



Habilitation à Diriger des Recherches
de
l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI

Calcul des structures : problèmes d'identification et de fatigue

ANDREI CONSTANTINESCU

Laboratoire de Mécanique des Solides
CNRS UMR 7649
Ecole Polytechnique, 91120 Palaiseau, France
tel. (33) 1 69 33 57 56

e-mail : andrei.constantinescu@lms.polytechnique.fr

Soutenu le 9 mars 2005 devant le jury composé par :

Président :	Mme. Suzanne DEGALLAIX-MOREUIL
Rapporteurs :	M. Olivier ALLIX M. Georges CAILLETAUD M. Alain CIMETIÈRE
Membres :	M. Huy Duong BUI M. Jean-Baptiste LEBLOND

"Kiki soso larghyalo"
Proverbe Ladakhi

Table des matières

I	Résumé des travaux	7
1	Problèmes inverses en élasticité	11
1.1	Problématique	11
1.2	Problèmes directs et inverses en élasticité	12
1.3	Principe de réciprocité en élastodynamique	14
1.4	Identification de modules élastiques distribués	17
1.5	Erreur en loi de comportement pour les plaques élastiques	22
1.6	Conclusion et Perspectives	25
2	Problèmes Inverses et calculs de sensibilité	29
2.1	Introduction	29
2.2	Etat adjoint pour conditions de contact	31
2.3	Sensibilité et loi standard généralisée	34
2.4	Identification des paramètres du comportement en géotechnique	38
2.5	Identification des paramètres à partir d'essais d'indentation	46
2.6	Conclusion et Perspectives	52
3	Structures en fatigue thermomécanique	55
3.1	Problématique	55
3.2	Matériaux et essais	56
3.3	Loi de comportement	57
3.4	Critères de fatigues	60
3.5	Application aux structures en fonte	63
3.6	Application aux structures en Aluminium	65
3.7	Conclusions et Perspectives	68
4	Perspectives	71

Première partie

Résumé des travaux

Introduction

La démarche proposée dans la suite part d'une vision ingénieur des problèmes de mécanique ayant comme base le calcul des structures. Dans nos recherches ont s'est focalisé sur deux aspects fondamentaux de cette approche : *les problèmes d'identification* et *les problèmes de fatigue* ou la prédiction de durée de vie. Si les techniques mis en oeuvre dans les deux domaines semblent assez différentes il est néanmoins nécessaire de les maîtriser pour résoudre un certain nombre des problèmes pratiques.

Le mémoire présenté est divisé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous abordons les problèmes inverses et d'identification formulés pour des corps à comportement élastique. Le comportement linéaire permet le développement des méthodes spécifiques pour leur résolution [A18]¹, comme l'écart à la réciprocité [A6,A21], l'erreur en loi de comportement [A5,A8], La présentation proposée essaie de trouver un chemin fédérateur entre ces différentes techniques.

Le deuxième chapitre est consacré aux méthodes de type contrôle optimal appliquées à la résolution des problèmes d'identification des paramètres de comportement. La généralité de ses méthodes permet leur application autant à des corps au comportement linéaire qu'à ceux au comportement non linéaire. Plus précisément s'est intéressés à la méthode de différentiation directe et de l'état adjoint. Les problèmes d'identification étudiés faisant intervenir des corps au comportement élastoviscoplastique et des conditions aux limites unilatérales. Les applications discutées dans ce cadre sont de l'identification des paramètres matériaux pour des structures ou des essais géotechniques [A14,AS1,AS2] ou à partir des essais d'indentation [A10,A11,A12].

Le troisième chapitre discute les méthodes de conception à la fatigue des structures sous chargement thermomécanique. Les application en vue sont les collecteurs d'échappement en fonte [A9,A15,A20] et les culasses en aluminium. On présente l'identification d'une loi de comportement, les grandes lignes du calcul mécanique ainsi que le critère de fatigue choisi. Les résultats de la méthode sur différentes pièces sont également discutées.

Une série des problèmes traités dans différents travaux, comme par exemple les problèmes des contraintes résiduelles [A2,A3,A4], les problèmes de forabilité [A7], la modélisation mécanique du fonctionnement des poumons et de la cage thoracique [A13], ou encore le problème de la modélisation acoustique d'une clarinette [A17] ne seront pas discutés dans ce mémoire. On ne discutera pas des relations entre la fatigue à grande et faible nombre de cycles [A16] ou des extensions des modèles de fatigue existantes dans le domaine anisotrope [A20].

Une grande partie des résultats présentes ont été obtenus en collaboration étroite avec Différents collègues. J'aimerais premièrement remercier ici, Huy Duong BUI, qui m'a permis de partager son enthousiasme continu pour les problèmes de mécanique pendant et surtout après ma thèse puis à Ky DANG

¹Les citation correspondent à la liste des travaux

VAN, qui m'a fait découvrir le monde des applications industrielles. Mes pensées vont également vers Patrick BALLARD, André BIGNNONET, Marc BONNET, Hubert MAIGRE, Habibou MAITOURNAM, Eric CHARKALUK, Nicolas TARDIEU, Laetitia VERGER, Brice LECAMPION, ainsi que vers d'autres collègues du LMS ou d'ailleurs avec lesquelles j'ai partagé une partie du chemin et qui par différents échanges m'ont toujours encouragé à poursuivre dans cette voie.

Chapitre 1

Problèmes inverses en élasticité

1.1 Problématique

L'utilisation systématique de la théorie de l'élasticité en dimensionnement des structures a débuté au 19^{me} siècle. Les recherches dans ce domaine ont tout d'abord porté au commencement sur la modélisation générale et la recherche de solutions exactes, puis, dans la deuxième partie du 20^{me} siècle, sur les méthodes variationnelles et les techniques de calcul de solutions approchées qui en découlent. Actuellement, les grandes questions portant sur des problèmes "bien posés" au sens de Hadamard ont trouvé leur réponse, à l'exception de questions d'unicité de solutions à des problèmes de contact qui restent encore ouvertes [Bal99].

L'expression "bien posé" qualifie un problème pour lequel on dispose d'une quantité de données nécessaire et suffisante pour assurer l'existence, l'unicité et la continuité de la solution par rapport aux données. Du point de vue de l'ingénieur, ceci correspond à la détermination de la réponse d'une structure, de géométrie et de matériau connus, soumise à un chargement donné.

Par ailleurs, d'autres problèmes sont dits directs. Cette expression n'a pas une signification précise : dans la majorité des cas, il s'agit de problèmes "bien posés" dont la solution est connue. Par problème inverse, on désigne des problèmes qui ne sont pas directs. Dans ces cas-là, les données et les inconnues sont différentes des problèmes directs classiques, au sens où généralement on ne dispose pas des données suffisantes pour en assurer la "bonne définition", ce qui signifie que leur solution n'est pas unique ou pas stable par rapport aux données.

Diverses questions concernant les problèmes inverses ont déjà reçu des réponses. On peut ainsi citer l'identification, par des mesures sur la frontière, de modules distribués ou de défauts, la détection sismique des ressources pétrolières, etc.

Dans ce chapitre, nous présenterons rapidement les équations générales en élasticité sous l'hypothèse de petites perturbations et nous nous intéresserons ensuite à deux problèmes inverses étudiés dans le cadre de nos recherches. Il s'agit :

- en acoustique ou élastodynamique, du problème d'*identification de fissure plane* à partir des mesures d'accélération en surface en utilisant l'écart à la réciprocité (voir section 1.3). Nous présenterons les solutions explicites de reconstruction d'une fissure plane en acoustique à partir de trois familles de fonctions adjointes [BCM99] que nous avons obtenues. Ensuite, nous exhibons une méthode numérique de reconstruction des fissures en élastodynamique fondée sur un concept original d'écart instantané à la réciprocité [BCM04].
- en élastostatique, le problème d'*identification de la distribution spatiale des modules élastiques*

$\mathbf{C}(\mathbf{x})$ à partir des paires de mesures de déplacements et de tractions sur la frontière. Une première technique numérique de reconstruction basée sur la minimisation de l'erreur en loi de comportement a fait l'objet des nos travaux de thèse [Con95]. Les résultats obtenus par la suite portent d'une part sur la localisation de défauts [BC00] (voir section 1.4) et d'autre part sur l'extension de l'erreur en loi de comportement et de la technique numérique de reconstruction au cas de plaques [Con98] (voir section 1.5).

Une présentation plus générale des problèmes inverses en élasticité fait l'objet des articles [BBC03, ?].

1.2 Problèmes directs et inverses en élasticité

En introduction des problèmes inverses en élasticité abordés dans la suite, nous rappelons ci-dessous les équations fondamentales en élasticité sous l'hypothèse des petites perturbations.

Nous considérons un corps élastique occupant dans sa configuration de référence l'ouvert $\Omega \in \mathbb{R}^3$ de frontière $\partial\Omega$. Notons respectivement \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ le champ des déplacements, le champ des déformations et le champ des contraintes. L'hypothèse des petites perturbations (HPP) suppose que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} (\nabla + \nabla^T) \mathbf{u}$$

Le matériau élastique est caractérisé d'une part par la densité volumique $\rho(\mathbf{x})$ et d'autre part par le tenseur d'ordre quatre des modules élastiques $\mathbf{C}(\mathbf{x})$, définis en chaque point $\mathbf{x} \in \Omega$.

La densité $\rho(\mathbf{x})$ est une fonction scalaire positive, liée à l'énergie cinétique du corps par :

$$\mathcal{K}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, dv$$

Le tenseur des modules élastiques $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ est lié avec l'énergie de déformation du corps par :

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) = \mathcal{W}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] \, dv,$$

Il est donc défini positif et possède les symétries suivantes :

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} \quad (1.1)$$

Le tenseur \mathbf{C} comporte donc 21 coefficients indépendants.

Le tenseur des contraintes est relié au tenseur de déformations par l'équation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}] = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] \quad (1.2)$$

L'équilibre des efforts s'écrit en forme locale :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}] + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (1.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (1.4)$$

où \mathbf{f} , \mathbf{p} sont les champs des efforts extérieurs, respectivement volumiques et surfaciques, et \mathbf{n} la normale extérieure à la surface du domaine.

Le système d'équations à dérivées partielles, en élasticité, se met alors sous la forme :

$$\mathcal{A}_C[\mathbf{u}] + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = 0 \quad (1.5)$$

où \mathcal{A}_C l'opérateur de l'élasticité est défini par :

$$\mathcal{A}_C[\mathbf{u}] := \operatorname{div} \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] = \operatorname{div} \mathbf{C} : \nabla \mathbf{u} \quad (1.6)$$

Le problème direct \mathcal{P} en élastodynamique est bien posé, i.e. il possède une solution unique et stable par rapport aux données, si on dispose également des conditions initiales :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \Omega) \quad (1.7)$$

et des conditions aux limites sur des portions complémentaires de la frontière $\partial\Omega = S_u \cup S_p$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^D(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x}, t) \in S_u \times [0, T] \quad (1.8)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^D(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x}, t) \in S_p \times [0, T] \quad (1.9)$$

Nous rappelons également le principe des puissances virtuelles, qui est une forme faible des équations d'équilibre. Il s'obtient par la multiplication des équations d'équilibre des efforts par un champ test \mathbf{w} , appelé aussi champ des déplacements virtuels, et une série d'intégrations par parties :

$$-\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}] \, dv + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} \, dv + \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} \, ds = \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} \, dv \quad \forall \mathbf{w} \quad (1.10)$$

En élastostatique, quand les efforts d'inertie sont négligeables devant les autres efforts, on obtient après utilisation de l'équation de comportement :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}] \, dv = \int_{\partial\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} \, ds \quad (1.11)$$

Le deuxième résultat concerne les principes variationnels qui caractérisent la solution comme minimum de l'énergie potentielle.

Pour un corps élastique de modules \mathbf{C} avec des conditions aux limites bien posées, on peut caractériser le champ de déplacement solution comme minimum de l'énergie potentielle sur l'ensemble des champs cinématiquement admissibles :

$$\mathbf{u} = \arg \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{C}(u^D, S_u)} \mathcal{W}_C(\mathbf{v}) \quad (1.12)$$

$$\mathcal{W}_C(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] \, dv - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dv - \int_{S_p} \mathbf{p}^D \cdot \mathbf{v} \, ds \quad (1.13)$$

Le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est le maximum de l'énergie complémentaire :

$$\boldsymbol{\sigma} = \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}(p^D, S_p)} \mathcal{W}_C^*(\mathbf{s}) \quad (1.14)$$

$$\mathcal{W}_C^*(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{s} : \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{s} \, dv - \int_{S_u} \mathbf{u}^D \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (1.15)$$

Où les espaces des champs cinématiquement et statiquement admissibles sont définis par :

$$\mathcal{C}(\mathbf{u}^D, \Sigma) = \{\mathbf{u} | \mathbf{u}|_{\Sigma} = \mathbf{u}^D\} \quad (1.16)$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{p}^D, \Sigma) = \{\mathbf{s} | \operatorname{div} \mathbf{s} + \mathbf{f} = 0, \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}|_{S_p} = \mathbf{p}^D\} \quad (1.17)$$

Les énergies potentielle et complémentaire sont duales au sens du théorème de dualité de Fenchel [OR76, CKR99]. En conséquence, on peut exprimer la paire solution $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ comme minimum sur le produit des champs admissibles de la somme des énergies potentielle et complémentaire :

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \arg \min_{(v, s) \in \mathcal{C}(\mathbf{u}^D, S_u) \times \mathcal{S}(\mathbf{p}^D, S_p)} [\mathcal{W}_C(\mathbf{v}) + \mathcal{W}_C^*(\mathbf{s})] \quad (1.18)$$

Au point minimum, pour la solution, on a :

$$\mathcal{W}_C(\mathbf{u}) + \mathcal{W}_C^*(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (1.19)$$

1.3 Principe de réciprocité en élastodynamique

Dans cette section, nous nous intéressons à un cas particulier de l'identification de fissures planes. La technique présentée repose sur le concept de l'écart à la réciprocité de Betti. Afin d'explicitier la méthode, nous partons de la forme faible de l'équation élastodynamique (1.5). Une série de manipulations algébriques et quelques intégrations par parties permettent de définir un problème adjoint d'équation :

$$\operatorname{div} \mathbf{C} \nabla \mathbf{w} = \rho \ddot{\mathbf{w}} \quad (1.20)$$

Si nous considérons maintenant le principe de réciprocité de Betti pour la solution \mathbf{u} définie sur le corps fissuré $\Omega \setminus \Gamma$ et la solution \mathbf{w} du problème adjoint (1.20) définie sur le corps sans fissure Ω nous obtenons l'écart à la réciprocité :

$$\mathcal{RB}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \Gamma) = \int_0^{\infty} \int_{\Gamma} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{w}] \cdot \mathbf{n} \, ds \, dt \quad (1.21)$$

$$= \int_0^{\infty} \int_{\partial \Omega} \{\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{w}] \cdot \mathbf{n} - \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n}\} \, ds \, dt \quad (1.22)$$

$$+ \int_{\Omega \setminus \Gamma} [\mathbf{u} \cdot \partial_t \mathbf{w} - \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}]_0^{\infty} \, dv \quad (1.23)$$

Dans les expressions précédentes, \mathbf{u} est une solution liée directement aux mesures, tandis que \mathbf{w} est une solution du problème adjoint (1.20) arbitrairement fixée.

La fissure Γ peut être identifiée en utilisant une série de solutions particulières \mathbf{w} du problème adjoint, qui permettent de mettre en évidence une série de propriétés de Γ à travers l'expression (1.23).

Au cours de la dernière décennie, dans les domaines électrostatique [AB96, BBJ97, AAB99], élasticité [AAJ99], acoustique [BCM99] ou élastodynamique [BCM04], cette technique a permis d'identifier la normale, la position et l'extension spatiale de la fissure Γ en utilisant différentes familles de champs adjoints. Notons également qu'une technique similaire, désignée comme 'enclosure method' a été récemment appliquée par Ikehata [IS00, Ike03, Ike04] pour identifier des fissures et des cavités en diffraction acoustique.

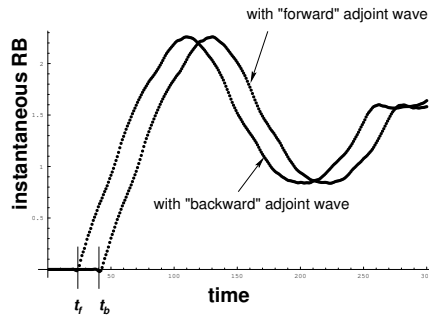


FIG. 1.1 – Evolution temporelle de l'écart à la réciprocité instantané, calculée pour deux ondes adjointes avec la même direction de propagation, mais des sens inversés.

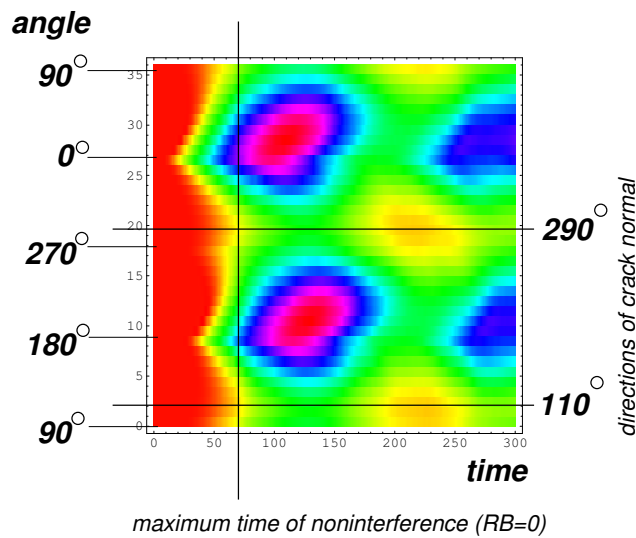


FIG. 1.2 – Evolution temporelle de l'écart à la réciprocité instantané, calculée par rapport à l'angle d'incidence de l'onde adjointe. La zone de non-interférence ($RB=0$) permet de définir l'orientation de la fissure.

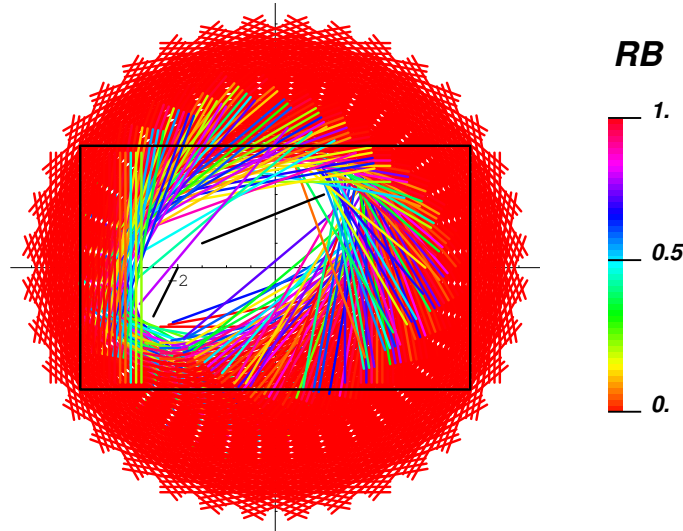


FIG. 1.3 – L’enveloppe ‘convexe’ des deux fissures obtenue avec la technique de l’écart instantané à la réciprocité. Chaque segment coloré représente la position d’une onde adjointe et sa couleur la valeur en cette position de \mathcal{R} .

L’avantage de la méthode de l’écart à la réciprocité par rapport aux techniques classiques réside d’une part dans l’élimination d’hypothèses simplificatrices au niveau des équations (domaine infini, approximation de Born, etc.) et d’autre part dans la simplicité et la robustesse de la méthode.

Dans la suite sont présentés les résultats obtenus pour un choix particulier de champ adjoint. Ce choix conduit à une expression simplifiée de l’écart à la réciprocité appelé écart instantané à la réciprocité.

L’écart instantané à la réciprocité est défini par l’expression suivante :

$$\mathcal{RB}(t) = \int_{\Gamma_C} [\mathbf{u}] \cdot \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{w}] \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (1.24)$$

$$= \int_{\partial\Omega} \{ \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{w}] \cdot \mathbf{n} - \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} \} \, ds \quad (1.25)$$

Cet écart est obtenu en supposant que l’onde adjointe \mathbf{w} se limite à un front d’onde (de type Dirac) qui se propage. Cette hypothèse conduit à la conclusion que seules les intégrales en (1.21) et (1.22) seront réduites pour l’intégration dans le temps au seul instant de passage de l’onde adjointe. En outre, nous supposons que le déplacement solution du problème direct \mathbf{u} satisfait des conditions initiales nulles et le déplacement adjoint \mathbf{w} des conditions finales nulles, ce qui conduit à la disparition du terme (1.23).

Ainsi défini, l’écart instantané à la réciprocité mesure le travail mécanique virtuel effectué sur la fissure par les déplacements réels et les tractions virtuelles correspondants au champ adjoint.

Si ce champ adjoint est réduit, dans l’espace des contraintes, à un front d’onde, il en résulte que l’écart instantané à la réciprocité est nul, tant que le front de l’onde adjointe n’est pas encore arrivé sur la fissure. La connaissance précise de la vitesse et de la direction de propagation de l’onde adjointe permet ensuite de déterminer la position et l’orientation de la fissure.

Analyse des résultats numériques

L'exemple numérique considéré illustre l'identification, à partir de mesures simulées, d'une fissure linéaire dans un corps de forme carré en élastodynamique bidimensionnelle. Les calculs numériques ont été effectués en utilisant le code CAST3M.

Le chargement du corps correspond à un cisaillement tangentiel sur les lèvres de la fissure à l'instant initial $t = 0$:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \alpha Y(-t) \mathbf{t} \quad (1.26)$$

où α est une constante, Y la fonction de Heavyside et \mathbf{t} le vecteur tangent à Γ . Les surfaces extérieures ont été considérées libres de contraintes. Les déplacements sur la surface extérieure sont "mesurés" et utilisés dans le calcul de l'écart instantané à la réciprocité.

Les ondes adjointes utilisées sont des impulsions Dirac de cisaillement de direction de propagation espacés tous les $2\pi/36$ radians et choisis tels que tous passent au centre du corps au même instant. Elles sont définies par :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{k} Y\left(t - \frac{1}{c} \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - \tau\right) \quad (1.27)$$

avec \mathbf{x} le point courant et t l'instant de temps. \mathbf{p} , \mathbf{k} sont respectivement la direction de propagation de l'onde et celle de cisaillement, qui sont orthogonales entre elles ($\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = 0$). c est la célérité des ondes en un corps élastique de module de Young E , coefficient de Poisson ν et densité massique ρ :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1 + \nu)}}$$

En utilisant les remarques du paragraphe précédent et le fait que l'onde adjointe est plane, il est possible, à partir de simples schémas graphiques, d'identifier la fissure, par ses caractéristiques soit la normale et la position de son plan, ainsi que son enveloppe convexe.

Si on représente l'évolution temporelle de l'écart à la réciprocité instantané, calculée par rapport à l'angle d'incidence de l'onde adjointe (voir figure 1.2), on remarque que la zone de non-interférence entre la fissure et l'onde adjointe $\mathcal{RB} = 0$ présente deux maxima, qui permettent de définir l'orientation du plan de la fissure. (la normale).

Les évolutions temporelles de l'écart à la réciprocité instantané, calculée pour deux ondes adjointes ayant comme direction de propagation cette normale, mais des sens inversés, (voir 1.1) permettent d'identifier la position du plan par un simple calcul de temps de parcours.

Enfin, la représentation géométrique des front d'ondes adjointes pour les positions temporelles de ces ondes où la réciprocité est encore zéro $\mathcal{RB} = 0$ défini une enveloppe convexe de la fissure (voir figure 1.3).

1.4 Identification de modules élastiques distribués

Dans ce paragraphe, nous présentons le problème d'identification des modules élastiques distribués à partir des mesures surabondantes sur la frontière en utilisant la minimisation de la fonctionnelle d'erreur en loi de comportement : \mathcal{E} . On considère que les conditions au limites surabondantes sont surabondantes

si les portions de la frontière : S_u et S_p ($\partial\Omega = S_u \cup S_p$) sur lesquelles sont définis les déplacements et respectivement les efforts surfaciques :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^D(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x}, t) \in S_u \times [0, T] \quad (1.28)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^D(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x}, t) \in S_p \times [0, T] \quad (1.29)$$

ont une intersection nonvide :

$$S_u \cap S_p \neq \emptyset \quad (1.30)$$

Dans le cas idéal, les déplacements *et* les tractions surfaciques sont connus sur la frontière complète, i.e. $S_u = S_p = \partial\Omega$.

Rappelons que le concept d'erreur en loi de comportement, est à la base de plusieurs études d'identification, telles que celles pour les paramètres de perméabilité [WM85], et la conductivité électrostatique [KM90]. La convexité de \mathcal{E} a été étudiée en [KV84, KV85]. Le principal résultat obtenu est que la fonctionnelle définie dans le cas anisotrope est la quasi convexification de celle défini dans le cas isotrope.

Indépendamment, en mécanique, le concept d'erreur en loi de comportement a été introduit par Lavendève et Leguillon [LL83] en relation avec les estimations d'erreurs de calculs par la méthode des éléments finis. Depuis, une définition plus générale, également adaptée à des matériaux présentant des comportements non-linéaires, a été proposée [Lad99]. Elle est fondée sur l'inéquation de stabilité de Drucker. Comme dans d'autres domaines d'application, l'introduction de la notion d'erreur en loi de comportement s'est avérée très efficace pour l'identification des paramètres distribués. Ce problème se définit de la façon suivante : il consiste à déterminer une distribution inconnue des modules élastiques \mathbf{C} à partir d'une série de mesures simultanées des déplacements et des tractions sur la frontière. $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varphi})$.

Pour définir l'erreur en loi de comportement, nous proposons l'utilisation des principes variationnels rappelés dans la section 1.2.

Remarquons que l'erreur en loi de comportement $\mathcal{E}(\mathbf{v}, \mathbf{s}, \mathbf{C})$ se définit comme la somme de l'énergie potentielle \mathcal{W} et de l'énergie complémentaire \mathcal{W}^* , pour un tenseur \mathbf{C} , des champs cinématiquement et statiquement admissibles, respectivement \mathbf{v} et \mathbf{s} et des données aux limites "bien posées" (à savoir complémentaires et non surabondantes) :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{v}, \mathbf{s}, \mathbf{C}) &= \mathcal{W}_{\mathbf{C}}(\mathbf{v}) + \mathcal{W}_{\mathbf{C}}^*(\mathbf{s}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] \, dv + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{s} : \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{s} \, dv - \int_{\partial\Omega} \mathbf{p}[\mathbf{n}] \cdot \mathbf{v} \, ds \end{aligned} \quad (1.31)$$

Si $\mathbf{s} \in \mathcal{S}(\mathbf{u}^D, S_u)$ et $\mathbf{v} \in \mathcal{C}(\mathbf{p}^D, S_p)$, où les espaces admissibles \mathcal{C} et \mathcal{S} sont définis par (1.16) et (1.17), alors quelques intégrations par parties permettent d'exprimer $E(\mathbf{v}, \mathbf{s}, \mathbf{C})$ sous la forme d'une fonctionnelle mesurant l'erreur en loi de comportement :

$$E(\mathbf{C}, \mathbf{v}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\mathbf{C}^{-1/2} : \mathbf{s} - \mathbf{C}^{1/2} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]\|^2 \, dv \quad (1.32)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{s} - \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) : \mathbf{C}^{-1} : (\mathbf{s} - \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}]) \, dv \quad (1.33)$$

Plus précisément, compte tenu de (1.33), l'équation (1.19) signifie que la paire admissible $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ est solution d'un problème d'équilibre élastique si et seulement si les champs sont liés par la loi de comportement élastique (1.2) ou encore que le minimum absolu de $E(\mathbf{C}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = 0$ est atteint seulement si le tenseur d'élasticité \mathbf{C} est correct.

Les remarques précédentes permettent de définir l'erreur en loi de comportement $\mathcal{E}(\mathbf{C})$ dans le cas de l'identification d'une distribution de modules élastiques par l'expression :

$$\mathcal{E}(\mathbf{C}) = \arg \min_{(v,s) \in \mathcal{C}(\xi,S) \times \mathcal{S}(\phi,S)} E(v, s, \mathbf{C}) \quad (1.34)$$

où les ensembles de champs admissibles \mathcal{C} et \mathcal{S} prennent cette fois-ci en compte la surabondance des mesures.

Dans le cas général, $\mathbf{C} \neq \mathbf{C}^*$ et les données aux limites sont (ξ, φ) incompatibles, ce qui conduit à $\mathcal{E}(\mathbf{C}) > 0$. Si $\mathbf{C} = \mathbf{C}^*$, (ξ, φ) sont compatibles et $\mathcal{E}(\mathbf{C}) = 0$.

Si \mathbf{u}^D et \mathbf{u}^N désignent respectivement les solutions aux problèmes de Dirichlet et de Neumann en fonction du tenseur d'élasticité \mathbf{C} et des conditions aux limites surabondantes (1.30), i.e.

$$\operatorname{div}(\mathbf{C} : \varepsilon[\mathbf{u}^{DN}]) = \mathbf{0} \quad (\text{in } \Omega), \quad \mathbf{u}^D = \xi ; \quad (\mathbf{C} : \varepsilon[\mathbf{u}^N]) \cdot \mathbf{n} = \varphi \quad (\text{on } S) \quad (1.35)$$

il est alors facile de démontrer par une série d'intégrations par parties que $\mathcal{E}(\mathbf{C})$ s'exprime sous une des formes suivantes équivalentes :

$$\mathcal{E}(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon[\mathbf{u}^D] - \varepsilon[\mathbf{u}^N]) : \mathbf{C} : (\varepsilon[\mathbf{u}^D] - \varepsilon[\mathbf{u}^N]) dv \quad (1.36)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma(\mathbf{u}^D) - \sigma(\mathbf{u}^N)) : \mathbf{C}^{-1} : (\sigma(\mathbf{u}^D) - \sigma(\mathbf{u}^N)) dv \quad (1.37)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\sigma(\mathbf{u}^D) \cdot \mathbf{n} - \varphi) \cdot (\xi - \mathbf{u}^N) ds \quad (1.38)$$

Notons que $\mathcal{E}(\mathbf{C})$ est fonction explicite de \mathbf{C} et implicite des champs de déplacements solutions \mathbf{u}^N et \mathbf{u}^D

Gradient de la fonctionnelle d'erreur en loi de comportement

Le gradient de $\mathcal{E}(\mathbf{C})$ est défini par :

$$\delta \mathcal{E}(\mathbf{C}) = \frac{\partial E}{\partial v} \cdot \delta \mathbf{u}^D + \frac{\partial E}{\partial s} \cdot \delta \sigma[\mathbf{u}^N] + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{C} \Big|_{(v,s,C)=(\mathbf{u}^D, \sigma[\mathbf{u}^N], \mathbf{C})}$$

afin de tenir compte des dépendances implicites par rapport à \mathbf{C} de $\mathcal{E}(\mathbf{C})$ par les champs \mathbf{u}^D et \mathbf{u}^N . Etant donné que \mathbf{u}^D et \mathbf{u}^N sont solutions de formulations faibles, nous avons :

$$\frac{\partial E}{\partial v} \cdot \delta v = 0 \quad (\forall \delta \in \mathcal{C}(S, \mathbf{0})) \quad \frac{\partial E}{\partial s} \cdot \delta s = 0 \quad (\forall \delta s \in \mathcal{S}(S, \mathbf{0}))$$

Par conséquent, le gradient de $\mathcal{E}(\mathbf{C})$ s'exprime en fonction des solutions \mathbf{u}^D et \mathbf{u}^N par :

$$\delta \mathcal{E}(\mathbf{C}) = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{C}}(\mathbf{u}^D, \sigma[\mathbf{u}^N], \mathbf{C}) \delta \mathbf{C} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon[\mathbf{u}^D] : \delta \mathbf{C} : \varepsilon[\mathbf{u}^D] - \varepsilon[\mathbf{u}^N] : \delta \mathbf{C} : \varepsilon[\mathbf{u}^N]) dv \quad (1.39)$$

Localisation des défauts

L'expérience numérique avec des fonctionnels d'erreur en loi de comportement $\mathcal{E}(C)$ (définie en (1.34)) a suggéré que la densité d'erreur en loi de comportement l'intégrant de l'expression (1.37), est plus large dans les zones où la valeur réelle du tenseur d'élasticité C^* est différente de la valeur supposée C .

Une explication de cette observation est donnée par les arguments suivants. Partant de la formule (1.34), il est intéressant d'exprimer l'erreur en loi de comportement par rapport au champ des déplacements : $\mathbf{u}^N - \mathbf{u}^D$:

$$\mathbf{u}^N - \mathbf{u}^D = (\mathbf{u}^N - \mathbf{u}^*) - (\mathbf{u}^D - \mathbf{u}^*)$$

Notons que \mathbf{u}^N et \mathbf{u}^D sont définis par (1.35) et que le déplacement solution \mathbf{u}^* vérifie l'équation de comportement :

$$\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}^*] = C^* \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}^*]$$

ainsi que les conditions aux limites surabondantes (1.30).

Il en résulte que $\mathbf{w}^N := \mathbf{u}^N - \mathbf{u}^*$ et $\mathbf{w}^D := \mathbf{u}^D - \mathbf{u}^*$ sont solutions des équations :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(C : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}^D]) &= -\operatorname{div}(\delta C : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}^D]) \quad (\text{in } \Omega), & \mathbf{w}^D &= \mathbf{0} \quad (\text{on } S) \\ \operatorname{div}(C : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}^N]) &= -\operatorname{div}(\delta C : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}^N]) \quad (\text{in } \Omega), & \mathbf{p}[\mathbf{w}^N] &= \mathbf{0} \quad (\text{on } S) \end{aligned}$$

avec $\delta C := C^* - C$.

Considérons un point $\tilde{\mathbf{x}} \in \Omega \setminus D$, où $D \subset \Omega$ désigne le support de δC . Désignons par $\mathbf{G}^D(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$ et $\mathbf{G}^N(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$ les solutions fondamentales des équations ci-dessous :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(C : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{G}^D]) &(\tilde{\mathbf{x}}, \cdot) + \delta_{\tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (\text{in } \Omega), \\ \mathbf{G}^D &(\tilde{\mathbf{x}}, \cdot) = \mathbf{0} \quad (\text{on } S) \\ \operatorname{div}(C : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{G}^N]) &(\tilde{\mathbf{x}}, \cdot) + \left(\delta_{\tilde{\mathbf{x}}} - \frac{1}{|\Omega|} \right) \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (\text{in } \Omega), \\ \mathbf{p}[\mathbf{G}^N] &(\tilde{\mathbf{x}}, \cdot) = \mathbf{0} \quad (\text{on } S) \end{aligned}$$

où $\delta_{\tilde{\mathbf{x}}}$ est la distribution de Dirac de support $\tilde{\mathbf{x}}$. Alors l'application du principe de réciprocité de Betti au pairs des champs de déplacements $(\mathbf{w}^D, \mathbf{G}^D)$ et $(\mathbf{w}^N, \mathbf{G}^N)$ conduisent aux représentations suivantes de \mathbf{w}^D et \mathbf{w}^N :

$$\mathbf{w}^D(\tilde{\mathbf{x}}) = \int_{\Omega} \nabla_x \mathbf{G}^D(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) : \left[\delta C(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}^*](\mathbf{x}) \right] dv_x \quad (\tilde{\mathbf{x}} \in \Omega \setminus D) \quad (1.40)$$

$$\mathbf{w}^N(\tilde{\mathbf{x}}) = \langle \mathbf{w}^N \rangle_{\Omega} + \int_{\Omega} \nabla_x \mathbf{G}^N(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) : \left[\delta C(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}^*](\mathbf{x}) \right] dv_x \quad (\tilde{\mathbf{x}} \in \Omega \setminus D) \quad (1.41)$$

où $\langle \cdot \rangle_{\Omega}$ désigne la valeur moyenne sur Ω .

Les solutions $\mathbf{G}^{DN}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$ sont pour \mathbf{x} proche de $\tilde{\mathbf{x}}$ telles que :

$$\nabla_x \mathbf{G}^{DN}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \partial \Omega (|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}|^{1-n}) \quad (\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \notin S)$$

avec $n = 3$ ou 2 dépendant de l'espace de définition du problème. Les équations (1.40) et (1.41) impliquent que $\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}^D]$ et $\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}^N]$ sont de l'ordre de d^{-n} pour $\tilde{\mathbf{x}}$ proche de D , avec : $d = \operatorname{Dist}(\tilde{\mathbf{x}}, D)$.

Il en résulte que la densité de l'erreur en loi de comportement de $\mathbf{u}^N - \mathbf{u}^D = \mathbf{w}^N - \mathbf{w}^D$, se comporte comme d^{-2n} loin de D . Ces valeurs maximales sont donc attendues en et dans le voisinage de δC .

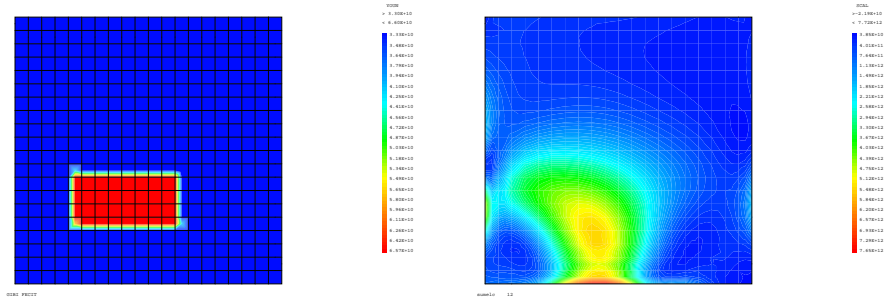


FIG. 1.4 – Inclusion (à droite) en distribution spatiale de l’erreur en loi de comportement (à gauche) obtenu en appliquant une pression parabolique de pression sur la face inférieure du carré [].

Algorithme d’identification à directions alternées

En électrostatique, une série de propriétés de convexité de la fonctionnelle \mathcal{E} a été démontrée en [KV84, KV85]. Celles-ci nous assure de la convergence des algorithmes d’identification définis en [KM90].

En l’absence de résultats comparables dans le cas élastique, nous avons élaboré en [Con95] un algorithme à directions alternées pour la reconstruction des modules élastiques distribués qui met en application les idées proposées en [KM90, KL88] pour des conductivités isotropes.

A son point de départ, l’algorithme considère une distribution initiale : $\mathbf{C}^{(0)}(\mathbf{x})$, et construit une suite de distributions $\mathbf{C}^{(i)}(\mathbf{x})$.

La distribution $\mathbf{C}^{(i+1)}(\mathbf{x})$ est obtenue à partir de l’estimation précédente $\mathbf{C}^{(i)}(\mathbf{x})$ en utilisant les pas suivants :

1. calculer $\mathbf{u}^{D(i)}$ et $\mathbf{u}^{N(i)}$ solutions du problème (1.35) avec $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{(i)}$. On note alors $\boldsymbol{\sigma}^{N(i)} = \mathbf{C}^{(i)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{N(i)}$;
2. la mise à jour de \mathbf{C}_{i+1} s’obtient comme suit :

$$\mathbf{C}_{i+1} = \arg \min_{\mathbf{C}} E(\mathbf{C}, \mathbf{u}^{D(i)}, \boldsymbol{\sigma}^{N(i)})$$

Pour simplifier le dernier pas (ii), il est utile [Con95] de représenter le tenseur des modules élastiques :

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^6 c_k(\mathbf{x}) \boldsymbol{\xi}_k(\mathbf{x}) \otimes \boldsymbol{\xi}_k(\mathbf{x}) \quad (1.42)$$

en fonction des modules élastiques propres $c_k > 0$ et des tenseurs propres $\boldsymbol{\xi}_k$ [CM90, CM92].

De cette façon, un simple calcul conduit à :

$$E(\mathbf{C}, \mathbf{u}^{D(i)}, \boldsymbol{\sigma}^{N(i)}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \left(c_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^{(i)} : \boldsymbol{\varepsilon}_k^{(i)} + c_k^{-1} \boldsymbol{\sigma}_k^{(i)} : \boldsymbol{\sigma}_k^{(i)} - 2 \boldsymbol{\varepsilon}_k^{(i)} : \boldsymbol{\sigma}_k^{(i)} \right)$$

avec $\boldsymbol{\varepsilon}_k^{(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}^{D(i)}] : (\boldsymbol{\zeta}_k \otimes \boldsymbol{\zeta}_k)$ et $\boldsymbol{\sigma}_k^{(i)} = (\mathbf{C}^{(i)} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}^{N(i)}]) : (\boldsymbol{\zeta}_k \otimes \boldsymbol{\zeta}_k)$.

Le pas (ii) de l'algorithme, la minimisation par rapport à \mathbf{C} devient alors explicite :

$$c_k^{(i+1)} = \left[\frac{\boldsymbol{\sigma}_k^{(i)} : \boldsymbol{\sigma}_k^{(i)}}{\boldsymbol{\varepsilon}_k^{(i)} : \boldsymbol{\varepsilon}_k^{(i)}} \right]^{1/2} \quad (1.43)$$

Cette technique suppose la connaissance a priori de l'ensemble des modules élastiques propres ζ_k . Ceci n'est possible sans minimisation directe de $E(\mathbf{C}, \mathbf{u}^{D(i)}, \boldsymbol{\sigma}^{N(i)})$ que dans le cas de certaines symétries matérielles.

Dans le cas isotrope, on a deux modules propres $c_1 = \lambda + 2\mu/3$ le module de compressibilité volumique, de multiplicité 1, et $c_2 = 2\mu$, le module de cisaillement, de multiplicité 5.

Les formules (1.43) pour le pas (ii) de l'algorithme s'écrivent dans ce cas :

$$c_1^{(i+1)} = \left| \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_k^{(i)})}{\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_k^{(i)})} \right| \quad c_2^{(i+1)} = \left[\frac{\text{dev}(\boldsymbol{\sigma}_k^{(i)}) : \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}_k^{(i)})}{\text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}_k^{(i)}) : \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}_k^{(i)})} \right]^{1/2} \quad (1.44)$$

où $\text{dev}(\mathbf{s}) := \mathbf{s} - \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{s})\mathbf{I}$ est la partie déviatorique du tenseur symétrique d'ordre deux \mathbf{s} .

Cet algorithme est fondé sur la solution des problèmes standards de type Neumann ou Dirichlet. Il est donc facilement programmable dans les codes de calcul aux éléments finis. Dans les exemples que nous avons traités, nous avons utilisé CAST3M [Cas04] qui permet, à l'étape de minimisation, le calcul direct des formules 1.43 à partir des champs.

En figure 1.5 et 1.6 sont représentées les distributions réelle et identifiée pour différents cas en symétrie matérielle cubique.

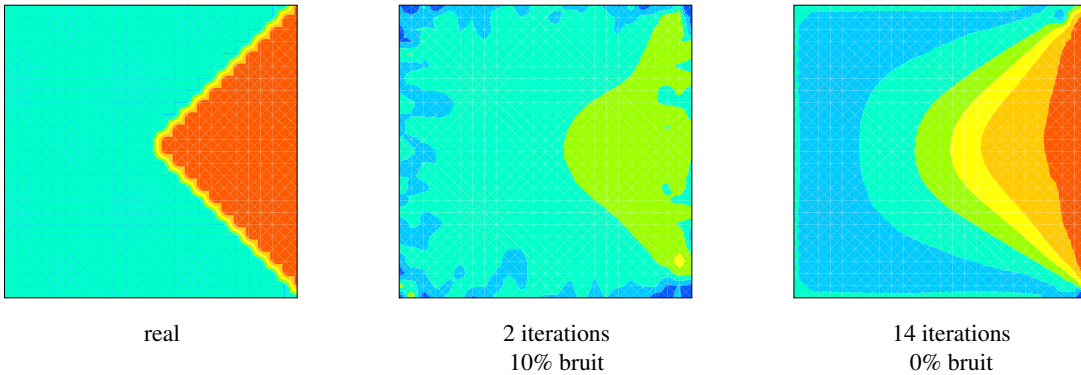


FIG. 1.5 – Identification d'une inclusion coin en cuivre dans une matrice en aluminium, distribution réelle du coefficient de Poisson (left) - Reconstruction avec bruit (milieu) et sans bruit (gauche) [Con95]

1.5 Erreur en loi de comportement pour les plaques élastiques

Dans cette section, nous abordons l'extension du concept d'erreur en loi de comportement aux plaques sous l'hypothèse de Love-Kirchhoff, ainsi qu'un algorithme de minimisation de cette erreur pour l'identification de modules distribués.



FIG. 1.6 – Identification d’une inclusion carrée en cuivre dans une matrice en aluminium, distribution réelle du coefficient de Poisson (left) et reconstruction avec bruit (milieu) et sans bruit (gauche) [Con95]

Nous rappelons qu’une plaque est un solide occupant un domaine de la forme $\Omega = \omega \times [-h/2, h/2]$, $\omega \subset \mathbb{R}^2$, où ω désigne le plan moyen de la plaque et h son épaisseur, ($h \ll \text{Diam}(\omega)$). Dans la suite, nous limitons notre discussion aux mouvements de flexion de la plaque, sachant que les mouvements dans le plan conduisent à des équations d’élasticité classiques discutées dans le paragraphe précédent.

Sous l’hypothèse de Love-Kirchhoff, la flèche de la plaque peut s’exprimer sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}, x_3) = u(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{e}_3 - x_3 \hat{\nabla} u, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{x}}, x_3) = -x_3 \hat{\nabla} \hat{\nabla} u \quad (\hat{\mathbf{x}} \in \omega, -\frac{h}{2} \leq x_3 \leq \frac{h}{2})$$

où $\hat{\nabla}$ désigne le gradient bidimensionnel par rapport à $\hat{\mathbf{x}} \in \omega$.

L’équilibre des contraintes s’écrit dans ce cas sous la forme :

$$\text{div div } \mathbf{M} + f(\hat{\mathbf{x}}) = 0 \quad (\hat{\mathbf{x}} \in \omega, i, j = 1, 2) \quad (1.45)$$

En utilisant les coordonnées cartésiennes on peut écrire la dernière relation sous la forme :

$$M_{ij,ij}(\hat{\mathbf{x}}) + f(\hat{\mathbf{x}}) = 0$$

Dans l’équation d’équilibre (1.45) f est la distribution des efforts normaux sur la plaque et \mathbf{M} est le tenseur des moments de flexion, défini par rapport à la contrainte tridimensionnelle $\boldsymbol{\sigma}$ par les relations suivantes :

$$M_{ij}(\hat{\mathbf{x}}) = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{ij}(\hat{\mathbf{x}}, x_3) dx_3 \quad (i, j = 1, 2)$$

La loi de comportement élastique devient alors :

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$M_{ij} = D_{ijkl} u_{kl} \quad \text{avec} \quad D_{ijkl} = \frac{\mu h^3}{6(1-\nu)} C_{ijkl}^{\text{PS}} \quad (i, j, k, \ell = 1, 2)$$

avec \mathbf{D} le tenseur d’ordre quatre des rigidités de flexion et \mathbf{C}^{PS} le tenseur d’élasticité en contraintes planes (plane stress), défini par :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{\text{PS}} \epsilon_{kl} \quad i, j, k, \ell = 1, 2$$

et obtenu, après élimination de $\epsilon_{13}, \epsilon_{23}, \epsilon_{33}$, en imposant : $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ dans la relation de comportement tridimensionnelle.

Dans le cas d'anisotropie le plus général, \mathbf{D} possède 6 composantes indépendantes et ses symétries ainsi que sa positive définition résultent des propriétés similaires du tenseur \mathbf{C} .

En conséquence, le système d'équations pour les plaques élastiques en statique est défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_D u(\hat{\mathbf{x}}) + f(\hat{\mathbf{x}}) &= 0 \\ \mathcal{A}_D u &:= D_{ijkl} u_{,ijkl} \quad (\hat{\mathbf{x}} \in \omega) \end{aligned} \quad (1.46)$$

Le système d'équations précédentes conduit à un problème bien posé, si en chaque point de la frontière $\partial\omega$ les deux quantités suivantes sont données : (i) soit la flèche u soit l'effort de cisaillement Q , et (ii) soit la dérivée normale de la flèche r soit le moment normal M_N . Plus précisément on écrit les conditions aux limites suivantes :

$$u = u^D \quad (\text{sur } S_d), \quad Q = Q^D \quad (\text{sur } S_f); \quad r = r^D \quad (\text{sur } S_r), \quad M_N = M^D \quad (\text{sur } S_m) \quad (1.47)$$

où $S_d \cap S_f = \emptyset$, $S_d \cup S_f = \partial\omega$, $S_r \cap S_m = \emptyset$ et $S_r \cup S_m = \partial\Omega$ avec les notations :

$$r = u_{,i} n_i \quad M_N = M_{ij} n_i n_j \quad Q = n_i (2M_{ij,j} - M_{ij,k} n_j n_k) \quad (\hat{\mathbf{x}} \in \partial\omega)$$

L'énergie potentielle \mathcal{W} et l'énergie complémentaire \mathcal{W}^* sont définies comme en élasticité tridimensionnelle. Nous obtenons ainsi :

$$\mathcal{W}_C(u) = \frac{1}{2} \int_{\omega} (\nabla \nabla u) : \mathbf{D} : (\nabla \nabla u) dx - \int_{\omega} f u dx - \int_{S_f} M^D u dx - \int_{S_m} Q^D r dx \quad (1.48)$$

$$\mathcal{W}_C^*(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \int_{\omega} \mathbf{M} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{M} dx - \int_{S_d} u^D Q dx - \int_{S_r} r^D M_N dx \quad (1.49)$$

La somme des deux énergies \mathcal{W} et \mathcal{W}^* définit l'erreur en loi de comportement :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u, \mathbf{M}, \mathbf{D}) &= \mathcal{W}_C(u) + \mathcal{W}_C^*(\mathbf{M}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\omega} [(\nabla \nabla u) : \mathbf{D} : (\nabla \nabla u) + \mathbf{M} : \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{M}] dx - \int_{\partial\omega} [uQ + rM_N] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\omega} (\mathbf{M} - \mathbf{D} : \nabla \nabla u) : \mathbf{D}^{-1} : (\mathbf{M} - \mathbf{D} : \nabla \nabla u) dx \end{aligned} \quad (1.50)$$

En supposant que les données aux limites sont surabondantes et que (u^D, r^D, M^D, Q^D) sont connus sur la frontière complète $\partial\omega$, alors l'erreur en loi de comportement est définie par :

$$\mathcal{E}(\mathbf{D}) = \arg \min_{u \in \mathcal{C}, \mathbf{M} \in \mathcal{S}} E(u, \mathbf{M}, \mathbf{D}) \quad (1.51)$$

$$\mathcal{C} = \left\{ u \mid u = u^D \text{ and } \frac{\partial u}{\partial n} = r^D \text{ sur } \partial\omega \right\}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{M} \mid M_{ij,ij} = 0 \text{ (en } \omega), M_N = M^D \text{ and } Q = Q^D \text{ sur } \partial\omega \right\}$$

Nous rappelons que les définitions des espaces admissibles \mathcal{C} et \mathcal{S} sont consistantes avec les données surabondantes.

La possibilité d'identification et l'unicité de la solution au problème ont été traités par Ikehata [Ike93, Ike95]. En appliquant la technique de réciprocité proposée par Calderon il a démontré [Ike93] que l'application de Dirichlet–Neumann détermine d'une manière unique le tenseur des rigidités de flexion $\mathbf{D}(\hat{x})$ sous l'hypothèse d'un comportement isotrope. Pour les plaques anisotropes, il a montré [Ike95] que les tenseurs de rigidités sont répartis en deux classes, l'unicité étant valable seulement pour l'une d'entre elles.

Une technique de reconstruction numérique fondée sur la minimisation de l'erreur en loi de comportement \mathcal{E} (1.52) a été proposée en [Con98]. Cette méthode utilise, comme en élasticité tridimensionnelle, un algorithme de descente à directions alternées par rapport à des champs statiquement et cinématiquement admissibles. A chaque itération, il est nécessaire de résoudre deux problèmes de flexion des plaques pour la valeur courante de \mathbf{D} , définie par les données cinématiques (u^D, r^D) et respectivement statiques (M^D, Q^D) sur $\partial\omega$. Ensuite, la valeur des rigidités de flexion \mathbf{D} est explicitement redéfinie à partir du tenseur des courbures $\nabla\nabla u$ et de celui des moments \mathbf{M} obtenus par les deux résolutions précédentes. Ce pas est de nouveau défini en fonction des valeurs propres c_k et des tenseurs propres $\zeta^{(k)}$ du tenseur \mathbf{D}

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1}^3 c_k \zeta^{(k)} \otimes \zeta^{(k)}$$

Cette méthode a été implémentée à l'aide de Cast3M. Dans l'exemple suivant, une plaque carrée est divisé en $2 \times 20 \times 20$ éléments triangulaires de type DKT (Discrete Kirchhoff Triangle) [Hug00].

Les mesures synthétiques ont été produites par résolution du problème de flexion avec la distribution réelle de \mathbf{D} pour 9 cas de chargements différents. Pour cette application, nous avons également considéré des forces concentrées parmi les chargements. Les données utilisées ont été la flèche u aux points d'application des forces concentrées et sur $\partial\omega$.

La dérivée normale r et le moment de torsion ont également été utilisées comme données, mais ces informations supplémentaires n'ont pas produit de changements significatifs dans les résultats.

A titre d'exemple, les résultats d'identification d'une inclusion carrée dans une plaque sont représentés en figure : 1.7.

1.6 Conclusion et Perspectives

Les problèmes inverses ont connu un important développement depuis la dernière décennie aussi bien d'un point de vue théorique que du point de vue des applications.

Les méthodes présentées sont construites avec des bases théoriques solides, mais il ne faut pas perdre de vue qu'un certain nombre de résultats attendent encore des démonstrations mathématiquement rigoureuses, comme par exemple la quasi-convexité de l'erreur en loi de comportement, ou encore la stabilité des algorithmes. Ces démonstrations nécessitent des techniques mathématiques sophistiquées qui ne sont pas de notre ressort.

Au niveau des applications, la situation est bien différente. Rappelons que les études présentées font essentiellement intervenir des expériences simulées, car les méthodes classiques de mesure ne sont pas suffisamment riches en information pour permettre une application aisée des techniques proposées. L'apparition récente des techniques optiques de mesure de champs fournit des cartes complètes des déplacements ou des déformations et permet ainsi une application efficace des techniques développées telles que l'erreur en loi de comportement. Si des premiers travaux dans ce domaine ont déjà été menés [BBC03, GHP02] il ne reste pas moins à transformer le principe en application courante.

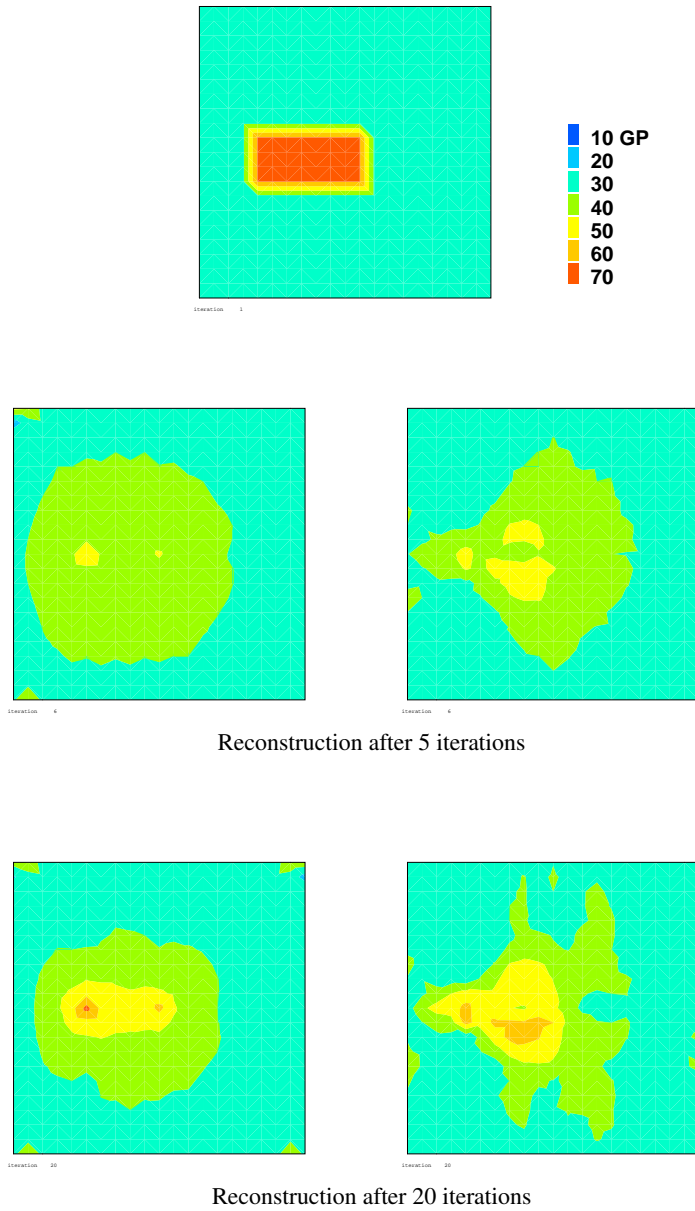


FIG. 1.7 – Distribution réelle et reconstruite du module de Young d'une plaque utilisant pour les modules propres les formules $d_{(1)} = 2a + b = \frac{M_{11} + M_{22}}{k_{11} + k_{22}}$, à gauche et respectivement $d_{(2)} = 2b = \frac{M_{12}}{k_{12}}$, à droite.

L'application de la technique de réciprocité pour la détection des failles sismiques pour des cas proches de la réalité demeure également une question ouverte. Au delà de l'intérêt pratique, rappelons que des difficultés liées aux conditions limites à l'infini dans le cas réel ainsi qu'à la richesse de la base des mesures d'accéléromètre en surface sont encore à surmonter.

Références

- [AAB99] Stéphane Andrieux, Amel Ben Abda, and Huy Duong Bui. Reciprocity principle and crack identification. *Inverse Problems*, 15(1) :59–65, 1999.
- [AAJ99] Amel Ben Abda, Hend Ben Ameer, and Mohamed Jaoua. Identification of 2d cracks by elastic boundary measurements. *Inverse Problems*, 15(1) :67–77, 1999.
- [AB96] Andrieux S. and Ben Abda A. Identifications of planar cracks by complete overdetermined data : inversion formulae. *Inverse Problems*, 12(3) :553–563, 1996.
- [Bal99] P. Ballard. A counter-example to uniqueness in quasi-static elastic contact problems with small friction. *International Journal of Engineering Science*, 37(2) :163–178, 1999.
- [BBC03] Bonnet, M., Bui, H.D., and Constantinescu, A. . Principes variationnels et exploitation de mesures de champs en élasticité. *Mécaniques et Industries*, 4(6) :687–697, 2003.
- [BBJ97] Bannour T., Ben Abda A., and Jaoua M. A semi-explicit algorithm for the reconstruction of 3d planar cracks. *Inverse Problems*, 13(4) :899–917, 1997.
- [BC00] Bui, H. D. and Constantinescu, A. Spatial localization of the error on constitutive law for the identification of defects in elastic bodies. *Archive of Mechanics*, 52(4-5) :511–522, 2000.
- [BCM99] Bui, H.D., Constantinescu, A., and Maigre, H. Diffraction acoustique inverse de fissure plane : solution explicite pour un solide borné. *C.R. Acad. Sci. Paris, série II*, 327 :971–976, 1999.
- [BCM04] H.D. Bui, A. Constantinescu, and H. Maigre. Numerical identification of planar cracks in elastodynamics using the instantaneous reciprocity gap. *Inverse Problems*, (20) :993–1001, 2004.
- [Cas04] Cast3M. An object oriented finite element program. [http ://www-cast3m.cea.fr](http://www-cast3m.cea.fr), 2004.
- [CKR99] Chavent, G., Kunisch, K., and Roberts, J. E. Primal-dual formulations for parameter estimation problems. *Computational and Applied Mathematics*, pages 173–229, 1999.
- [CM90] Cowin, S.C. and Mehrabadi, M. Eigen tensors of linear elastic materials. *Q.J.Mech.Appl.Math*, 43, 1990.
- [CM92] Cowin, S.C. and Mehrabadi, M. The structure of the linear anisotropic symmetries. *J.Mech.Phys.Solids*, 40(7) :1459–1471, 1992.
- [Con95] A. Constantinescu. On the identification of elastic moduli from displacement-force boundary measurements. *International Journal of Inverse Problems in Engineering*, 1 :293–315, 1995.
- [Con98] A. Constantinescu. On the identification of elastic moduli in plates. In G. S. Dulikravich M. Tanaka, editor, *Inverse problems in engineering mechanics (proceedings of the ISIP'98 conference, Nagano, Japan, march 1998)*, pages 205–214. Elsevier, 1998.
- [GHP02] Geymonat, G., Hild, F., and Pagano, S. Identification of elastic parameters by displacement field measurement. *Comptes Rendus Mécanique*, 330(6) :403–408, 2002.
- [Hug00] T.J.R. Hughes. *The finite element method*. Dover Publications, 2000.
- [Ike93] M. Ikehata. An inverse problem for the plate in the love-kirchhoff theory. *SIAM J. Appl. Math.*, 53 :942–970, aug. 1993.
- [Ike95] M. Ikehata. The linearization of the dirichlet to neumann data map in anisotropic plate theory. *Inverse Problems*, 11 :165–181, aug. 1995.
- [Ike03] M. Ikehata. Complex geometrical optics solutions and inverse crack problems. *Inverse Problems*, 19(6) :1385–1405, 2003.
- [Ike04] M. Ikehata. Inverse scattering problems and the enclosure method. *Inverse Problems*, 20(2) :533–551, 2004.

- [IS00] M Ikehata and S Siltanen. Numerical method for finding the convex hull of an inclusion in conductivity from boundary measurements. *Inverse Problems*, 16(4) :1043–1052, 2000.
- [KL88] Kohn R.V. and Lowe B.D. A variational method for parameter identification. *M²AN*, 22(1) :293–315, 1988.
- [KM90] Kohn R.V. and McKenney A. Numerical implementation of a variational method for electric impedance tomography. *Inverse Problems*, 1(6) :389–414, 1990.
- [KV84] Kohn R.V. and Vogelius M. Determining conductivity by boundary measurements. *Comm.Pure.Appl.Math.*, XXXVII :289–298, 1984.
- [KV85] Kohn R.V. and Vogelius M. Determining conductivity by boundary measurements ii interior results. *Comm.Pure.Appl.Math.*, XXXVIII :643–667, 1985.
- [Lad99] P. Ladevèze. Constitutive relation error estimators for time–dependent non–linear fe analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1-4) :247–264, 1999.
- [LL83] Ladeveze, P. and Leguillon, D. Error estimates procedures in the finite element method and applications. *SIAM J. Numer. Anal.*, 20(3), 1983.
- [OR76] Oden, J.T. and Reddy, J. *Variational methods in theoretical mechanics*. Universitext. Springer, 1976.
- [WM85] Wexler, A. and Mandel, C. An impedance computed tomography algorithm and system for ground water and hazardous waste imaging. In *Proc. 2nd Annual Canadian/American Conf. on Hydrogeology : Hazardous Wastes in Ground Water – A Soluble Dilemma (Banff, June 1985)*, pages 156–161, 1985.

Chapitre 2

Problèmes Inverses et calculs de sensibilité

2.1 Introduction

La discussion présentée au chapitre précédent a montré que pour traiter plusieurs problèmes inverses en élasticité, il est possible de tirer profit du caractère linéaire des équations et des différentes formulations directes qui en découlent afin d'obtenir des solutions. Par contre, dans la plupart des cas, les techniques présentées précédemment ne sont pas extensibles à des matériaux présentant des comportements non linéaires ou à des conditions aux limites unilatérales, qui conduisent également à des systèmes non linéaires.

Dans le cas de systèmes non linéaires, qui constituent une bonne partie des cas rencontrés dans la pratique, nous supposons que la quantité inconnue - modules élastiques, tractions ou déplacements à la frontière, fissures ou inclusions, etc. - peut être représentée par un nombre fini de paramètres scalaires, groupés en un vecteur noté : $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Supposons maintenant que les données mesurées, également en nombre fini, sont groupées en un autre vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$ pour chaque cas de chargement. L'équivalent de chaque scalaire mesuré d_i , ($1 \leq i \leq m$) peut être obtenu à partir de la solution du problème continu, représenté par son déplacement \mathbf{u} , en utilisant un opérateur de projection \mathcal{D}_i .

Par exemple, pour déterminer la valeur de la composante ℓ du vecteur déplacement au point $\mathbf{x}_s \in \partial\Omega$, nous définissons l'opérateur de projection suivant :

$$\mathcal{D}_i[\mathbf{u}] = \mathbf{u}(\mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{e}_\ell \quad (2.1)$$

Comme autre exemple, considérons d_i comme force résultante mesurée sur la surface $\partial\Omega_s$. L'opérateur de projection est alors défini par :

$$\mathcal{D}_i[\mathbf{u}] = \int_{\partial\Omega_s} \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}, \mathbf{c}] \cdot \mathbf{u} \, ds \quad (2.2)$$

Nous rappelons que le champ de déplacements est fonction implicite de paramètres :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}[\mathbf{c}]$$

Le problème inverse est ensuite défini par :

Trouver la valeur des paramètres \mathbf{c} tels que les valeurs simulées $\mathcal{D}[\mathbf{u}]$ correspondent aux valeurs mesurées \mathbf{d} pour tous les chargements testés.

La technique classique consiste à formuler le problème inverse précédent sous la forme du problème de minimisation suivant :

$$\mathbf{c}^* = \arg \min_{\mathbf{c} \in \mathcal{P}} \mathcal{J}(\mathbf{c}, \mathbf{u}[\mathbf{c}], \mathbf{d}) \quad (2.3)$$

où \mathbf{c} , \mathbf{d} sont considérés issus de l'expérience.

\mathcal{J} est une fonctionnelle coût, définissant d'une part la réalisation de l'objectif, i.e. simulations proches des mesures, et d'autre part les informations a priori qu'on peut avoir sur les paramètres à identifier.

Elle peut s'exprimer sous la forme d'une distance en moindres carrés, comme dans l'exemple suivant :

$$\mathcal{J}(\mathbf{c}, \mathbf{u}[\mathbf{c}], \mathbf{d}) = \frac{1}{2} (\mathcal{D}[\mathbf{u}] - \mathbf{d}) \cdot (\mathcal{D}[\mathbf{u}] - \mathbf{d}) \quad (2.4)$$

A cette fonctionnelle, peuvent être également ajoutés des termes régularisant ou contenant des informations a priori. Ceci ne sera pas discuté dans la suite.

La minimisation de la fonctionnelle \mathcal{J} peut s'effectuer avec différentes classes d'algorithmes, en faisant intervenir ou non le gradient de cette fonctionnelle coût. Sachant que les simulations numériques d'expériences passent par des calculs de structures, qui sont assez coûteux, il est aisé de comprendre l'intérêt d'utiliser un algorithme à gradient, même si le calcul du gradient n'est pas toujours un problème facile. Actuellement, il existe trois méthodes de calcul du gradient : calcul aux différences finies, méthode de différentiation directe et méthode de l'état adjoint.

La *méthode des différences finies* pour le calcul du gradient, tout en étant de mise en oeuvre simple, soulève néanmoins deux problèmes majeurs. D'une part, elle nécessite au moins $m + 1$ calculs directs pour obtenir les m dérivées par rapport aux m paramètres et, d'autre part, elle impose des erreurs numériques qui sont difficilement maîtrisables sans un grand nombre d'estimations du problème direct que l'on veut éviter en premier lieu.

La *différentiation directe* améliore le calcul du gradient car elle conduit au calcul du gradient mathématiquement exact des champs par rapport aux paramètres. Cependant ceci impose pour chaque gradient la résolution de m problèmes auxiliaires linéaires. La linéarité de ce dernier fait conduit à une diminution du temps de calcul global par rapport à la méthode des différences finies.

La *méthode de l'état adjoint* transforme le problème d'optimisation sous contraintes et résout un problème lagrangien associé. Le problème adjoint défini pour le multiplicateur de Lagrange associé est un calcul non linéaire si le comportement est non linéaire. L'avantage est qu'un seul calcul auxiliaire permet d'obtenir le gradient indépendamment du nombre m des paramètres à optimiser. L'inconvénient est que la loi de comportement du problème adjoint dépend de la solution du problème direct et nécessite généralement une programmation sophistiquée pour son implémentation.

Au cours des dernières décennies, ces problèmes ont reçu une attention croissante en raison de l'augmentation des capacités de calcul et aux besoins industriels accrus en méthodes d'optimisation. Une excellente introduction à ce domaine à partir d'exemples de problèmes linéaires aux dimensions finies a été donnée par Tortorelli et Michaleris en [MT95]. D'autres ouvrages [DM87, TA90, TCA90, HCK86, KATK97] présentent l'extension des méthodes à différents domaines mécaniques, généralement en partant directement de la formulation discrétisée du problème. En ce qui concerne la programmation des calculs de sensibilité en plasticité, il faut citer la série des articles : [MTV94, VLH91, VH93]. L'intérêt de ces travaux réside dans la présentation de la méthode de différentiation directe en relation avec les algorithmes de retour radial [SH98].

Des applications des calculs de sensibilité aux problèmes d'identification ont déjà été discutées en [GMC98] pour des calculs thermomécaniques avec une technique de différentiation directe, en [MS96, MK99] pour

des problèmes viscoplastiques avec une technique de différentiation directe, ou encore en [GM99] pour des problèmes poroélastiques. Pour les applications de la méthode des différences finies à des problèmes de contact, on peut mentionner [YZ98, ZBSF00, SKDR02].

Les travaux effectués démontrent une maîtrise certaine des concepts liés aux calculs de sensibilité. Cependant, on ne dispose actuellement pas d'outils qui permettrait d'effectuer ce type de calcul de manière systématique. De plus, une série de résultats numériques pour des problèmes de contact ne sont pas encore démontrés. Ceci nous amène à développer ces méthodes dans certains cas particuliers. Plus précisément, nous nous sommes intéressés aux :

- *problèmes d'identification des paramètres du comportement à partir d'essais d'indentation* [CT01, CN99, CT00]
ce qui nous conduit à discuter de l'obtention des résultats d'optimalité et de sensibilité en présence du contact et à étendre la méthode de l'état adjoint au comportement non linéaire pour traiter ce type de problème.
- *problèmes d'identification des paramètres pour des structures en géotechnique*. [LCN02, ?]
Dans ce cadre, nous avons développé tout d'abord la méthode de différentiation directe pour des comportements élastoviscoplastiques, puis les méthodes de différentiation finie et de l'état adjoint pour des problèmes poroélastiques [?].

L'intégration numérique des calculs de sensibilité en élastoviscoplasticité est un point important pour la précision numérique et un point délicat pour la programmation car on touche alors le cŒur même de l'intégration élastoviscoplastique. Sans présenter les détails de la programmation, nous mentionnons seulement que toutes les méthodes et tous les exemples présentés dans la suite ont été implémentés en Cast3M [Cas04]. Le pilotage des codes aux éléments finis ainsi que les algorithmes de minimisation utilisés ont été programmés sous Mathematica [Mat04] ou Scilab [Sci04].

2.2 Etat adjoint pour conditions de contact

L'essai d'indentation est utilisé pour l'identification des paramètres du comportement de différents matériaux. Il consiste à appuyer un indenteur de forme donnée (sphère, pyramide, ...) mais considéré comme rigide sur la surface d'un corps. En cours d'indentation sont simultanément enregistrées la profondeur de pénétration $U(t)$ et la force résultante $F(t)$, qui définissent ensemble la courbe d'indentation (voir figure 2.1). Le problème inverse consiste en la détermination des propriétés du comportement du corps à partir de la courbe d'indentation. Une discussion générale de ce type de problème est donnée en [TC00].

La difficulté de l'interprétation de cette expérience réside d'une part dans la non-linéarité induite par la condition aux limites de contact, non-linéarité présente même dans le cas de comportements élastiques linéaires et d'autre part, dans le faible nombre de solutions analytiques disponibles pour interpréter de tels essais (voir [Joh85, KO88, Tab51]). Nous avons donc été amenés à envisager l'utilisation de méthodes numériques de calcul de la solution.

Dans cette section, nous nous intéressons plus précisément aux questions liées au calcul de sensibilités pour le problème d'indentation de matériaux élastiques linéaires. L'extension de ces résultats à des matériaux au comportement non-linéaires fera l'objet de la section 2.5.

Comme mentionné en introduction, nous considérons dans la suite que l'identification porte sur un vecteur de paramètres réels $c \in \mathbb{R}$ qui définit les inconnues du tenseur de modules élastiques $C = C(c)$.

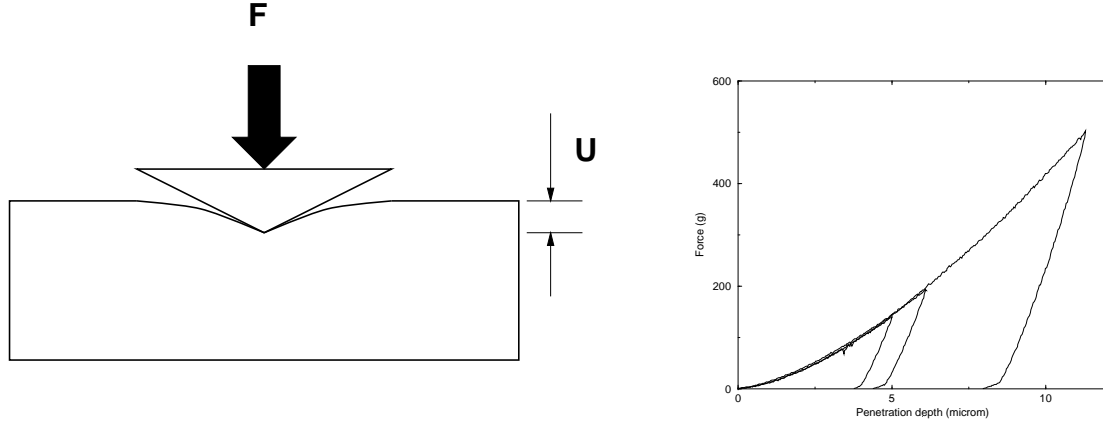


FIG. 2.1 – Schéma de l'essai d'indentation (à gauche) et courbe d'indentation déplacement-force (à droite)

Le problème d'identification se définit pour un choix particulier de la fonctionnelle coût comme suit :

$$\mathbf{c}^* = \arg \min_{\mathbf{c}} \mathcal{J}(\mathbf{c}) \quad (2.5)$$

$$\mathcal{J}(\mathbf{c}) = J(F[U^D, \mathbf{c}]) = \frac{1}{2} \int_0^T (F[U^D, \mathbf{c}](t) - F^D(t))^2 dt \quad (2.6)$$

avec $F[U, \mathbf{c}](t)$ la résultante calculée des efforts de contact à l'instant t , fonction des paramètres \mathbf{c} et du déplacement imposé de l'indenteur. Cette résultante est définie par :

$$F[U^D, \mathbf{c}](t) = \int_{\Gamma_C} \boldsymbol{\sigma}[U^D, \mathbf{c}](t) \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.7)$$

La contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ est solution du problème d'indentation quasistatique, i.e. de la minimisation de l'énergie de déformation élastique sous la contrainte de non-pénétration, qui peut s'écrire sous une des formes suivantes :

– *Formulation primale*

$$\mathbf{u}^* = \arg \min_{\mathbf{v} \in K} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u} - \mathbf{v}] dv \quad (2.8)$$

$$\mathbf{K} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \leq g + U^D \text{ sur } \Gamma_C\}$$

avec \mathbf{V} un espace vectoriel.

– *Formulation mixte*

Trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times \mathbf{N}$ tel que :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Gamma_C} p \cdot \mathbf{v}_2 d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (2.9)$$

$$\int_{\Gamma_C} (q - p) \cdot (\mathbf{u}_2 - U - g) d\Gamma \geq 0 \quad \forall q \in \mathbf{N}$$

$$\mathbf{N} = \{q \in (H^{1/2}(\Gamma_C))' \mid q \leq 0\} \quad (2.10)$$

Dans cette formulation mixte, la condition de contact a été relaxée par l'introduction du multiplicateur de Lagrange $p \in N$, qui représente physiquement la pression de contact.

Le problème d'identification des paramètres c est donc un problème d'optimisation (2.5) sous la contrainte d'un déplacement \mathbf{u} , solution du problème de contact direct. L'idée est maintenant de transformer le problème de minimisation sous contrainte en la recherche d'un point stationnaire, plus précisément le point selle d'un Lagrangien approprié. L'expression du Lagrangien dépend de l'expression choisie pour la formulation du problème direct.

Si nous construisons un Lagrangien pour la forme primale (2.8) du problème direct, nous obtenons alors un point selle exprimé par des inéquations variationnelles avec des fonctions tests appartenant à des cônes. Pour s'affranchir de cet inconvénient, il est nécessaire de relaxer la formulation primale par pénalisation ou encore d'utiliser la formulation mixte.

Considérons la formulation mixte définie par l'expression (2.9) pour le problème direct. Le Lagrangien correspondant se met ainsi sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, p, q, \mathbf{c}) &= \frac{1}{2}(F - F^D)^2 - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_C} p \cdot v_2 \, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} q \cdot (u_2 - U^D - g) \, d\Gamma \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, p, q, \mathbf{c}) \in \mathbf{V}^2 \times \mathbf{Q}^2 \times \mathbf{L}$$

et

$$\mathbf{Q} = \{q \in (H^{1/2}(\Gamma_C))' \mid q = 0 \text{ on } \Gamma_C / \Gamma_C^{eff}\}$$

et F la force résultante sur l'indenteur.

La résolution des conditions d'optimalité de premier ordre du Lagrangien précédent, ce qu'on appelle couramment le point selle du Lagrangien, pose un certain nombre de questions d'ordre mathématique telles que : sous quelles conditions la solution du problème d'optimisation initial est-elle équivalente à la solution du problème Lagrangien ? Quelle est la relation entre la solution discrète et la solution continue de ce problème ? Quelle est la relation entre différentes formulations du problèmes de contact ? etc.

Nos résultats, présentés en [TC00], montrent, en utilisant la *formulation pénalisée* du problème de contact, que la solution du problème Lagrangien conduit à la définition d'un problème adjoint associé, qui s'exprime comme un problème de Dirichlet (voir figure 2.2) :

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \arg \min_{\mathbf{w} \in V^{adj}} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \, d\Omega = 0 \\ V^{adj} &= \{\mathbf{w} \in \mathbf{V} \mid \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = F[U^D, \mathbf{c}](t) - F^D(t) \text{ sur } \Gamma_C^{eff}\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

où la valeur du déplacement imposé sur la surface de contact effective du problème direct Γ_C^{eff} est la différence entre la force calculée à partir de la solution du problème direct et de la force mesurée.

Exprimons maintenant la variation de la fonctionnelle coût par rapport aux paramètres c en utilisant de plus le fait que \mathbf{u} et \mathbf{w} sont solutions des problèmes direct et adjoint (2.12). Nous obtenons alors :

$$\delta \mathcal{J}(\mathbf{b}) = \int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] : \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{b} \right) : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}] \, dv \, dt \quad (2.13)$$

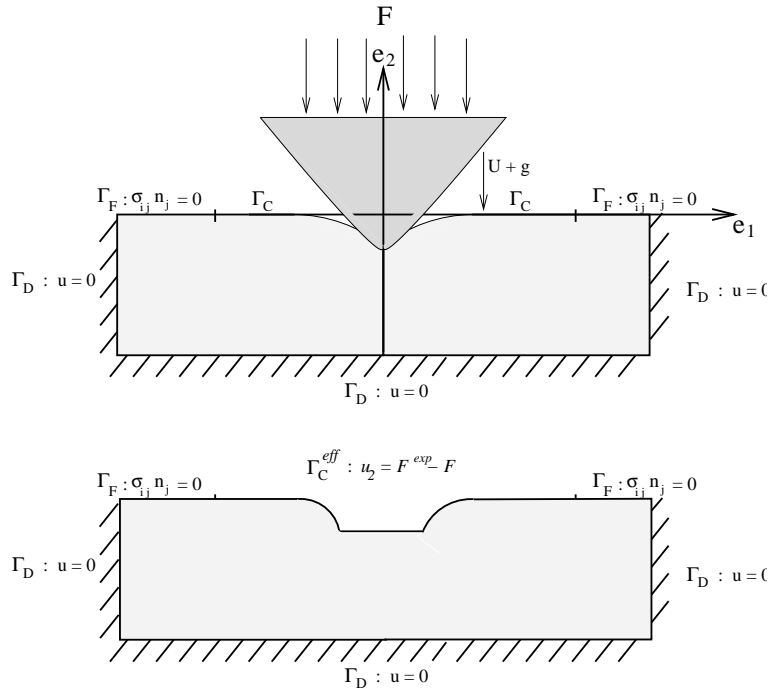


FIG. 2.2 – Problème direct (en haut) et adjoint (en bas) pour l'indentation

La solution du problème Lagrangien associé au problème d'optimisation contraint avec la *formulation mixte* n'est pas à un problème mécanique simple. Il est cependant possible de démontrer que dans ce cas, la solution du problème adjoint (2.12) est également solution de ce problème. Ceci montre que, généralement, il n'y a pas équivalence entre le problème d'optimisation sous contrainte et le système Lagrangien associé.

Ces résultats sont en concordance avec les résultats et les démonstrations proposés par Bergounioux et Mignot dans un cadre mathématique plus général [Mig76, BM99, BK03].

2.3 Sensibilité et loi standard généralisée

Une loi de comportement standard généralisée sans écrouissage [HN75, Son77] ainsi que l'application de la méthode de différentiation directe et de l'état adjoint seront présentées dans la suite. Un comportement standard généralisé sans écrouissage est complètement défini par le tenseur des souplesses $\mathcal{S}(c) = C^{-1}(c)$ et le pseudo-potential de dissipation $\Phi = \Phi(\sigma, c)$. Pour simplifier notre exposé, nous considérons que le pseudo-potential est de classe C^2 par rapport aux champs de contraintes σ . Nous rappelons que c est le vecteur des paramètres matériau inconnus dans le problème inverse, comme par exemple le module de Young, la limite d'élasticité, ...

Formulation continue

Les équations de la mécanique sous l'hypothèse des petites déformations peuvent se résumer comme suit :

- équation d'équilibre des efforts et la condition aux limites pour une traction donnée s'écrivent :

$$\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\mathbf{f}} = 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, T] \quad (2.14)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \dot{\mathbf{t}}^d \quad \text{sur } \partial\Omega_t \times [0, T] \quad (2.15)$$

- l'expression des petites déformations et la conditions au limites pour des déplacements donnés sont :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}[\dot{\mathbf{u}}] = \frac{1}{2} (\nabla \dot{\mathbf{u}} + \nabla^T \dot{\mathbf{u}}) \quad \text{en } \Omega \times [0, T] \quad (2.16)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^d \quad \text{sur } \partial\Omega_u \times [0, T] \quad (2.17)$$

- loi de comportement élastoviscoplastique de type Perzyna [P.66] s'exprime sous la forme :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}) \quad \text{en } \Omega \times [0, T] \quad (2.18)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \text{en } \Omega \times [0, T] \quad (2.19)$$

avec ϕ le pseudo-potential de dissipation.

Nous rappelons qu'afin de disposer d'un système décrivant un problème direct bien posé, nous rajoutons également les conditions aux limites et initiales, qui ne sont pas explicitées ici.

Un exemple de loi de comportement de ce type est le comportement viscoélastique de type Maxwell pour lequel l'expression de ϕ est donnée par : $\phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma}$ où \mathbf{M} est le tenseur d'ordre quatre des modules de viscosité.

Un autre exemple de loi de comportement de ce type est le comportement Norton-Hoff pour lequel l'expression de ϕ est donnée par :

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{K}{N+1} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - \sigma_Y}{K} \right\rangle^{N+1} \quad (2.20)$$

où σ_{eq} est la contrainte équivalente de Von Mises, σ_Y la limite d'élasticité, N l'exposant viscoplastique, et K le coefficient de viscosité.

Formulation discrétisée

L'intégration numérique d'un problème défini comme précédemment s'effectue classiquement en utilisant un schéma de discrétisation aux éléments finis dans l'espace et aux différences finies en temps. Une description détaillée de ces schémas en élastoplasticité est donnée en [SH97, ST85]. Explications néanmoins ici les équations principales.

Considérons que sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$, la formulation faible des équations d'équilibre à l'instant $t = t_{n+1}$ se fait à l'aide d'un schéma d'intégration implicite pour l'intégration dans le temps et d'un algorithme de retour radial pour l'intégration plastique [SH97].

Le problème est alors défini par la recherche de la solution à l'instant t_{n+1} : $\mathbf{u}_{n+1} \in \mathcal{U}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}$ et $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, satisfaisant :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}] : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{n+1} dv - \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_{n+1}^d ds = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (2.21)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}_{n+1}] - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}) - \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (2.22)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp} + \Delta t_{n+1} \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.23)$$

où X_{n+1} désigne le champ $X(t_{n+1})$ à l'instant $t = t_{n+1}$ et $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$.

On suppose que \mathcal{U} et \mathcal{V} sont des espaces vectoriels classiques :

$$\mathcal{U} = \left\{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^d \text{ sur } \Gamma_u \right\} \quad (2.24)$$

$$\mathcal{V} = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_u \right\} \quad (2.25)$$

Méthode de la différentiation directe

Le pseudo-potential et tous les champs d'état sont a priori des fonctions de l'ensemble des paramètres c_i , ce qui conduit à l'expression suivante pour la dépendance par rapport à c_i du pseudo-potential :

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}(c_i), c_i)$$

La différentiation des équations (2.20), (2.18) et (2.19) conduit alors à :

$$\delta_{c_i} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial c_i} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n+1}) - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}) + \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\delta_{c_i} \mathbf{u}_{n+1}) - \delta_{c_i} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}) + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_0}{\partial c_i} \quad (2.26)$$

$$\delta_{c_i} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp} = \delta_{c_i} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp} + \Delta t_{n+1} \frac{\partial^2 \phi(\boldsymbol{\sigma}(c_i), c_i)}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial c_i} + \Delta t_{n+1} \frac{\partial^2 \phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1})}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \delta_{c_i} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \quad (2.27)$$

La combinaison des deux dernières expressions permet d'obtenir, après quelques opérations algébriques, l'équation de comportement discrétisée pour les champs de sensibilité :

$$\begin{aligned} \delta_{c_i} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\Xi}_{n+1} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta_{c_i} \mathbf{u}_{n+1}) \\ &+ \boldsymbol{\Xi}_{n+1} : \left[\mathbf{C}^{-1} : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial c_i} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n+1}) - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}) \right] \\ &+ \boldsymbol{\Xi}_{n+1} : \left[\mathbf{C}^{-1} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_0}{\partial c_i} - \delta_{c_i} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{vp} - \frac{\partial^2 \phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(c_i), c_i)}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial c_i} \Delta t_{n+1} \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

où $\boldsymbol{\Xi}_{n+1}$ est l'opérateur tangent consistant, tel que défini dans les travaux [SH97, VLH91, VH93], exprimé avec les notations précédentes sous la forme :

$$\boldsymbol{\Xi}_{n+1} = \left(\mathbf{C}^{-1} + \Delta t_{n+1} \frac{\partial^2 \phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1})}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \right)^{-1} \quad (2.29)$$

Nous remarquons que l'équation de comportement est de type viscoélastique, à savoir que la sensibilité des contraintes à l'instant t_{n+1} est une fonction linéaire des sensibilités du déplacement à l'instant t_{n+1} et des champs à l'instant t_n .

Formulation faible du problème des sensibilités

En utilisant les expressions présentées au paragraphe précédent, il est possible de reformuler le problème des sensibilités sous sa formulation faible, dans une forme similaire à celle du problème direct (2.23). Le problème des sensibilités est défini par la recherche à l'instant t_{n+1} des champs : $\delta_{c_i} \mathbf{u}_{n+1} \in \mathcal{W}$ et $\delta_{c_i} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ satisfaisant :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \delta_{c_i} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{f}_{n+1}}{\partial c_i} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{t}_{n+1}^d}{\partial c_i} d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{W} \quad (2.30)$$

Nous précisons que la loi de comportement dans ce problème d'équilibre est définie par l'équation (2.29) et que les conditions aux limites à l'instant $t = 0$ sont :

$$\delta_{c_i} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_0}{\partial c_i} \quad \delta_{c_i} \mathbf{u} = 0 \quad (2.31)$$

L'espace des champs de déplacements admissibles \mathcal{W} est défini par :

$$\mathcal{W} = \left\{ \delta_{c_i} \mathbf{u} \in H^1(\Omega) \mid \delta_{c_i} \mathbf{u}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{u}_{n+1}^d}{\partial c_i} \text{ on } \Gamma_u \right\} \quad (2.32)$$

La forme incrémentale des équations précédentes, telle qu'utilisée dans les codes de calcul est présentée de manière complète en [LCN02].

Méthode de l'état adjoint

La méthode de l'état adjoint permet de transformer le problème de minimisation sous contraintes en la recherche du point de stationnarité d'un Lagrangien associé, comme cela a déjà été exposé en section 2.2 pour le problème d'indentation élastique. Dans le cas des matériaux standard généralisés, nous avons repris la formulation théorique de la méthode de l'état adjoint proposée par L.Bourgeois [Bou97].

Supposons de nouveau que le problème direct est défini par les équations (2.14), (2.16), (2.18) et (2.19) et que le problème inverse est défini par la minimisation d'une fonctionnelle coût : $\mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{c})$ fonction du champs des déplacements \mathbf{u} et des paramètres \mathbf{c} . Alors le Lagrangien associé est défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{c}, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) &= \mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{c}) \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega_t} (\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\mathbf{t}}^d) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma dt \\ &+ \int_0^T \int_{\partial\Omega_u} \left(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^d \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) - \mathbf{S} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{c})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) : \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega dt \end{aligned} \quad (2.33)$$

L'étude du point de stationnarité de ce Lagrangien conduit à un problème adjoint défini par la différentiation du Lagrangien par rapport aux champs décrivant le problème direct. Mentionnons ici, que ce problème est défini par une loi de comportement viscoélastique :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \mathbf{S} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}^* + \frac{\partial^2 \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{c})}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \quad (2.34)$$

Cette loi dépend, en chaque point et à chaque instant de temps, de la solution du problème direct, ce qui implique une programmation spécifique des problèmes adjoints.

L'écriture complète d'un problème adjoint pour l'identification des paramètres dans des problèmes d'indentation sera présentée en section 2.5 ou en [CT01].

Programmation numérique

Les deux méthodes présentées précédemment ont été programmées en Cast3M [Cas04] en utilisant seulement les possibilités du langage de haut niveau de Cast3M, `gibiane`.

La programmation de la *méthode de différentiation directe* fait appel à la sous-routine `perso` qui permet d'ajouter, à chaque incrément du calcul élastoviscoplastique qui est piloté par l'opérateur `pasapas`, une série d'instructions définies par l'utilisateur. Dans notre cas, la sous-routine `perso` contenait les commandes qui permettent de résoudre les problèmes des champs de sensibilités (2.28). Si cette programmation ne pose pas de difficulté particulière, il faut néanmoins toujours s'assurer que le calcul élastoplastique direct s'effectue avec un algorithme de retour radial et fait bien appel à la matrice tangente cohérente lors des itérations, afin de pouvoir appliquer la méthode présentée auparavant.

La programmation de la *méthode de l'état adjoint* utilise directement les possibilités de programmation offerte en langage `gibiane` `gibiane`. pour la résolution du problème adjoint. A ce propos, nous soulignons juste que la difficulté réside dans la dépendance du comportement adjoint aux résultats du calcul direct, ce qui conduit, entre autres, à un comportement complètement anisotrope.

2.4 Identification des paramètres du comportement en géotechnique

Il est bien connu que les structures souterraines, telles que les tunnels, les cavités de stockage, etc. situées dans des géomatériaux présentent des déformations importantes, et ce, même longtemps après leur excavation et l'installation de structures de soutènement. Ces phénomènes sont dus d'une part à la complexité du comportement des géomatériaux pouvant présenter des couplages chimiques ou hydrauliques, etc., et d'autre part aux différences d'échelles en temps et en espace entre les structures réelles et les essais en laboratoire. Un problème inhérent est donc la différence entre les prédictions et les mesures lors du passage des modèles à la réalité.

Le problème d'identification que nous avons traité avait pour objet l'identification des propriétés mécaniques de la masse rocheuse autour d'un tunnel, et plus précisément des paramètres de la loi de comportement viscoélastique de type Norton-Hoff. Les données utilisées sont des mesures de convergence de la paroi du tunnel, des mesures de déplacements à partir d'extensomètres installés dans la paroi et des évolutions des pressions obtenues à l'aide de cellules de pression installées entre le soutènement et la roche (voir figure 2.4).

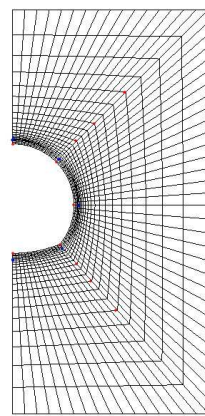
La méthode qui a été mise en oeuvre est celle de la minimisation d'une fonctionnelle coût de type moindres carrés :

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^d, \mathbf{p}^D, \mathbf{c}) = \alpha \int_0^T \|\mathcal{D}\mathbf{u}[\mathbf{c}] - \mathbf{u}^D\| dt + (1 - \alpha) \int_0^T \|\mathcal{D}\mathbf{u}[\mathbf{c}] - \mathbf{p}^D\| \quad (2.35)$$

où $\mathbf{u}^d, \mathbf{p}^d \in \mathbb{R}^n$ sont les mesures des déplacements et des pressions, et \mathcal{D} l'opérateur de projection de la solution calculée sur la mesure.

La minimisation a été effectuée à l'aide de l'algorithme de Levenberg-Marquard à partir d'un gradient obtenu avec la méthode de la différentiation directe, telle que présentée dans le paragraphe précédent.

Les études en géotechnique présentés dans la suite ont fait l'objet de la thèse de Brice Lecampion [LCN02] et on donné suite à une série des publications : sur l'identification des paramètres de la loi de comportement de la masse rocheuse autour d'un tunnel [LCN02, LCNA02], sur l'identification des paramètres poroélastiques à partir des essais en laboratoire [?, LC02] et sur l'identification la formulation du calcul des sensibilités en poroélasticité [?].



- Displacements measurements
- Pressure Cells

FIG. 2.3 – Maillage au voisinage du tunnel

Identification autour d'un tunnel

Le domaine rocheux considéré est en évolution du fait de l'excavation et de l'installation du soutènement :

- avant l'excavation à l'instant $t = 0$, la masse rocheuse est soumise à un état de contrainte initiale :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (2.36)$$

L'excavation est simulée par le relâchement de la contrainte initiale au bord du tunnel.

- entre $t = 0$ et l'installation du soutènement à l'instant $t = t_\ell$ le domaine considéré est la masse rocheuse avec le tunnel excavé. D'un point de vue numérique, nous avons considéré que la zone correspondant au soutènement existait comme structure éléments finis et présentait un comportement élastique avec un module d'élasticité négligeable, de manière à ne pas influencer le relâchement des contraintes de la masse rocheuse autour de la zone excavée.
- après $t = t_\ell$, le soutènement est installé et le domaine considéré contient la masse rocheuse ainsi que le soutènement.

Cette définition de l'évolution du domaine est compatible avec l'analyse de sensibilité présentée précédemment et ne pose pas de difficulté supplémentaire.

Les problèmes habituellement traités s'intéressent au comportement à long terme des ouvrages ce qui nous a permis de considérer un deconfinement instantané à l'instant initial $t = 0$,

Le calculs de sensibilité et les identifications ont été effectués à partir des mesures simulées numériquement autour d'un tunnel de section circulaire et d'un tunnel de section présentée en figure 2.4.

Dans le cas du tunnel à section circulaire, les calculs de sensibilité nous ont permis de mettre en évidence des positions de mesures optimales, maximisant ainsi la sensibilité par rapport aux paramètres (voir figure 2.4), et d'effectuer une comparaison entre les cas d'un tunnel libre et d'un tunnel soutenu, etc. Des résultats similaires ont été obtenus dans le cas du tunnel à section non circulaire. En figure 2.4 est représentée la distribution de contrainte équivalente de von Mises et sa sensibilité par rapport à la puissance de la viscosité. Remarquons que les distributions des deux champs ne présentent pas de maxima dans les mêmes zones.

L'identification des paramètres est efficace : en effet, ceux-ci sont obtenus au bout d'une dizaine d'itérations, sans utilisation d'information a priori. Dans certains cas, il est possible d'observer que la fonctionnelle coût présente des valeurs négligeables même si les valeurs des paramètres sont encore éloignées des valeurs réelles. La représentation de la variation de la fonction coût par rapport aux différents couples de paramètres montre l'existence de vallées longues et aplaties qui rendent difficile la détermination du minimum (voir figure 2.6). Ce phénomène a également été mis en évidence pour d'autres types de structures et de chargements.

Identification à partir d'essais de laboratoire

Une série d'identifications de paramètres poroélastiques pour des échantillons d'argilite de Haute-Marne a été effectuée à partir d'essais en laboratoire de confinement isotrope et de 'pulse test'. Précisions dans la suite seulement quelques résultats qui permettent d'illustrer le fonctionnement de la méthode de différentiation directe dans un cas concret. La technique utilisée ainsi que les résultats font l'objet d'une proposition d'article [?].

L'essai de confinement isotrope consiste en l'application instantanée d'une pression à la surface d'une éprouvette (voir figure 2.7), les surfaces pouvant être drainées ou non drainées. Dans ces conditions sont mesurés les déplacements axial et radial de l'éprouvette en différents points.

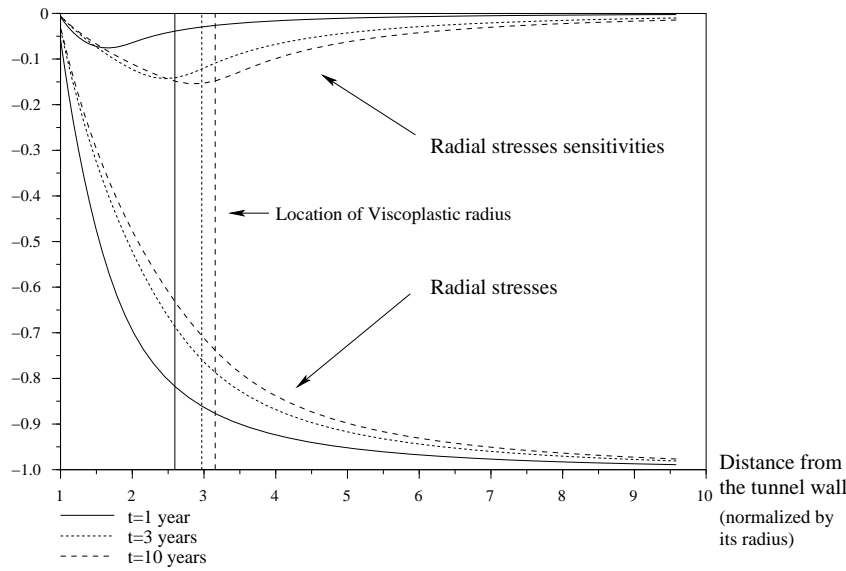


FIG. 2.4 – Evolution des rapports σ_{rr}/σ_0 et $\delta_N \sigma_{rr}/\sigma_0$ en fonction de la distance au tunnel

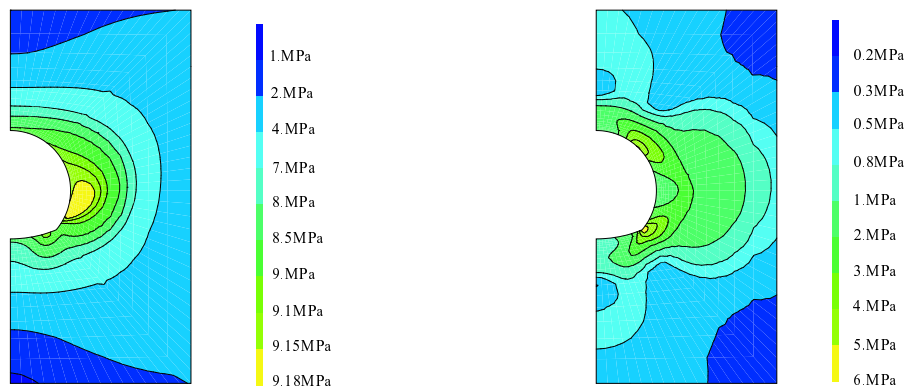


FIG. 2.5 – Von Mises of σ (Yield Limit 3. MPa) and $\delta_N \sigma$

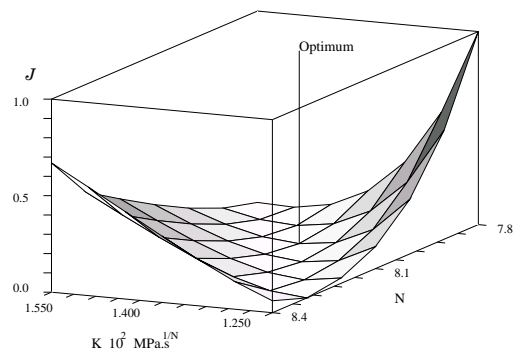
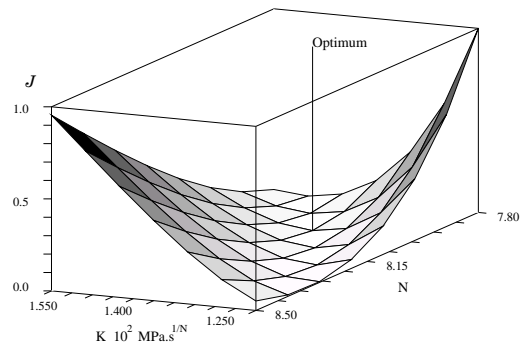


FIG. 2.6 – Les valeurs de la fonctionnelle coût dans un plan $N - K$ pour le tunnel soutenu (en haut) et non soutenu (en bas).

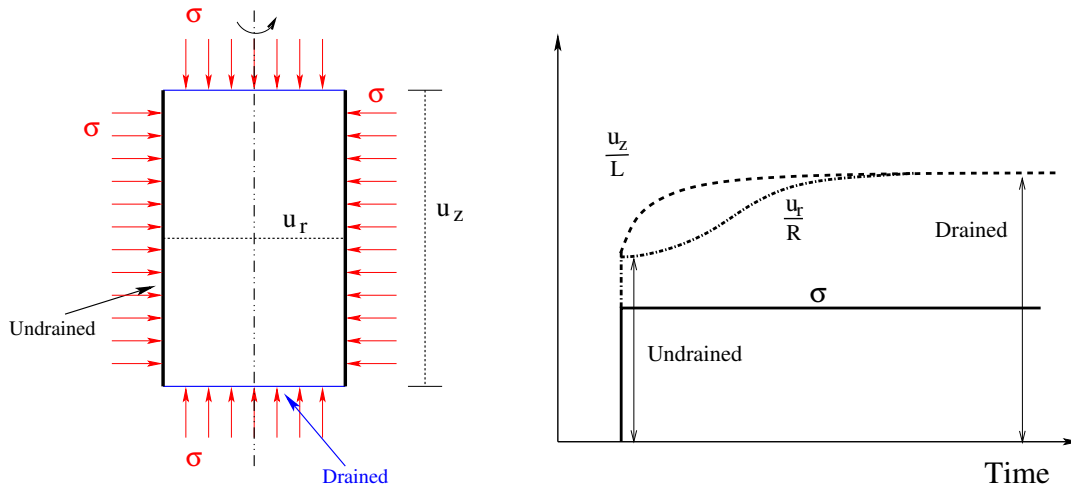


FIG. 2.7 – Conditions aux limites (à gauche) et évolution des déplacements axiaux et radiaux (à droite) pour un essai de confinement isotrope drainé.

L'essai du pulse test consiste en l'application instantanée pression à une éprouvette, par l'intermédiaire d'un volume d'eau en réservoir connecté directement à une des faces de l'éprouvette. Après une période transitoire, le système atteint un point d'équilibre où les pressions dans le réservoir et dans l'éprouvette sont égales. L'information fournie par l'expérience est l'histoire de pression dans le réservoir durant l'essai.

La méthode d'identification des paramètres proposée dans ce travail est de nouveau fondée sur la minimisation d'une fonctionnelle coût telle que celle présentée en (2.4) ou encore en (2.6). La minimisation s'effectue également en utilisant l'algorithme de Levenberg-Marquart et des gradients calculés par différentiation directe. Par rapport à la technique exhibée dans le cas des tunnels où la solution du problème a été calculée en utilisant la méthode des éléments finis, nous avons utilisé dans ce cas une solution semi-analytique unidimensionnelle. La pertinence de cette solution dans les cas des éprouvettes a été démontrée par des comparaisons de la solution semi-analytique avec des calculs éléments finis. Si le rapport d'aspect de l'éprouvette (rayon / longueur) $\ll 0.25$ l'erreur est inférieure à 0.5%.

Comme illustration de la différentiation directe est présentée en figure 2.4 l'évolution des sensibilités du déplacement axial pendant l'essai de confinement isotrope.

Les valeurs des paramètres obtenues sont en accord avec les ordres de grandeur connus dans la littérature spécialisée pour cette classe d'argilites en dépit des différences observées entre les prédictions du modèle et les essais (voir figures 2.9 et 2.4). Ces différences peuvent s'expliquer par d'autres effets chimiques, gonflement, ... dont notre modèle poroélastique ne tient pas compte.

Nos travaux ont ainsi proposé une méthode robuste d'identification pour des essais poromécaniques couplés. Son intérêt réside dans la rapidité offerte par la solution semi-analytique utilisée. Elle montre également l'avantage d'utiliser deux essais complémentaires dans l'identification des paramètres.

Nous rappelons qu'une méthode d'identification plus générale en poroélasticité couplée utilisant la méthode de différentiation directe et la méthode de l'état adjoint a été proposée en [?].

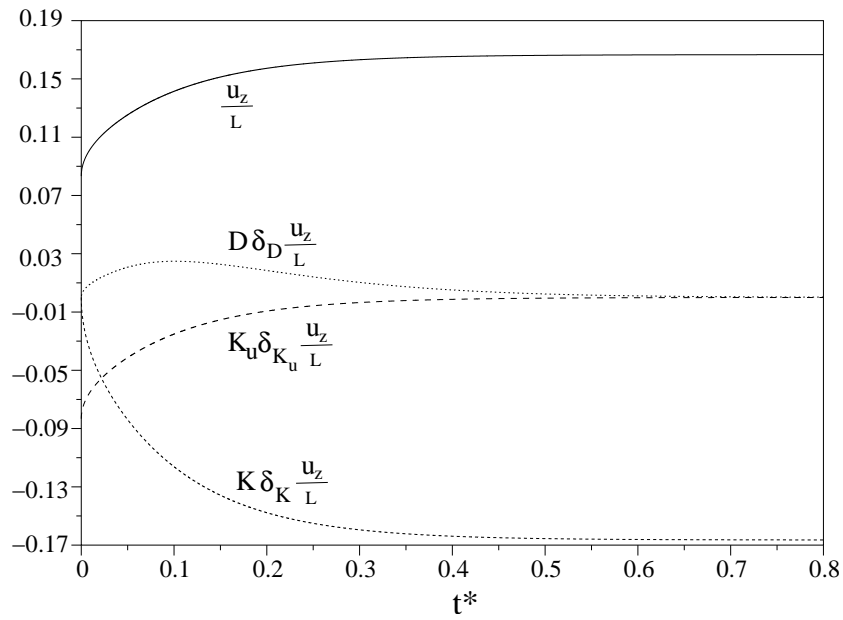


FIG. 2.8 – Déplacement axial adimensionalisé $\frac{u_z}{L}$ et coefficients de sensibilités associés aux paramètres K , K_u et D pendant l’essai de confinement isotrope drainé.

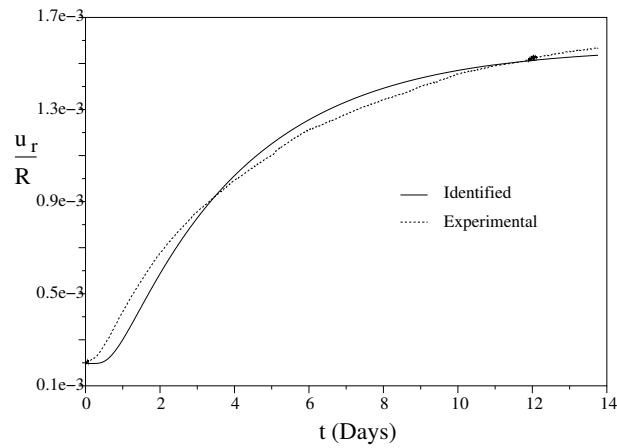


FIG. 2.9 – Déformation radiale durant l’essai de confinement isotrope sur une argilite de Haute-Marne.

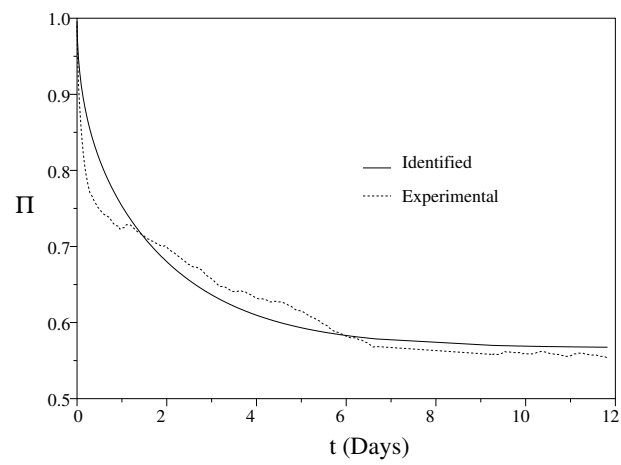


FIG. 2.10 – Pression durant le pulse test sur une argilite de Haute-Marne.

2.5 Identification des paramètres à partir d'essais d'indentation

Dans cette section, nous revenons au problème de l'identification des paramètres de loi de comportement à partir d'essais d'indentation tel que présentés en section 2.2. Si dans notre première présentation nous avons considéré un matériau élastique, nous combinons ici les techniques de la méthode de l'état adjoint pour traiter des conditions aux limites de unilatérales, i.e. contact avec celles obtenues pour un comportement non linéaire.

Ce problème qui fait l'objet de la thèse de Nicolas Tardieu [Tar00] a donné suite à une série de publications : en [CT01] sont détaillées les conditions d'optimalité du Lagrangien pour un matériau élastique telles que présentées ici en section 2.2, en [CN99] est présentée la méthode de l'état adjoint pour un matériau standard généralisé et en [CT00] sont discutés quelques résultats expérimentaux et une stratégie générale d'identification.

Nous rappelons que le problème inverse s'écrit sous la forme d'un problème de minimisation :

$$\mathbf{c}^* = \arg \min_{\mathbf{c} \in \mathcal{P}} \mathcal{J}(\mathbf{c}, \mathbf{u}[\mathbf{c}], \mathbf{d}) \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{c}, \mathbf{u}[\mathbf{c}], \mathbf{d}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^I (F_i^{comp}(\mathbf{c}) - F_i^D)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^I \left(\int_{\Gamma_C} p_i(\mathbf{c}) d\Gamma - F_i^D \right)^2 \end{aligned} \quad (2.38)$$

où les données de l'expérience \mathbf{d} sont l'histoire des déplacements et des forces résultantes sur l'indenteur $\mathbf{d} = \{(U_i^D, F_i^D) | i = 1, m\}$.

Equations du problème direct

Nous rappelons les équations du problème d'indentation élastoviscoplastique sous une forme discrétisée dans le temps.

Les conditions de contact sur Γ_C sont exprimées en utilisant des multiplicateurs de Lagrange $p_i \in N$, avec $N = \{q \in (H^{1/2}(\Gamma_C))' \mid q \leq 0\}$ un ensemble convexe fermé et $(H^{1/2}(\Gamma_C))'$ le dual de $H^{1/2}(\Gamma_C)$ (voir la formulation mixte des conditions de contact ou [KO88]).

Le déplacement vertical U_i est imposé à l'indenteur à l'instant t_i . En conséquence, la distance g_i entre la surface de contact Γ_C et l'indenteur est donnée par :

$$g_i = g + U_i^D - u_i^n$$

Les équations d'équilibre et de comportement s'écrivent :

$$\operatorname{div}(\Delta \boldsymbol{\sigma}_i) = 0 \quad (2.39)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}_i) = \mathbf{S} : \Delta \boldsymbol{\sigma}_i + \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\sigma}_i, \mathbf{c})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Delta t \quad (2.40)$$

les conditions aux limites deviennent :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \Gamma_F \quad (2.41)$$

$$\Delta \mathbf{u}_i = 0 \text{ on } \Gamma_D \quad (2.42)$$

Pour le contact, nous obtenons les conditions de Kuhn-Tucker :

$$(\Delta u_i^n - g_i - \Delta U_i)(q - p^{i+1}) \geq 0 \quad \forall q \in N \quad (2.43)$$

$$\Delta \sigma_i^{nn} = \Delta \sigma_i \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \Delta p_i \quad (2.44)$$

$$\Delta \sigma_i^{nt} = (\Delta \sigma_i \cdot \mathbf{n} - \Delta \sigma_i^{nn} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (2.45)$$

Les conditions initiales sont les suivantes :

$$\sigma_0 = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2.46)$$

$$\mathbf{u}_0 = 0 \quad \text{on } \Omega \quad (2.47)$$

$$\varepsilon_0^p \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Omega \quad (2.48)$$

$$(2.49)$$

Le Lagrangien associé à ce problème est construit comme auparavant en utilisant la formulation faible du problème. Nous notons la variable adjointe à une variable par un superscript \star et nous précisons qu'elles vont jouer le rôle de multiplicateur de Lagrange du problème.

Le Lagrangien a la forme suivante :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \sigma, p, \mathbf{u}^\star, \sigma^\star, p^\star, \mathbf{c}) = \sum_{i=0}^I \mathcal{L}_i(\mathbf{u}_i, \sigma_i, p_i, \mathbf{u}_i^\star, \sigma_i^\star, p_i^\star, \mathbf{c}) \quad (2.50)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i(\mathbf{u}_i, \sigma_i, p_i, \mathbf{u}_i^\star, \sigma_i^\star, p_i^\star) &= \frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma_C} p_i d\Gamma - F_i^D \right)^2 \\ &+ \int_{\Omega} \text{div}(\Delta \sigma_i) \cdot \mathbf{u}_i^\star d\Omega - \int_{\Gamma_F} \Delta \sigma_i \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_i^\star d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_D} \Delta \mathbf{u}_i \cdot \sigma_i^\star \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\Delta u_i^n - \Delta U_i - g_i) \cdot p_i^\star d\Gamma \\ &- \int_{\Omega} (\varepsilon(\Delta \mathbf{u}_i) - \mathbf{S} : \Delta \sigma_i - \frac{\partial \Phi(\sigma_i, \mathbf{c})}{\partial \sigma} \Delta t) : \sigma_i^\star d\Omega \\ &- \int_{\Gamma_C} (\Delta p_i - \Delta \sigma_i^{nn}) \cdot u_i^{n\star} d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \Delta \sigma_i^{nt} \cdot u_i^{t\star} d\Gamma \end{aligned}$$

et

- $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i^\star \in (H^1(\Omega))^2$
- $\sigma_i, \sigma_i^\star \in (L^2(\Omega))^4$
- $p_i, p_i^\star \in N_i = \{q \in (H^{1/2})'(\Gamma_C) \mid q = 0 \text{ on } \Gamma_C / \Gamma_{C_i}\}$ and where Γ_{C_i} est la surface de contact effective à l'instant t_i .

Rappelons que la forme complexe du Lagrangien ne permet pas de tirer de conclusion en ce qui concerne l'existence ou l'unicité du point selle (voir la discussion dans la section 2.2). Les conditions de stationnarité permettent de caractériser formellement le point selle et sont données par les expressions

suivantes :

$$\sum_{i=0}^I \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \mathbf{u}}, d\mathbf{w}_i \right\rangle = 0 \quad \forall d\mathbf{w}_i \in (H^1(\Omega))^2 \quad (2.51)$$

$$\sum_{i=0}^I \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, d\boldsymbol{\tau}_i \right\rangle = 0 \quad \forall d\boldsymbol{\tau}_i \in (L^2(\Omega))^4 \quad (2.52)$$

$$\sum_{i=0}^I \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial p}, dq_i \right\rangle = 0 \quad \forall dq_i \in N_i \quad (2.53)$$

$$\sum_{i=0}^I \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \mathbf{u}^*}, d\mathbf{w}_i \right\rangle = 0 \quad \forall d\mathbf{w}_i \in (H^1(\Omega))^2 \quad (2.54)$$

$$\sum_{i=0}^I \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*}, d\boldsymbol{\tau}_i \right\rangle = 0 \quad \forall d\boldsymbol{\tau}_i \in (L^2(\Omega))^4 \quad (2.55)$$

$$\sum_{i=0}^I \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial p^*}, dq_i \right\rangle = 0 \quad \forall dq_i \in N_i \quad (2.56)$$

$$\sum_{i=0}^I \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \mathbf{c}}, \mathbf{d} - \mathbf{c} \right\rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{d} \in \mathcal{Q} \quad (2.57)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit de dualité dans les espaces respectifs.

Le calcul des dérivées par rapport aux variables adjointes (équations (2.54), (2.55) et (2.56)) conduit aux équations du problème direct. La dérivation par rapport aux variables directes (équations (2.51), (2.52) et (2.53)) ainsi qu'une série d'intégrations par parties conduit aux équations suivantes :

$$\operatorname{div}(\Delta \boldsymbol{\sigma}_i) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2.58)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}_i^*) = \mathbf{S} : \Delta \boldsymbol{\sigma}_i^* - \frac{\partial^2 \Phi(\boldsymbol{\sigma}_i, \mathbf{c})}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \Delta t : \boldsymbol{\sigma}_i^* \quad \text{in } \Omega \quad (2.59)$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_i^* \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_F \quad (2.60)$$

$$\Delta \mathbf{u}_i^* = 0 \quad \text{on } \Gamma_D \quad (2.61)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u_i^{n*} = (F_i^{\text{calc}}(\mathbf{c}) - F_i^D) \\ \Delta \sigma_i^{nn*} = \Delta p_i^* \\ \Delta \sigma_i^{nt*} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{on } \Gamma_{C_i} \quad (2.62)$$

et à des conditions finales à l'instant T

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_I^*) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2.63)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}_I^*) = \mathbf{S} : \Delta \boldsymbol{\sigma}_I^* \quad \text{in } \Omega \quad (2.64)$$

$$\mathbf{u}_I^* = 0 \quad \text{on } \Gamma_D \quad (2.65)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_I^* \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_F \quad (2.66)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_I^{n*} = 0 \\ p_I^* = \sigma_I^{nn*} \end{array} \right\} \quad \text{on } \Gamma_C \quad (2.67)$$

Les équations précédentes, ainsi que les conditions aux limites et les conditions finales définissent un problème de viscoélasticité bien posé, que nous appelons problème adjoint : (\mathcal{P}^*) .

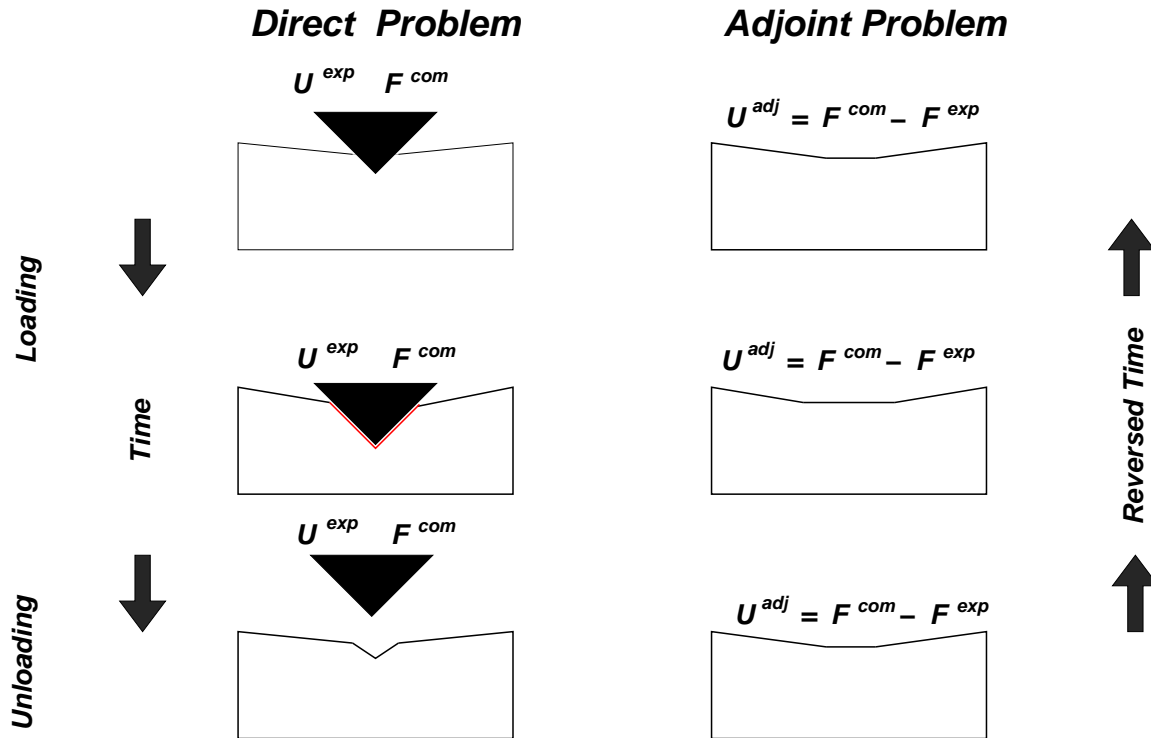


FIG. 2.11 – Evolution de l’aire de contact effective et définition des déplacements imposés pour le problème adjoint associé

Les résultats obtenus peuvent être résumés sous la forme suivante : Si (u, σ, p) et (u^*, σ^*, p^*) sont les solutions respectives des problèmes direct (\mathcal{P}) et adjoint (\mathcal{P}^*) , alors les conditions de stationnarité du Lagrangien \mathcal{L} : (2.51), (2.52), (2.53), (2.54), (2.55) et (2.56) sont vérifiées.

Si (u, σ, p) sont les champs solutions du problème direct (\mathcal{P}) , alors le Lagrangien \mathcal{L} se réduit à la fonctionnelle coût \mathcal{J} . En utilisant les conditions de stationnarité, il en résulte que : si (u, σ, p) et (u^*, σ^*, p^*) sont les solutions respectives des problèmes direct (\mathcal{P}) et adjoint (\mathcal{P}^*) , alors le gradient de la fonctionnelle coût \mathcal{J} est défini par :

$$\nabla_{\mathbf{c}} \mathcal{J} = \sum_{i=0}^I \left(\int_{\Omega} \Delta \sigma_i : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{c}} : \sigma_i^* + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma \partial \mathbf{c}} \Delta t : \sigma_i^* d\Omega \right) \quad (2.68)$$

Les résultats précédents ainsi que leur application au cas d’une loi de comportement de type Norton-Hoff sont commentés en détail en [CT01]. Dans la suite de ce document, nous nous contentons de présenter de manière succincte quelques résultats d’identification que nous avons obtenus.

Résultats d’identification

La technique d’identification présentée précédemment a été testée sur des essais simulés et réels d’indentation. Les courbes d’indentation mesurées et simulées après identification des paramètres pour polyéthylène, aluminium et nylon sont présentées dans les figures 2.5, 2.5 et respectivement 2.5.

Pour les essais simulés, nous pouvons remarquer que les paramètres identifiés se situent généralement après identification à $\approx 5 - 10\%$ des valeurs réelles des paramètres. En ce qui concerne les essais

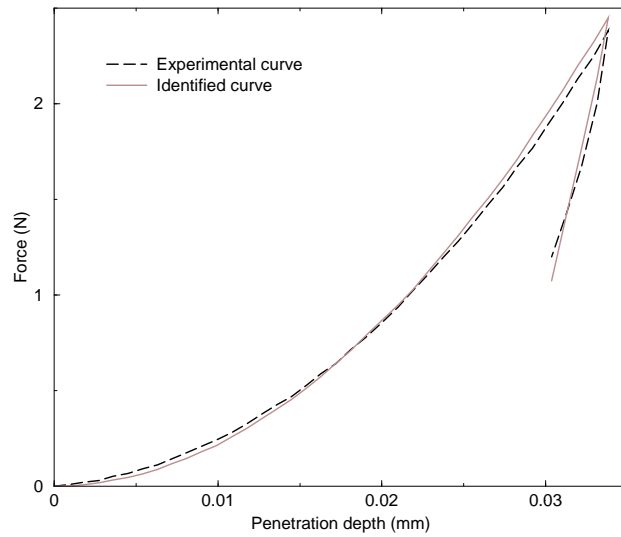


FIG. 2.12 – Courbes d'indentation expérimentale et identifiée pour Nylon

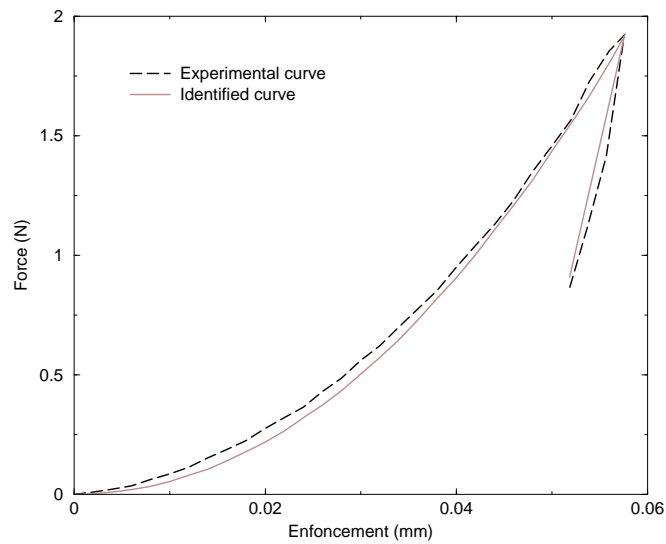


FIG. 2.13 – Courbes d'indentation expérimentale et identifiée pour Polyethylene

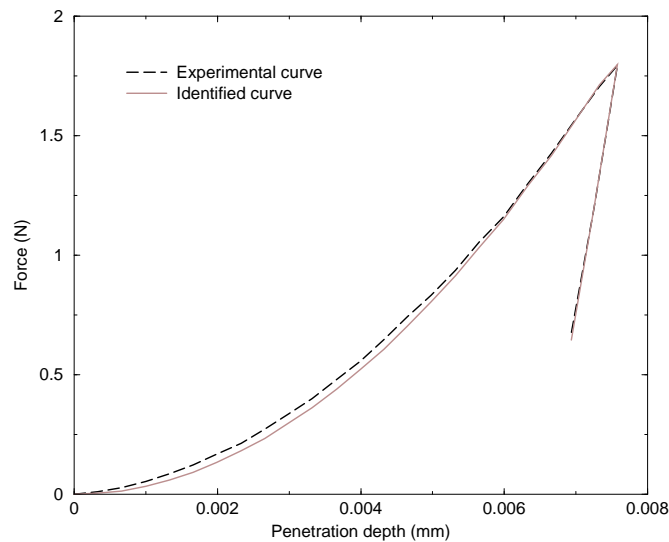


FIG. 2.14 – Courbes d'indentation expérimentale et identifiée pour Aluminum

réels, les paramètres se situent dans la plage considérée comme acceptable dans la littérature pour la loi de comportement donnée. Dans les deux cas, nous constatons une bonne superposition des courbes d'indentation mesurée et simulée.

Cependant, nous remarquons dans certain cas une faible sensibilité de la courbe d'indentation par rapport à la variation d'un ou plusieurs paramètres. Pour illustrer cette propriété, la figure 2.5 présente la variation de la fonctionnelle coût \mathcal{J} dans un plan de l'espace des paramètres défini par les points suivants :

- le point de référence : $\mathbf{c} = (100000, 1500, 5, 500)$
- le point initial de l'algorithme d'identification : $\mathbf{c} = (70000, 2000, 8, 200)$
- le point final de convergence de l'algorithme : $\mathbf{c} = (99126, 1682, 6.95, 238)$

En utilisant une paramétrisation des points de l'espace des paramètres par deux vecteurs orthogonaux, il est possible de générer les points de ce plan par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 E &= 100000 - 1315.4a - 80362.7b \\
 K &= 1500 + 273.917a + 714.075b \\
 m &= 5 + 2.93482a + 1.08013b \\
 \sigma^y &= 500 - 394.32a + 142.208b
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

où a, b sont deux paramètres réels.

La figure 2.5 représente les valeurs de la fonctionnelle coût pour les valeurs $(a, b) \in [-1, 1] \times [-0.5, 0.5]$. Deux valeurs extrêmes : $(141200, 923, 2.11, 744)$, i.e $(a, b) = (-1, -0.5)$ et $(58500, 2131, 8.47, 176)$, i.e $(a, b) = (1, 0.5)$ donnent l'extension de ce plan dans l'espace de paramètres du comportement. Remarquons cependant que la variation de la fonctionnelle coût est faible dans certains directions, ce qui

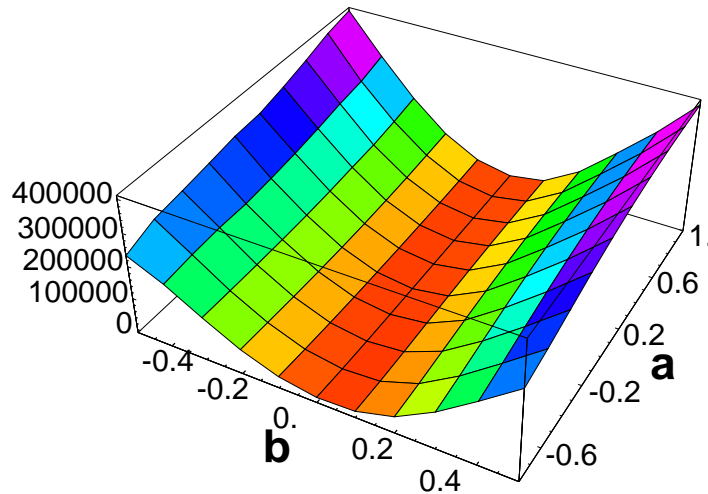


FIG. 2.15 – Variation de la fonctionnelle coût \mathcal{J} dans le plan défini par (a, b)

confirme les difficultés d'identification. Cette constatation est cohérente avec des observations similaires obtenues dans des configurations d'essais différentes comme celles présentées en figures 2.6 et 3.4.

2.6 Conclusion et Perspectives

Les résultats présentés dans ce chapitre portent sur les calculs de sensibilité appliqués à l'identification des paramètres de lois de comportement pour des problèmes géotechniques ou d'indentation.

Les contributions ont porté d'une part sur la justification mathématique des calculs de sensibilité pour des problèmes avec des contraintes unilatérales, et d'autre part, sur les développements de techniques et leurs applications à des cas de comportement élastoviscoplastique.

Les résultats sur l'optimisation des problèmes avec contact laisse supposer une généralisation qui reste à faire. Ces résultats montrent qu'une démonstration mathématiquement rigoureuse des calculs de sensibilité pour des lois de comportement élastoplastique présentant un pseudo-potential sous-différentiable est désormais possible.

Pour les calculs de sensibilité, les perspectives de recherches dépendent fortement du développement des codes de calculs industriels disponibles sur le marché. L'intérêt avéré de ces méthodes, ainsi que les moyens mis en jeu par les industriels et les sociétés de service informatique, permet d'espérer de disposer d'ici quelques années de calculs de sensibilité dans la plupart des codes aux éléments finis industriels. Ces développements permettront de concentrer les recherches à venir sur des questions liées aux variations statistiques des données, à la pertinence des modèles, etc., qui restent à ce jour ouvertes d'un point de vue théorique aussi bien que pratique.

Références

- [BK03] Bergounioux, M. and Kunish, K. On the structure of lagrange multipliers for state-constrained systems. *System and Control Letters*, 48 :169–176, 2003.

- [BM99] Bergounioux, M. and Mignot, F. Contrôle optimal dans les inéquations et multiplicateurs de lagrange. *C.R.Acad.Sci.Paris Série I*, 329 :607–612, 1999.
- [Bou97] Bourgeois Laurent. *Contrôle Optimal et Problèmes Inverses en Plasticité*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, France, 1997.
- [Cas04] Cast3M. An object oriented finite element program. <http://www-cast3m.cea.fr>, 2004.
- [CN99] A. Constantinescu and Tardieu N. On the identification of nonlinear constitutive laws from indentation tests. In ASME, editor, *Inverse Problems in Engineering*, 1999.
- [CT00] A. Constantinescu and N. Tardieu. Identification strategies for recovering material parameters from indentation experiments. In M. Tanaka and G. Dulikravich, editors, *ISIP'2000 International Symposium on Inverse Problems in Engineering*. Elsevier, 2000.
- [CT01] A. Constantinescu and N. Tardieu. On the identification of elastoviscoplastic constitutive laws from indentation tests. *Inverse Problems in Engineering*, 9 :19–44, 2001.
- [DM87] Dems K. and Mróz Z. Variational approach to sensitivity analysis in thermoelasticity. *J. Therm. Stress.*, 10 :283–306, 1987.
- [GM99] Carrera J. Galarza G.A. and Medina A. Computational techniques for optimization of problems involving nonlinear transient simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(3) :319–334, 1999.
- [GMC98] Gavrus A., Massoni E., and Chenot J.L. The analysis of inelastic behaviour formulated as an inverse rheological approach. *Meas. Sci. Technol.*, 9 :848–863, 1998.
- [HCK86] Haug E. J., Choi K. Y., and Komkov V. *Design sensitivity analysis of structural system*. Academic press, 1986.
- [HN75] Halphen B. and Nguyen Quoc S. Sur les matériaux standards généralisés. *Journ. de mécanique*, 1975.
- [Joh85] Johnson, K.L. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1985.
- [KATK97] Kleiber, M., Antunez, H., Tien, T.D., and Kowalczyk, P. *Parameter sensitivity in nonlinear mechanics*. Wiley, Chichester, 1997.
- [KO88] Kikuchi, N. and Oden, J.T. *Contact Problems in Elasticity :A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. SIAM, Philadelphia, 1988.
- [LC02] Lecampion, B. and Constantinescu, A. Identification of poroelastic constants ii : an inverse analysis. In *Biot Conference, Grenoble, 2002*, 2002.
- [LCN02] B Lecampion, A. Constantinescu, and M.D. Nguyen. Parameter identification for lined tunnels in viscoplastic media. *Int.J.Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26(12) :1191–1211, 2002.
- [LCNA02] Lecampion, B., Constantinescu, A., Nguyen Minh, D., and Allagnat, D. On the determination of elastoviscoplastic constants of hard marls from in situ measurements performed on a motorway tunnel in the alps. In *North American Rock Mechanics Symposium, Totonto, Canada, 2002*, 2002.
- [Mat04] Mathematica. <http://www.wri.com>, 2004.
- [Mig76] Mignot, F. Contrôle dans les inéquations variationnelles elliptiques. *J.Functional Analysis*, 22(2) :130–185, 1976.
- [MK99] Mahnken R. and Kuhl E. Parameter identification of gradient enhanced damage models with the finite element method. *European Journal of Solid Mechanics*, 18 :819–835, 1999.
- [MS96] Mahnken R. and Stein E. Parameter identification for viscoplastic models based on analytical derivatives of a least-square functionals and stability investigations. *Int. J. Plast.*, 12(4) :451–479, 1996.
- [MT95] Michaleris P. and Tortorelli D.A. Design sensitivity analysis : An overview and review. *Inverse Problems in Engineering*, 1, 1995.
- [MTV94] Michaleris P., Tortorelli D.A., and Vidal C.A. Tangent operators and design sensitivity formulations for transient non-linear coupled problems with applications to elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, 1994.
- [P.66] Perzyna P. Fundamental problems in viscoplasticity. *Advances in Appl. Mech.*, 9 :243–377, 1966.
- [Sci04] Scilab. <http://www-rocq.inria.fr/scilab/>, 2004.

- [SH97] Simo J. C. and Hughes T.J.R. *Computational Inelasticity*. Springer, 1997.
- [SH98] Simo, J.C. and Hughes, T.J.R. *Computational Inelasticity*, volume 7 of *Interdisciplinary applied mathematics*. Springer New York, 1998.
- [SKDR02] Stupkewicz, S., Korelc, J., Dutko, M., and Rodic, T. Shape sensitivity analysis of large deformation frictional contact problems. *Comput.Meth.Appl.Mech.Engrg.*, 191 :3555–3581, 2002.
- [Son77] Nguyen Quoc Son. On the elastic plastic initial-boundary value problem and its numerical integration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (11) :817–832, 1977.
- [ST85] Simo J.C. and Taylor R.L. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering*, (48) :101–118, 1985.
- [TA90] Tsay J.J. and Arora J.S. Nonlinear design sensitivity analysis for path dependent problems. part 1 : General theory. *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering*, 81 :183–208, 1990.
- [Tab51] Tabor, D. *Hardness of metals*. Oxford University Press, 1951.
- [Tar00] Tardieu N. *Identification de lois de comportement élastoviscoplastique par indentation*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, France, 2000.
- [TC00] Tardieu, N. and Constantinescu, A. On the determination of elastic coefficients from indentation experiments. *Inverse Problems*, 16(3) :577–588, 2000.
- [TCA90] Tsay J.J., Cardoso, J.E.B., and Arora J.S. Nonlinear design sensitivity analysis for path dependent problems. part 2 : Analytical examples. *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering*, 81 :209–228, 1990.
- [VH93] Vidal C.A. and Haber R.B. Design sensitivity analysis for rate-independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering*, pages 393–431, 1993.
- [VLH91] Vidal C.A., Lee H.S., and Haber R.B. The consistent tangent operator for design sensitivity analysis of history-dependent response. *Computing Systems in Engineering*, 2(5/6) :509–523, 1991.
- [YZ98] Yang G.Z. and Zabaras N. An adjoint method for the inverse design of solidification processes with natural convection. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42 :1121–1144, 1998.
- [ZBSF00] Zabaras, N., Bao, Y., Srikanth, A., and Frazier, W.G. A continuum lagrangian sensitivity analysis for metal forming processes with applications to die design problems. *Int.J.Num.Meth.Engrg.*, 48 :679–720, 2000.

Chapitre 3

Structures en fatigue thermomécanique

3.1 Problématique

La prédiction de la durée de vie des structures est un problème ancien qui a préoccupé plusieurs générations d'ingénieurs et à été abordée de manières différentes en fonction des outils de conception de chaque époque.

Cependant, elle n'est qu'une composante du cahier de charges parmi de nombreuses spécifications : consommation d'énergie, processus de fabrication, choix du matériau, etc. Le critère final est généralement représenté par un rapport qualité – prix, ce qui limite en conséquence les choix de l'ingénieur.

En partant de cette constatation, et du fait que les matériaux et les processus sont généralement définis a priori, il est possible de définir les étapes d'un cycle de conception de la manière suivante :

1. *définition du chargement représentatif et de la durée de vie attendue*
2. *essais et modélisation afin d'atteindre la durée de vie requise.* Cette étape se limite habituellement à effectuer des modifications géométriques et de conditions aux limites.

Par ailleurs, la méthode de conception doit également être compatible, d'une part avec les contraintes de temps liées à l'activité industrielle et d'autre part avec les outils de calcul existant (logiciels ...).

Les travaux développés pour des structures soumises à des chargements thermo-mécaniques sont focalisés autour du deuxième point du cycle de conception. Plus précisément, nous nous sommes proposé de fournir une démarche globale de dimensionnement des structures par le calcul, compatible avec les contraintes industrielles précisées auparavant.

Les cycles de chargement thermomécanique toute démarche de calcul est composée des deux étapes suivantes :

- *un calcul thermique transitoire* modélisant assez souvent un cycle de fonctionnement de type démarrage – fonctionnement – arrêt.
- *un calcul mécanique* avec le champ thermique calculé précédemment comme donnée de chargement.

Cette démarche de calcul est fondée sur deux hypothèses fortes :

- *découplage du calcul thermique et du calcul mécanique*, justifié par la contribution négligeable de la dissipation thermique à l'échauffement de la pièce ;
- *découplage du calcul de l'état mécanique et de la prédiction de la durée de vie*,
- *existence d'un cycle limite pour l'état mécanique de la structure sous chargement cyclique*

Les deux dernières hypothèses se justifient seulement a posteriori par les résultats obtenus, même si les observations expérimentales des chargements cycliques sur des éprouvettes en essais classiques ou technologiques donnent des indications sur la justification de ces hypothèses.

Dans la suite, nous discutons quelques aspects importants de la démarche globale de dimensionnement tels que la loi de comportement et les questions liées à son identification, le cycle limite, le critère de fatigue et les résultats de prédictions de durées de vie sur structure.

3.2 Matériaux et essais

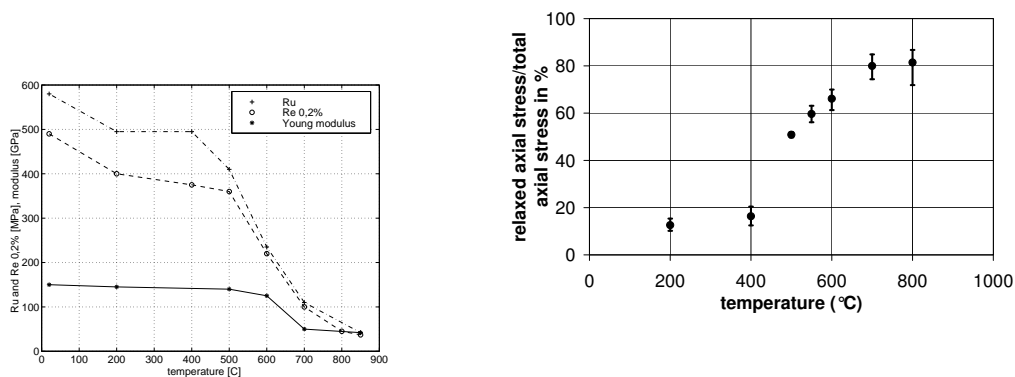


FIG. 3.1 – Evolution avec la température de paramètres mécaniques conventionnels (cadre du haut) : limite élastique $R_{p0,2}$, contrainte ultime à la rupture UTS et module de Young E et de la partie visqueuse de la contrainte (cadre du bas)

Les structures que nous avons étudiées en fatigue oligocyclique, sont les suivantes :

- *collecteurs d'échappement en fonte SiMo.*
- *culasses en alliage d'aluminium A356.*

Des schémas de fonctionnement de ces deux structures sont représentés en figure 3.6 et 3.10. Précisons aussi que les études correspondantes ont fait l'objet d'une collaboration avec PSA Peugeot-Citroën dans le cadre de la thèse de Eric Charkaluc et respectivement de Leatitia Verger.

Les résultats des essais effectués sur les matériaux précédents et auxquels nous avons eu accès ont été utilisés d'une part pour la détermination de la loi de comportement et d'autre part pour la détermination du critère de fatigue.

Plus précisément, il s'agit dans notre cas des essais suivants :

- *essais isothermes de traction-compression en déformation imposée* Les essais isothermes ont été effectués à différents paliers de température entre 100° et 700° pour les éprouvettes en fonte SiMo et entre 100° et 300° pour les éprouvettes en aluminium. La vitesse de déformation était de $10^{-3} s^{-1}$ et les amplitudes de déformation totale étaient de $\pm 0.25\%$ et $\pm 1\%$.
- *essais de fatigue thermique*

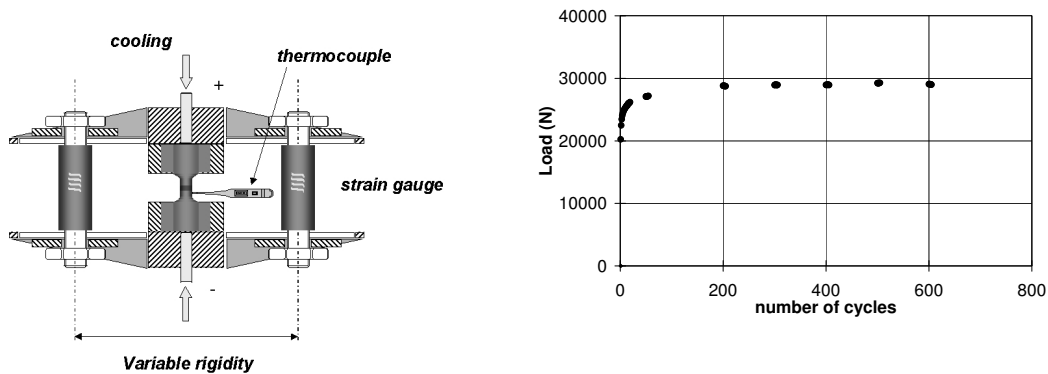


FIG. 3.2 – Machine de fatigue anisotherme (à gauche) et évolution du chargement dans les piliers en fonction du nombre de cycles. Il faut remarquer la stabilisation de la charge et le point de saturation qui conduisent à généraliser les observations en régime isotherme

Il s'agit d'essais anisothermes menés sur des éprouvettes cylindriques chauffées par effet Joule comme présenté en figure 3.2. La température maximale est obtenue au milieu de l'éprouvette et varie cycliquement entre 40° et 700° pour les éprouvettes en fonte SiMo et entre 75° et 300° pour les éprouvettes en aluminium.

– *essais de structure sur banc*

Ces essais ont été conçus pour tester un cycle thermomécanique complet : démarrage, fonctionnement, arrêt soit des pièces (collecteur, vilbroquin, culasse, etc.) soit des moteurs assemblés. Sans rentrer dans le détail de ces essais, nous précisons que la durée de vie ainsi obtenue correspond à la première fissure macroscopique observée pendant les inspections périodiques : par conséquent, le nombre de cycles réels à l'initiation est encadré par deux inspections consécutives.

3.3 Loi de comportement

Il est bien connu que le choix judicieux d'une loi de comportement ainsi que l'algorithme d'identification des paramètres et d'intégration numérique sont autant de points-clés pour tout calcul de structure.

Dans les travaux présentés ici, nous nous intéressons à une loi de comportement simple, à faible nombre de paramètres, capable de modéliser les phénomènes importants : plasticité, viscosité, cycle limite, ..., dans la gamme des températures, des déformations et vitesses préconisée.

Compte tenu de l'évolution des structures étudiée à haute et basse températures et des niveaux de déformations faisant intervenir les phénomènes plastiques ou visqueux, il est nécessaire d'utiliser des lois de comportement élastoviscoplastiques.

La plupart des calculs ont été effectués en utilisant deux lois élastoviscoplastiques. La première est une loi classique désignée par la suite *modèle viscoplastique unifié* [Cha97] avec écrouissage cinématique linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{elastic} = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} tr(\sigma) \mathbf{I} \\ \alpha = \frac{3}{2} \frac{1}{H} \mathbf{X} \\ \dot{\varepsilon}_{vp} = \frac{3}{2} \left\langle \frac{J_2(\sigma - \mathbf{X}) - \sigma_y}{\eta} \right\rangle^m \frac{\mathbf{s} - \mathbf{X}}{J_2(\sigma - \mathbf{X})} \\ \dot{\alpha} = \dot{\varepsilon}_{vp} \\ \sigma = \mathbf{E} : (\varepsilon - \varepsilon_{vp}) \end{array} \right. \quad (3.1)$$

La deuxième loi utilisée fait intervenir une partition additive de la contrainte en partie plastique et partie visqueuse et est dénommée *modèle viscoplastique à deux branches* [KIC92] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_v^{elastic} = \frac{1+\nu}{K_v} \sigma_v - \frac{\nu}{K_v} tr(\sigma_v) \mathbf{I} \\ \varepsilon_p^{elastic} = \frac{1+\nu}{K_p} \sigma_p - \frac{\nu}{K_p} tr(\sigma_p) \mathbf{I} \\ \alpha = \frac{3}{2} \frac{1}{H} \mathbf{X} \\ \dot{\varepsilon}_v = \frac{3}{2} \left[\frac{J_2(\sigma_v)}{\eta} \right]^m \frac{\mathbf{s}_v}{J_2(\sigma_v)} \\ \dot{\varepsilon}_p = \gamma \frac{\mathbf{s}_p - \mathbf{X}}{J_2(\sigma_p - \mathbf{X})} \\ \dot{\alpha} = \dot{\varepsilon}_p \\ \sigma_p = \mathbf{K}_p : (\varepsilon - \varepsilon_p) \\ \sigma_v = \mathbf{K}_v : (\varepsilon - \varepsilon_v) \\ \sigma_p = \sigma_p + \sigma_v \end{array} \right. \quad (3.2)$$

La différence essentielle entre les deux modèles est le couplage, respectivement le découplage entre les déformations visqueuse et plastique, ce qui conduit à des expressions différentes des mécanismes de dissipation. [CCBDV99]. L'importance de cette différence entrerait en jeu si nous cherchions à lier les paramètres du comportement à des variables d'endommagement différentes, ce qui n'est pas le cas dans la suite. Les deux lois de comportement sont à comprendre au niveau phénoménologique et ne traduisent pas le comportement mécanique à une échelle mésoscopique ou microscopique.

Identification des paramètres du comportement

Les paramètres de la loi de comportement ont été identifiés dans un premier temps en utilisant des estimations directes (pente tangente à l'origine pour le module de Young, contrainte apparente après relaxation pour la limite élastique et une partie de l'écroutissage, etc.), puis dans un deuxième temps, en minimisant par rapport aux paramètres \mathbf{p} une fonctionnelle coût \mathcal{J} qui calcule la distance entre prédictions et mesures :

$$\mathcal{J}(\mathbf{p}, \sigma^{mesure}) = \int_0^T \|\sigma^{calculé}(\mathbf{p}, \mathbf{u}^{mesure} - \sigma^{mesure})\| dt$$

Pour la minimisation, il s'agit techniques similaires à celles présentées en chapitre 2. Sans rentrer dans les détails, rappelons ici les résultats obtenus précédemment et qui permettent de mieux appréhender les difficultés et la robustesse de l'identification. Une discussion complète de l'identification pour l'aluminium est présentée en [CV02]

Dans la figure 3.3 est représentée, en fonction de la température, l'évolution de la limite élastique à 0.2% et du paramètre limite élastique de la loi de comportement utilisé σ_Y .

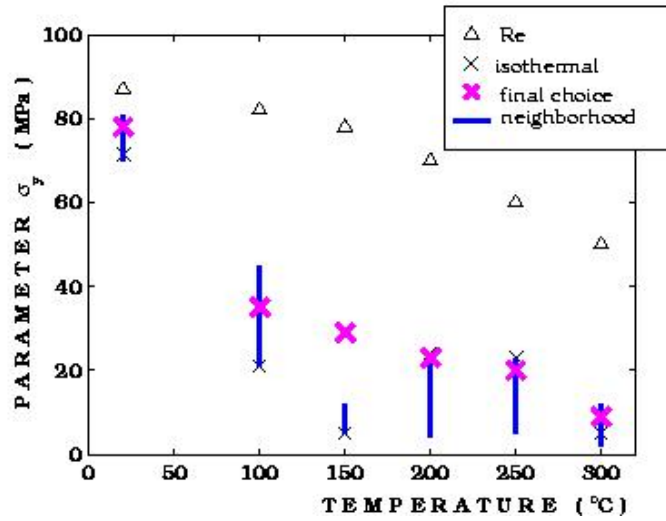


FIG. 3.3 – Evolution en fonction de la température de la limite élastique à 0.2% du module de Young E identifié par rapport aux plages de variations de la fonctionnelle coût J

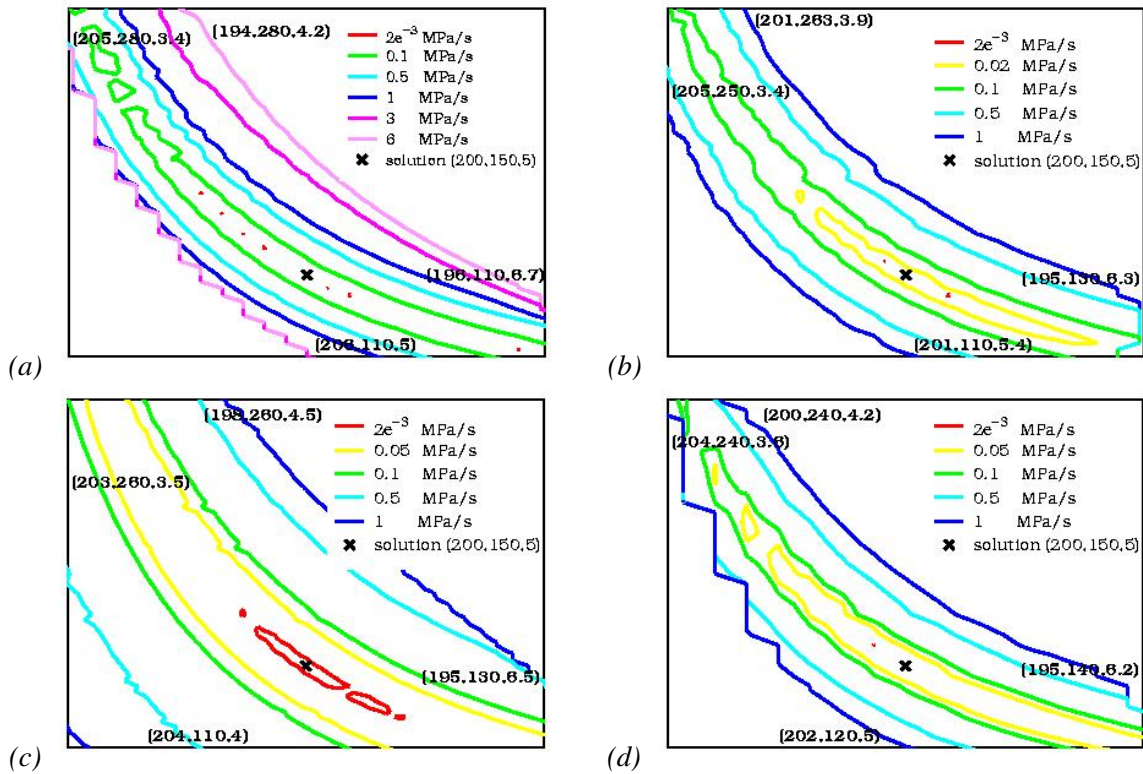


FIG. 3.4 – Lignes de niveaux de la fonctionnelle coût dans un plan (σ^Y, η) calculées pour différentes portions de chargement des expérimentations : (a) traction ; (b) traction + relaxation ; (c) relaxation ; (d) traction + relaxation + recouvrance

Ce dernier a été aussi représenté par rapport aux plages de variations de la fonctionnelle coût J . Nous remarquons ainsi que, la fonctionnelle coût permet une variation considérable de σ_Y , sans que sa valeur varie sensiblement. Les plages de variations permises sont d'autant plus larges lorsque nous mélangeons soit des essais menés à des vitesses différentes soit des essais effectués en conditions isothermes avec d'autres effectués en conditions anisothermes. Le compromis de l'identification est généralement trouvé par décision humaine en fonction du champ des applications et des essais disponibles.

Algorithmes d'intégration

Un autre point délicat des calculs mécaniques est l'intégration de la loi de comportement, même si nous disposons actuellement de codes de calcul qui proposent un spectre large de lois de comportement pré-programmées. L'importance de l'algorithme provient du fait qu'il détermine d'une part la qualité des résultats finaux et d'autre part les temps de calculs.

Les essais discutés en [CVC⁺99] ont montré que, parmi les schémas d'intégration de type implicite ou explicite de type Runge-Kutta, seul l'algorithme implicite avec retour radial [SH98] donne satisfaction avec des temps de calculs et des pas de chargement raisonnables.

L'intégration en régime anisotherme d'une loi de comportement avec écrouissage non-linéaire de type Armstrong-Frederick [NMCV03] a permis de mettre en évidence une grande sensibilité des résultats du calcul thermomécanique au choix de la formulation de la loi de comportement et du schéma d'intégration. Remarquons que des généralisations légèrement différentes des schémas d'intégration pour un écrouissage non-linéaire, mais qui se réduisent à la même expression en cas d'un écrouissage linéaire, conduisent à des cycles limites différents.

Rappelons ici, que d'un point de vue plus général, nous ne disposons pas actuellement de théorèmes mathématiquement rigoureux, capables de prédire l'existence et le calcul direct d'un cycle limite accommodé. Seules des approches numériques pour le calcul de ce cycle ont été mises en évidence par différents auteurs [MPT02, PS03]. Même si ces approches présentent un intérêt direct pour les problèmes techniques discutés dans la suite, elles n'ont pas été abordées dans notre travail jusqu'à maintenant.

3.4 Critères de fatigues

D'un point de vue strictement conceptuel, on est amené à définir la fatigue à travers une loi d'évolution du dommage et une limite du dommage entraînant la rupture finale du volume élémentaire du matériau. La rupture peut être considérée soit comme l'initiation d'une fissure à l'échelle microscopique ou macroscopique, soit comme la rupture finale, engendrée par la propagation jusqu'à une taille critique d'une fissure déjà existante. Le choix entre les différentes modélisations dépend essentiellement des applications en vue et de la précision souhaitée pour la prédiction.

Pour les applications traitées dans nos travaux, nous avons été amené à définir la limite de fatigue comme initiation d'une fissure macroscopique à l'échelle de la structure, donc d'une longueur de quelques millimètres comparable aux épaisseurs des structures considérées.

Partant de l'hypothèse de l'existence d'un cycle stabilisée avec des caractéristiques connues par des calculs de structures, la durée de vie est simplement définie comme la relation entre une fonction Φ et le nombre de cycles à la rupture N_f où la fonction Φ est une mesure de fatigue du cycle stabilisé.

Si ce formalisme est en accord avec les critères classique de fatigue, il est néanmoins encore difficile d'exhiber une fonction appropriée Φ .

La plupart des critères classiques de fatigue peuvent s'exprimer sous la forme suivante :

$$\Phi(\varepsilon, \varepsilon^p, \sigma, \dots) N_f^\beta = c \quad (3.3)$$

où N_f est le nombre de cycles à la rupture et β, c des paramètres matériau. $\varepsilon, \varepsilon^p, \sigma$ sont les valeurs des champs mécaniques pendant un cycle stabilisé complet.

Pour les critères de fatigue de *Manson-Coffin* [MAN53, COF53], de *Smith-Watson-Topper* [SWT70] ou encore de *Ostergren* [OST76] la fonction Φ est représentée dans le tableau 3.1. Nous notons $\Delta\varepsilon^p, \Delta\varepsilon, \sigma_{max}$ respectivement l'amplitude de déformation plastique, l'amplitude de déformation totale et la contrainte maximale en traction pour un cycle uniaxial. E est le module de Young et ν la fréquence de chargement. β, k, c sont des paramètres matériau caractérisant le comportement en fatigue.

Critère	Φ
<i>Manson-Coffin</i>	$\Delta\varepsilon^p$
<i>Smith-Watson-Topper</i>	$\sqrt{E\sigma_{max}\Delta\varepsilon}$
<i>Ostergren</i>	$(\sigma_{max}\Delta\varepsilon)\nu^{\beta(k-1)}$

TAB. 3.1 – Critère classique en fatigue oligocyclique

Ces critères issus des travaux expérimentaux sont très robustes, mais difficilement généralisables à des trajets multiaxiaux pour lesquels la notion d'amplitude n'a plus le même sens.

Un autre critère bien connu est le *Strain Range Partitioning (SRP)* proposé par Halford et Manson[HM76], qui est fondé sur une séparation du cycle en deux parties, fluage et plasticité. Le principal inconvénient de cette méthode réside dans la difficulté de trouver un critère intrinsèque de séparation du cycle indépendant de l'opérateur humain, comme déjà remarqué par Chaboche et al.[CPK78]. Par ailleurs, les calculs numériques montrent que les évolutions des variables d'état plastiques et visqueuses sont simultanées, ce qui va à l'encontre d'un découplage du cycle comme prévu par le SRP.

Pour la définition de la fonction Φ , il est essentiel d'analyser les définitions précédentes (voir tab.3.1). Nous avons déjà remarqué que dans le cas multiaxial, par rapport au cas uniaxial, il est nécessaire de remplacer l'amplitude des déformations ou encore des contraintes par une "norme". La norme couramment utilisée est la contrainte équivalente de Mises J_2 . Ceci pose une difficulté majeure, car elle fait intervenir seulement la partie déviatorique des tenseurs. Ceci peut être corrigé par l'introduction d'une norme sur la partie sphérique. En conclusion, l'extension à un cadre multiaxial isotherme semble ne pas poser de difficultés majeures.

Par contre, la transposition directe de ces définitions en contexte anisotherme est rendue difficile par la dépendance des paramètres matériau β, k, c avec la température, comme cela a déjà été montré dans une série d'exemples par Charkaluk et al. [CC00]). Une autre difficulté provient de la notion de fréquence du cycle (voir par exemple [OST76]) qui se définit simplement à partir de la durée d'un cycle au cours des expériences. La fréquence est donc une moyenne de la vitesse de déformation au cours d'un cycle. Compte tenu des cycles complexes et de périodes de fluage qui peuvent intervenir lors d'un cycle anisotherme, il est évident qu'une telle grandeur n'est pas appropriée pour la description locale des phénomènes de fluage.

En conséquence, nous essayons d'introduire une fonction Φ qui tient compte d'une manière intrinsèque des phénomènes discutés auparavant.

Avant de passer à cette définition, nous nous intéressons à la signification du nombre de cycles à la rupture N_f pour une structure par rapport au comportement cyclique de cette structure. La discussion est

basée sur l'interprétation du comportement cyclique du matériau tel que proposé par Skelton [SKE91, SVW98].

L'évolution de la charge pendant une expérience sous déformation imposée présente trois phases distinctes (voir figure 3.5) :

- La période de *stabilisation* correspond à un comportement de durcissement ou d'adoucissement cyclique jusqu'à N_{sta} cycles. Pendant cette période, la microstructure atteint un état d'accommodation sous la déformation macroscopique imposée. On peut considérer qu'à la fin de cette période les premières fissures microscopiques sont déjà initiées.
- La période *tangente*, entre N_{sta} et N_{tan} cycles, est caractérisée par un comportement microscopiquement et macroscopiquement stable, un cycle accommodé et la propagation des fissures microscopiques. On peut considérer qu'à la fin de cette période les premières fissures macroscopiques sont déjà initiées.
- La phase *finale*, après N_{tan} cycles, correspond à la propagation des fissures macroscopiques et la rupture finale intervient après un faible nombre de cycles à N_{fin} .

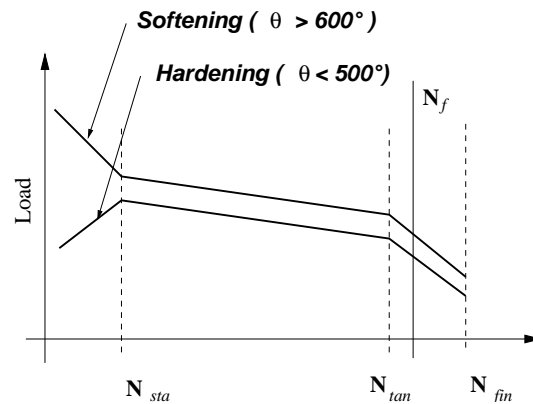


FIG. 3.5 – Evolution of the global load in isothermal uniaxial experiments under fixed strain range.

Skelton [SKE91, SVW98] a démontré en utilisant un grand nombre d'expériences sur des matériaux métalliques que l'énergie dissipée cumulée dans la période de stabilisation, donc jusqu'à N_{sta} cycles, peut être considérée comme un paramètre matériau et donc constante. Nous rappelons également l'idée suivant laquelle, à N_{sta} cycles, l'existence des fissures microscopiques peut être admise.

Si nous revenons maintenant à la définition d'une fonction Φ caractérisant le critère de fatigue et le nombre de cycles à rupture pour une structure, nous remarquons que :

- d'une part, la conception des pièces est censée prédire l'apparition des fissures macroscopiques sur la structure qui mettent en danger l'intégrité de celle-ci. Ceci définit la durée de vie de la structure en supposant : $N_f = N_{tan}$. Comme la détermination de N_{tan} est difficile d'un point de vue pratique, on va considérer N_f défini par une perte de 10% de la charge. Remarquons aussi que la rupture finale de la pièce n'intervient pas dans le critère de conception.
- d'autre part, le constat du fait que les critères classiques introduisent comme fonction Φ des produits des déformations et de contraintes, conduit naturellement à la proposition de considérer l'énergie dissipée par cycle pour Φ (voir aussi les arguments en [CC00, BCCDV02, CCLV04])

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_{cycle} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) dt \quad (3.4)$$

où les déformations et contraintes sont calculées au cycle stabilisé N_{sta} et au point \boldsymbol{x} de la structure. Comme les champs sont généralement hétérogènes dans la structure, le critère s'écrit :

$$\left[\max_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}) \right] N_f^\beta = c \quad (3.5)$$

Cette définition ne prend pas en compte une série de facteurs, comme par exemple :

- la partie sphérique de l'état des contraintes et des déformations sachant que les modèles usuels de plasticité sont déviatoriques ;
- l'influence de la valeur moyenne du cycle, autrement dit de la position du cycle stabilisé dans l'espace des variables d'état ;
- l'effet du cyclage en température sur le cumul du dommage.

Ces aspects n'influencent pas d'une manière considérable les résultats obtenus sur des structures industrielles. Les évolutions futures de cette approche devrait en tenir compte.

Remarquons que les paramètres β, c du critère de fatigue ont été obtenus en utilisant des expériences classiques de fatigue oligocyclique isotherme et ont été confirmés avec des expériences en anisotherme (voir []).

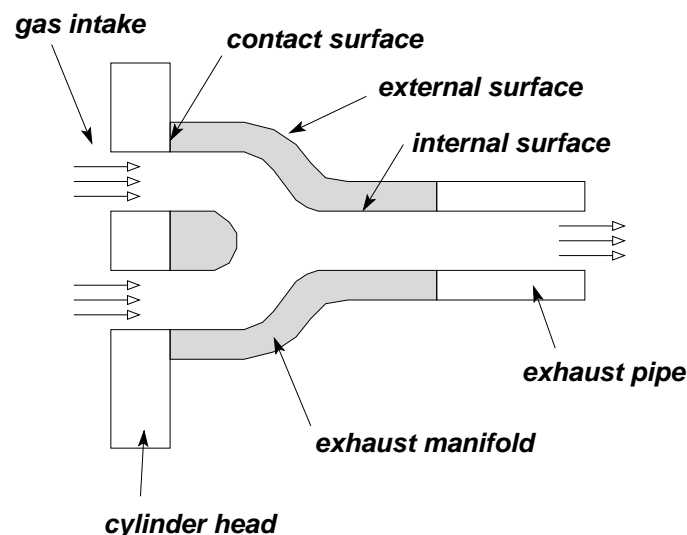


FIG. 3.6 – Schéma de fonctionnement d'un collecteur d'échappement

3.5 Application aux structures en fonte

La méthodologie exposée dans le paragraphe précédent a été appliquée dans un premier temps aux collecteurs d'échappement en fonte SiMo, dont deux prototypes, désignés dans la suite par A et B, ont fait l'objet d'une analyse détaillée en fatigue.

Les champs de déformations et de contraintes ont été obtenus grâce à des calculs aux éléments finis avec le logiciel Abaqus (pour des détails voir []) et la fonction critère de fatigue Φ a été calculée en final comme post-traitement.

Une première remarque concerne le nombre de cycles calculés afin d'obtenir un cycle stabilisé, ou plus précisément un cycle à partir duquel l'énergie dissipée peut être considérée comme stabilisée. Les

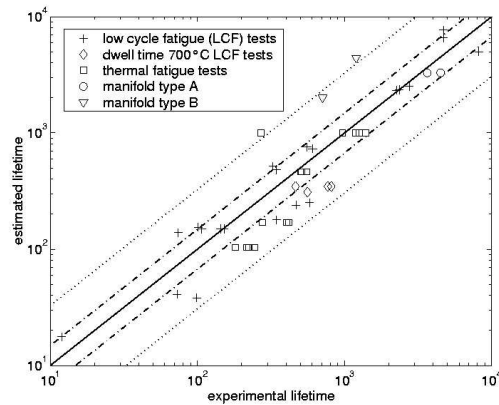


FIG. 3.7 – Comparaison de la durée de vie prédite et expérimentale pour pièces et éprouvettes en fonte

calculs ont montré que pour la loi de comportement *bicouche*, il est possible de parler d'un état accommodé après à peu près trois cycles. Pour la loi *unifiée*, un état parfaitement accommodé n'est pas toujours obtenu après cinq cycles, mais l'énergie dissipée par cycle peut déjà avoir atteint une limite qui n'évolue plus par la suite. En conséquence, les durées de vie ont été calculées à partir de l'état correspondant au troisième cycle.

Il est important de remarquer que d'un point de vue théorique, nous ne disposons actuellement d'aucun résultat mathématique pour prédire d'une part l'existence d'un cycle limite ou d'autre part le nombre de cycles nécessaires pour atteindre ce dernier. Cependant un certain nombre d'algorithmes numériques ont été mis au point pour calculer plus rapidement l'état accommodé.

Une deuxième remarque concerne le nombre expérimental de cycles à la rupture N_f sur pièces. Ce nombre correspondant aux inspections des fissures macroscopiques, il doit être considéré comme une *limite supérieure* d'initiation des fissures macroscopiques.

Une comparaison directe de la durée de vie expérimentale à la durée de vie prédite présentée en figure 3.7 montre que les résultats sont satisfaisants par rapport aux critères de conception usuels.

La zone d'endommagement maximal, qui correspond au maxima de la fonction Φ , est présentée en figures 3.8 et 3.9 en comparaison avec les zones fissurées sur prototype. Nous observons de nouveau une bonne corrélation entre observations et résultats numériques.

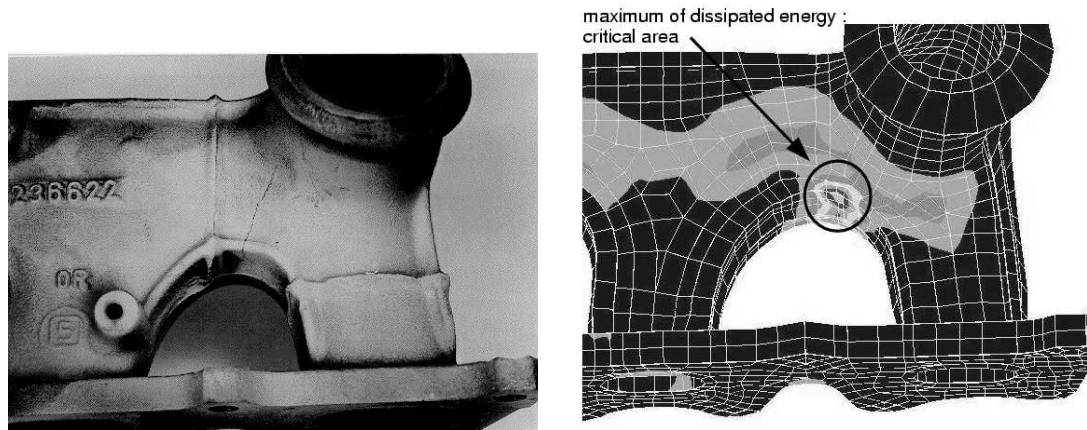


FIG. 3.8 – Observation de fissures et distribution du critère de fatigue sur un prototype de type A de collecteur

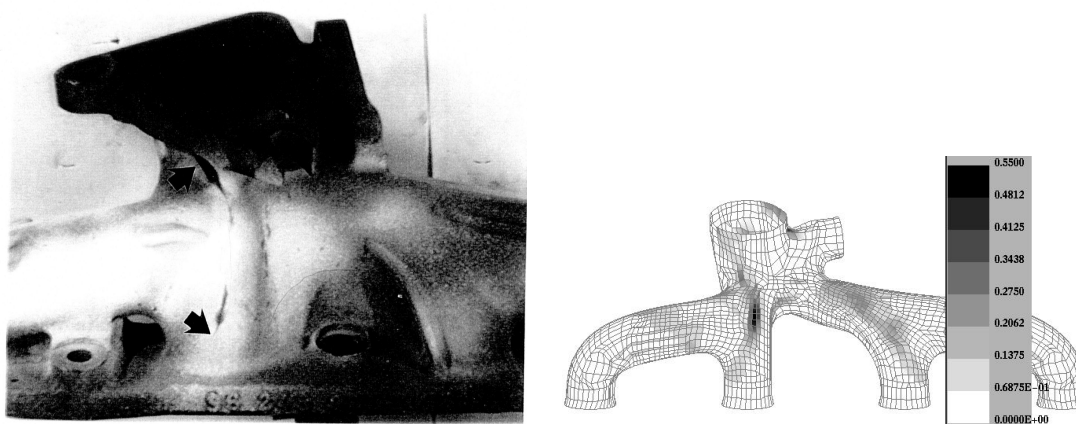


FIG. 3.9 – Observation de fissures et distribution du critère de fatigue sur un prototype de type B (version 1) de collecteur

3.6 Application aux structures en Aluminium

Les culasses présentent des phénomènes de fatigue similaires à ceux observés sur les collecteurs. Plus précisément, les zones chaudes sous dilatation thermique étant bridées par des zones froides plus rigides, des déformations anélastiques importantes apparaissent (voir figure 3.10).

Les structures en alliage d'aluminium A356 présentent aussi un durcissement structural par rapport à certains traitements thermiques. Les zones soumises longtemps à de hautes températures connaissent alors un vieillissement structural. En conséquence, la méthodologie présentée précédemment a du être modifiée pour tenir compte de ce phénomène.

Les observations sur la face flamme des culasses montrent qu'il est possible de distinguer assez vite

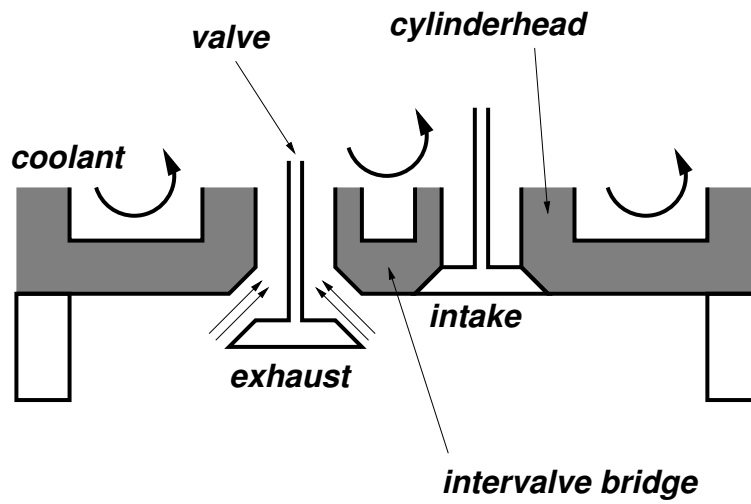


FIG. 3.10 – Section et schéma de fonctionnement d'une culasse de moteur à explosion

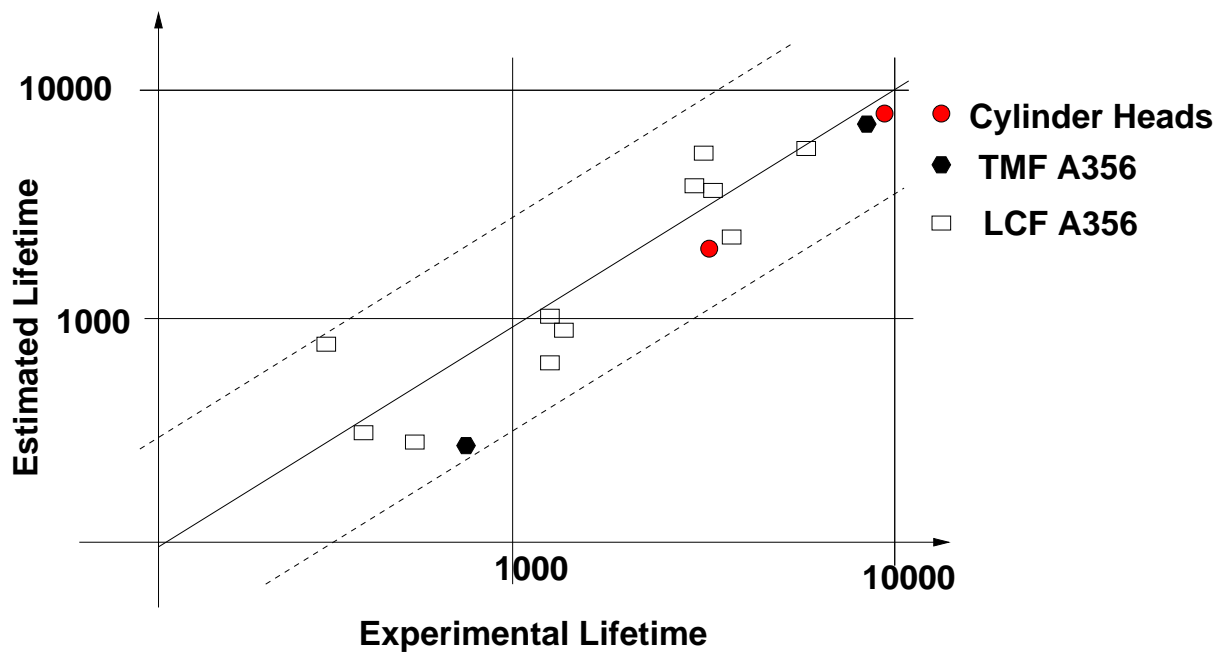


FIG. 3.11 – Comparaison des durées de vie prédite et expérimentale pour pièces et éprouvettes en Aluminium

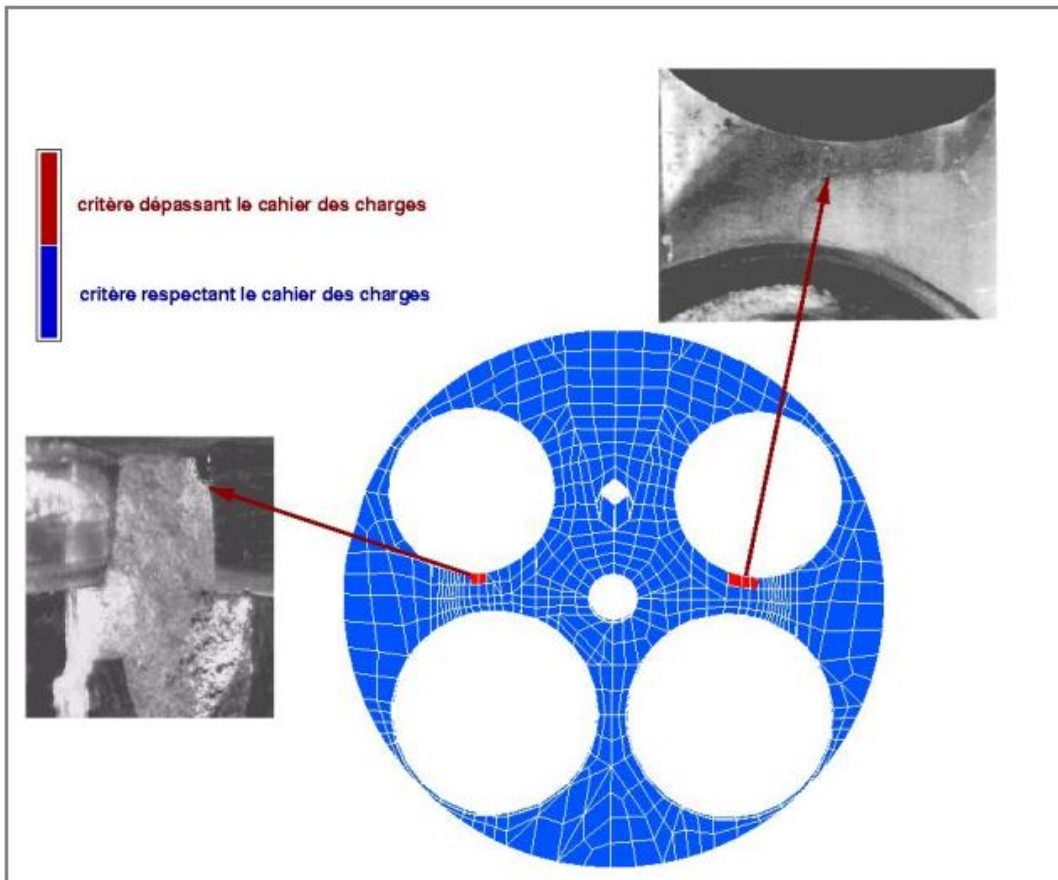


FIG. 3.12 – Observation de fissures et distribution du critère de fatigue sur un prototype de culasse en aluminium

dans le fonctionnement de la structure, deux zones : une vielli et une autre non vieillie. Partant de cette constatation, nous avons défini deux comportements "stabilisés", un pour la zone vieillie et un autre pour la partie non vieillie, et nous avons appliqué la méthodologie précédente d'une manière similaire.

Pour illustrer les résultats de cette méthode, la figure 3.11 présente une comparaison directe des durées de vie expérimentale et prédite, et la figure 3.12, la distribution de la zone d'endommagement maximal qui correspond aux zones fissurées sur prototype, i.e. pontet inter-soupapes et insert bougie de préchauffement.

3.7 Conclusions et Perspectives

Les travaux présentés dans les paragraphes précédents montrent que la mise en oeuvre de techniques de calculs et des critères pouvant être qualifiés de classiques permet la prédiction de la durée de vie de structures sous chargement thermomécanique.

Néanmoins, rappelons que le succès de l'approche proposée réside dans les concepts qui ont réunis les différentes techniques : cycle stabilisé et accommodation définis d'une part pour le comportement calculé de la structure et d'autre part pour le comportement cyclique observé du matériau. Les méthodes définies, développées en étroite collaboration avec des partenaires industriels, ont eu comme objectif la prédiction de la durée de vie en bureau d'études.

Une analyse globale des théories de fatigue autant à grand qu'à faible nombre de cycles et des théories d'adaptation montre que les notions d'énergie dissipée, de cycle adapté ou accommodé, ... sont intimement liées et apparaissent à différentes échelles dans la description des phénomènes. Nous avons d'ores et déjà publiés quelques premiers résultats [CDVM03, CC04], relatifs à des tentatives de description plus fine de ces relations.

Encouragé par ces résultats prometteurs, il ne faut cependant pas oublier que la formulation actuelle du critère de fatigue ne prend pas en compte l'effet de la contrainte ou de la déformation moyenne, ou encore de leur partie sphérique. Ces différents aspects font l'objet d'une étude actuellement en cours dans le cadre de la thèse de Sébastien Amiable qui a pour objet les problèmes de fatigue des structures sous choc thermique.

Rappelons aussi qu'une extension du critère de fatigue de Dang Van à des matériaux anisotropes a récemment fait l'objet d'une communication [CCM04]. Cependant, la validation finale des notions proposées nécessite une confrontation avec des prédictions sur structures.

Dans le domaine de la fatigue des structures, notre objectif demeure l'établissement de techniques globales permettant la prédiction de la durée de vie en bureaux d'études. Actuellement, nous envisageons de poursuivre l'étude des points soulevés précédemment, tant au niveau des critères de fatigues qu'à celui des questions d'identification ou de calculs élastoplastiques.

Références

- [BCCDV02] A. Bignonnet, E. Charkaluk, A. Constantinescu, and K. Dang Van. Fatigue design criterion for structure under thermomechanical loading. *Fatigue Fract. Engng. Mat. Struc.*, 25 :1199–1206, 2002.
- [CC00] Charkaluk, E. and Constantinescu, A. An energetic approach in thermomechanical fatigue for silicon molybdenum cast iron. *Materials at High Temperature*, 17(3) :373–380, 2000.
- [CC04] E. Charkaluk and A. Constantinescu. Dissipation and fatigue damage. *Materials Testing*, 46(10) :524–530, 2004.

- [CCBDV99] E. Charkaluk, A. Constantinescu, A. Bignonnet, and K. Dang Van. Dimensionnement des structures à la fatigue thermique. In *Dimensionnement en fatigue des Structures*, 1999.
- [CCLV04] A. Constantinescu, E. Charkaluk, G. Lederer, and L. Verger. A global computational fatigue design method for structures under thermomechanical loading : Application to cast iron exhaust manifolds. *Int. Journal Fatigue*, 26 :805–818, 2004.
- [CCM04] F. Cano, A. Constantinescu, and H. Maitournam. Critère de fatigue polycyclique pour des matériaux anisotropes :application au monocristaux. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, 332(2) :115–121, 2004.
- [CDVM03] A. Constantinescu, K. Dang Van, and H. Maitournam. A unified approach of low and high cycle fatigue based on a shakedown concept. *Fatigue Fract. Engng. Mat. Struc.*, 26 :561–568, 2003.
- [Cha97] J.L. Chaboche. *La fatigue des matériaux et des structures*, pages 617–644. Hermès, 1997.
- [COF53] L. F. COFFIN. A study of the effects of cyclic thermal stresses on a ductile material. *Trans. ASME*, 53-A76 :931–950, 1953.
- [CPK78] J. L. CHABOCHE, H. POLICELLA, and H. KACZMAREK. Applicability of the srp method and creep-fatigue approach to the lchtf life prediction of in-100 alloy. Aalborg (Danemark), avril 1978. réunion AGARD sur la caractérisation de la fatigue oligocyclique à chaud par la méthode de partition de l'amplitude de déformation.
- [CV02] Constantinescu, A. and Verger, L. Identification of a viscoplastic material behaviour under anisothermal conditions. In Petit, D., Ingham, D.B., Jarny, Y., and Plourde, F., editors, *Eurotherm Seminar 68 : Inverse problems and experimental design in thermal and mechanical engineering*, pages 221–228. Edizioni ETS, 2002.
- [CVC⁺99] E. CHARKALUK, L. VERGER, A. CONSTANTINESCU, G. LEDERER, and C. STOLZ. Lois de comportement viscoplastiques anisothermes pour calculs cycliques sur structures. In D. Guédra-Degeorges, P. Ladevèze, and M. Raous, editors, *Actes du 4ème colloque national en calcul des structures*, pages 575–580. Teknea, 1999.
- [HM76] G. R. HALFORD and S. S. MANSON. Life prediction of thermal-mechanical fatigue using strain-range partitioning. In *Thermal Fatigue of Materials and Components - ASTM STP 612*, 1976.
- [KIC92] J. KICHENIN. Comportement thermomécanique du polyéthylène - application aux structures gazeuses. Phd thesis, Ecole Polytechnique, France, 1992.
- [MAN53] S. S. MANSON. Behaviour of materials under conditions of thermal stresses. Technical Report TN 2933, N.A.C.A., 1953.
- [MPT02] Maitournam, H., Pommier, B., and Thomas, J.J. Détermination de la réponse asymptotique d'une structure anélastique sous chargement thermomécanique cyclique : Determination of the asymptotic response of a structure under cyclic thermomechanical loading. *Comptes Rendus Mecanique*, 330(10) :703–708, 2002.
- [NMCV03] Nesnas, K., Martin Borret, S., Constantinescu, A., and Verger, L. Calcul de structure sous chargement thermomécanique : Influence de la formulation anisotherme de la loi de comportement. In A.Bignonnet M.Poitier-Ferry, M.Bonnet, editor, *Actes du Colloque National en Calcul des Structures*, pages (II)67–74. Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, 2003. (Colloque National en Calcul des Structures, Giens, 20–23 mai 2003).
- [OST76] W. J. OSTERGREN. A damage function and associated failure equations for predicting hold time and frequency effects in elevated temperatures. *J. Test. Eval.*, 4(5) :327–339, 1976.
- [PS03] Peigney, M and Stolz, C. An optimal control approach to the analysis of inelastic structures under cyclic loading. *J.Mech.Phys.Solids*, 51(4) :575–605, 2003.
- [SH98] J. C. SIMO and T. J. R. HUGHES. *Computational inelasticity*. Springer-Verlag, 1998.
- [SKE91] R. P. SKELTON. Energy criteria for high temperature low cycle fatigue. *Mat. Sci. Tech.*, 7 :427–439, 1991.
- [SVW98] R. P. SKELTON, T. VILHELMSSEN, and G. A. WEBSTER. Energy criteria and cumulative damage during fatigue crack growth. *Int. J. Fatigue*, 20(9) :641–649, 1998.

- [SWT70] K. N. SMITH, P. WATSON, and T. H. TOPPER. A stress-strain function for the fatigue of metals. *J. Mater.*, 5(4) :767–778, 1970.

,

Chapitre 4

Perspectives

Les recherches présentées illustrent notre objectif de permettre, par des calculs numériques allant de la loi de comportement au critère de dommage et passant par des techniques d'identification de paramètres, d'aboutir à des solutions utilisables par les ingénieurs pour la conception des structures. Le domaine étant assez vaste et présentant un grand risque de dispersion, nous nous proposons d'en poursuivre l'exploration sur quelques voies privilégiées exposées ci-après.

Dans le domaine de la *fatigue*, nous nous intéressons à plusieurs sujets qui doivent converger vers une compréhension unifiée du phénomène de fatigue à grand et faible nombre de cycles. Pour la fatigue à grand nombre de cycles, nous étudions l'extension des critères existants d'une part au domaine anisotrope et d'autre part à la zone dite d'endurance limitée ainsi qu'aux chargements aléatoires, pour lesquels les déformations irréversibles ne sont plus négligeables. Un autre sujet intéressant mais peu exploré jusqu'à maintenant concerne les modalités de prise en compte des composantes sphériques du chargement (pression maximale, pression moyenne, etc). Cette question est d'importance égale aussi bien à faible, qu'à grand nombre de cycles et constitue peut-être un point d'entrée vers une théorie unifiée. Les applications concernées font intervenir dans un certain nombre de cas des conditions de contact, ce qui risque de nous orienter vers les questions de calcul simplifié et direct des cycles stabilisés sous ces conditions.

En ce qui concerne les *problèmes d'identification*, deux questions nous semblent importantes. Il s'agit d'une part de la transposition des techniques d'optimisation et d'identification en dynamique avec comportement non-linéaire, domaine pour lequel les méthodes d'optimisation classiques ne sont pas suffisamment efficaces ou robustes. D'autre part, il nous semble important d'introduire une composante statistique aux questions d'identification, l'objectif étant ici de nous permettre de répondre à des questions de pertinence de modèle autant pour les lois de comportement et leur application à un domaine de chargement que pour des modèles globaux de structure. Cette technique permettra aussi de répondre aux questions de variations statiques des données qui sont actuellement plutôt traitées dans le cas de modèles linéaires.

Bien que les sujets abordés fassent essentiellement appel à du calcul numérique pour la détermination des solutions des problèmes mécaniques, nous constatons qu'aujourd'hui l'éventail des solutions analytiques et semi-analytiques proposées par nos illustres prédécesseurs est trop facilement oublié. Cet oubli est partiellement dû à un manque d'entraînement au fastidieux calcul à la main des générations actuelles. Cependant nous commençons à disposer d'outils de calcul symbolique malheureusement utilisés d'une manière très superficielle. Un projet d'envergure est la remise en forme "symboliquement acceptable" de l'héritage des solutions analytiques pour faciliter leur accès et leur utilisation dans les conditions actuelles.