &=\frac{\varphi(q)}{q}\left(\frac{1}{2s}+\frac{\log\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1}+\gamma+O(s)\right).\end{aligned}$$

Ceci implique la formule annoncée. □

[4] Ces nombres sont définis par

$$\gamma_i:=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(\log k)^i}{k}-\frac{(\log n)^{i+1}}{i+1}\right).$$

En particulier $\gamma_0=\gamma$.

3.2. **Lemme intermédiaire.** Nous aurons besoin des estimations suivantes dans le calcul du troisième moment.

Lemme 13. *Soient $i, j \in \mathbb{N}$ et $\theta > 1$. On a*

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(n)^i (\log n)^j = C_i x (\log x)^{2^i+j-1} + O\big(x(\log x)^{2^i+j-2}\big), \tag{76}$$

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\tau(n)^i (\log n)^j}{\sqrt{n}} = 2C_i \sqrt{x} (\log x)^{2^i+j-1} + O\big(\sqrt{x}(\log x)^{2^i+j-2}\big), \tag{77}$$

$$\sum_{n > x} \frac{\tau(n)^i (\log n)^j}{n^\theta} \ll \frac{(\log x)^{2^i+j-1}}{x^{\theta-1}} \tag{78}$$

uniformément pour $x \geqslant 3$, où C_i est une constante absolue.

Démonstration. En utilisant la formule asymptotique

$$D_i(t) := \sum_{n \leqslant t} \tau(n)^i = C_i t (\log t)^{2^i-1} + O\big(t(\log t)^{2^i-2}\big),$$

une simple intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leqslant x} \tau(n)^i (\log n)^j &= \int_{1-}^{x} (\log t)^j \mathrm{d}D_i(t) \\
&= (\log x)^j D_i(x) - j \int_1^x \frac{(\log t)^{j-1}}{t} D_i(t) \mathrm{d}t \\
&= C_i x (\log x)^{2^i+j-1} + O\big(x(\log x)^{2^i+j-2}\big).
\end{aligned}$$

L'estimation (77) peut être démontrée par la même méthode.

De même, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n > x} \frac{\tau(n)^i (\log n)^j}{n^\theta} &= \int_x^\infty \frac{(\log t)^j}{t^\theta} \mathrm{d}D_i(t) \\
&= -\frac{(\log x)^j}{x^\theta} D_i(x) + \int_x^\infty \frac{\theta(\log t)^j - j(\log t)^{j-1}}{t^{\theta+1}} D_i(t) \mathrm{d}t \\
&\ll \frac{(\log x)^{2^i+j-1}}{x^{\theta-1}}.
\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration. □

4. Calcul du deuxième moment

Le but de ce paragraphe est de calculer le deuxième moment M_2, défini en (19). Notre résultat est un peu plus général. En posant

$$M_{r,m} = \sum_{f \in \mathrm{H}_k^*(q)}^{\mathrm{h}} \lambda_f(m) L(\tfrac{1}{2}, f)^r, \tag{79}$$

nous avons le résultat suivant.

Proposition 14. *Soient $0 < \eta < 1$, $k \geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q = \mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu \geqslant 3$. Pour tout $1 \leqslant m \leqslant q^\eta$ et $\mathfrak{p} \nmid m$, on a*

$$M_{2,m} = \frac{\tau(m)}{\sqrt{m}} \left(\frac{\varphi(q)}{q} \right)^2 \left\{ \log\left(\frac{\hat{q}^2}{m} \right) + g_k(\mathfrak{p}) \right\} + O_{k,\mathfrak{p}}\big(q^{-(1-\eta)/2} (\log q)^4\big),$$

où $g_k(\mathfrak{p})$ est définie en (73). En particulier

$$M_2 = \left(\frac{\varphi(q)}{q} \right)^2 \big\{ \log(\hat{q}^2) + g_k(\mathfrak{p}) \big\} + O_{k,\mathfrak{p}}\big(q^{-(1-\eta)/2} (\log q)^4\big).$$

Démonstration. Considérons :

$$J := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{(2)} \Lambda(s + \tfrac{1}{2}, f)^2 G(s)^2 \frac{\mathrm{d}s}{s},$$

où G est un polynôme de degré $\geqslant 2$ vérifiant (68). Par le théorème des résidus, l'équation fonctionnelle (12) et le fait que [5] $\varepsilon_f^2 = 1$, on a

$$2J = \operatorname*{Res}_{s=0} \left(\Lambda(s + \tfrac{1}{2}, f)^2 \frac{G(s)^2}{s} \right) = \hat{q} \Gamma(k/2)^2 L(\tfrac{1}{2}, f)^2.$$

D'autre part, la formule (6) nous permet d'écrire, avec la notation (67),

$$\begin{aligned} L(s + \tfrac{1}{2}, f)^2 &= \sum_{a,b \geqslant 1} \frac{\lambda_f(a) \lambda_f(b)}{(ab)^{s+1/2}} \\ &= \sum_{a,b \geqslant 1} \frac{1}{(ab)^{s+1/2}} \sum_{\substack{d \mid (a,b) \\ (d,q)=1}} \lambda_f\left(\frac{ab}{d^2} \right) \\ &= \zeta^{(q)}(1 + 2s) \sum_{n \geqslant 1} \frac{\tau(n) \lambda_f(n)}{n^{s+1/2}} \qquad (\Re e\, s > \tfrac{1}{2}). \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$2J = \hat{q} \sum_{n \geqslant 1} \frac{\tau(n) \lambda_f(n)}{\sqrt{n}} \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_{(2)} \Gamma(s + k/2)^2 \frac{G(s)^2}{s} \left(\frac{n}{\hat{q}^2} \right)^{-s} \mathrm{d}s.$$

Les deux égalités précédentes donnent donc :

$$L(\tfrac{1}{2}, f)^2 = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\tau(n)}{\sqrt{n}} U\left(\frac{n}{\hat{q}^2} \right) \lambda_f(n) \tag{80}$$

où $U(y)$ est définie en (70). En reportant cette expression dans (79) et en utilisant le Corollaire 3, il suit

$$M_{2,m} = \frac{\varphi(q)}{q} \frac{\tau(m)}{\sqrt{m}} U\left(\frac{m}{\hat{q}^2} \right) + O_{k,\mathfrak{p}}(\mathscr{R}_2), \tag{81}$$

où

$$\mathscr{R}_2 := \sum_{n \geqslant 1} \frac{\tau(n)}{\sqrt{n}} \left| U\left(\frac{n}{\hat{q}^2} \right) \right| \left(\frac{\sqrt{mn} \{\log(2(m,n))\}^2}{q^{3/2}} + \frac{\tau(m) \tau(n)}{q} \right).$$

[5] C'est cette relation qui permet d'éviter le recours à une forme explicite de ε_f que l'on n'a pas au niveau q avec des facteurs carrés. C'est aussi pour cette raison que l'on ne peut actuellement pas avoir l'ordre exact du premier moment M_1 mais au mieux une majoration.

À l'aide de (72), il est facile de majorer la contribution du premier membre dans la parenthèse :

$$\begin{aligned}&\ll \frac{\sqrt{m}(\log q)^3}{q^{3/2}}\sum_{n\leqslant q}\tau(n)+\sqrt{mq}(\log q)^2\sum_{n>q}\frac{\tau(n)}{n^2}\\&\ll \frac{\sqrt{m}(\log q)^4}{q^{1/2}}.\end{aligned}$$

De même la contribution de $\tau(m)\tau(n)/q$ est $\ll \tau(m)(\log q)^4/\sqrt{q}$. Ces deux estimations impliquent que

$$\mathscr{R}_2 \ll_{k,\mathfrak{p}} q^{-(1-\eta)/2}(\log q)^4.$$

En reportant dans (81) et en utilisant la première relation de (72), on obtient le résultat souhaité. □

5. Calcul du troisième moment

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant.

Proposition 15. *Soient $k\geqslant 2$ un entier pair, $\mathfrak{p}$ un nombre premier et $q=\mathfrak{p}^\nu$ avec $\nu\geqslant 3$. On a*

$$M_3=4\left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^4\left\{\frac{1}{3}(\log\hat{q})^3+\left(2\frac{\log\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1}+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(k/2)+2\gamma\right)(\log\hat{q})^2+O_{k,\mathfrak{p}}(\log q)\right\},$$

où la constante implquée ne dépend que de k et $\mathfrak{p}$.

5.1. Début de la démonstration de la Proposition 15.

Lemme 16. *Soient $k\geqslant 2$ un entier pair et $m,n,q\geqslant 1$ des entiers positifs. Alors*

$$M_3=2\sum_{m,n\geqslant 1}\frac{\tau(m)}{\sqrt{mn}}U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right)T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right)\Delta_q^*(m,n). \tag{82}$$

Démonstration. On considère maintenant l'intégrale

$$I=\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{(2)}\Lambda(s+\tfrac12,f)\frac{G(s)}{s}\mathrm{d}s.$$

A l'aide de l'équation fonctionnelle (12), le théorème des résidus nous permet d'écrire

$$(1+\varepsilon_f)I=\operatorname*{Res}_{s=0}\left(\Lambda(s+\tfrac12,f)\frac{G(s)}{s}\right)=\sqrt{\hat{q}}L(\tfrac12,f)\Gamma(k/2).$$

Cette égalité et la série de Dirichlet (9) donnent alors

$$L(\tfrac12,f)=(1+\varepsilon_f)\sum_{n\geqslant 1}\frac{\lambda_f(n)}{\sqrt{n}}T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right). \tag{83}$$

Les égalités [6](83) et (80) impliquent que

$$L(\tfrac12,f)^3=(1+\varepsilon_f)\sum_{m\geqslant 1}\tau(m)\frac{\lambda_f(m)}{\sqrt{m}}U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right)\sum_{n\geqslant 1}\frac{\lambda_f(n)}{\sqrt{n}}T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right).$$

[6]C'est la différence entre les égalités (83) et (80) qui empêche de déterminer l'ordre exact du premier moment des fonctions L-automorphes et qui nous conduit à étudier plutôt M_2 et M_3.

Si $\varepsilon_f = 1$ alors

$$L(\tfrac{1}{2}, f)^3 = 2\sum_{m\geqslant 1} \tau(m)\frac{\lambda_f(m)}{\sqrt{m}}U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right)\sum_{n\geqslant 1}\frac{\lambda_f(n)}{\sqrt{n}}T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right).$$

Mais ceci reste également vrai si $\varepsilon_f = -1$: dans ce cas le membre de gauche est nul en vertu de l'équation fonctionnelle (12) qui impose alors $L(\frac{1}{2}, f) = 0$; le membre de droite aussi est nul, en effet, de $L(\frac{1}{2}, f) = 0$ on déduit $L(\frac{1}{2}, f)^2 = 0$ et donc

$$\sum_{m\geqslant 1} \tau(m)\frac{\lambda_f(m)}{\sqrt{m}}U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right) = 0$$

grâce à (80).

Finalement, on a pour toute forme primitive de niveau q :

$$L(\tfrac{1}{2}, f)^3 = 2\sum_{m,n\geqslant 1} \frac{\tau(m)}{\sqrt{mn}}U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right)T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right)\lambda_f(m)\lambda_f(n). \tag{84}$$

Ce qui implique le résultat désiré. $\square$

5.2. **Application de la formule de trace.** En appliquant la formule de trace du Corollaire 3 à l'égalité (82), on peut écrire

$$M_3 = 2\frac{\varphi(q)}{q}\sum_{n\geqslant 1}^{*} \frac{\tau(n)}{n}T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right)U\left(\frac{n}{\hat{q}^2}\right) + O_{k,\mathfrak{p}}(\mathscr{R}_3 + \mathscr{R}_4) \tag{85}$$

avec

$$\mathscr{R}_3 := \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{\tau(m)\{\log 2(m,n)\}^2}{q^{3/2}}\left|T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right)U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right)\right|,$$

$$\mathscr{R}_4 := \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{\tau(m)^2\tau(n)}{q\sqrt{mn}}\left|T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right)U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right)\right|,$$

où $\sum_{n\geqslant 1}^{*}$ désigne la somme portant sur les entiers n tels que $(n, q) = 1$.

5.3. **Évaluation du terme principal.** Afin de calculer le premier terme de droite de (85), écrivons

$$\sum_{n\geqslant 1}^{*} \frac{\tau(n)}{n}T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right)U\left(\frac{n}{\hat{q}^2}\right) = \left(\sum_{n\leqslant q}^{*} + \sum_{n> q}^{*}\right)\frac{\tau(n)}{n}T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right)U\left(\frac{n}{\hat{q}^2}\right). \tag{86}$$

En faisant appel à (71)-(72) avec $j = 1$ et (78), on a

$$\sum_{n> q}^{*} \frac{\tau(n)}{n}T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right)U\left(\frac{n}{\hat{q}^2}\right) \ll q^{3/2}\sum_{n>q}\frac{\tau(n)}{n^3} \ll q^{-1/2}\log q. \tag{87}$$

En utilisant la première relation de (72), on peut écrire

$$\sum_{n\leqslant q}^{*} \frac{\tau(n)}{n}T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right)U\left(\frac{n}{\hat{q}^2}\right) = \mathscr{T} + O(\mathscr{R}_5), \tag{88}$$

où

$$\mathscr{T} := \frac{\varphi(q)}{q}\sum_{n\leqslant q}^{*} \frac{\tau(n)}{n}T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right)\left\{\log\left(\frac{\hat{q}^2}{n}\right) + g_k(\mathfrak{p})\right\}$$

et

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_5 &:= \frac{1}{\hat{q}^2} \sum_{n\leqslant q}{}^{*} \tau(n) \left|T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right)\right| \\ &\ll \frac{1}{\hat{q}^2}\bigg(\sum_{n\leqslant \hat{q}} \tau(n) + \hat{q}^2 \sum_{\hat{q}<n\leqslant q}{}^{*} \frac{\tau(n)}{n^2}\bigg) \\ &\ll q^{-1/2}\log q\end{aligned} \tag{89}$$

grâce à (71), (76) et (78).

Pour évaluer le terme principal $\mathscr{T}$, on écrit, à l'aide de (69),

$$\mathscr{T} = \frac{\varphi(q)}{q}\big(\mathscr{T}_0 - \mathscr{R}_6\big),$$

où

$$\mathscr{T}_0 := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{(2)} \frac{\Gamma\left(s+\frac{k}{2}\right)}{\Gamma(\frac{k}{2})} \sum_{n\geqslant 1}{}^{*} \frac{\tau(n)}{n^{s+1}} \bigg\{ \log\left(\frac{\hat{q}^2}{n}\right) + g_k(\mathfrak{p}) \bigg\} \hat{q}^s \frac{G(s)}{s} \mathrm{d}s,$$

$$\mathscr{R}_6 := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{(2)} \frac{\Gamma\left(s+\frac{k}{2}\right)}{\Gamma(\frac{k}{2})} \sum_{n> q}{}^{*} \frac{\tau(n)}{n^{s+1}} \bigg\{ \log\left(\frac{\hat{q}^2}{n}\right) + g_k(\mathfrak{p}) \bigg\} \hat{q}^s \frac{G(s)}{s} \mathrm{d}s.$$

En utilisant l'estimation (78) du Lemme 13 pour majorer la somme dans $\mathscr{R}_6$ et la formule de Stirling

$$|\Gamma(s)| = \sqrt{2\pi}\, e^{-(\pi/2)|\tau|}|\tau|^{\sigma-1/2}\big\{1 + O_\sigma\big(|\tau|^{-1}\big)\big\} \tag{90}$$

valable uniformément pour $|\tau| \geqslant 1$, on peut déduire que

$$\mathscr{R}_6 \ll_k q^{-1}(\log q)^2. \tag{91}$$

Pour évaluer $\mathscr{T}_0$, on écrit d'abord

$$\begin{aligned}\mathscr{T}_0 = \big(\log \hat{q}^2 + g_k(\mathfrak{p})\big) \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{(2)} \frac{\Gamma(s+\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} \zeta^{(q)}(s+1)^2 \hat{q}^s \frac{G(s)}{s} \mathrm{d}s \\ + \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_{(2)} \frac{\Gamma(s+\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} \zeta^{(q)}(s+1)\zeta^{(q)\prime}(s+1) \hat{q}^s \frac{G(s)}{s} \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Ensuite on utilise le théorème des résidus autour du pôle $s = 0$, les intégrales résultantes en $\sigma = -\frac{1}{2}$ sont en $O_{k,\mathfrak{p}}(q^{-1/4}\log q)$ de sorte que

$$\begin{aligned}\mathscr{T}_0 = \big(2\log \hat{q} + g_k(\mathfrak{p})\big) \operatorname*{Res}_{s=0} \left(\zeta^{(q)}(s+1)^2 \frac{F(s)}{s}\right) \\ + 2 \operatorname*{Res}_{s=0} \left(\zeta^{(q)}(s+1)\zeta^{(q)\prime}(s+1) \frac{F(s)}{s}\right) + O_{k,\mathfrak{p}}(q^{-1/4}\log q)\end{aligned} \tag{92}$$

où

$$F(s) := \frac{\Gamma(s+\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} \hat{q}^s G(s).$$

Un calcul élémentaire montre que

$$F^{(j)}(0) = \sum_{0\leqslant i\leqslant j} \xi_{j,i} (\log \hat{q})^{j-i}, \tag{93}$$

où

$$\begin{aligned}
\xi_{j,0} &= 1 \quad (0 \leqslant j \leqslant 3),\\
\xi_{j,1} &:= j\frac{\Gamma'}{\Gamma}(k/2) \quad (1 \leqslant j \leqslant 3),\\
\xi_{j,2} &:= (2j-3)\left(\frac{\Gamma''}{\Gamma}(k/2) + G''(0)\right) \quad (2 \leqslant j \leqslant 3),\\
\xi_{3,3} &:= \frac{\Gamma'''}{\Gamma}(k/2) + 3\frac{\Gamma'}{\Gamma}(k/2)G''(0),
\end{aligned}$$

En utilisant les relations (74) et (75), on trouve

$$\zeta^{(q)}(s+1)^2 = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2 \left\{\frac{a_{-2}}{s^2} + \frac{a_{-1}}{s} + a_0 + O(s)\right\}, \tag{94}$$

$$\zeta^{(q)}(s+1)\zeta^{(q)\prime}(s+1) = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2 \left\{\frac{b_{-3}}{s^3} + \frac{b_{-2}}{s^2} + b_0 + O(s)\right\}, \tag{95}$$

où

$$\begin{aligned}
a_{-2} &:= 1,\\
a_{-1} &:= 2\frac{\log \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1} + 2\gamma_0,\\
a_0 &:= \left(\frac{\log \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1}\right)^2 - \frac{(\log \mathfrak{p})^2 - 4\gamma_0 \log \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1} + \gamma_0^2 - 2\gamma_1,\\
b_{-3} &:= -1,\\
b_{-2} &:= -\frac{\log \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1} - \gamma_0,\\
b_0 &:= -\frac{(\log \mathfrak{p})^3 - 2\gamma_0(\log \mathfrak{p})^2}{2(\mathfrak{p}-1)^2} + \frac{(\log \mathfrak{p})^3 - 6\gamma_0(\log \mathfrak{p})^2 + 6(\gamma_0^2 - 2\gamma_1)\log \mathfrak{p}}{6(\mathfrak{p}-1)}\\
&\quad - \gamma_0\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{2}.
\end{aligned}$$

Donc on a les résidus suivants :

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{s=0}\left(\zeta^{(q)}(s+1)^2\frac{F(s)}{s}\right) &= \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2\left(\frac{a_{-2}}{2}F''(0) + a_{-1}F'(0) + a_0F(0)\right),\\
\operatorname*{Res}_{s=0}\left(\zeta^{(q)}(s+1)\zeta^{(q)\prime}(s+1)\frac{F(s)}{s}\right) &= \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2\left(\frac{b_{-3}}{6}F'''(0) + \frac{b_{-2}}{2}F''(0) + b_0F(0)\right).
\end{aligned}$$

En reportant dans (92) et en utilisant (93), on obtient

$$\mathscr{T}_0 = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^2 Q(\log \hat{q}) + O_{k,\mathfrak{p}}(q^{-1/4}\log q), \tag{96}$$

où

$$Q(X) := A_3X^3 + A_2X^2 + A_1X + A_0, \tag{97}$$

et les constantes $A_j = A_j(k, \mathfrak{p})$ sont données par

$$A_3 := a_{-2}\xi_{2,0} + \tfrac{1}{3}b_{-3}\xi_{3,0},$$

$$A_2 := a_{-2}\xi_{2,1} + 2a_{-1}\xi_{1,0} + \tfrac{1}{2}a_{-2}\xi_{2,0}g_k(\mathfrak{p}) + \tfrac{1}{3}b_{-3}\xi_{3,1} + b_{-2}\xi_{2,0},$$

$$A_1 := a_{-2}\xi_{2,2} + 2a_{-1}\xi_{1,1} + 2a_0\xi_{0,0} + (\tfrac{1}{2}a_{-2}\xi_{2,1} + a_{-1}\xi_{1,0})g_k(\mathfrak{p}) + \tfrac{1}{3}b_{-3}\xi_{3,2} + b_{-2}\xi_{2,1},$$

$$A_0 := (\tfrac{1}{2}a_{-2}\xi_{2,2} + a_{-1}\xi_{1,1} + a_0\xi_{0,0})g_k(\mathfrak{p}) + \tfrac{1}{3}b_{-3}\xi_{3,3} + b_{-2}\xi_{2,2} + 2b_0\xi_{0,0}.$$

En combinant (96), (89), (91), (88), (87) avec (86), on trouve

$$\sum_{n\geqslant 1}{}^{*} \frac{\tau(n)}{n} T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right) U\left(\frac{n}{\hat{q}^2}\right) = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^3 Q(\log \hat{q}) + O_{k,\mathfrak{p}}(q^{-1/4}\log q). \tag{98}$$

5.4. **Estimation pour le terme d'erreur $\mathscr{R}_3$.** Écrivons

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_3 &= \frac{1}{q^{3/2}} \sum_{a\geqslant 1} \{\log(2a)\}^2 \sum_{\substack{m,n\geqslant 1\\ (m,n)=a}} \tau(m) \left| T\left(\frac{n}{\hat{q}}\right) U\left(\frac{m}{\hat{q}^2}\right)\right| \\
&= \frac{1}{q^{3/2}} \sum_{a\geqslant 1} \{\log(2a)\}^2 \sum_{\substack{m,n\geqslant 1\\ (m,n)=1}} \tau(am) \left| T\left(\frac{an}{\hat{q}}\right) U\left(\frac{am}{\hat{q}^2}\right)\right| \\
&\ll \frac{1}{q^{3/2}} \sum_{a\geqslant 1} \{\log(2a)\}^2 \sum_{b\geqslant 1} |\mu(b)| \sum_{m,n\geqslant 1} \tau(abm) \left| T\left(\frac{abn}{\hat{q}}\right) U\left(\frac{abm}{\hat{q}^2}\right)\right| \\
&\ll \frac{1}{q^{3/2}} \sum_{d\geqslant 1} h(d)\tau(d) \sum_{n\geqslant 1} \left| T\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right)\right| \sum_{m\geqslant 1} \tau(m) \left| U\left(\frac{dm}{\hat{q}^2}\right)\right|,
\end{aligned}$$

où

$$h(d) := \sum_{ab=d} \{\log(2a)\}^2 |\mu(b)|.$$

En utilisant (71), on a :

$$\sum_{n\geqslant 1} \left| T\left(\frac{dn}{\hat{q}}\right)\right| \ll \sum_{n\leqslant \hat{q}/d} 1 + \sum_{n>\max\{\hat{q}/d,1\}} \left(\frac{\hat{q}}{dn}\right)^2 \ll \frac{\hat{q}}{d}.$$

De façon similaire, les estimations (72) avec $j = 2$, (76) et (78) nous permettent de déduire

$$\begin{aligned}
\sum_{m\geqslant 1} \tau(m) \left| U\left(\frac{dm}{\hat{q}^2}\right)\right| &\ll \sum_{m\leqslant \hat{q}^2/d} \tau(m) \log\left(\frac{\hat{q}^2}{dm}\right) + \sum_{m>\max\{\hat{q}^2/d,1\}} \tau(m) \left(\frac{\hat{q}^2}{dm}\right)^2 \\
&\ll \frac{\hat{q}^2 \log q}{d}.
\end{aligned}$$

En combinant ces estimations, on obtient

$$\mathscr{R}_3 \ll (\log q) \sum_{d\geqslant 1} \frac{h(d)\tau(d)}{d^2} \ll \log q. \tag{99}$$

5.5. **Estimation pour le terme d'erreur $\mathscr{R}_4$.** Appliquant (71) avec $j = 2$ et (77)-(78), on a

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\tau(n)}{\sqrt{n}}\left|T\left(\frac{n}{\hat q}\right)\right| \ll \sum_{n\leqslant \hat q}\frac{\tau(n)}{\sqrt{n}}+\hat q^2\sum_{n>\hat q}\frac{\tau(n)}{n^{5/2}} \ll q^{1/4}\log q. \tag{100}$$

De même (72) avec $j = 2$, (77) et (78) impliquent

$$\sum_{m\geqslant 1}\frac{\tau(m)^2}{\sqrt{m}}\left|U\left(\frac{m}{\hat q^2}\right)\right| \ll \log q\sum_{m\leqslant \hat q^2}\frac{\tau(m)^2}{\sqrt{m}}+\hat q^4\sum_{m>\hat q^2}\frac{\tau(m)^3}{m^{5/2}} \ll q^{1/2}(\log q)^7. \tag{101}$$

En combinant (100) et (101), on obtient :

$$\mathscr{R}_4 \ll q^{-1/4}(\log q)^8. \tag{102}$$

5.6. **Fin de la démonstration de la Proposition 15.** En reportant (98), (102) et (99) dans (85), on obtient

$$M_3 = 2\left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^4 Q(\log \hat q) + O_{k,\mathfrak{p}}(\log q).$$

Un calcul élémentaire montre que

$$A_3 = \frac{2}{3}, \qquad A_2 = 2\left(2\frac{\log \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1}+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(k/2)+2\gamma\right).$$

Ceci implique le résultat annoncé.

6. Démonstration du Théorème 1

On utilise l'inégalité de Hölder, selon laquelle :

$$\Bigg(\sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)} L(\tfrac12,f)^2\Bigg)^3 \leqslant \Bigg(\sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{f\in \mathrm{H}_k^*(q)} L(\tfrac12,f)^3\Bigg)^2 \sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^*(q)\\ L(\frac12,f)\neq 0}} 1.$$

On en déduit :

$$\sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^*(q)\\ L(\frac12,f)\neq 0}} 1 \geqslant \frac{M_2^3}{M_3^2}.$$

Utilisons les Propositions 14-15 pour obtenir avec l'inégalité précédente :

$$\sideset{}{^{\mathrm{h}}}\sum_{\substack{f\in \mathrm{H}_k^*(q)\\ L(\frac12,f)\neq 0}} 1 \gg_{k,\mathfrak{p}} \frac{\big((\varphi(q)/q)^2\log q+O(1)\big)^3}{(\log q)^6} \gg_{k,\mathfrak{p}} \frac{1}{(\log q)^3}$$

ce qui termine la preuve du Théorème 1.

Références

[1] J. Cogdell & P. Michel, *On the complex moments of symmetric power L-functions at $s = 1$*, IMRN **31** (2004), 1561–1618.

[2] J.-M Deshouillers & H. Iwaniec, *Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms*, Invent. Math. **70** (1982/83), no. 2, 219–288.

[3] W. Duke, *The critical order of vanishing of automorphic L-functions with large level*, Invent. Math. **119** (1995), 165–174.

[4] B. H. Gross & D. B Zagier, *Heegner points and derivatives of L-series*, Invent. Math. **84** (1986), 225–320.

[5] H. Iwaniec, *Topics in classical automorphic forms*, Graduate Studies in Mathematics 17, AMS, 1997.

[6] H. Iwaniec, W. Luo & P. Sarnak, *Low Lying Zeros of Families of L-Functions*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **91** (2001), 55–131.

[7] H. Iwaniec & P. Sarnak, *The non-vanishing of central values of automorphic L-functions and Landau-Siegel zeros*, Israel Journal of Mathematics **120** (2000), 155–177.

[8] E. Kowalski & P. Michel, *A lower bound for the rank of $J_0(q)$*, Acta Arith. **94** (2000), 303–343.

[9] E. Kowalski, P. Michel & J. Vanderkam, *Non-vanishing of high derivatives of automorphic L-functions at the center of the critical strip*, Journal fi¿$\frac{1}{2}$r die reine und angewandte Mathematik **526** (2000), 1–34.

[10] Y.-K. Lau & J. Wu, *A large sieve inequality of Elliott-Montgomery-Vaughan type and two applications*, IMRN, Vol. 2008, Number 5, Article ID rnm 162, 35 pages.

[11] E. Royer & J. Wu, *Taille des valeurs de fonctions L de carrés symétriques au bord de la bande critique*, *Rev. Mat. Iberoamericana* **21** (2005), 263–312.

[12] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, Presse Universitaire de France, 1970.

[13] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours Spécialisés N° 1. Société Mathématique de France, 1995. xv+457 pp.

[14] Jeffrey M. Vanderkam, *The rank of quotients of $J_0(N)$*, Duke Math. J. **97** (1999), 545–577.

Institut Elie Cartan Nancy, CNRS, Nancy-Université, INRIA, Boulevard des Aiguillettes, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France

E-mail address: rouymi@yahoo.fr