ÉQUIDISTRIBUTION ET DIFFÉRENTIABILITÉ

Huayi Chen

Résumé. — On propose un critère d'équidistribution par la différentiabilité de certains invariants arithmétiques. Combiné avec la méthode de pentes et les mesures asymptotiques, ce critère donne une nouvelle démonstration "conceptuelle" des résultats d'équidistribution obtenus initialement via le principe variationnel.

Abstract. — We propose a criterion of equidistribution by the differentiability of certain arithmetic invariants. Combined with the slope method and the asymptotic measures, this criterion gives a new "conceptual" proof to equidistribution results originally obtained via the variation principle.

Table des matières

1. Introduction

Dans les problèmes d'équidistribution de nature arithmétique, on s'intéresse au comportement asymptotique d'une suite de mesures définies par des points algébriques dans une variété projective sur un corps de nombres. L'approche arakelovienne de ces problèmes est proposée par Szpiro, Ullmo et Zhang. Basé sur le principe variationnel introduit dans leur article [**23**], des développements dans cette direction ont été menés dans des travaux comme [**24, 26, 2, 3, 10**] etc.

Soient K un corps de nombres et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Soit X une variété arithmétique projective sur $\operatorname{Spec} K$. On fixe un plongement σ de K dans $\mathbb{C}$. Si x est un point de X à valeur dans $\overline{K}$, alors il definit une mesure de probabilité borélienne

$$\eta_{x,\sigma} := \frac{1}{[K(x):K]} \sum_{\substack{\widetilde{\sigma}:K(x)\to\mathbb{C}\\ \widetilde{\sigma}|_K=\sigma}} \delta_{\sigma(x)} \tag{1}$$

sur X_σ^{an}, où pour tout $y \in X_\sigma^{\mathrm{an}}$, δ_y désigne la mesure de Dirac concentrée en y. On considère maintenant une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de points dans $X(\overline{K})$, dans le problème d'équidistribution, on cherche des conditions sous lesquelles la suite de mesure $(\eta_{x_n,\sigma})_{n\geqslant 1}$ converge faiblement, ou de façon équivalente, la suite d'intégrales $\big(\int_{X_\sigma^{\mathrm{an}}} f\,\mathrm{d}\eta_{x_n,\sigma}\big)_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathbb{R}$ pour toute fonction continue f sur X_σ^{an}.

Certainement la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ ne devrait pas être quelconque. Dans la pratique, on demande souvent la convergence de certaine fonction de hauteur évaluée en ces points. Dans la littérature, cette fonction de hauteur peut être construite soit en utilisant la théorie des hauteurs à la Weil, soit par la théorie d'Arakelov. Dans cet article, on adopte le deuxième point de vue. Dans la théorie d'Arakelov, les fonctions de hauteurs sont définies relativement aux fibrés inversibles adélique. On ne demande ici aucune condition de positivité ni de lissité aux métriques. Soit $\overline{L}$ un fibré inversible adélique sur X. Pour tout point algébrique $x \in X(\overline{K})$, l'image réciproque $x^*\overline{L}$ est un fibré inversible adélique sur $\operatorname{Spec} K(x)$, où $K(x)$ est le corps de définition de x. La hauteur de x par rapport à $\overline{L}$ est par définition le *degré d'Arakelov* normalisé $\widehat{\deg}_n(x^*\overline{L})$. L'avantage de cette approche est que la fonction de hauteur ainsi définie est automatiquement additive par rapport à $\overline{L}$, autrement dit, si $\overline{L}_1$ et $\overline{L}_2$ sont deux fibrés inversibles hermitiens sur X, alors

$$h_{\overline{L}_1\otimes\overline{L}_2}(x) = h_{\overline{L}_1}(x) + h_{\overline{L}_2}(x).$$

Soit $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés inversibles hermitiens sur X. Pour toute fonction continue f sur X_σ^{an}, on désigne par $\mathcal{O}_\sigma(f)$ le fibré inversible hermitien dont le fibré inversible sous-jacent est $\mathcal{O}_X$, dont la métrique en toute place autre que σ et $\overline{\sigma}$ est triviale, et tel que,

$$\forall\, x \in X_\sigma^{\mathrm{an}}, \quad \|\mathbf{1}_x\|_\sigma = e^{-f(x)}, \tag{2}$$

où $\mathbf{1}$ est la section de l'unité de $\mathcal{O}_X$. L'application $f \mapsto \mathcal{O}_\sigma(f)$ est en fait un homomorphisme du groupe (additif) des fonctions continues sur X_σ^{an} vers $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$. On désigne par $C_\sigma(X)$ l'image de cette application. Si $\underline{x} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de points algébriques dans X, on désigne par $\varphi_{\underline{x}} : \widehat{\mathrm{Pic}}(X) \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ la fonction définie par $\varphi_{\underline{x}}(\overline{L}) = \liminf\limits_{n\to+\infty} h_{\overline{L}}(x_n)$. Dans cet article, on établit le résultat suivant :

> *On suppose que $\overline{L}$ est un fibré inversible adélique tel que la suite $(h_{\overline{L}}(x_n))_{n\geqslant 1}$ converge. Alors la suite de mesure $(\eta_{x_n,\sigma})_{n\geqslant 1}$ converge faiblement si et seulement si la fonction $\varphi_{\underline{x}}$ est différentiable en $\overline{L}$ pour les directions dans $C_\sigma(X)$. En outre, la mesure limite coïncide à la dérivée de $\varphi_{\underline{x}}$.*

On précisera dans §3 la définition de la dérivabilité d'une fonction sur $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ et on expliquera que ce résultat — combiné avec un argument de convexité — permet d'unifier certaines preuves par le principe variationnel. En effet, pour établir la dérivabilité de la fonction $\varphi_{\underline{x}}$ en $\overline{L}$, il suffit de la minorer par une fonction ψ qui est différentiable en $\overline{L}$ et telle que $\varphi_{\underline{x}}(\overline{L}) = \psi(\overline{L})$. Ce critère est souple et demande aucune condition de positivité *a priori* sur les métrique du fibré adélique $\overline{L}$.

Un résultat de Zhang [**27**] permet de minorer $\varphi_{\underline{x}}(\overline{L})$ par la hauteur normalisée de X par rapport à $\overline{L}$ lorsque la suite $\underline{x}$ est générique. C'est un point clé dans les résultats d'équidistribution via le principe variationnel. Cependant, il semble que l'égalité entre $\varphi_{\underline{x}}(\overline{L})$ et la hauteur normalisée de X est une hypothèse très forte. Par exemple, elle implique que la mesure asymptotique de $\overline{L}$ est une mesure de Dirac, ou encore, le polygone de Harder-Narasimhan asymptotique est un morceau de droite. En outre, la différentiabilité de la hauteur normalisée de X par rapport à $\overline{L}$ est un point difficile, qui demande ou bien une condition de positivité à $\overline{L}$, ou bien des techniques analytiques comme par exemple le noyau de Bergman qui, me semble-t-il, n'a pas encore des analogues ultramétriques.

Il s'avère que la méthode de pentes à la Bost [**6, 7, 8**], appliquée à l'application d'évaluation en ces points, permet de facilement minorer $\varphi_{\underline{x}}(\overline{L})$ par la pente maximale asymptotique $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L})$, qui est la limite des pentes maximales normalisées des images directes des puissances tensorielles de $\overline{L}$. La pente maximale asymptotique est très liée à un invariant arithmétique appelé la *mesure asymptotique* de $\overline{L}$, notée $\nu_{\overline{L}}$ (voir [**12, 15, 13**]). C'est une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$. Cet invariant est défini pour tout les fibrés adéliques hermitiens $\overline{L}$ tels que L est gros. La pente maximale asymptotique est en fait la borne supérieure du support de $\nu_{\overline{L}}$. Lorsque $\overline{L}$ est arithmétiquement gros, ou de façon équivalente, $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) > 0$, on a les relations suivantes :

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{L}) \geqslant \int_{\mathbb{R}} \max\{x, 0\}\, \nu_{\overline{L}}(\mathrm{d}x) \geqslant \int_{\mathbb{R}} x\, \nu_{\overline{L}}(\mathrm{d}x), \tag{3}$$

où les deux intégrales sont respectivement égales au volume arithmétique (au sens de Moriwaki) normalisé et à la capacité sectionnelle normalisée. Cette dernière s'identifie à la hauteur normalisée de X lorsque $\overline{L}$ satisfait à certaines conditions de positivité. Le critère d'équidistribution mentionné plus haut et la différentiabilité de la fonction volume arithmétique établie dans [**14**] donnent une nouvelle démonstration "conceptuelle" des résultats d'équidistribution via le principe variationnel.

Le critère d'équidistribution suggère que, une meilleure compréhension sur le domaine de différentiabilité de la fonction $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}$ devrait conduire à des théorèmes d'équidistribution plus général.

L'article est organisé comme la suite. Dans le deuxième paragraphe, on rappelle des notions concernant les fibrés adéliques hermitiens. Dans le troisième paragraphe, on énonce et démontre le critère d'équidistribution. Ensuite, on discute dans le quatrième paragraphe les minorations de la limite inférieure des hauteurs. Enfin, dans le cinquième paragraphe, comme applications on interprète les preuves via le principe variationnel par le langage de différentiabilité et donne une nouvelle preuve.

Remerciements. Les résultats dans cet article ont été présentés dans une rencontre de l'ANR "Berkovich", je tiens à remercier les organisateurs et les participants. Je suis reconnaissant à D. Bertrand, J.-B. Bost, A. Chambert-Loir, C. Gasbarri, C. Mourougane et C. Soulé pour de très intéressantes discussions et remarques.

2. Rappels sur les fibrés inversibles adéliques

Dans cet article, le symbole K désigne un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ désigne la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans K. On note Σ l'ensemble des places de K, qui s'écrit comme l'union disjointe de deux parties Σ_f et Σ_∞, où Σ_f est l'ensemble des places finies de K, qui s'identifie au spectre maximal de $\mathcal{O}_K$; et Σ_∞ est l'ensemble des plongements de K dans $\mathbb{C}$. On fixe en outre une variété intègre et projective X définie sur K et on désigne par $\pi : X \to \operatorname{Spec} K$ le morphisme structurel. Soit $d = \dim(X)$.

2.1. Métriques sur un fibré inversible. — Soit L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. Soit $\sigma \in \Sigma_\infty$. Une *métrique* (continue) sur L en σ est la donnée, pour tout ouvert U de l'espace analytique X_σ^{an} et toute section continue $s \in C^0(U, L_\sigma)$, d'une fonction continue $\|s\|_\sigma : U \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, soumise aux conditions suivantes :

1) pour toute fonction continue $a : U \to \mathbb{R}$, on a $\|as\|_\sigma = |a| \cdot \|s\|_\sigma$;
2) si $x \in U$ est tel que $s(x) \neq 0$, alors $\|s\|_\sigma(x) \neq 0$.

On note $n_\sigma = 1$.

Soient $\mathfrak{p} \in \Sigma_f$ un idéal maximal de $\mathcal{O}_K$ et $\mathbb{F}_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ le corps résiduel de $\mathfrak{p}$. Soit $|\cdot|_\mathfrak{p}$ la valeur absolue sur K telle que

$$\forall\, a \in K^\times, \quad |a|_\mathfrak{p} = p^{-v_\mathfrak{p}(a)},$$

où $v_\mathfrak{p}$ est la valuation discrète sur K correspondant à $\mathfrak{p}$, p est la caractéristique de $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$. Soit en outre $n_\mathfrak{p} := [\mathbb{F}_\mathfrak{p} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$. On désigne par $K_\mathfrak{p}$ le complété de K par rapport à la valeur absolue $|\cdot|_\mathfrak{p}$, et par $\mathbb{C}_\mathfrak{p}$ le complété d'une clôture algébrique de $K_\mathfrak{p}$. La valeur absolue $|\cdot|_\mathfrak{p}$ s'étend de façon unique sur $\mathbb{C}_\mathfrak{p}$, et le corps $\mathbb{C}_\mathfrak{p}$ est algébriquement clos et complet pour la valeur absolue $|\cdot|_\mathfrak{p}$. D'après [**4**, 3.4.1], le foncteur de la catégorie $\mathbf{An}_{K_\mathfrak{p}}$ des espaces analytiques sur $K_\mathfrak{p}$ au sens de Berkovich (cf. [**4**, §3.1]) vers la catégorie des ensembles, qui envoie tout espace analytique Y en l'ensemble des morphismes d'espaces annelés en $K_\mathfrak{p}$-algèbres $\operatorname{Hom}_{K_\mathfrak{p}}(Y, X_{K_\mathfrak{p}})$, est représentable par un $K_\mathfrak{p}$-espace analytique que l'on notera $X_\mathfrak{p}^{\mathrm{an}}$. Le $\mathcal{O}_X$-module inversible L correspond à un module inversible sur l'espace analytique $X_\mathfrak{p}^{\mathrm{an}}$ que l'on notera $L_\mathfrak{p}$. Une *métrique* sur L en $\mathfrak{p}$ est alors la donnée, pour toute partie ouverte U de $X_\mathfrak{p}^{\mathrm{an}}$ et toute section continue $s \in C^0(U, L_\mathfrak{p})$, d'une fonction continue $\|s\|_\mathfrak{p} : U \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, soumise aux conditions suivantes :

1) pour toute fonction continue $a : U \to \mathbb{C}_\mathfrak{p}$, on a $\|as\|_\mathfrak{p} = |a|_\mathfrak{p} \cdot \|s\|_\mathfrak{p}$;
2) si $x \in U$ est tel que $s(x) \neq 0$, alors $\|s\|_\sigma(x) > 0$.

Soit Z un sous-schéma ouvert de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ qui contient $\mathfrak{p}$ et $\mathcal{O}_Z$ son anneau. On appelle modèle de (X, L) sur Z tout couple $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$, où $\mathscr{X}$ est un X-schéma projectif et plat tel que $\mathscr{X}_K = X$ et $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible sur $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{L}_K = L$.

2.2. Fibré inversible adélique. — On appelle *fibré inversible adélique* sur X tout couple $\overline{L} = (L, (\|\cdot\|_v)_{v\in\Sigma})$, où L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible, et où $\|\cdot\|_v$ est une metrique sur L en v, soumis aux conditions suivantes :

1) pour toute place finie $\mathfrak{p} \in \Sigma_f$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ est invariante sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}_v/K_v)$;
2) les métriques $(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_\infty}$ sont invariantes par la conjugaison complexe ;
3) il existe un sous-schéma ouvert non-vide Z de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ et un modèle $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ de (X, L) sur Z tel que, pour toute place $v \in Z \cap \Sigma$, la métrique $\|\cdot\|_v$ soit induite par le modèle $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$.

Si $\overline{L}$ est un fibré inversible adélique sur X, on désigne par $\pi_*\overline{L}$ l'espace vectoriel $H^0(X, L)$ sur K, muni des métriques sup. C'est un *fibré vectoriel adélique* sur $\operatorname{Spec} K$ (cf. [**16**], voir aussi un rappel dans §4.1).

On désigne par $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ le groupe des classes d'isomorphismes de fibrés inversibles adéliques sur X. Si $\mathfrak{p}$ est une place finie et si f est une fonction continue sur $X_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{an}}$, supposée être invariante par l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}})$ lorsque $\mathfrak{p}$ est finie, on désigne par $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}(f)$ le fibré inversible adélique sur X dont le faisceau inversible sous-jacent est $\mathcal{O}_X$ et tel que

$$\forall\, x \in X_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{an}}, \quad \|\mathbf{1}\|_{\mathfrak{p}}(x) = (\#\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})^{-f(x)},$$
$$\forall\, v \in \Sigma \setminus \{\mathfrak{p}\}, \forall\, y \in X_v^{\mathrm{an}}, \quad \|\mathbf{1}\|_v(y) = 1.$$

De façon similaire, si $\sigma : K \to \mathbb{C}$ est un plongement et si f est une fonction continue sur X_σ^{an}, on désigne par $\mathcal{O}_\sigma(f)$ le fibré inversible adélique dont le faiceau inversible sous-jacent est $\mathcal{O}_X$, et tel que

$$\forall\, x \in X_\sigma^{\mathrm{an}}, \quad \|\mathbf{1}\|_\sigma(x) = e^{-f(x)},$$
$$\forall\, v \in \Sigma \setminus \{\sigma, \overline{\sigma}\}, \forall\, y \in X_v^{\mathrm{an}}, \quad \|\mathbf{1}\|_v(y) = 1.$$

Pour toute place v, l'application du groupe additif $C^0(X_v^{\mathrm{an}})$ vers le groupe $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ qui envoie f vers $\mathcal{O}_v(f)$ est en fait un homomorphisme de groupes. On désigne par $C_v(X)$ l'image de cette application.

Soient $\overline{L}$ et $\overline{L'}$ deux fibrés inversibles adéliques sur X et $f : L \to L'$ un homomorphisme non-nul. Pour toute place $v \in \Sigma$ et tout $x \in X_v^{\mathrm{an}}$, l'homomorphisme f induit une application $\mathbb{C}_v$-linéaire $f_x : L_{v,x} \to L'_{v,x}$. On note

$$h_v(f) := \sup_{x\in X_v^{\mathrm{an}}} \log \|f_x\|_v,$$

appelé la *hauteur locale* de f en v. On définit en outre

$$h(f) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v\in\Sigma} n_v h_v(f).$$

Soit $\overline{L}$ un fibré inversible adélique sur X. On dit qu'une section globale $s \in H^0(X, L)$ est *effective* si, pour toute $v \in \Sigma$,

$$\|s\|_{v,\sup} := \sup_{x\in X_v^{\mathrm{an}}} \|s\|_v(x) \leqslant 1.$$

On dit que $\overline{L}$ est *effectif* s'il admet au moins une section effective non-nulle. Un fibré inversible adélique $\overline{L}$ est effectif si et seulement s'il existe un homomorphisme $f:\overline{\mathcal{O}}_X\rightarrow\overline{L}$ tel que $h_v(f)\leqslant 0$ pour toute v, où $\overline{\mathcal{O}}_X$ désigne le fibré inversible adélique trivial sur X.

3. Critère d'équidistribution par la différentiabilité

On fixe une place v dans Σ et on désigne par $C_v(X)$ le sous-groupe de $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ formé des fibrés inversibles hermitiens de la forme $\mathcal{O}_v(f)$, où f parcourt les fonctions continues sur l'espace analytique X_v^{an}.

3.1. Fonctions dérivables sur un semi-groupe. — Dans ce sous-paragraphe, on clarifie la notion de dérivabilité pour les fonctions sur $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$. Par la soucis de lucidité de présentation, on choisit de travailler dans un cadre général d'un groupe commutatitif G dont la loi de groupe est noté additivement.

Un *semi-groupe* dans G est par définition un sous-ensemble C de G qui vérifie la condition suivante :

si x et y sont deux éléments dans C, alors $x+y\in C$.

Si C est un semi-groupe dans G et si H est un sous-groupe de G, on dit que C est *ouvert* par rapport à H si, pour tout $x\in C$ et tout $y\in H$, il existe un entier $n\geqslant 1$ tel que $nx+y\in C$, ou de façon équivalente, $nx+y\in C$ pour tout entier n suffisamment positif.

Soient H un sous-groupe de G et C un semi-groupe de G qui est ouvert par rapport à H. Soit $f:C\rightarrow\mathbb{R}$ une fonction, supposée être *positivement homogène*, i.e., pour tout $x\in C$ et tout entier $n\geqslant 1$, on a $f(nx)=nf(x)$. Si $x\in C$ et si $v\in H$, on dit que la fonction f est *dérivable* en x le long de la direction de v si la suite $(f(nx+v)-f(nx))_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathbb{R}$. On dit que la fonction f est *différentiable* en x pour les directions dans H si elle est dérivable en x le long de toute $w\in H$, et si l'application $D_xf:H\rightarrow\mathbb{R}$ qui associe $w\in H$ en $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}f(nx+w)-f(nx)$ est additive, autrement dit, $D_xf(u+w)=D_xf(u)+D_xf(w)$ quels que soit $u,w\in H$. L'application D_xf est appelée la *diffentielle* de f en x (relativement à H).

Remarque 3.1. — La différentiabilité ne dépend pas du semi-groupe de définition. On suppose que C_1 et C_2 sont deux semi-groupes ouverts par rapport à H. Si f_1 (resp. f_2) est une fonction sur C_1 (resp. C_2) dont les réstrictions à $C_1\cap C_2$ se coïncident. Pour tout élément $x\in C_1\cap C_2$, la différentiabilité de f_1 en x pour les directions dans H est équivalente à celle de f_2 en x pour les directions dans H.

Le lemme suivant est utile dans la démonstration de la proposition 3.3, qui est un critère de différentiabilité.

Lemme 3.2. — *Soit H un sous-groupe de G. Si $\varphi:H\rightarrow\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ est une fonction sur-additive (c'est-à-dire $\forall\,x,y\in H$, $\varphi(x+y)\geqslant\varphi(x)+\varphi(y)$) et qui n'est pas identiquement infinie, et si $\psi:H\rightarrow\mathbb{R}$ est une fonction additive telle que $\varphi\geqslant\psi$, alors $\varphi=\psi$.*

Démonstration. — Soit $\eta = \varphi - \psi$. La fonction η est sur-additive sur H. De plus, elle est positive. On désigne par θ l'élément neutre du groupe H. Si $x \in H$ est un élément tel que $\eta(x) > 0$, alors $\eta(\theta) = \eta(x + (-x)) \geqslant \eta(x) + \eta(-x) > 0$. En outre, la fonction η n'est pas identiquement infinie, il existe $y \in H$ tel que $\eta(y) < +\infty$. Comme $\eta(y) = \eta(y + \theta) \geqslant \eta(y) + \eta(\theta)$, on obtient $\eta(\theta) \leqslant 0$. Cela est absurde. □

Proposition 3.3. — *Soient H un sous-groupe de G, C un semi-groupe dans G qui est ouvert par rapport à H, et $x \in C$. Si f et g sont deux fonctions réelles positivement homogènes sur C qui satisfont aux conditions suivantes :*

1) $\forall a, b \in C$, $f(a + b) \geqslant f(a) + f(b)$,
2) $f \geqslant g$, $f(x) = g(x)$,
3) g est différentiable en x pour les directions dans H,

alors la fonction f est différentiable en x pour les directions dans H. De plus, on a $D_x f = D_x g$.

Démonstration. — Pour tout élément $w \in H$, il existe $n_0(w) \in \mathbb{N}_*$ tel que $nx+w \in C$ quel que soit $n \geqslant n_0(w)$. De plus, la suite $(f(nx + w) - f(nx))_{n \geqslant n_0(w)}$ est croissante. On désigne par $D_x f$ la fonction sur H à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par $D_x f(w) = \lim_{n\to\infty} f(nx+w) - f(nx)$. Soit θ l'élément neutre de H. Comme $D_x f(\theta) = 0$, la fonction $D_x f$ n'est pas identiquement infinie. En outre, les fonctions f et g sont homogènes, et $f(x) = g(x)$, donc $f(nx) = g(nx)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}_*$. Par conséquent, on a $D_x f \geqslant D_x g$, où la fonction $D_x g : H \to \mathbb{R}$ est définie comme $D_x g(w) = \lim_{n\to\infty} g(nx+w) - g(nx)$, qui est additive car g est différentiable en x. Enfin, si u et w sont deux éléments dans H, alors

$$\begin{aligned} D_x f(u + w) &= \lim_{n\to\infty} f(2nx + u + w) - 2nf(x) \\ &\geqslant \lim_{n\to\infty} f(nx + u) + f(nx + w) - 2nf(x) = D_x f(u) + D_x f(w). \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.2, on obtient que $D_x f = D_x g$ est additive, donc la fonction f est différentiable en x. □

3.2. Critère d'équidistribution. — Dans ce sous-paragraphe, on démontre un critère d'équidistribution. On considère une suite $\underline{x} = (x_n)_{n \geqslant 1}$ de points algébriques dans X. On dit que la suite $\underline{x}$ satisfait à la condition d'équidistribution en $v \in \Sigma$ si la suite de mesure $(\eta_{x_n,v})_{n \geqslant 1}$ converge faiblement, ou de façon équivalente, pour tout fibré inversible hermitien $\mathcal{O}_v(f) \in C_v(X)$, la suite $(h_{\mathcal{O}_v(f)}(x_n))_{n \geqslant 1}$ converge dans $\mathbb{R}$. Pour tout fibré inversible adélique $\overline{L}$ dans $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$, on désigne par $\varphi_{\underline{x}}(\overline{L})$ l'élément $\liminf_{n\to+\infty} h_{\overline{L}}(x_n)$ dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Proposition 3.4. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) la suite $\underline{x}$ satisfait à la condition d'équidistribution ;
2) la restriction de $\varphi_{\underline{x}}$ à $C_v(X)$ est additive.

Démonstration. — Pour tout fibré inversible hermitien $\mathcal{O}_v(f)$ dans $C_v(X)$, la suite $(h_{\mathcal{O}_v(f)}(x_n))_{n \geqslant 1}$ est bornée. Donc $\varphi_{\underline{x}}(\overline{M}) \in \mathbb{R}$ si $\overline{M} \in C_v(X)$.

"1) $\Rightarrow$ 2)" provient du fait que la limite de la somme de deux suites convergentes est égale à la somme des limites de ces suites.

"2) $\Rightarrow$ 1)" : Soit $\overline{M}$ un élément dans $C_v(X)$. Par l'additivité de $\varphi_{\underline{x}}$, on obtient

$$\liminf_{n\to\infty} h_{\overline{M}}(x_n) = \varphi_{\underline{x}}(\overline{M}) = -\varphi_{\underline{x}}(\overline{M}^\vee) = -\liminf_{n\to\infty}(-h_{\overline{M}}(x_n)) = \limsup_{n\to\infty} h_{\overline{M}}(x_n).$$

□

Si $\overline{L}$ est un fibré inversible adélique sur X, alors le sous-ensemble

$$C_v(X,\overline{L}) := \{\overline{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_v(f) \mid n \geqslant 1,\, \mathcal{O}_v(f) \in C_v(X)\}$$

de $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ est un semi-groupe. On observe que, si $\varphi_{\underline{x}}(\overline{L}) \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\varphi_{\underline{x}}$ est finie sur $C_v(X,\overline{L})$.

Théorème 3.5. — *Si une suite $\underline{x} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ de points algébriques dans X satisfait à la condition d'équidistribution, alors pour tout fibré vectoriel adélique $\overline{L}$ tel que $\varphi_{\underline{x}}(\overline{L}) \in \mathbb{R}$, la fonction $\varphi_{\underline{x}}$, considérée comme une fonction sur $C_v(X,\overline{L})$, est différentiable en $\overline{L}$ pour les directions dans $C_v(X)$. Réciproquement, pour que la suite $\underline{x}$ satisfasse à la condition d'équidistribution, il suffit qu'il existe un $\overline{L} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ tel que $(h_{\overline{L}}(x_n))_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathbb{R}$ et que la fonction $\varphi_{\underline{x}}$ soit différentiable en $\overline{L}$ pour les directions dans $C_v(X)$.*

Démonstration. — "$\Longrightarrow$" : Pour tout entier $m \geqslant 1$ et tout $\overline{M} \in C_v(X)$, on a

$$\varphi_{\underline{x}}(\overline{L}^{\otimes m} \otimes M) = \liminf_{n\to\infty} \big(mh_{\overline{L}}(x_n) + h_{\overline{M}}(x_n)\big) = m\varphi_{\underline{x}}(\overline{L}) + \varphi_{\underline{x}}(\overline{M}), \tag{4}$$

où on a utilisé l'hypothèse de convergence de $(h_{\overline{M}}(x_n))_{n\geqslant 1}$. Donc $D_{\overline{L}}\varphi_{\underline{x}} = \varphi_{\underline{x}}$ est additive.

"$\Longleftarrow$" : Pour tout entier $m \geqslant 1$ et tout $\overline{M} \in C_v(X)$, on a encore (4), mais cette fois-ci, on utilise la convergence de $(h_{\overline{L}}(x_n))_{n\geqslant 1}$. Par conséquent, $D_{\overline{L}}\varphi_{\underline{x}}$ s'identifie à la restriction de $\varphi_{\underline{x}}$ à $C_v(X)$. On en déduit que $\varphi_{\underline{x}}$ est additive en $C_v(X)$. D'après la proposition 3.4, la suite $\underline{x}$ satisfait à la condition d'équidistribution. □

4. Minorations de la limite inférieure des hauteurs

On a interprété la condition d'équidistribution par la différentiabilité de la fonction définie par la limite inférieure d'hauteurs (le théorème 3.5). D'après la proposition 3.3, cette différentiabilité peut être justifiée par minorer la fonction limite inférieure par des fonctions différentiables. Dans ce paragraphe, on considère le cas où la suite de points algébrique est *générique*, autrement dit, toute sous-variété fermée autre que la variété totale ne contient qu'un nombre fini de points de la suite.

4.1. Rappels sur l'inégalité de pentes. — Dans ce sous-paragraphe, on rappelle quelques notions et résultats dans la théorie des pentes en géométrie d'Arakelov due à Bost. Les références sont [**6, 7, 9, 8, 16**].

On appelle *fibré vectoriel adélique* sur $\operatorname{Spec} K$ toute donnée $(E, (\|\cdot\|_v)_{v\in\Sigma})$, où E est un espace vectoriel de rang fini sur K et $\|\cdot\|_v$ est une norme sur l'espace $E\otimes_K \mathbb{C}_v$, soumise aux conditions suivantes :

1) il existe un $\mathcal{O}_K$-module projectif $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{E}_K = E$, et que, pour tout $\mathfrak{p}\in\Sigma_f$, la norme $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ soit induite par la structure de $\mathcal{O}_K$-module sur $\mathcal{E}$.
2) les normes $(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_\infty}$ sont invariantes par la conjugaison complexe.

Étant donnés deux fibrés vectoriels hermitiens $\overline{E}$ sur $\operatorname{Spec} K$, la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de $\overline{E}$ est par définition

$$\chi(\overline{E}) := \log(\mathrm{vol}(\mathbb{B}(\overline{E}))) - \log(\mathrm{covol}(E)),$$

où vol est une mesure de Haar quelconque sur $E\otimes_K \mathbb{A}_K$, et covol est le covolume pour la mesure vol du réseau E dans $E\otimes_K\mathbb{A}_K$, $\mathbb{A}_K$ étant l'anneau des adèles de K.

Si E est non-nul, le *degré d'Arakelov* de $\overline{E}$ est

$$\widehat{\deg}(\overline{E}) := \chi(\overline{E}) - \chi(\overline{K}^{\operatorname{rk} E}),$$

où $\overline{K}$ est le fibré inversible adélique trivial sur $\operatorname{Spec} K$, et pour tout entier $n\geqslant 1$, $\overline{K}^n$ désigne la somme directe orthogonale de n copies de $\overline{K}$. En particulier, $\widehat{\deg}(\overline{K}^n) = 0$ pour tout n. Par convention, le degré d'Arakelov du fibré vectoriel adélique nul est zéro. Si $\overline{E}$ est un fibré adélique hermitien non-nul sur $\operatorname{Spec} K$, on appelle *pente* de $\overline{E}$ le nombre réel

$$\widehat{\mu}(\overline{E}) := \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\frac{\widehat{\deg}(\overline{E})}{\operatorname{rk} E}.$$

La *pente maximale* de $\overline{E}$ est par définition la valeur maximale des pentes des sous-fibrés adéliques hermitiens de $\overline{E}$, noté $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$. On définit $\widehat{\mu}_{\max}(0) = -\infty$ par convention. Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés adéliques hermitiens sur $\operatorname{Spec} K$, et $f : E\rightarrow F$ un homomorphisme. Pour toute $v\in\Sigma$, on désigne par $h_v(f)$ le logarithme de la norme (d'opérateur) de l'application $f_{\mathbb{C}_v} : E\otimes_K\mathbb{C}_v\rightarrow F\otimes_K\mathbb{C}_v$. On note en outre

$$h(f) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in\Sigma} n_v h_v(f).$$

L'inégalité de pente suivante, qui relie les pentes maximales de la source et du but d'un homomorphisme injectif de fibrés vectoriels adéliques, sera utilisée plus loin dans la minoration des invariants arithmétiques.

Proposition 4.1. — *Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés vectoriels adéliques non-nuls, $f : E\rightarrow F$ une application K-lineaire injective. Alors on a l'inégalité suivante :*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) \leqslant \widehat{\mu}_{\max}(\overline{F}) + h(f). \tag{5}$$

Démonstration. — Voir [**16**, Lemme 6.4] pour la démonstration. □

4.2. Invariants asymptotiques des fibrés inversibles hermtiens. — Soient $\pi : X \to \operatorname{Spec} K$ un K-schéma projectif et intègre. Des invariants arithmétique sont naturellement définis pour les fibrés inversibles hermitiens sur X. Dans la suite, on présente des constructions classiques et introduit quelques notions.

Minimum essentiel. — Soit $\overline{L}$ un fibré inversible hermitien sur X. Le *minimum essentiel* de $\overline{L}$, c'est-à-dire le premier minimum (logarithmique) de $\overline{L}$, est par définition

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{L}) := \sup_{\substack{U \subsetneq X \\ U \text{ ouvert}}} \inf_{x \in U(\overline{K})} h_{\overline{L}}(x). \tag{6}$$

Lemme 4.2. — *Soient $\overline{L}_1$ et $\overline{L}_2$ deux fibrés inversibles hermitiens sur X. Si φ est un homomorhpisme non-nul de L_1 vers L_2, alors*

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{L}_1) \leqslant \widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{L}_2) + h(\varphi).$$

Démonstration. — Pour tout point algébrique $x \in X(\overline{K})$, on a

$$h_{\overline{L}_1}(x) = h_{\overline{L}_2}(x) + \sum_{v \in \Sigma} n_v \log \|f_x\|_v \leqslant h_{\overline{L}_2}(x) + h(f).$$

□

Proposition 4.3. — *Pour tout fibré inversible adélique $\overline{L}$ sur X, $\widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{L}) < +\infty$.*

Démonstration. — Soit $\overline{\mathscr{L}}$ un fibré inversible adélique ample tel que $\overline{L}^{\vee} \otimes \overline{\mathscr{L}}$ soit effectif. D'après le lemme 4.2, on a $\widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{L}) \leqslant \widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{\mathscr{L}})$. La finitude de $\widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{L})$ provient donc de celle de $\widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{\mathscr{L}})$, établie dans [**27**]. □

Pente maximale asymptotique. — Soit $\overline{L}$ un fibré inversible adélique tel que L est gros (c'est-à-dire que la dimension d'Iikata de X relativement à L est maximale, voir [**18**, §2.2]). La *pente maximale asymptotique* de $\overline{L}$ introduite dans [**12**] est un invariant arithmétique qui contrôle le comportement asymptotique de la norme de la plus petite section effective non-nulle de $\overline{L}^{\otimes n}$ lorsque n tend vers l'infinie. Elle est définie comme

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) := \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \widehat{\mu}_{\max}(\overline{L}^{\otimes n}),$$

où l'existence de la limite est justifiée dans [**12**, théorème 4.1.8].

Capacité sectionnelle. — La capacité sectionnelle d'un fibré inversible adélique $\overline{L}$ sur X est par définition

$$S(\overline{L}) := \lim_{n \to +\infty} \frac{\chi(\pi_* \overline{L}^{\otimes n})}{n^{d+1}/(d+1)!} \in [-\infty, +\infty[, \tag{7}$$

où d est la dimension de X. C'est une notion qui généralise le nombre d'auto-intersection arithmetique : si L est ample et si toutes les métriques $\|\cdot\|_v$ sont semi-positive, alors $S(\overline{L})$ est finie et égale à $\widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1}$. C'est une conséquence du théorème de Hilbert-Samuel démontré par [**17, 1, 27, 2, 20**] dans diverses situations. L'existence de la limite (7) est démontrée par Rumely, Lau et Varley [**21**] dans le cas où L ample, et puis par le présent auteur [**15**] au cas général. Il s'avère que la capacité sectionnelle est toujours nulle lorsque L n'est pas gros, car on a $\chi(\pi_* \overline{L}^{\otimes n}) = O(n^{\kappa(X,L)+1})$, où

$\kappa(X,L)$ est la dimension d'Iitaka de X relativement à L (voir [**18**, corollaire 2.1.38]). Si L est gros, on note

$$\widehat{\mu}^{\pi}(\overline{L}) := \frac{S(\overline{L})}{[K:\mathbb{Q}](d+1)\mathrm{vol}(L)}, \tag{8}$$

où le *volume* de L est défini comme la limite

$$\mathrm{vol}(L) := \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{rk}_K\, H^0(X, L^{\otimes n})}{n^d/d!}.$$

On appelle $\widehat{\mu}^{\pi}(\overline{L})$ la *pente asymptotique* de $\overline{L}$.

Volume arithmétique et pente postive asymptotique. — Le volume arithmétique d'un fibré inversible adélique $\overline{L}$ sur X est défini dans [**19**] comme

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\widehat{h}^0(\overline{L}^{\otimes n})}{n^{d+1}/(d+1)!}, \tag{9}$$

où

$$\widehat{h}^0(\overline{L}^{\otimes n}) := \log \#\Big\{ s\in H^0(X,L^{\otimes n}) \;\Big|\; \forall\, v\in\Sigma,\ \|s\|_{v,\sup}\leqslant 1\Big\}.$$

Il s'agit en fait d'une limite dans (9), voir [**15**]. Si L est gros, on note

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{+}(\overline{L}) := \frac{\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L})}{[K:\mathbb{Q}](d+1)\mathrm{vol}(L)}.$$

On appelle $\widehat{\mu}^{\pi}_{+}(\overline{L})$ la *pente positive asymptotique* de $\overline{L}$.

Mesure asymptotique. — Soit $\overline{L}$ un fibré inversible adélique sur X tel que L est gros. La mesure asymptotique de $\overline{L}$, introduite dans [**12**] et [**15**], est un invariant très général qui permet de retrouver divers invariants arithmétiques de $\overline{L}$ par intégration. Soit $n\geqslant 1$ un entier. L'espace vectoriel $E_n := \pi_*(L^{\otimes n})$ est filtré par ses minima successifs. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on note

$$\mathcal{F}_t E_n := \mathrm{Vect}_K(\{s\in E_n \mid \forall\,\mathfrak{p}\in\Sigma_f,\ \|s\|_{\mathfrak{p},\sup}\leqslant 1,\ \forall\,\sigma\in\Sigma_\infty,\ \|s\|_{\sigma,\sup}\leqslant e^{-nt}\}).$$

La suite de mesure de probabilité $\big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{rk}(\mathcal{F}_tE_n)/\,\mathrm{rk}(E_n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge vaguement vers une mesure de probabilité borélienne $\nu_{\overline{L}}$ sur $\mathbb{R}$ (voir [**13**] corollaire 3.13 et remarque 3.14), les dérivées étant prises au sens de distribution. On l'appelle la *mesure asymptotique* de $\overline{L}$. Cette mesure peut aussi être construite par la filtration de Harder-Narasimhan. Plus précisément, si on note $\mathcal{G}$ la filtration de E_n telle que

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\quad \mathcal{G}_tE_n = \sum_{\substack{F\subset E_n\\ \widehat{\mu}_{\min}(\overline{F})\geqslant nt}} F,$$

alors $\nu_{\overline{L}}$ est aussi la limite vague de la suite de mesures $\big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{rk}(\mathcal{G}_tE_n)/\,\mathrm{rk}(E_n)\big)_{n\geqslant 1}$, voir [**13**, §3] pour le détail.

Comme $\mathcal{G}_tE_n = 0$ dès que $t\geqslant n^{-1}\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{L}^{\otimes n}))$, on obtient que le support de la mesure limite $\nu_{\overline{L}}$ est contenu dans l'intervalle fermé $]-\infty, \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L})]$.

Plusieurs invariants arithmétiques de $\overline{L}$ peuvent être représentés comme des intégrales par rapport à $\nu_{\overline{L}}$. On a (cf. [**15**])

$$\widehat{\mu}^{\pi}(\overline{L}) = \int_{\mathbb{R}} x\,\nu_{\overline{L}}(\mathrm{d}x), \qquad \widehat{\mu}^{\pi}_{+}(\overline{L}) = \int_{\mathbb{R}} x_{+}\,\nu_{\overline{L}}(\mathrm{d}x), \tag{10}$$

où $x_+ = \max(x, 0)$.

4.3. Comparaisons des invariants arithmétiques. — Le but de ce sous-paragraphe est d'établir les comparaisons comme ci-dessous.

Proposition 4.4. — *Soit $\overline{L}$ un fibré inversible adélique sur X tel que L soit gros. Les inégalités suivantes sont vraies :*

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{L}) \geqslant \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) \geqslant \widehat{\mu}^{\pi}(\overline{L}). \tag{11}$$

Si de plus $\overline{L}$ est gros, ou de façon équivalente, $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) > 0$, alors

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) \geqslant \widehat{\mu}^{\pi}_{+}(\overline{L}) \geqslant \widehat{\mu}^{\pi}(\overline{L}). \tag{12}$$

La deuxième inégalité de (11) et les inégalités dans (12) proviennent simplement de l'interprétation des invariants arithmétiques par la mesure asymptotique. La démonstration de la première inégalité fait appel à la méthode de pentes appliquée aux applications d'évaluation, voir [**8**] pour un survol et pour une liste complète de références.

Lemme 4.5. — *Soit $\overline{L}$ un fibré inversible adélique sur X. Si $\mathcal{B} \subset X(\overline{K})$ est une famille de points qui est Zariski dense dans $X(\overline{K})$, alors*

$$\sup\{h_{\overline{L}}(P) \mid P \in \mathcal{B}\} \geq \frac{1}{n}\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{L}^{\otimes n}))$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, on a $\sup\{h_{\overline{L}}(P) \mid P \in \mathcal{B}\} \geq \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L})$ si L est gros.

Démonstration. — Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit φ_n l'application d'évaluation

$$H^0(X, L^{\otimes n})_{\overline{K}} \longrightarrow \bigoplus_{P \in \mathcal{B}} P^* L^{\otimes n}.$$

Comme $\mathcal{B}$ est Zariski dense, φ_n est injective. Par conséquent, il existe un sous-ensemble fini $\mathcal{B}_n$ de $\mathcal{B}$ tel que $p_n\varphi_n$ soit un isomorphisme, où

$$p_n : \bigoplus_{P \in \mathcal{B}} P^* L^{\otimes n} \longrightarrow \bigoplus_{P \in \mathcal{B}_n} P^* L^{\otimes n}$$

est la projection canonique. L'inégalité de pentes (5) montre alors que

$$\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(\overline{L}^{\otimes n})) \leq \max_{P \in \mathcal{B}_n} n h_{\overline{L}}(P) + \log \mathrm{rk}(\pi_* L^{\otimes n}).$$

Par passage à la limite on obtient l'inégalité souhaitée. □

Démonstration de la proposition 4.4. — Soit $\nu_{\overline{L}}$ la mesure asymptotique de $\overline{L}$. Comme le support de $\nu_{\overline{L}}$ est borné supérieurement par $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L})$, on obtient

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) \geqslant \int_{\mathbb{R}} x\,\nu_{\overline{L}}(\mathrm{d}x),$$

d'où $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) \geqslant \widehat{\mu}^{\pi}(\overline{L})$. Si de plus $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max} > 0$, on a

$$\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) \geqslant \int_{\mathbb{R}} x_+\,\nu_{\overline{L}}(\mathrm{d}x) \geqslant \int_{\mathbb{R}} x\,\nu_{\overline{L}}(\mathrm{d}x),$$

et donc $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) \geqslant \widehat{\mu}^{\pi}_{+}(\overline{L}) \geqslant \widehat{\mu}^{\pi}(\overline{L})$. Il reste à vérifier la première inégalité de (11).

Soit $t > \widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{L})$ et soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des points dans $X(\overline{K})$ dont la hauteur est inférieure ou égale à t. Par définition la famille $\mathcal{B}$ est Zariski dense dans $X(\overline{K})$. Le lemme 4.5 montre alors que $t \geqslant \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L})$. Comme t est arbitraire, on obtient $\widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{L}) \geqslant \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L})$. □

Remarque 4.6. — On observe dans la démonstration de la proposition 4.4 que $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) = \widehat{\mu}^{\pi}_{+}(\overline{L})$ implique que la mesure $\nu_{\overline{L}}$ se réduit à la mesure de Dirac concentrée en $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L})$. Cette dernière condition est équivalente à l'égalité $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) = \widehat{\mu}^{\pi}(\overline{L})$. Dans ce cas-là, le polygone de Harder-Narasimhan asymptotique de $\overline{L}$ (voir [**12**]) se réduit à un morceau de droite, et on dit que $\overline{L}$ est *asymptotiquement semi-stable*.

5. Applications

Dans ce paragraphe, on développe des applications du critère d'équidistribution établi dans §3. D'abord, on explique comment interpréter des résultats classiques via le principe variationnel par la dérivabilité de certain invariant arithmétique. Ensuite, on démontre un résultat d'équidistribution en utilisant la dérivabilité de la pente positive asymptotique, établie dans [**14**].

5.1. Interprétation des résultats classiques. — Soient $\pi : X \rightarrow \operatorname{Spec} K$ un K-schéma projectif et intègre et $\overline{L}$ un fibré inversible adélique sur X. Soit $\underline{x} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de points algébriques dans X. Dans les résultats d'équidistribution via le principe variationnel comme dans [**23, 24, 26, 2, 25, 5**], les hypothèses suivantes sont supposées :

(**H**1) la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est générique, autrement dit, toute sous-variété fermée Y de X qui est autre que X ne contient qu'un nombre fini de points parmi les x_n ;
(**H**2) la suite de hauteur $(h_{\overline{L}}(x_n))_{n\geqslant 1}$ converge vers $\widehat{\mu}^{\pi}(\overline{L})$.

Pour tout fibré inversible adélique $\overline{M}$, on note

$$\varphi_{\underline{x}}(\overline{M}) := \liminf_{n\rightarrow+\infty} h_{\overline{M}}(x_n) \in [-\infty, +\infty].$$

Proposition 5.1. — *Si la suite $\underline{x}$ est générique, alors $\varphi_{\underline{x}}(\overline{M}) \geqslant \widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{M})$ pour tout $\overline{M} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(X)$.*

Démonstration. — Soit U un sous-schéma ouvert non-vide de X. Comme la suite $\underline{x}$ est générique, on obtient que U contient tous sauf un nombre fini de points de $\underline{x}$. Par conséquent,

$$\varphi_{\underline{x}}(\overline{M}) \geqslant \liminf_{n\to+\infty} h_{\overline{L}}(x_n) \geqslant \inf_{x\in U(\overline{K})} h_{\overline{M}}(x),$$

d'où $\varphi_{\underline{x}}(\overline{M}) \geqslant \widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{M})$. $\square$

Corollaire 5.2. — *On suppose que $\overline{L}$ est gros. Sous les hypothèses (***H***1) et (***H***2), on a*

$$\varphi_{\underline{x}}(\overline{L}) = \widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{L}) = \widehat{\mu}^{\pi}_{\max}(\overline{L}) = \widehat{\mu}^{\pi}_{+}(\overline{L}) = \widehat{\mu}^{\pi}(\overline{L}).$$

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de l'inégalité $\varphi_{\underline{x}}(\overline{L}) \geqslant \widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{L})$ et de (11). $\square$

D'après le théorème 3.5 et la proposition 3.3, pour que $\underline{x}$ satisfasse à la condition d'équidistribution en v, il suffit de montrer que la fonction $\widehat{\mu}^{\pi}$ est différentiable en $\overline{L}$ pour les directions dans $C_v(X)$. Il s'avère que, dans les articles cités plus haut, les auteurs ont effectivement démontré cette différentiabilité et ont calculé la difféntielle de $\widehat{\mu}^{\pi}$ en $\overline{L}$, bien que ces résultats n'ont pas été énoncés de cette façon.

Exemple 5.3. — On suppose que $\overline{L}$ est ample au sens de [**27**], alors pour tout $\overline{M} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ de métriques lisses, le fibré inversible adélique $\overline{L}^{\otimes n} \otimes \overline{M}$ est ample lorsque n est suffisamment grand. Donc le théorème de Hilbert-Samuel de Gillet et Soulé [**17**] montre que

$$\widehat{\mu}^{\pi}(\overline{L}^{\otimes n} \otimes \overline{M}) = \frac{(n\widehat{c}_1(\overline{L}) + \widehat{c}_1(\overline{M}))^{d+1}}{[K:\mathbb{Q}](d+1)(nc_1(L)+c_1(M))^d}$$

Par conséquent, on a

$$D_{\overline{L}}\widehat{\mu}^{\pi}(\overline{M}) = \frac{\widehat{c}_1(\overline{L})^d\widehat{c}_1(\overline{M})}{[K:\mathbb{Q}]c_1(L)^d} - d\widehat{\mu}^{\pi}(\overline{L})\frac{c_1(L)^{d-1}c_1(M)}{c_1(L)^d}.$$

Cette expression est additive par rapport à $\overline{M}$. De plus, si $\overline{M}$ est de la forme $\mathcal{O}_\sigma(f)$ ($\sigma : K \to \mathbb{C}$), où f est une function lisse X^{an}_σ, alors

$$D_{\overline{L}}\widehat{\mu}^{\pi}(\mathcal{O}_\sigma(f)) = \frac{\widehat{c}_1(\overline{L})^d\widehat{c}_1(\mathcal{O}_\sigma(f))}{[K:\mathbb{Q}]c_1(L)^d}.$$

Cela montre que $\frac{\widehat{c}_1(\overline{L})^d}{[K:\mathbb{Q}]c_1(L)^d}$ peut être considérée comme une mesure de probabilité de Radon sur X^{an}_σ qui est la mesure limite de $(\eta_{x_n,\sigma})_{n\geqslant 1}$.

Depuis l'article [**23**] où cette stratégie a été proposée, on cherche à affaiblir la condition de positivité de $\overline{L}$. On résume quelques exemples de tels résultats en les énonçant dans le langage de differentiabilité.

1) Dans [**2**], Autissier a montré que, si X est de dimension 1, alors la fonction $\widehat{\mu}^{\pi}$ est différentiable en tout $\overline{L}$ tel que L est ample pour les directions dans $C_\sigma(X)$.

2) Dans [**11**], en utilisant l'analogue de l'inégalité de Siu en géométrie d'Arakelov [**25**], les auteurs ont montré que, si L est ample et si les métriques sur L sont semi-positives, alors la fonction $\widehat{\mu}^{\pi}$ est différentiable pour les directions $\overline{M}$ intégrables (c'est-à-dire que $\overline{M}$ s'écrit comme la différence de deux fibrés inversibles adéliques amples).
3) Dans [**5**], en utilisant le noyau de Bergman, les auteurs ont montré que, si L est gros et si $\widehat{\mu}^{\pi}(\overline{L})$ est fini, alors la fonction $\widehat{\mu}^{\pi}$ est différentiable pour les directions dans $C_{\sigma}(X)$, où $\sigma \in \Sigma_{\infty}$.

5.2. Un résultat d'équidistribution. — Dans ce sous-paragraphe, on démontre le résultat suivant :

Théorème 5.4. — *On suppose que $\overline{L}$ est gros. Si la suite $\underline{x}$ est générique et si la suite de hauteurs $(h_{\overline{L}}(x_n))_{n\geqslant 1}$ converge vers $\widehat{\mu}^{\pi}_{+}(\overline{L})$, alors la suite $\underline{x}$ vérifie la condition d'équidistribution.*

Démonstration. — D'après [**14**, théorème 1.1], la fonction $\widehat{\mu}^{\pi}_{+}$ est différentiable en $\overline{L}$ pour les directions dans $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$. Par conséquent, la suite $\underline{x}$ satisfait à la condition d'équidistribution, compte tenu du théorème 3.5. □

Remarque 5.5. — Dans le théorème 5.4, on ne suppose aucune condition de positivité sur les métriques de $\overline{L}$.

Corollaire 5.6. — *On suppose que L est gros. Si la suite $\underline{x}$ est générique et si la suite de hauteurs $(h_{\overline{L}}(x_n))_{n\geqslant 1}$ converge vers $\widehat{\mu}^{\pi}(\overline{L})$, alors la suite $\underline{x}$ satisfait à la condition d'équidistribution.*

Démonstration. — Comme L est gros, il existe un fibré adélique $\overline{M}$ sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ tel que $\overline{N} := \overline{L} \otimes \pi^*\overline{M}$ soit gros (cf. [**12**, remarque 4.2.16]). Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $h_{\overline{N}}(x_n) = h_{\overline{L}}(x_n) + \widehat{\mu}(\overline{M})$. D'autre part, on a $\widehat{\mu}^{\pi}(\overline{N}) = \widehat{\mu}^{\pi}(\overline{L}) + \widehat{\mu}(\overline{M})$. Donc $(h_{\overline{N}}(x_n))_{n\geqslant 1}$ converge vers $\widehat{\mu}^{\pi}(\overline{N})$. D'après le corollaire 5.2, on obtient $\widehat{\mu}^{\pi}(\overline{N}) = \widehat{\mu}^{\pi}_{+}(\overline{N})$. D'où $\underline{x}$ satisfait à la condition d'équidistribution, compte tenu du théorème 5.4. □

Remarque 5.7. — Le théorème 5.4 est en fait une nouvelle démonstration des résultats classiques. On suppose que $\overline{L}$ est gros. Bien que en général $\widehat{\mu}^{\pi}_{+}(\overline{L})$ est plus grand ou égal à $\widehat{\mu}^{\pi}(\overline{L})$, mais l'hypothèse $\varphi_{\underline{x}}(\overline{L}) = \widehat{\mu}^{\pi}_{+}(\overline{L})$ force ces deux quantités à être égales, comme montré dans la remarque 4.6. D'autre part, l'hypothèse (**H**2) semble être prévilégiée aux applications que l'on dispose. Par exemple, on observe dans [**22**] que le minimum essentiel d'un espace projectif est toujours strictement plus grand que sa hauteur normalisée. Plus précisément, si $X = \mathbb{P}^n_K$ et si $\overline{L}$ est $\mathcal{O}_X(1)$ muni des métriques de Fubini-Study, alors on a

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\overline{L}) = \frac{1}{2}\log(n+1), \qquad \widehat{\mu}^{\pi}(\overline{L}) = \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}.$$

Cette observation conduit à la question suivante : est-ce que d'autre minoration du minimum essentiel permet d'avoir un énoncé d'équidistribution plus général ?

Un candidat est sans doute la pente maximale asymptotique $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}$. Voici alors une question plus précise : quel est le domain de différentiabilité de la fonction $\widehat{\mu}^{\pi}_{\max}$?

Références

[1] A. Abbes & T. Bouche – « Théorème de Hilbert-Samuel “arithmétique” », *Université de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier* **45** (1995), no. 2, p. 375–401.

[2] P. Autissier – « Points entiers sur les surfaces arithmétiques. », *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **531** (2001), p. 201–235.

[3] ———, « Équidistribution des sous-variétés de petite hauteur », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **18** (2006), no. 1, p. 1–12.

[4] V. G. Berkovich – *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[5] R. Berman & S. Boucksom – « Capacities and weighted volumes of line bundles », `arXiv:0803.1950`, 2008.

[6] J.-B. Bost – « Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz) », *Astérisque* (1996), no. 237, p. Exp. No. 795, 4, 115–161, Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/1995.

[7] ———, « Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields », *Publications Mathématiques. Institut de Hautes Études Scientifiques* (2001), no. 93, p. 161–221.

[8] J.-B. Bost – « Evaluation maps, slopes, and algebraicity criteria », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Madrid, 2006), 537–562*, European Mathematical Society, 2007.

[9] A. Chambert-Loir – « Théorèmes d'algébricité en géométrie diophantienne (d'après J.-B. Bost, Y. André, D. & G. Chudnovsky) », *Astérisque* (2002), no. 282, p. Exp. No. 886, viii, 175–209, Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001.

[10] ———, « Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich », *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. [Crelle's Journal]* **595** (2006), p. 215–235.

[11] A. Chambert-Loir & A. Thuillier – « Mesures de Mahler et équidistribution logarithmique », to appear in Annales de l'Institut Fourier, 2006.

[12] H. Chen – « Convergence des polygones de Harder-Narasimhan », `hal-00239438`, 2007.

[13] ———, « Arithmetic Fujita approximation », `arXiv:0810.5479`, 2008.

[14] ———, « Differentiability of the arithmetic volume », 2008.

[15] ———, « Positive degree and arithmetic bigness », `arXiv:0803.2583`, 2008.

[16] É. Gaudron – « Pentes de fibrés vectoriels adéliques sur un corps globale », *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* **119** (2008), p. 21–95.

[17] H. Gillet & C. Soulé – « An arithmetic Riemann-Roch theorem », *Inventiones Mathematicae* **110** (1992), no. 3, p. 473–543.

[18] R. Lazarsfeld – *Positivity in algebraic geometry. I*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 48, Springer-Verlag, Berlin, 2004, Classical setting : line bundles and linear series.

[19] A. Moriwaki – « Continuity of volumes on arithmetic varieties », To appear in *Journal of Algebraic Geometry*. `arXiv:math/0612269v2`, 2007.

[20] H. Randriambololona – « Métriques de sous-quotient et théorème de Hilbert-Samuel arithmétique pour les faisceaux cohérents », *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **590** (2006), p. 67–88.

[21] R. Rumely, C. F. Lau & R. Varley – « Existence of the sectional capacity », *Memoirs of the American Mathematical Society* **145** (2000), no. 690, p. viii+130.

[22] M. Sombra – « Minimums successifs des variétés toriques projectives », *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **586** (2005), p. 207–233.

[23] L. Szpiro, E. Ullmo & S. Zhang – « Équirépartition des petits points », *Inventiones Mathematicae* **127** (1997), no. 2, p. 337–347.

[24] E. Ullmo – « Positivité et discrétion des points algébriques des courbes », *Annals of Mathematics. Second Series* **147** (1998), no. 1, p. 167–179.

[25] X. Yuan – « Big line bundles over arithmetic varieties », *Inventiones Mathematicae* **173** (2007), no. 3, p. 603–649.

[26] S.-W. Zhang – « Equidistribution of small points on abelian varieties », *Annals of Mathematics. Second Series* **147** (1998), no. 1, p. 159–165.

[27] S. Zhang – « Positive line bundles on arithmetic varieties », *Journal of the American Mathematical Society* **8** (1995), no. 1, p. 187–221.

18 décembre 2008

Huayi Chen, Université Paris Diderot — Paris 7, Institut de mathématiques de Jussieu.
E-mail : chenhuayi@math.jussieu.fr