

METHODES DE MODELISATION NUMERIQUE DES CHAMPS ACOUSTIQUES EN FLUIDE THERMOVISQUEUX

Romain BOSSART, Nicolas JOLY et Michel BRUNEAU

*Laboratoire d'Acoustique, UMR CNRS 6613,
Université du Maine, Avenue O. Messiaen, 72085 Le Mans cedex 9, France
Courriel: nicolas.joly@univ-lemans.fr*

RESUME

L'objet des travaux présentés ici est, à terme, de permettre la résolution numérique de problèmes de propagation acoustique en fluides thermovisqueux, quel que soit la nature du domaine considéré (infini, limité, guides, cavités, capillaires), en faisant usage de versions adaptées de logiciels existants. Suivant le degré de précision requis dans la description du champ dans les couches limites thermovisqueuses et selon le type de domaine considéré, deux méthodes sont proposées : l'une repose sur le calcul numérique du champ hors couches limites, par étapes successives, pour prendre en compte dans une formulation en frontière de type impédance les effets réactifs et dissipatifs, en faisant usage *in fine* d'un prolongement analytique pour affiner le comportement dans les couches limites ; l'autre méthode passe par une formulation « exacte » qui repose sur un système de deux équations couplées en vitesse particulière et écart instantané de température, les conditions en frontière étant alors celles usuelles de non glissement et d'égalités de flux de chaleur et de température aux interfaces fluide-solide.

I. INTRODUCTION

Au cours de la propagation acoustique dans un fluide thermovisqueux, homogène et au repos, les effets de la viscosité et de la conduction thermique sont traduits :

- en tout point du domaine, par des phénomènes de relaxation,

- au voisinage des frontières, par des mouvements entropique et tourbillonnaire dans les couches limites.

Ces derniers résultent de l'interaction thermique et visqueuse du mouvement acoustique avec la frontière : ils prennent ainsi naissance sur la limite du domaine. Leurs amplitudes sont du même ordre de grandeur que celle de l'onde acoustique, et décroissent selon la normale à la frontière, jusqu'à une valeur négligeable devant l'amplitude du mouvement acoustique dans le fluide, suivant un processus de diffusion sur une distance qui définit les épaisseurs de couches limites thermique δ_h et visqueuse δ_v . Ces effets thermovisqueux présentent un effet réactif et un effet dissipatif sur le champ acoustique extérieur aux couches limites, qui ne peuvent pas être négligés dans les domaines limités suivant une ou plusieurs dimensions (guides et cavités). Les publications effectuées depuis une décennie dans ce domaine, en vue de proposer des méthodes numériques (éléments finis ou éléments de frontière) qui permettent d'obtenir les champs acoustiques en fluides dissipatifs, en présence de frontières, sont rassemblées dans les références [1, 2, 3, 4, 5] de la bibliographie. Dans le travail présenté ici, la méthode hybride présente l'originalité de permettre de résoudre ce type de problème en faisant usage et en adaptant les codes existants.

L'ensemble de ces phénomènes est traduit par le système d'équations fondamentales linéarisées de

l'acoustique [6] rappelé ci-dessous, pour un fluide au repos dont l'état dynamique et thermodynamique est traduit par les variables de vitesse particulière \mathbf{v} et d'écart instantané de pression p , de masse volumique ρ' , d'entropie s et de température τ , les paramètres qui définissent la nature et les propriétés du fluide étant les valeurs statiques des grandeurs correspondantes ($\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, ρ_0, p_0, s_0, T_0), les viscosités dynamiques de cisaillement μ et de volume η , la conductivité thermique λ , les capacités thermiques massiques respectivement à pression et volume constants C_p et C_v et leur rapport $\gamma = C_p / C_v$, l'augmentation de pression à masse volumique constante $\hat{\beta} = (\partial p / \partial T)_p$ et le coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T = (\partial \rho / \partial p)_T / \rho$:

L'équation de Navier-Stokes linéarisée

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{\nabla p}{\rho_0} - c_0 l_v \nabla \cdot \nabla \mathbf{v} + c_0 l'_v \nabla \times \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (1)$$

où $c_0 = \sqrt{\gamma / (\rho_0 \chi_T)}$ est la célérité du son dans les conditions adiabatiques, $l_v = (\eta + 4\mu / 3) / (\rho_0 c_0)$ et $l'_v = \mu / (\rho_0 c_0)$ sont les longueurs caractéristiques de diffusion visqueuse ;

L'équation linéarisée de conservation de la masse

$$\partial_t \rho' + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{où } \rho' = \gamma (p - \hat{\beta} \tau) / c_0^2 ; \quad (2)$$

L'équation de conduction de la chaleur

$$\rho_0 T_0 \partial_t s - \rho_0 c_0 C_p l_h \Delta \tau = 0, \quad (3)$$

avec $s = \frac{C_p}{T_0} \left(\tau - \frac{\gamma-1}{\hat{\beta} \gamma} p \right)$ et où $l_h = \frac{\lambda}{\rho_0 C_p c_0}$ est la

longueur caractéristique de diffusion thermique.

Les mouvements font apparaître deux composantes pour les variables thermodynamiques fondamentales $p = p_a + p_h$, $\tau = \tau_a + \tau_h$ et trois pour la vitesse particulière $\mathbf{v} = \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_h + \mathbf{v}_v$, où $(p_a, \tau_a, \mathbf{v}_a)$ sont les composantes acoustiques du mouvement, $(p_h, \tau_h, \mathbf{v}_h)$ les composantes entropiques (liées aux effets de conduction thermiques), et \mathbf{v}_v la composante tourbillonnaire de la vitesse (liée aux effets de viscosité de cisaillement). Les composantes acoustique (a) et entropique (h) sont associées à une composante irrotationnelle de la vitesse. En notant $l_{vh} = l_v + (\gamma-1) l_h$, chacune des variables acoustique (a) vérifie l'équation de propagation (ici écrite pour la variable de pression) :

$$\left[\frac{1}{c_0^2} \partial_{tt}^2 - \left(1 + \frac{l_{vh}}{c_0} \partial_t \right) \Delta \right] p_a = 0. \quad (4)$$

Les variables entropiques (h) et visqueuse (v) satisfont à des équations de diffusion :

$$\left[\partial_t / c_0 - l_h \Delta \right] p_h = 0 \text{ (diffusion thermique)}, \quad (5)$$

$$\left[\partial_t / c_0 - l'_v \Delta \right] \mathbf{v}_v = \mathbf{0} \text{ (diffusion visqueuse)}. \quad (6)$$

En régime harmonique, ces relations s'écrivent :

$$\left[\Delta + k_a^2 \right] p_a = 0, \quad k_a = k_0 (1 - i k_0 l_{vh} / 2), \quad (7)$$

$$\left[\Delta + k_h^2 \right] p_h = 0, \quad k_h = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k_0}{l_h}}, \quad (8)$$

$$\left[\Delta + k_v^2 \right] \mathbf{v}_v = \mathbf{0}, \quad k_v = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k_0}{l'_v}}, \quad (9)$$

dont les nombres d'onde traduisent les caractères respectivement propagatif de la composante acoustique (k_a) et diffusifs des composantes thermique (k_h) et visqueuse (k_v), auxquelles sont associées les épaisseurs de couches limite

$$\delta_h = \sqrt{\frac{2 l_h}{k_0}} \text{ et } \delta_v = \sqrt{\frac{2 l'_v}{k_0}} \text{ respectivement.} \quad (10)$$

II. METHODE HYBRIDE [7]

II.1. Solution analytique en couches limites

Pour les domaines acoustiques dont toutes les dimensions sont supérieures aux épaisseurs de couches limites (hypothèse H1 ci-dessous), le caractère viscothermique du fluide acoustique se traduit :

- par des effets dissipatifs sur le volume de la cavité, résultant essentiellement de phénomènes de relaxation,

aisément pris en compte en régime harmonique par la partie imaginaire du nombre d'onde acoustique,

- par des effets réactifs et dissipatifs liés aux phénomènes de couches limites, particulièrement importants dans les systèmes de petites dimensions où les couches limites occupent une part importante du volume (par exemple dans les applications en micro-technologies).

La méthode hybride proposée ici rend compte des phénomènes visqueux et thermique, complétant de façon simple les travaux antérieurs sur la modélisation des effets thermiques [8]. Elle repose sur une solution analytique du champ dans les couches limites thermique et visqueuse, qui permet de traduire les effets correspondants par une condition de type impédance pour la composante acoustique, dans le cas où les dimensions des couches limites restent très inférieures à celle du domaine considéré. Le champ acoustique hors couches limites peut alors être résolu numériquement par les codes existants (éléments finis ou de frontière) puis, si nécessaire, complété par la solution analytique pour une description fine à l'intérieur des couches limites. Cette méthode admet les hypothèses suivantes :

(H1) - domaine de dimensions très supérieures aux dimensions de couche limite δ_h et δ_v ,

(H2) - longueur d'onde grande devant l'épaisseur des couches limites ($\lambda \gg \delta_h, \delta_v$),

(H3) - condition thermostatique et de non glissement à la paroi.

Les couches limites sont modélisées, au voisinage d'un élément de paroi, en décomposant le mouvement suivant la normale (\mathbf{u}) et la direction tangentielle (\mathbf{w}) à la paroi. La composante normale de la vitesse est petite devant la composante tangentielle, alors que les gradients de température et de vitesse sont sensiblement orientés suivant la normale. En considérant les conditions aux limites conformes à (H3) ($\tau = 0, u = 0, \mathbf{w} = \mathbf{0}$), les solutions pour la composante tangentielle de la vitesse et l'écart de température prennent la forme :

$$\mathbf{v}_w = \frac{i}{\rho_0 \omega} \nabla_w p_{a0} (1 - e^{-i k_v u}), \quad (11)$$

$$\tau = \frac{\gamma-1}{\gamma \hat{\beta}} p_{a0} (1 - e^{-i k_h u}), \quad (12)$$

où les termes indépendants de la distance u à la paroi correspondent à la composante acoustique, les composantes thermique et visqueuse étant représentées par les termes impliquant k_h et k_v . Le report de ces solutions dans l'équation de continuité (2) permet d'exprimer la composante normale de la vitesse :

$$\mathbf{v}_u = \frac{i}{\rho_0 \omega} \partial_u p_{a0} \quad (13)$$

$$-\left[\frac{k_w^2}{k_0^2} \frac{1}{k_v} (1 - e^{-i k_v u}) + \frac{\gamma - 1}{k_h} (1 - e^{-i k_h u}) \right] \frac{k_0}{\rho_0 c_0} p_{a0}$$

où k_w est la composante tangentielle du nombre d'onde acoustique. Les épaisseurs de couches limites étant petites devant la longueur d'onde (H2), la dérivée normale de la pression est petite, ce qui se traduit pour la composante acoustique de la pression par la condition d'impédance équivalente de couche limite :

$$\rho_0 c_0 v_{au} + \beta p_{a0} = 0$$

$$\text{où } \beta = k_0 \left[\frac{k_w^2}{k_0^2} \frac{1}{k_v} + \frac{\gamma - 1}{k_h} \right] \quad (14)$$

est l'admittance équivalente des couches limites.

II.2. Implémentation numérique

Le champ acoustique en présence de couches limites peut donc être modélisé par les méthodes numériques classiques (éléments finis ou de frontière), en résolvant l'équation de propagation (7) sur le domaine étudié, associée aux conditions d'admittance (14) aux parois. Une difficulté réside dans la présence, dans l'expression de cette admittance, du facteur k_w^2 / k_0^2 qui dépend du champ acoustique lui-même. Mais autant l'amplitude du champ acoustique est-elle sensible à dissipation dans les couches limites, tout particulièrement au voisinage de résonances, autant sa structure spatiale n'en dépend-elle que très peu, donc aussi le facteur k_w^2 / k_0^2 .

La méthode hybride, applicable quelle que soit la méthode numérique utilisée, met à profit cette propriété pour réaliser le calcul du champ, en trois étapes :

1) calcul du champ en résolvant l'équation (7) avec une condition d'admittance rendant compte par exemple des seuls effets thermiques (relation (14) dans laquelle $k_w^2 / k_0^2 = 0$). Le résultat de ce premier calcul fournit une bonne description de la structure du champ, mais une estimation de son amplitude qui ne tient pas compte des effets visqueux,

2) la structure du champ obtenu en 1) permet de calculer le facteur k_w^2 / k_0^2 , donc l'admittance (14) rendant compte des effets thermiques et visqueux,

3) calcul identique au 1), mais avec la condition d'admittance calculée en 2), qui rend compte des effets thermique et visqueux. Le résultat de ce calcul constitue alors une bonne description de la structure et de l'amplitude du champ acoustique.

II.3. Application à un tube fermé.

A titre d'exemple montrant l'efficacité de la méthode, le champ acoustique est calculé dans un tube de 5 mm de rayon et de 17 cm de longueur, rempli d'air, fermé à une extrémité et excité à l'autre par un piston plan à des fréquences voisines de la fréquence de résonance demi-onde (1000 Hz). Les épaisseurs de couches limites (10) sont de l'ordre de 0,07 mm, donc bien inférieures au

rayon du tube. Le maillage utilisé est celui de la figure 1. L'amplitude de pression à une extrémité du tube est donnée en fonction de la fréquence (autour de la première fréquence de résonance) sur la figure 2. Les résultats analytiques (courbes 1 et 3) et numériques (courbes 2 et 4) se correspondent deux à deux, lorsque sont pris en compte les seuls effets thermiques (courbes 1 et 2) ou les effets thermiques et visqueux (courbes 3 et 4). La différence de l'ordre de 10 dB sur l'amplitude à la résonance de ces deux séries de courbes illustre l'intérêt de rendre compte des effets visqueux dans ce modèle.

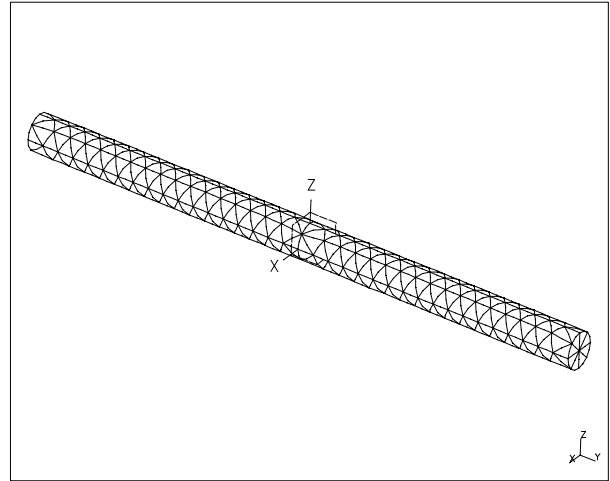


Figure 1. Maillage du tube (triangles quadratiques)

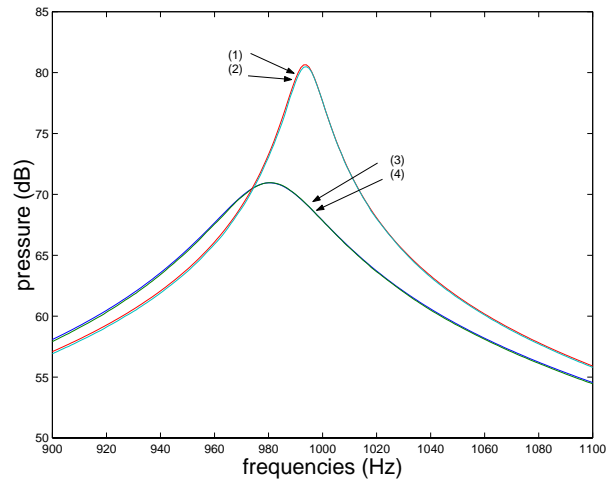


Figure 2. Amplitude de pression à l'extrémité du tube opposée au piston plan en fonction de la fréquence : résultats lorsque seuls les effets thermiques sont pris en compte, analytiques (1) et numériques (2), lorsque les effets thermiques et visqueux sont pris en compte, analytiques (3), et numériques par la méthode hybride (4).

III. FORMULATION COUPLEE

Lorsque le système étudié ne vérifie pas les hypothèses retenues pour la méthode hybride, il est nécessaire de rechercher la solution des équations fondamentales (1 à 3), associées à des conditions aux limites adéquates. Les conditions à vérifier aux limites du domaine acoustique sont la continuité de grandeurs mécaniques (des vitesses et des contraintes) et thermiques (de la température et du flux de chaleur). Ces conditions s'expriment naturellement à partir des variables de vitesse et de température. Or, en régime harmonique, il est également possible d'exprimer les équations de conservation (1 à 3) à partir de ces deux seules variables de vitesse et d'écart de température, en utilisant l'équation de conservation de la masse (2) pour éliminer les variables d'écart instantané de masse volumique ρ' et de pression p dans les équations de Navier-Stokes (1) et de diffusion thermique (3). Un problème d'acoustique harmonique en fluide thermovisqueux est alors décrit, sans aucune hypothèse simplificatrice, par le système d'équations suivant [9]:

$$\omega^2 \mathbf{v} + \left(\frac{c_0^2}{\gamma} + c_0 l_v i \omega \right) \nabla \cdot \nabla \mathbf{v} - i \omega c_0 l_v' \nabla \times \nabla \times \mathbf{v} - i \omega \frac{\hat{\beta}}{\rho_0} \nabla \tau = \mathbf{0} \quad (15)$$

$$i \omega \tau - \gamma l_h c_0 \Delta \tau + \frac{\gamma - 1}{\gamma \hat{\beta}} \rho_0 c_0^2 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (16)$$

Les variables de pression acoustique p et d'écart instantané de masse volumique ρ' peuvent être exprimées par report de la solution (\mathbf{v}, τ) de ce système dans les relations (1) et (2).

Les opérateurs appliqués respectivement aux variables (\mathbf{v}, τ) du système couplé (15,16) sont ceux utilisés ordinairement par la méthode des éléments finis, ce qui rend cette formulation particulièrement bien adaptée à la modélisation en éléments finis des phénomènes acoustiques sur le domaine occupé par un fluide thermovisqueux. De plus, les variables retenues et l'écriture des conditions aux limites est compatible avec une prise en compte des couplages à la frontière du domaine acoustique, que les interactions soient de nature mécanique (couplage vibro-acoustique pris en compte par un calcul d'élastodynamique de la paroi) ou thermique (interaction thermique avec la paroi).

IV. CONCLUSION

Les deux formulations proposées ci-dessus sont de nature à permettre de résoudre les problèmes d'acoustique en fluide dissipatifs pour les fluides au repos, par l'adaptation de logiciels existants. A terme, les problèmes d'acoustique en guides et cavités sont susceptibles de pouvoir être traités de façon numérique.

RÉFÉRENCES

1. B. Dubus, Coupling finite element and boundary element methods on a mixed solid-fluid / fluid-fluid boundary for radiation or scattering problems. *J. Acoust. Soc. Am.* **96** 6, pp. 3792-3799, (1994)
2. E. Dokumaci, An integral equation formulation for boundary element analysis of acoustic radiation problems in viscous fluids, *J. Sound Vib.* **147** 2, pp 335-348, (1991)
3. E. Dokumaci, Prediction of the effects of entropy fluctuations on sound radiation from vibrating bodies using an integral equation approach, *J. Sound Vib.* **186** 5, pp 805-819, (1995)
4. A. Cummings, Sound propagation in narrow tubes of arbitrary cross-section, *J. Sound Vib.* **162** 1, pp. 27-42, (1993)
5. W.M. Beltman, P.J.M van der Hoogt., R.M.E. Spiering, H. Tijdeman, Implementation and experimental validation of a new viscothermal acoustic finite element for acousto-elastic problems. *J. Sound Vib.* **216** 1, pp. 159-185, (1998)
6. M. Bruneau, *Manuel d'acoustique fondamentale*, Editions Hermès, Paris, (1998).
7. R. Bossart, N. Joly, M. Bruneau, Hybrid numerical and analytical solutions for acoustic boundary problems in thermo-viscous fluids. Soumis à *J. Sound Vib.* en 2001.
8. C. Karra, M. Ben-Tahar, Boundary element analysis of vibratory behavior of a membrane coupled to a thermal conductor layer fluid, *C. R. Acad. Sci. Paris, IIb* - **326** 11 pp.733-739 (1998)
9. N. Joly, R. Bossart, M. Bruneau, Acoustique linéaire en fluide thermovisqueux : formulation couplée pour les champs de vitesse et de température, soumis à *C. R. Acad. Sci. Paris* en 2001