

---

# Une algèbre de Boole pour l'approche événementielle des systèmes logiques

Jean-Marc Roussel - Jean-Jacques Lesage

Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée  
Ecole Normale Supérieure de Cachan  
61, avenue du président Wilson  
F-94235 Cachan cedex - France  
e-mail : roussel@lurpa.ens-cachan.fr

---

*RÉSUMÉ.* La modélisation dynamique des systèmes logiques fait largement appel à la notion "d'événement". En Grafset par exemple, les événements sont représentés par des fronts de variables logiques. De nombreuses ambiguïtés sont cependant rencontrées dans les modèles car la représentation des événements par des fronts n'est pas assez formelle. Dans cet article, nous proposons une algèbre de Boole dont l'ensemble de définition permet une représentation temporelle des entrées et des sorties de tout système logique. Nous définissons sur cette algèbre deux lois unaires qui permettent de modéliser formellement les événements. Nous démontrons ensuite quatorze propriétés relatives à ces lois événementielles ainsi qu'à leur composition avec les lois ET, OU, NON.

*ABSTRACT.* The dynamic modelling of logical systems widely calls on the event notion. In terms of function chart Grafset, events are generally represented by "rising or falling edges" of logical variables. However, numerous ambiguities are encountered in the models because the translation of events into edges is not formal enough. In this paper, we propose a Boolean algebra whose definition set allows us to temporally describe the inputs and the outputs of any logical system. We have define in this algebra two unary operations in order to formally express the events. Then, we prove 14 properties related to these rising and falling edge operations and their composition with the operations AND, OR and NOT.

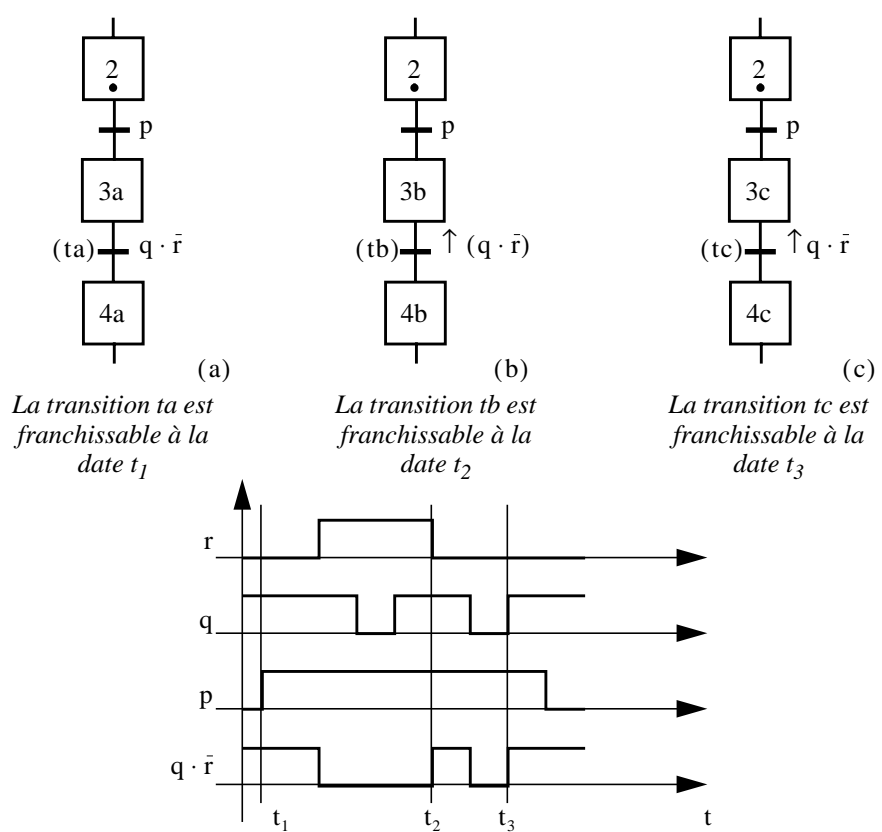
*MOTS-CLÉS :* algèbre de Boole, événement, système logique, Grafset.  
*KEY WORDS :* Boolean algebra, event, logical system, Grafset.

---

## 1. Introduction

La notion d'événement est très usitée pour la description du comportement dynamique des systèmes logiques, et notamment lorsque celui-ci est représenté par le Grafset. L'utilisation d'événements dans les réceptivités d'un graphe introduit une

richesse de description, très utile pour la représentation des systèmes temps réel [ZAH 87]. En effet, elle permet de conditionner le franchissement de transitions par l'occurrence d'un événement (approche événementielle) et non pas seulement par la vérification d'une condition (approche conditionnelle) [THE 80]. Ces deux approches sont conjointes dans les Réseaux de Petri Interprétés (RdPI) si l'on associe à chaque transition un prédicat et un événement [MOA 85]. Dans le Grafcet, où les événements sont représentés par des "fronts", des approches purement conditionnelles, purement événementielles ou mixtes<sup>1</sup> peuvent être retenues mais traduisent des comportements dynamiques différents (Figure 1).



**Figure 1.** Expression des réceptivités dans un Grafcet : approche conditionnelle (a), approche événementielle (b), approche mixte (c)

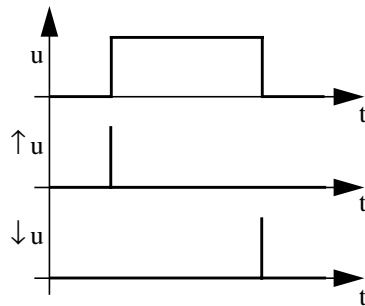
Dans cet article, nous nous attacherons à montrer que si la pertinence de la notion d'événement ne peut être mise en doute, il n'en est pas de même pour la rigueur de sa définition ni de sa prise en compte dans l'interprétation des grafquets ou des RdPI.

1. L'expression systématique des réceptivités d'un grafcet sous la forme du produit logique d'un événement et d'une condition est notamment préconisée dans [MOA 81].

Dans une première partie, nous exposerons les limites et les imprécisions de la notion de “fronts” et nous montrerons l’intérêt de construire une algèbre de Boole “étendue” pour une approche plus formelle des événements dans les réceptivités. Cette algèbre de Boole sera construite dans une seconde partie, les propriétés essentielles en seront alors décrites. Dans un troisième volet, nous conclurons quant à l’intérêt et aux applications de cette algèbre pour la modélisation des systèmes logiques par Grafcet.

## 2. Problématique de la prise en compte des événements en Grafcet

Sur le plan théorique, le concept d’événement correspond à une information de spectre temporel nul, c’est-à-dire l’information traduisant le changement d’état supposé instantané, d’une variable logique ou d’une fonction de variables logiques [AFC 77], [GRE 85], [BLA 79] (Figure 2). Ce concept est traduit par la notation “front montant :  $\uparrow$ ” ou “front descendant :  $\downarrow$ ” de la variable ou de la fonction de variables [CEI 88].



**Figure 2.** Front montant et front descendant d’une variable booléenne

Dans la pratique cependant, l’emploi des fronts est souvent limité aux seules variables logiques élémentaires car l’évaluation d’expressions comprenant des fronts de fonctions de variables logiques - comme l’équation [1] - n’est pas maîtrisée.

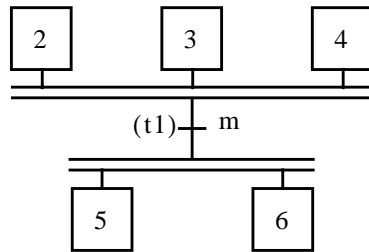
$$E_1 = \uparrow (a \cdot \bar{c} + b) \cdot \downarrow (a \cdot b + c) \quad [1]$$

En effet, parmi la bibliographie étudiée à ce sujet, seuls R. David et H. Alla donnent - sous les hypothèses restrictives de non-simultanéité d’événements, d’indépendance totale entre les variables a, b, c et après avoir recommandé de ne pas utiliser d’événements internes dans les réceptivités d’un grafcet - les deux égalités suivantes [DAV 89] :

$$\uparrow (a \cdot b) = \uparrow a \cdot b + a \cdot \uparrow b \quad [2]$$

$$\uparrow (a + b) = \uparrow a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \uparrow b \quad [3]$$

Ces deux propriétés trouvent donc leur limite lorsque des événements se produisent simultanément, ce qui est le cas pour des variables corrélées et plus généralement pour les variables internes d’un grafcet (Figure 3).



Au franchissement de la transition  $t1$ , l'application de la règle d'évolution des étapes actives (§ 4.5.3. de la norme CEI 848) impose la simultanéité entre les occurrences de  $\downarrow X2$ ,  $\downarrow X3$ ,  $\downarrow X4$ ,  $\uparrow X5$  et  $\uparrow X6$ .

**Figure 3.** Le Grafcet retient la simultanéité d'occurrences d'événements internes

Il suffit d'examiner une expression telle que [1] pour identifier la cause des difficultés à évaluer de telles équations logiques. En effet, dans cette expression "+" et "." représentent les deux lois de composition de l'Algèbre de Boole et "-" la loi unaire de complément, elles sont parfaitement définies par leur table de vérité. Par contre " $\uparrow$ " n'est qu'une simple notation indiquant que le concepteur de cette expression s'intéresse au changement d'état de la fonction  $(a \cdot \bar{c} + b)$  et non à son niveau logique "1". Dans [BOU 92], les auteurs précisent d'ailleurs que les réceptivités comprenant des fronts de variables ne sont pas définies au sens de l'Algèbre de Boole.

Pour être à même de développer et d'évaluer de telles expressions, quel que soit le nombre de variables composant les fonctions logiques et en prenant en compte la possibilité d'événements distincts simultanés, nous nous proposons maintenant de construire une algèbre de Boole "étendue" comprenant deux lois unaires événementielles : le "front montant" et le "front descendant". Ainsi munis d'une définition algébrique des fronts, nous établirons un ensemble de propriétés permettant le développement et l'évaluation d'expressions telles que [1].

### 3. Construction d'une algèbre de Boole "événementielle"

#### 3.1. Ensemble de définition

L'ensemble de définition de l'algèbre recherchée doit :

- représenter fidèlement les entrées et sorties de tout système logique,
- permettre la prise en compte "temporelle" des événements,
- comprendre au moins deux éléments,
- être stable pour toutes les lois qui y seront définies (c'est-à-dire, être tel que toute composition possible entre les éléments de cet ensemble soit un élément de cet ensemble).

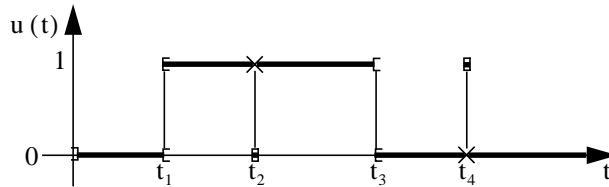
En tenant compte de ces quatre critères nous avons retenu, et nous noterons  $\mathbf{II}$ , l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbf{R}^{+*}$ , à valeurs booléennes, qui vérifient la

propriété suivante :

$$\mathbf{I} = \{ u : \mathbf{R}^{+*} \rightarrow \mathbf{B} \mid \forall t \in \mathbf{R}^{+*} : (\exists \varepsilon_t > 0 : (\forall (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in ]0, \varepsilon_t[{}^2, u(t - \varepsilon_1) = u(t - \varepsilon_2))) \} \\ \text{avec } \mathbf{B} = \{0, 1\} : \text{ensemble des Booléens}$$

Par définition, toutes les fonctions  $u$  de  $\mathbf{I}$  sont donc continues par morceaux et admettent en certains points une double discontinuité. La forme générale d'une fonction de l'ensemble  $\mathbf{I}$  est représentée sur la figure 4.

Aux points de discontinuité, se pose le problème de la valeur de la fonction. La fonction peut en effet être considérée continue à droite, ou continue à gauche. Nous retiendrons avec J.P. Frachet la continuité à droite, plus naturelle pour le physicien puisque causale [FRA 92]. A la date d'occurrence d'un événement, nous considérerons donc que la fonction a déjà changé de valeur.



**Figure 4.** Exemple de fonction élément de l'ensemble  $\mathbf{I}$

Nous admettons l'existence de points présentant un phénomène de double discontinuité ( $u(t_2) = 0$  ;  $u(t_4) = 1$ ) de manière à assurer la stabilité de  $\mathbf{I}$  relativement aux lois fronts.

Il convient de remarquer qu'une telle définition des éléments de  $\mathbf{I}$  est parfaitement conforme à la pratique des automaticiens qui représentent souvent ainsi, sous forme de chronogrammes l'évolution temporelle des variables booléennes des systèmes étudiés.

### 3.2. Convention de notation

Pour faciliter la lecture de cet article et afin d'éviter toute confusion entre les opérations sur les éléments de  $\mathbf{I}$  (fonction  $u : \mathbf{R}^{+*} \rightarrow \mathbf{B}$ ) et les booléens (valeurs prises par ces fonctions à un instant donné), nous noterons dans toute la suite de cet article " $\wedge$ " l'opérateur ET logique entre deux booléens, " $\vee$ " l'opérateur OU logique entre deux booléens et " $\neg$ " l'opérateur NON sur un booléen. Les notations " $.$ ", " $+$ ", et " $-$ " seront quant-à-elles réservées aux opérations sur  $\mathbf{I}$ .

De plus, nous avons pris soin de toujours distinguer la fonction du booléen, valeur prise, à un instant donné, par cette fonction. Par exemple,  $u, v, w$  sont trois fonctions élément de  $\mathbf{I}$  tandis que  $u(t), v(t), w(t)$  sont trois booléens.

### 3.3. Définition des opérations sur $\mathbb{I}$

Après avoir explicité notre ensemble de définition et précisé les notations, nous pouvons définir sur  $\mathbb{I}$  les opérations suivantes :

- deux lois de composition :

la loi **ET**

$$\mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$$

$$(u, v) \rightarrow (u \cdot v)$$

$$\text{avec } \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, (u \cdot v)(t) = u(t) \wedge v(t)$$

la loi **OU**

$$\mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$$

$$(u, v) \rightarrow (u + v)$$

$$\text{avec } \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, (u + v)(t) = u(t) \vee v(t)$$

- une loi unaire :

la loi **NON**

$$\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$$

$$u \rightarrow \bar{u}$$

$$\text{avec } \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \bar{u}(t) = \neg u(t)$$

Par définition toutes ces lois sont internes.

### 3.4. Structure d'algèbre de Boole sur $\mathbb{I}$

Nantis de ces définitions, il est aisé de démontrer que l'ensemble  $\mathbb{I}$  muni des lois définies précédemment possède une structure d'algèbre de Boole, c'est-à-dire [PER 88] [MAR 89] :

- Les deux lois de composition sont commutatives :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{I}^2, u \cdot v = v \cdot u$$

$$\forall (u, v) \in \mathbb{I}^2, u + v = v + u$$

- Les deux lois de composition sont associatives :

$$\forall (u, v, w) \in \mathbb{I}^3, (u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$$

$$\forall (u, v, w) \in \mathbb{I}^3, (u + v) + w = u + (v + w)$$

- La loi ET possède un élément neutre :

Il s'agit de la fonction constante notée  $1^*$  définie par :  $\forall t \in \mathbf{R}^{+*}, 1^*(t) = 1$ .

- La loi OU possède un élément neutre :

Il s'agit de la fonction constante notée  $0^*$  définie par :  $\forall t \in \mathbf{R}^{+*}, 0^*(t) = 0$ .

- Chaque loi de composition est distributive par rapport à l'autre :

$$\forall (u, v, w) \in \mathbf{I}^3, u \cdot (v + w) = (u \cdot v) + (u \cdot w)$$

$$\forall (u, v, w) \in \mathbf{I}^3, u + (v \cdot w) = (u + v) \cdot (u + w)$$

- Tout élément de  $\mathbf{I}$  possède un complément unique.

- La somme de tout élément de  $\mathbf{I}$  et de son complément est égale à  $1^*$ . Le produit de tout élément de  $\mathbf{I}$  et de son complément est égal à  $0^*$  :

$$\forall u \in \mathbf{I}, u + \bar{u} = 1^*$$

$$\forall u \in \mathbf{I}, u \cdot \bar{u} = 0^*$$

De plus, les propriétés fondamentales classiques des algèbres de Boole sont vérifiées :

- La loi NON est involutive :

$$\forall u \in \mathbf{I}, \bar{\bar{u}} = u$$

- Les lois de composition sont idempotentes :

$$\forall u \in \mathbf{I}, u \cdot u = u$$

$$\forall u \in \mathbf{I}, u + u = u$$

- Les théorèmes de De Morgan s'appliquent :

$$\overline{\sum_{i=1}^n u_i} = \prod_{i=1}^n \bar{u}_i$$

$$\overline{\prod_{i=1}^n u_i} = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i$$

### 3.5. Prise en compte des événements dans cette algèbre

Tout l'intérêt de cette algèbre réside dans le fait que nous pouvons maintenant définir rigoureusement deux lois unaires supplémentaires pour exprimer formellement la notion d'événement :

la loi **FM** (front montant)

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &\rightarrow \mathbb{I} \\ u &\rightarrow \uparrow u \end{aligned}$$

$$\text{avec } \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \uparrow u(t) = u(t) \wedge (\exists \varepsilon_0 > 0: \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[, u(t - \varepsilon) = 0)$$

la loi **FD** (front descendant)

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &\rightarrow \mathbb{I} \\ u &\rightarrow \downarrow u \end{aligned}$$

$$\text{avec } \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \downarrow u(t) = \bar{u}(t) \wedge (\exists \varepsilon_0 > 0: \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[, u(t - \varepsilon) = 1)$$

Les images de la fonction  $\uparrow u$  (respectivement  $\downarrow u$ ) sont donc déterminées, à chaque instant, comme le ET logique de deux booléens. Le premier booléen est la valeur (respectivement le complément de la valeur) à cet instant de la fonction  $u$ , tandis que le second booléen est la valeur, à ce même instant, d'un prédicat. La véracité de ce prédicat dépend de la valeur prise par la fonction  $u$  sur l'intervalle  $]t - \varepsilon_0, t[$ .

Pour la fonction représentée sur la figure 4 par exemple :

$$- \uparrow u(t) = 1 \text{ si } t \in [t_1, t_2[ \cup ]t_2, t_3[ \cup \{t_4\} \text{ et si } t \in ]0, t_1] \cup [t_3, t_4] \cup ]t_4, \infty[ \text{ soit } t = t_1 \text{ ou } t = t_4.$$

$$- \downarrow u(t) = 1 \text{ si } t \in ]0, t_1[ \cup \{t_2\} \cup [t_3, t_4[ \cup ]t_4, \infty[ \text{ et si } t \in ]t_1, t_2] \cup ]t_2, t_3] \text{ soit } t = t_2 \text{ ou } t = t_3.$$

Par définition, ces deux lois sont internes puisque les fonctions  $\uparrow u$  et  $\downarrow u$  sont définies sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , à valeurs booléennes et vérifient la propriété des éléments de  $\mathbb{I}$  développées au paragraphe 3.1.

$\varepsilon_0$  et  $\varepsilon$  étant toujours considérés strictement positifs, dans la suite de cet article nous allègerons la notation en notant seulement " $\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0$ " à la place de " $\exists \varepsilon_0 > 0: \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ ".

### 3.6. Propriétés des lois front montant et front descendant

Nous allons démontrer dans cette section quelques propriétés des lois front.

3.6.1. composition des lois ET, OU, NON avec la loi FM

$$\underline{u + \uparrow u = u} \quad [\text{Propriété 1}]$$

*Démonstration :*

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbf{R}^{+*}, (u + \uparrow u)(t) &= u(t) \vee \uparrow u(t) \\ &= u(t) \vee u(t) \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t - \varepsilon) = 0) \\ &= u(t) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

$$\underline{u \cdot \uparrow u = \uparrow u} \quad [\text{Propriété 2}]$$

*Démonstration :*

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbf{R}^{+*}, (u \cdot \uparrow u)(t) &= u(t) \wedge \uparrow u(t) \\ &= u(t) \wedge u(t) \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t - \varepsilon) = 0) \\ &= \uparrow u(t) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

$$\underline{\uparrow \bar{u} = \downarrow u} \quad [\text{Propriété 3}]$$

*Démonstration :*

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbf{R}^{+*}, \uparrow \bar{u}(t) &= \bar{u}(t) \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \bar{u}(t - \varepsilon) = 0) \\ &= \bar{u}(t) \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \neg u(t - \varepsilon) = 0) \\ &= \bar{u}(t) \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t - \varepsilon) = 1) \\ &= \downarrow u(t) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

$$\underline{\uparrow \left( \prod_{i=1}^n u_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \uparrow u_i \cdot \prod_{(j=1), (j \neq i)}^n u_j \right)} \quad [\text{Propriété 4}]$$

*Démonstration :*

Cette démonstration se fera par récurrence, mais il est nécessaire de démontrer au préalable le lemme suivant :

$$\forall t \in \mathbf{R}^{+*}, u(t) \wedge \neg(\uparrow u(t)) = u(t) \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t - \varepsilon) = 1)$$

*Démonstration du lemme :*

$$\begin{aligned}
 \forall t \in \mathbf{R}^{+*}, \\
 u(t) \wedge \neg(\uparrow u(t)) &= u(t) \wedge \neg(u(t) \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t-\varepsilon)=0)) \\
 &= u(t) \wedge (\neg u(t) \vee \neg(\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t-\varepsilon)=0)) \\
 &= u(t) \wedge \neg(\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t-\varepsilon)=0) \quad [4]
 \end{aligned}$$

Or :

$$\forall u \in \mathbf{I}, \forall t \in \mathbf{R}^{+*}, \neg(\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t-\varepsilon)=0) = (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t-\varepsilon)=1)$$

En effet, toutes les fonctions de  $\mathbf{I}$ , étant continues par morceaux, vérifient les deux équations suivantes :

$$\forall t \in \mathbf{R}^{+*}, \begin{cases} (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t-\varepsilon)=0) \vee (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t-\varepsilon)=1) = 1 \\ (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t-\varepsilon)=0) \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t-\varepsilon)=1) = 0 \end{cases}$$

Compte tenu des propriétés de la loi NON de l'Algèbre de Boole, les deux termes de ces équations sont nécessairement complémentaires.

On a donc :

$$\forall u \in \mathbf{I}, \forall t \in \mathbf{R}^{+*}, \neg(\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t-\varepsilon)=0) = (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t-\varepsilon)=1) \quad [5]$$

En injectant ce résultat dans [4], nous obtenons

$$\forall t \in \mathbf{R}^{+*}, u(t) \wedge \neg(\uparrow u(t)) = u(t) \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t-\varepsilon)=1)$$

Le lemme étant démontré, nous allons maintenant démontrer la propriété 4. Nous débuterons par la démonstration au rang 2, c'est-à-dire :

$$\uparrow(u \cdot v) = \uparrow u \cdot v + u \cdot \uparrow v$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \forall t \in \mathbf{R}^{+*}, \uparrow(u \cdot v)(t) &= (u \cdot v)(t) \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, (u \cdot v)(t-\varepsilon)=0) \\
 &= u(t) \wedge v(t) \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t-\varepsilon)=0) \\
 &\quad \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, v(t-\varepsilon)=0) \\
 &\vee u(t) \wedge v(t) \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t-\varepsilon)=1) \\
 &\quad \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, v(t-\varepsilon)=0) \\
 &\vee u(t) \wedge v(t) \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t-\varepsilon)=0) \\
 &\quad \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, v(t-\varepsilon)=1)
 \end{aligned}$$

soit en utilisant le lemme que nous venons de démontrer :

$$\begin{aligned} \uparrow(u \cdot v)(t) &= (\uparrow u(t) \wedge \uparrow v(t)) \vee (u(t) \wedge \neg(\uparrow u(t)) \wedge \uparrow v(t)) \\ &\quad \vee (\uparrow u(t) \wedge v(t) \wedge \neg(\uparrow v(t))) \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\uparrow u(t) \wedge \uparrow v(t) = (\uparrow u(t) \wedge \uparrow v(t) \wedge v(t)) \vee (\uparrow u(t) \wedge u(t) \wedge \uparrow v(t))$$

l'expression devient

$$\begin{aligned} \uparrow(u \cdot v)(t) &= (\uparrow u(t) \wedge \uparrow v(t) \wedge v(t)) \\ &\quad \vee (\uparrow u(t) \wedge v(t) \wedge \neg(\uparrow v(t))) \\ &\quad \vee (\uparrow u(t) \wedge u(t) \wedge \uparrow v(t)) \\ &\quad \vee (u(t) \wedge \neg(\uparrow u(t)) \wedge \uparrow v(t)) \end{aligned}$$

Soit après mise en facteur et simplification

$$\begin{aligned} \uparrow(u \cdot v)(t) &= (\uparrow u(t) \wedge v(t)) \vee (u(t) \wedge \uparrow v(t)) \\ &= ((\uparrow u \cdot v) + (u \cdot \uparrow v))(t) \end{aligned}$$

La propriété 4 est donc vraie au rang 2. Admettons maintenant qu'elle soit vraie au rang  $n$  et démontrons qu'elle est alors vraie au rang  $n+1$ .

$$\begin{aligned} \uparrow\left(\prod_{i=1}^{n+1} u_i\right) &= \uparrow\left(\prod_{i=1}^n u_i \cdot u_{n+1}\right) = \uparrow\left(\prod_{i=1}^n u_i\right) \cdot u_{n+1} + \left(\prod_{i=1}^n u_i\right) \cdot \uparrow u_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\uparrow u_i \cdot \prod_{(j=1), (j \neq i)}^n u_j\right) \cdot u_{n+1} + \left(\prod_{i=1}^n u_i\right) \cdot \uparrow u_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\uparrow u_i \cdot \prod_{(j=1), (j \neq i)}^{n+1} u_j\right) + \uparrow u_{n+1} \cdot \prod_{i=1}^n u_i \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(\uparrow u_i \cdot \prod_{(j=1), (j \neq i)}^{n+1} u_j\right) \end{aligned}$$

Le prédicat "vrai au rang  $n$  implique vrai au rang  $n+1$ " pour la propriété 4 venant d'être vérifié, nous pouvons maintenant conclure que la propriété 4 est vraie quelque soit  $n$ .

C.Q.F.D.

$$\underline{\uparrow\left(\sum_{i=1}^n u_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(\uparrow u_i \cdot \prod_{(j=1), (j \neq i)}^n \uparrow u_j + (\bar{u}_j \cdot \downarrow u_j)\right)} \quad \text{[Propriété 5]}$$

*Démonstration :*

Cette démonstration se fera par récurrence, mais il est nécessaire de démontrer au préalable le lemme suivant :

$$\forall t \in \mathbf{R}^{+*}, (\bar{u} \cdot \overline{\downarrow u})(t) = \neg u(t) \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t - \varepsilon) = 0)$$

*Démonstration du lemme :*

Dans cette démonstration, seront utilisés les résultats de l'équation [5].

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbf{R}^{+*}, (\bar{u} \cdot \overline{\downarrow u})(t) &= \bar{u}(t) \wedge \neg(\bar{u}(t) \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t - \varepsilon) = 1)) \\ &= \neg u(t) \wedge (\neg \bar{u}(t) \vee \neg(\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t - \varepsilon) = 1)) \\ &= \neg u(t) \wedge (u(t) \vee (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t - \varepsilon) = 0)) \\ &= \neg u(t) \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t - \varepsilon) = 0) \end{aligned}$$

Le lemme démontré, nous allons maintenant démontrer la proposition suivante :

$$\uparrow(u + v) = (\uparrow u \cdot \bar{v} \cdot \overline{\downarrow v}) + (\uparrow v \cdot \bar{u} \cdot \overline{\downarrow u}) + \uparrow u \cdot \uparrow v \quad [6]$$

*Démonstration :*

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbf{R}^{+*}, \uparrow(u + v)(t) &= (u + v)(t) \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, (u + v)(t - \varepsilon) = 0) \\ &= (u(t) \wedge \neg v(t) \vee \neg u(t) \wedge v(t) \vee u(t) \wedge v(t)) \\ &\quad \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t - \varepsilon) = 0) \\ &\quad \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, v(t - \varepsilon) = 0) \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \uparrow(u + v)(t) &= (\uparrow u \cdot \bar{v} \cdot \overline{\downarrow v})(t) \vee (\uparrow v \cdot \bar{u} \cdot \overline{\downarrow u})(t) \vee (\uparrow u \cdot \uparrow v)(t) \\ &= ((\uparrow u \cdot \bar{v} \cdot \overline{\downarrow v}) + (\uparrow v \cdot \bar{u} \cdot \overline{\downarrow u}) + \uparrow u \cdot \uparrow v)(t) \end{aligned}$$

Nous allons maintenant démontrer la propriété 5. Nous débuterons par la démonstration au rang 2, c'est-à-dire :

$$\uparrow\left(\sum_{i=1}^2 u_i\right) = \sum_{i=1}^2 \left( \uparrow u_i \cdot \prod_{(j=1), (j \neq i)}^2 \uparrow u_j + (\bar{u}_j \cdot \overline{\downarrow u}_j) \right)$$

En utilisant [6], on a :

$$\begin{aligned} \uparrow\left(\sum_{i=1}^2 u_i\right) &= \uparrow(u_1 + u_2) = (\uparrow u_1 \cdot \bar{u}_2 \cdot \overline{\downarrow u}_2) + (\uparrow u_2 \cdot \bar{u}_1 \cdot \overline{\downarrow u}_1) + \uparrow u_1 \cdot \uparrow u_2 \\ &= \uparrow u_1 \cdot (\uparrow u_2 + (\bar{u}_2 \cdot \overline{\downarrow u}_2)) + \uparrow u_2 \cdot (\uparrow u_1 + (\bar{u}_1 \cdot \overline{\downarrow u}_1)) \\ &= \sum_{i=1}^2 \left( \uparrow u_i \cdot \prod_{(j=1), (j \neq i)}^2 \uparrow u_j + (\bar{u}_j \cdot \overline{\downarrow u}_j) \right) \end{aligned}$$

La propriété 5 est donc vraie au rang 2. Admettons maintenant qu'elle soit vraie au rang  $n$  et démontrons qu'elle est alors vraie au rang  $n+1$ . Nous débuterons par la simplification suivante :

$$\begin{aligned} \overline{\sum_{i=1}^n u_i} \cdot \downarrow \left( \sum_{i=1}^n u_i \right) &= \prod_{i=1}^n \overline{u_i} \cdot \uparrow \left( \sum_{i=1}^n u_i \right) = \prod_{i=1}^n \overline{u_i} \cdot \uparrow \left( \prod_{i=1}^n \overline{u_i} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \overline{u_i} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \uparrow \overline{u_i} \cdot \prod_{(j=1), (j \neq i)}^n \overline{u_j} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \overline{u_i} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \uparrow \overline{u_i} \cdot \prod_{j=1}^n \overline{u_j} \right) = \prod_{i=1}^n \overline{u_i} \cdot \sum_{i=1}^n \uparrow \overline{u_i} \cdot \prod_{i=1}^n \overline{u_i} \\ &= \prod_{i=1}^n \overline{u_i} \cdot \left( \prod_{i=1}^n \uparrow \overline{u_i} + \prod_{i=1}^n \overline{u_i} \right) = \prod_{i=1}^n \overline{u_i} \cdot \prod_{i=1}^n \downarrow u_i \end{aligned}$$

Nous avons,

$$\begin{aligned} \uparrow \left( \sum_{i=1}^{n+1} u_i \right) &= \uparrow \left( \left( \sum_{i=1}^n u_i \right) + u_{n+1} \right) \\ &= \uparrow \left( \sum_{i=1}^n u_i \right) \cdot \overline{u_{n+1}} \cdot \downarrow \overline{u_{n+1}} + \uparrow u_{n+1} \cdot \sum_{i=1}^n \overline{u_i} \cdot \downarrow \sum_{i=1}^n u_i + \uparrow \left( \sum_{i=1}^n u_i \right) \cdot \uparrow u_{n+1} \\ &= \uparrow \left( \sum_{i=1}^n u_i \right) \cdot \left( \uparrow u_{n+1} + \overline{u_{n+1}} \cdot \downarrow \overline{u_{n+1}} \right) + \uparrow u_{n+1} \cdot \prod_{i=1}^n \overline{u_i} \cdot \prod_{i=1}^n \downarrow u_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \uparrow u_i \cdot \prod_{(j=1), (j \neq i)}^{n+1} \uparrow u_j + (\overline{u_j} \cdot \downarrow \overline{u_j}) \right) + \uparrow u_{n+1} \cdot \prod_{i=1}^n \overline{u_i} \cdot \prod_{i=1}^n \downarrow u_i \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \left( \uparrow u_i \cdot \prod_{(j=1), (j \neq i)}^{n+1} \uparrow u_j + (\overline{u_j} \cdot \downarrow \overline{u_j}) \right) \end{aligned}$$

Le prédicat "vrai au rang  $n$  implique vrai au rang  $n+1$ " pour la propriété 5 venant d'être vérifié, nous pouvons maintenant conclure que la propriété 5 est vraie quelque soit  $n$ .

C.Q.F.D.

### 3.6.2. composition des lois ET, OU, NON avec la loi FD

$$\boxed{\overline{u} + \downarrow u = \overline{u}} \quad \text{[Propriété 6]}$$

*Démonstration :*

Cette démonstration se fera en utilisant conjointement la propriété 3 et la propriété 1.

$$\bar{u} + \downarrow u = \bar{u} + \uparrow \bar{u} = \bar{u}$$

C.Q.F.D.

$$\underline{\bar{u} \cdot \downarrow u = \downarrow u} \quad \text{[Propriété 7]}$$

*Démonstration :*

Cette démonstration se fera en utilisant conjointement la propriété 3 et la propriété 2.

$$\bar{u} \cdot \downarrow u = \bar{u} \cdot \uparrow \bar{u} = \uparrow \bar{u} = \downarrow u$$

C.Q.F.D.

$$\underline{\downarrow \bar{u} = \uparrow u} \quad \text{[Propriété 8]}$$

*Démonstration :*

Cette démonstration se fera en utilisant conjointement la propriété 3 et la propriété d'involution de la loi NON.

$$\downarrow \bar{u} = \uparrow \bar{\bar{u}} = \uparrow u$$

C.Q.F.D.

$$\underline{\downarrow \left( \prod_{i=1}^n u_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \downarrow u_i \cdot \prod_{(j=1), (j \neq i)}^n \downarrow u_j + (u_j \cdot \uparrow \bar{u}_j) \right)} \quad \text{[Propriété 9]}$$

*Démonstration :*

Cette démonstration se fera en utilisant conjointement la propriété 3, la propriété 5 et la propriété d'involution de la loi NON.

$$\begin{aligned} \downarrow \left( \prod_{i=1}^n u_i \right) &= \downarrow \left( \overline{\overline{\prod_{i=1}^n u_i}} \right) = \uparrow \left( \sum_{i=1}^n \bar{u}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \uparrow \bar{u}_i \cdot \prod_{(j=1), (j \neq i)}^n \uparrow \bar{u}_j + (\bar{\bar{u}}_j \cdot \downarrow \bar{\bar{u}}_j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \downarrow u_i \cdot \prod_{(j=1), (j \neq i)}^n \downarrow u_j + (u_j \cdot \uparrow \bar{u}_j) \right) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

$$\underline{\downarrow \left( \sum_{i=1}^n u_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \downarrow u_i \cdot \prod_{(j=1), (j \neq i)}^n \bar{u}_j \right)} \quad \text{[Propriété 10]}$$

*Démonstration :*

Cette démonstration se fera en utilisant conjointement la propriété 3, la propriété 4

et la propriété d'involution de la loi NON.

$$\begin{aligned} \downarrow \left( \sum_{i=1}^n u_i \right) &= \downarrow \left( \overline{\sum_{i=1}^n u_i} \right) = \uparrow \left( \prod_{i=1}^n \bar{u}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \uparrow \bar{u}_i \cdot \prod_{(j=1), (j \neq i)}^n \bar{u}_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \downarrow u_i \cdot \prod_{(j=1), (j \neq i)}^n \bar{u}_j \right) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

### 3.6.3. Composition des lois fronts

$$\underline{\uparrow (\uparrow u) = \uparrow u} \quad \text{[Propriété 11]}$$

*Démonstration :*

Cette démonstration se fera en utilisant conjointement la propriété 2 et la propriété 4.

$$\begin{aligned} \uparrow (\uparrow u) &= \uparrow (u \cdot (\uparrow u)) = (\uparrow u \cdot \uparrow u) + (u \cdot \uparrow (\uparrow u)) \\ &= \uparrow u + u \cdot \uparrow (\uparrow u) \cdot \uparrow u = \uparrow u \cdot (1 + \uparrow (\uparrow u)) = \uparrow u \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

$$\underline{\uparrow (\downarrow u) = \downarrow u} \quad \text{[Propriété 12]}$$

*Démonstration :*

Cette démonstration se fera en utilisant successivement la propriété 3 et la propriété 11.

$$\uparrow (\downarrow u) = \uparrow (\uparrow \bar{u}) = \uparrow \bar{u} = \downarrow u$$

C.Q.F.D.

$$\underline{\downarrow (\uparrow u) = 0^*} \quad \text{[Propriété 13]}$$

*Démonstration :*

Pour démontrer cette proposition, il est nécessaire de démontrer au préalable la proposition suivante :

$$\forall u \in \mathbf{I}, (\forall t \in [t_1, t_2], \uparrow u(t) = 1) \Rightarrow (t_1 = t_2)$$

Démonstration de la proposition :

Par la définition de la loi FM, nous avons d'une part,

$$(\forall t \in [t_1, t_2], \uparrow u(t)=1) \Rightarrow (\forall t \in [t_1, t_2], u(t)=1)$$

et d'autre part,

$$(\uparrow u(t_2)=1) \Rightarrow (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, u(t_2 - \varepsilon)=0)$$

Ces deux implications ne sont conjointement possibles que si et seulement si  $t_1 = t_2$ .

Grâce à cette proposition nous pouvons maintenant écrire que :

$$\forall u \in \mathbf{II}, \forall t \in \mathbf{R}^{+*}, (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \uparrow u(t - \varepsilon)=0)$$

Donc

$$\forall t \in \mathbf{R}^{+*}, (\downarrow (\uparrow u))(t) = \overline{\uparrow u(t)} \wedge (\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \uparrow u(t - \varepsilon)=1) = 0$$

C.Q.F.D.

$$\boxed{\downarrow (\downarrow u) = 0^*} \quad \text{[Propriété 14]}$$

*Démonstration :*

Cette démonstration se fera en utilisant conjointement la propriété 3 et la propriété 13.

$$\downarrow (\downarrow u) = \downarrow (\uparrow \bar{u}) = 0^* \quad \text{C.Q.F.D.}$$

#### 4. Exemple d'application au Grafct

Nous allons dans cette section illustrer par un court exemple l'intérêt de l'approche formelle que nous venons d'exposer. Mais au préalable, il convient de rappeler qu'elle contribue à formaliser et à étendre l'approche événementielle des systèmes logiques *tout en préservant* les postulats et les heuristiques des automaticiens. Ainsi :

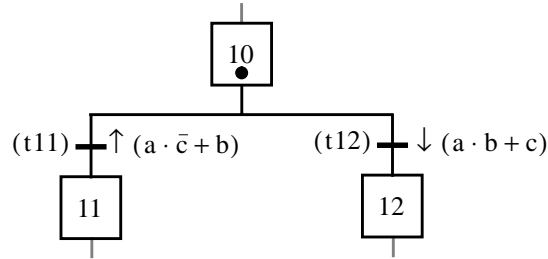
- la définition des éléments de l'ensemble  $\mathbf{II}$  est une représentation temporelle des "variables booléennes" couramment retenue en automatique logique,

- si l'on rejette l'occurrence simultanée de plusieurs événements, les propriétés 4 et 5 donnent, à l'ordre 2, les mêmes expressions que les lois empiriques [2] et [3].

Les quatorze propriétés démontrées dans cet article peuvent donc être utilisées en modélisation des systèmes logiques indépendamment de l'algèbre qui les supporte. Il suffit pour cela que l'analyste fasse sienne l'hypothèse de continuité à droite des

fonctions de l'ensemble  $\mathbb{I}$  (ou, en d'autres termes, qu'il considère qu'à la date d'occurrence d'un événement, la fonction a déjà changé de valeur).

Soit maintenant l'extrait de grafcet suivant (Figure 5):



**Figure 5.** Structure de sélection de séquence en Grafcet

Cette structure, classique en Grafcet, nommée “sélection de séquence” [CEI 88] conduit si l'on n'y prend garde à un “parallélisme interprété”, c'est-à-dire à une activation simultanée des étapes 11 et 12 par franchissement simultané de t11 et de t12.

Lorsqu'il désire éviter ce parallélisme interprété, l'analyste rend les réceptivités mutuellement exclusives, et a pour cela souvent recourt aux réceptivités événementielles.

Dans notre cas, le franchissement simultané de t11 et de t12 est réalisé si l'équation [7] admet des solutions :

$$\uparrow (a \cdot \bar{c} + b) \cdot \downarrow (a \cdot b + c) = 1^* \quad [7]$$

La simultanéité d'occurrence de ces deux événements ne peut être rejetée a priori puisque les fonctions  $(a \cdot \bar{c} + b)$  et  $(a \cdot b + c)$  sont liées par les variables  $a, b, c$ .

Nous allons démontrer, qu'à l'aide des résultats exposés dans le paragraphe 3 de cet article, il est aisé de vérifier l'existence de solutions à l'équation [7].

Dans un premier temps, nous développons le premier terme du premier membre de l'équation [7] :

$$\begin{aligned} \uparrow (a \cdot \bar{c} + b) &= (\uparrow (a \cdot \bar{c}) \cdot (\uparrow b + \bar{b} \cdot \downarrow b)) \\ &\quad + (\uparrow b \cdot (\uparrow (a \cdot \bar{c}) + \overline{a \cdot \bar{c}} \cdot \downarrow (a \cdot \bar{c}))) \\ &= (\uparrow (a \cdot \bar{c}) \cdot \uparrow b) + (\uparrow (a \cdot \bar{c}) \cdot \bar{b} \cdot \downarrow b) + (\uparrow b \cdot \overline{a \cdot \bar{c}} \cdot \downarrow (a \cdot \bar{c})) \\ &= ((\uparrow a \cdot \bar{c} + a \cdot \downarrow c) \cdot \uparrow b) + ((\uparrow a \cdot c + \bar{a} \cdot \downarrow c) \cdot \bar{b} \cdot \downarrow b) \\ &\quad + (\uparrow b \cdot \overline{a \cdot \bar{c}} \cdot (\downarrow a \cdot \uparrow c + \downarrow a \cdot \bar{c} \cdot \downarrow c + \uparrow c \cdot a \cdot \uparrow a)) \end{aligned}$$

Ce qui donne après simplification :

$$\begin{aligned} \uparrow (a \cdot \bar{c} + b) &= \bar{a} \cdot \downarrow a \cdot \uparrow b + \uparrow a \cdot \uparrow b + \uparrow b \cdot \downarrow c + \uparrow b \cdot c \cdot \uparrow \bar{c} \\ &\quad + \uparrow a \cdot \bar{b} \cdot \downarrow b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot \downarrow b \cdot \downarrow c \end{aligned}$$

De même pour le second terme :

$$\begin{aligned} \downarrow (a \cdot b + c) &= \downarrow (a \cdot b) \cdot c + \downarrow c \cdot (a \cdot b) \\ &= (\downarrow a \cdot \downarrow b + \downarrow a \cdot (b \cdot \uparrow \bar{b})) + \downarrow b \cdot (a \cdot \uparrow \bar{a}) \cdot c + a \cdot b \cdot \downarrow c \end{aligned}$$

Ce qui donne après simplification :

$$\downarrow (a \cdot b + c) = \bar{a} \cdot \downarrow c + \bar{b} \cdot \downarrow c + \downarrow a \cdot \downarrow b \cdot \bar{c} + a \cdot \uparrow \bar{a} \cdot \downarrow b \cdot \bar{c} + \downarrow a \cdot b \cdot \uparrow \bar{b} \cdot \bar{c}$$

Le ET logique de ces deux événements s'écrit :

$$\uparrow (a \cdot \bar{c} + b) \cdot \downarrow (a \cdot b + c) = \bar{a} \cdot \uparrow b \cdot \downarrow c + a \cdot \bar{b} \cdot \downarrow \bar{b} \cdot \downarrow c \quad [8]$$

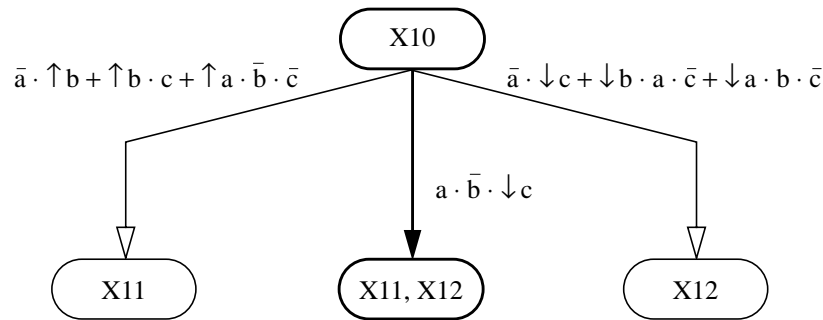
Le Grafcet rejetant par hypothèse l'occurrence simultanée d'événements externes non corrélés [AFC 83] et en remarquant de plus que :

$$\downarrow c = \downarrow c \cdot (\downarrow b + \downarrow \bar{b}) = \downarrow c \cdot \downarrow b + \downarrow c \cdot \downarrow \bar{b} = \downarrow c \cdot \downarrow \bar{b}$$

l'expression [8] peut finalement être simplifiée comme suit :

$$\uparrow (a \cdot \bar{c} + b) \cdot \downarrow (a \cdot b + c) = a \cdot \bar{b} \cdot \downarrow \bar{b} \cdot \downarrow c = a \cdot \bar{b} \cdot \downarrow c$$

Il existe donc bien une possibilité de franchissement simultané des transitions t11 et t12 du grafcet de la figure 5 malgré la présence de deux réceptivités événementielles. Le graphe des situations accessibles pour cet extrait de grafcet est finalement le suivant (Figure 6) :



**Figure 6.** Graphe des situations accessibles du grafcet de la figure 5

### 5. Conclusion

Nous venons de présenter dans cet article les résultats d'un travail théorique, qui vise à combler l'absence de définition formelle de la notion d'événement telle qu'elle est pratiquée en Grafcet. Nous avons pour cela construit une algèbre sur un ensemble de fonctions définies sur  $\mathbb{R}^{+*}$  à valeurs booléennes. Sur cette algèbre, deux

opérateurs ont été définis pour la représentation formelle des événements : l'opérateur front montant et l'opérateur front descendant. Quatorze propriétés ont ensuite été démontrées relativement aux opérateurs fronts et leurs combinaisons. Ces travaux, bien que possédant une finalité intrinsèque, s'inscrivent en fait dans le cadre d'un projet global visant à l'analyse de la cohérence et du comportement dynamique des grafjets complexes. L'algèbre de Boole que nous venons de présenter nous a en effet permis de concevoir un module de calcul formel et de simplification d'expressions combinatoires. Ce module de calcul formel est lui-même utilisé pour l'Analyse de la dynamique de Grafjets par Génération Logique de l'Automate à état Equivalent (projet AGGLAE du Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée [ROU 94]).

**Remerciements :** Nous tenons à remercier J.-P. Frachet du LGA/ISMCM de S<sup>t</sup> Ouen pour les critiques constructives dont il nous a fait part à la lecture de cet article.

## 6. Références bibliographiques

- [AFC 77] Groupe AFCET Systèmes Logiques ; "Pour une représentation normalisée du cahier des charges d'un automatisme logique" ; RAI ; Vol. 61, pages 27 à 32 & Vol. 62, pages 36 à 40 ; Novembre & Décembre 1977
- [AFC 83] Groupe AFCET Systèmes Logiques ; "Les interprétations algébriques et algorithmiques et les temporisations du GRAFCET" ; Document de synthèse édité par l'AFCET ; Juin 1983
- [BLA 79] M. BLANCHARD ; "Comprendre, maîtriser et appliquer le GRAFCET" ; Editions CEPADUES, 174 pages ; 1979
- [BOU 92] N. BOUTEILLE & collaborateurs ; "Le GRAFCET" ; Editions CEPADUES, 144 pages ; 1992
- [CEI 88] Norme CEI 848 ; "Etablissement de diagrammes fonctionnels pour systèmes de commande" ; 1988
- [DAV 89] R. DAVID, H. ALLA ; "Du Grafjet aux réseaux de Petri" ; Editions HERMES, 424 pages ; 1989
- [FRA 92] J.P. FRACHET, G. COLOMBARI ; "Eléments pour une sémantique temporelle du Grafjet et des systèmes dynamiques fondée sur l'analyse non standard" ; Actes du Congrès GRAFCET'92 - Editions AFCET pages 111 à 124 ; Paris ; Mars 1992
- [GRE 85] GREPA ; "Le GRAFCET de nouveaux concepts" ; Editions CEPADUES, 104 pages ; 1985
- [MAR 89] M. MARCHAND ; "Mathématique discrète" ; Editions DE BOECK UNIVERSITÉ ; 499 pages ; 1989
- [MOA.81] M. MOALLA ; "Spécification et conception sûre d'automatismes discrets complexes, basées sur l'utilisation du Grafjet et des réseaux de Petri" ; Thèse d'Etat de l'Université scientifique et médicale de Grenoble ; Juillet 1981
- [MOA 85] M. MOALLA ; "Réseaux de Petri interprétés et Grafjet" ; TSI Editions DUNOD ; Vol. 14, N°1 - pages 17 à 30 ; 1985
- [PER 88] N. PERMINGEAT, D. GLAUDE ; "Algèbre de Boole" ; Editions MASSON, 211 pages ; 1988
- [ROU 94] J.M. ROUSSEL ; "Analyse de grafjets par génération logique de l'automate équivalent" ; thèse de doctorat de l'E.N.S. de Cachan ; à paraître ; 1994
- [THE 80] S. THELLIEZ, J.M. TOULOTTE ; "GRAFCET et logique industrielle programmée" ; Editions EYROLLES ; 138 pages ; 1980
- [ZAH 87] J. ZAHND ; "Machines séquentielles" ; Editions DUNOD, 265 pages ; 1987