Sur un critère de Báez-Duarte pour l'hypothèse de Riemann

Michel Balazard et Anne de Roton

8 décembre 2008

Pour Luis Báez-Duarte, à l'occasion de son soixante-dixième anniversaire.

Abstract

Define $e_n(t) = \{t/n\}$. Let d_N denote the distance in $L^2(0, \infty; t^{-2}dt)$ between the indicator function of $[1, \infty[$ and the vector space generated by $e_1, \dots, e_N$. A theorem of Báez-Duarte states that the Riemann hypothesis (RH) holds if and only if $d_N \to 0$ when $N \to \infty$. Assuming RH, we prove the estimate

$$d_N^2 \leqslant (\log\log N)^{5/2+o(1)}(\log N)^{-1/2}.$$

.

Keywords

Riemann zeta function, Riemann hypothesis, Báez-Duarte criterion, Möbius function.

MSC classification : 11M26

1 Position du problème et énoncé du résultat principal

L'étude de la répartition des nombres premiers se ramène à la recherche d'approximations de la fonction

$$\chi(x) = [x \geqslant 1] \tag{1}$$

par des combinaisons linéaires

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n\{x/n\} \quad (N \in \mathbb{N},\, c_n \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

de dilatées de la fonction « partie fractionnaire ». Ce fait est connu depuis Tchebychev (cf. [15]). En choisissant

$$\varphi(x) = -\{x\} + \{x/2\} + \{x/3\} + \{x/5\} - \{x/30\}$$

il avait observé l'encadrement

$$\varphi(x) \leqslant \chi(x) \leqslant \sum_{k\geqslant 0} \varphi(x/6^k)$$

pour en déduire

$$Ax + O(\log x) \leqslant \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) \leqslant \frac{6}{5}Ax + O(\log^2 x)$$

où Λ désigne la fonction de von Mangoldt, et

$$A = \log \frac{2^{1/2}3^{1/3}5^{1/5}}{30^{1/30}} = 0,92129202\ldots.$$

On peut préciser la nature de l'approximation de (1) par (2) équivalente au théorème des nombres premiers

$$\sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) \sim x \quad (x \to \infty),$$

où à l'hypothèse de Riemann

$$\sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) = x + O_\delta(x^{\frac{1}{2}+\delta}) \quad (x \geqslant 1,\, \delta > 0).$$

Ainsi, le théorème des nombres premiers est équivalent*à l'assertion

$$\inf_\varphi \int_0^\infty |\chi(x) - \varphi(x)| \frac{dx}{x^2} = 0.$$

Quant à l'hypothèse de Riemann, Báez-Duarte (cf. [4]) a démontré qu'elle équivaut à

$$\inf_\varphi \int_0^\infty |\chi(x) - \varphi(x)|^2 \frac{dx}{x^2} = 0.$$

Dans les deux cas, l'infimum est pris sur les φ de la forme (2).

Nous nous intéressons dans cet article à une forme quantitative de ce critère. Soit H l'espace de Hilbert $L^2(0,\infty; t^{-2}dt)$ et, pour $\alpha > 0$,

$$e_\alpha(t) = \{t/\alpha\} \quad (t > 0).$$

Posons, pour N entier positif,

$$d_N = \operatorname{dist}_H\big(\chi, \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_N)\big).$$

Ainsi, le critère de Báez-Duarte affirme que l'hypothèse de Riemann équivaut à la convergence de d_N vers 0, quand N tend vers l'infini.

Examinons maintenant la vitesse de cette convergence. D'une part, Burnol (cf. [6]) a démontré que

$$d_N^2 \geqslant \frac{C + o(1)}{\log N}, \quad N \to +\infty,$$

où

$$C = \sum_\rho \frac{\mathrm{m}(\rho)^2}{|\rho|^2},$$

la somme portant sur les zéros non triviaux ρ de la fonction ζ, et $\mathrm{m}(\rho)$ désignant la multiplicité de ρ comme zéro de ζ.

*Bien entendu, deux énoncés vrais sont toujours équivalents ; nous renvoyons à [9] et [1] pour des énoncés précis sur ce sujet.

Comme

$$\sum_\rho \frac{\mathrm{m}(\rho)}{|\rho|^2} = 2 + \gamma - \log(4\pi)$$

(si l'hypothèse de Riemann est vraie, cf. [8], chapter 12, (10), (11)), on en déduit en particulier que

$$d_N^2 \geqslant \frac{2+\gamma-\log(4\pi)+o(1)}{\log N}, \quad N \to +\infty. \tag{3}$$

D'autre part, les auteurs de [3] conjecturent l'égalité dans (3). Cette conjecture entraîne donc l'hypothèse de Riemann et la simplicité des zéros de ζ.

Le comportement asymptotique de d_N est difficile à déterminer, même conditionnellement à l'hypothèse de Riemann et d'autres conjectures classiques (simplicité des zéros de ζ, conjecture de Montgomery sur la corrélation par paires,...). Dans [4], Báez-Duarte donne une démonstration (dûe au premier auteur) de la majoration

$$d_N^2 \ll (\log\log N)^{-2/3}$$

sous l'hypothèse de Riemann. Nous améliorons ce résultat dans le présent travail.

Théorème *L'hypothèse de Riemann entraîne que*

$$d_N^2 \ll_\delta (\log\log N)^{5/2+\delta}(\log N)^{-1/2} \quad (N \geqslant 3),$$

pour tout $\delta > 0$.

Le plan de notre article est le suivant. Au §2 nous rappelons le rôle de la fonction de Möbius dans ce problème. Nous y majorons d_N^2 par la somme de deux quantités, $I_{N,\varepsilon}$ et J_ε, où ε est un paramètre positif, et nous énonçons les estimations de ces quantités qui permettent de démontrer notre théorème. Le §3 contient une étude de la fonction $\zeta(s)/\zeta(s+\varepsilon)$ nécessaire à la majoration, au §4, de la quantité J_ε. Les §§5 et 6 concernent l'estimation des sommes partielles de la série de Dirichlet de l'inverse de la fonction ζ. Cela nous permet de majorer $I_{N,\varepsilon}$ au §7, concluant ainsi la démonstration.

Il apparaîtra clairement que notre travail doit beaucoup à l'article récent [14]. Nous remercions son auteur, Kannan Soundararajan, pour une correspondance instructive concernant [14].

Le paramètre δ est fixé une fois pour toutes. On suppose $0 < \delta \leqslant 1/2$. On pose pour tout nombre complexe s

$$\sigma = \Re s, \quad \tau = \Im s.$$

Les symboles de Bachmann O et de Vinogradov $\ll$ (resp. $\ll_\delta$) qui apparaissent sous-entendent toujours des constantes absolues (resp. dépendant uniquement de δ) et effectivement calculables. Enfin nous indiquerons, par les initiales *(HR)* placées au début de l'énoncé d'une proposition, que la démonstration que nous en donnons utilise l'hypothèse de Riemann.

2 Pertinence de la fonction de Möbius

Partant de l'identité

$$\chi = -\sum_{n\geqslant 1} \mu(n) e_n$$

(valable au sens de la convergence simple), Báez-Duarte a d'abord montré (cf. [2]) la divergence dans H de la série du second membre. Il a ensuite proposé d'approcher χ dans H par les sommes

$$-\sum_{n\leqslant N}\mu(n)n^{-\varepsilon}e_n,$$

où ε est un paramètre positif, à choisir convenablement en fonction de N.

En posant

$$\nu_{N,\varepsilon}=\Big\|\chi+\sum_{n\leqslant N}\mu(n)n^{-\varepsilon}e_n\Big\|_H^2,$$

on a évidemment $d_N^2\leqslant\nu_{N,\varepsilon}$ pour $N\geqslant 1$, $\varepsilon>0$. Posons maintenant pour $N\geqslant 1$ et $s\in\mathbb{C}$:

$$M_N(s)=\sum_{n\leqslant N}\mu(n)n^{-s}.$$

On sait depuis Littlewood (cf. [11]) que l'hypothèse de Riemann entraîne la convergence de $M_N(s)$ vers $\frac{1}{\zeta(s)}$ quand N tend vers l'infini, pour tout s tel que $\Re s>\frac{1}{2}$. Nous allons faire apparaître la différence M_N-1/ζ pour majorer $\nu_{N,\varepsilon}$.

Proposition 1 *Pour $N\geqslant 1$ et $\varepsilon>0$, on a*

$$\nu_{N,\varepsilon}\leqslant 2I_{N,\varepsilon}+2J_\varepsilon,$$

où

$$I_{N,\varepsilon}=\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma=1/2}|\zeta(s)|^2|M_N(s+\varepsilon)-\zeta(s+\varepsilon)^{-1}|^2\frac{d\tau}{|s|^2}\qquad et\qquad J_\varepsilon=\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma=1/2}\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)}-1\right|^2\frac{d\tau}{|s|^2}.$$

Démonstration

La transformation de Mellin associe à toute fonction $f\in H$ une fonction $\mathfrak{M}f$, définie pour presque tout s tel que $\sigma=1/2$ par la formule

$$\mathfrak{M}f(s)=\int_0^{+\infty}f(t)t^{-s-1}dt$$

(où $\int_0^{+\infty}$ signifie $\lim_{T\to+\infty}\int_{1/T}^T$).

De plus, le théorème de Plancherel affirme que $f\mapsto\mathfrak{M}f$ est un opérateur unitaire entre H et $L^2(\frac{1}{2}+i\mathbb{R},d\tau/2\pi)$, espace que nous noterons simplement L^2. Comme

$$\mathfrak{M}e_\alpha(s)=\alpha^{-s}\frac{\zeta(s)}{-s},\qquad\mathfrak{M}\chi(s)=\frac{1}{s},$$

on a

$$\begin{aligned}
\nu_{N,\varepsilon} &= \Big\|\chi + \sum_{n\leqslant N} \mu(n)n^{-\varepsilon}e_n\Big\|_H^2 \\
&= \Big\|\frac{1}{s} + \sum_{n\leqslant N} \mu(n)n^{-\varepsilon}n^{-s}\frac{\zeta(s)}{-s}\Big\|_{L^2}^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma=1/2} |1-\zeta(s)M_N(s+\varepsilon)|^2\,\frac{d\tau}{|s|^2} \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\sigma=1/2} \Big|1-\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)}\Big|^2\,\frac{d\tau}{|s|^2} + \frac{1}{\pi}\int_{\sigma=1/2} \Big|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} - \zeta(s)M_N(s+\varepsilon)\Big|^2\,\frac{d\tau}{|s|^2} \\
&\text{(où l'on a utilisé l'inégalité } |a+b|^2 \leqslant 2(|a|^2+|b|^2)\text{)} \\
&= 2J_\varepsilon + 2I_{N,\varepsilon}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Observons que la proposition 1 ne dépend pas de l'hypothèse de Riemann, mais que les quantités $I_{N,\varepsilon}$ et J_ε pourraient être infinies si elle était fausse.

Dans [4], Báez-Duarte démontre (sous l'hypothèse de Riemann) que $I_{N,\varepsilon}$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini (pour tout $\varepsilon > 0$ fixé), et que $J(\varepsilon)$ tend vers 0 quand ε tend vers 0. On a donc bien $d_N = o(1)$.

La version quantitative donnée dans [4] repose sur les estimations

$$J(\varepsilon) \ll \varepsilon^{2/3} \quad (0 < \varepsilon \leqslant 1/2),$$

et

$$I_{N,\varepsilon} \ll N^{-2\varepsilon/3} \quad (c/\log\log N \leqslant \varepsilon \leqslant 1/2),$$

où c est une constante positive absolue. Nous démontrons ici les deux propositions suivantes.

Proposition 2 *(HR) On a $J_\varepsilon \ll \varepsilon$.*

Proposition 3 *(HR) Soit $\delta > 0$. Pour $N \geqslant N_0(\delta)$ et $\varepsilon \geqslant 25(\log\log N)^{5/2+\delta}(\log N)^{-1/2}$, on a*

$$I_{N,\varepsilon} \ll N^{-\varepsilon/2}.$$

Le choix $\varepsilon = 25(\log\log N)^{5/2+\delta}(\log N)^{-1/2}$ donne le théorème.

3 Étude du quotient $\zeta(s)/\zeta(s+\varepsilon)$

Dans ce paragraphe, nous étudions, sous l'hypothèse de Riemann, le comportement de la fonction $\zeta(s)/\zeta(s+\varepsilon)$ dans le demi-plan $\sigma \geqslant 1/2$, quand ε tend vers 0. Afin de préciser, sur certains points, l'exposé de Burnol dans [7], nous utilisons le produit de Hadamard de $\zeta(s)$ et majorons chaque facteur de $\zeta(s)/\zeta(s+\varepsilon)$.

Nous supposons $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$.

Proposition 4 *(HR) On a les estimations suivantes.*

$$(i) \qquad \left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)}\right|^2 \ll |s|^{\varepsilon} \quad (\sigma = 1/2);$$

$$(ii) \qquad \left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)}\right|^2 \leqslant 1 + O(\varepsilon|s|^{1/2}) \quad (\sigma = 1/2);$$

$$(iii) \qquad \frac{\zeta(s)/\zeta(s+\varepsilon)}{s(1-s)} \ll \frac{|s|^{\varepsilon/2}}{|s-1|^2} \quad (\sigma \geqslant 1/2,\, s \neq 1).$$

Démonstration

Si l'on pose

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s),$$

on a

$$\xi(s) = \prod_{\rho}\left(1 - \frac{s}{\rho}\right),$$

où le produit porte sur les zéros non triviaux ρ de la fonction ζ, et doit être calculé par la formule $\prod_\rho = \lim_{T\to+\infty}\prod_{|\gamma|\leqslant T}$ (on pose $\rho = \beta + i\gamma$). Par conséquent

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} = \pi^{-\varepsilon/2}\frac{(s+\varepsilon)(s+\varepsilon-1)}{s(s-1)}\frac{\Gamma\big((s+\varepsilon)/2\big)}{\Gamma(s/2)}\prod_{\rho}\frac{s-\rho}{s+\varepsilon-\rho}. \tag{4}$$

Examinons successivement les facteurs apparaissant dans (4). On a d'abord $\pi^{-\varepsilon/2} < 1$. Ensuite, on a

$$\left|\frac{(s+\varepsilon)(s+\varepsilon-1)}{s(s-1)}\right| \ll \left|\frac{s}{s-1}\right| \quad (\sigma \geqslant 1/2,\, s \neq 1), \tag{5}$$

$$\left|\frac{(s+\varepsilon)(s+\varepsilon-1)}{s(s-1)}\right| \leqslant \exp\big(O(\varepsilon/|s|)\big) \quad (\sigma = 1/2). \tag{6}$$

Pour le quotient des fonctions Γ apparaissant dans la formule (4), on dispose de l'inégalité suivante, qui résulte de la formule de Stirling complexe.

$$\left|\frac{\Gamma\big((s+\varepsilon)/2\big)}{\Gamma(s/2)}\right| \leqslant |s/2|^{\varepsilon/2}\exp\big(O(\varepsilon/|s|)\big) \quad (\sigma \geqslant 1/2). \tag{7}$$

Pour majorer le produit infini apparaissant dans (4), on utilise l'inégalité

$$\left|\frac{s-\rho}{s+\varepsilon-\rho}\right| < 1, \quad \sigma \geqslant \beta, \quad \varepsilon > 0,$$

qui donne par conséquent (sous l'hypothèse de Riemann)

$$\left|\prod_{\rho}\frac{s-\rho}{s+\varepsilon-\rho}\right| < 1 \quad (\sigma \geqslant 1/2). \tag{8}$$

Notons ensuite les inégalités

$$\exp\bigl(\varepsilon \log x/2 + O(\varepsilon/x)\bigr) \ll (x/2)^{\varepsilon}, \tag{9}$$

et

$$\exp\bigl(\varepsilon \log x/2 + O(\varepsilon/x)\bigr) \leqslant 1 + O(\varepsilon x^{1/2}), \tag{10}$$

valables pour $x \geqslant 1/2$.

L'estimation *(i)* résulte alors de (4), (6), (7), (8) et (9) ; l'estimation *(ii)* de (4), (6), (7), (8) et (10), et l'estimation *(iii)* de (4), (5), (7), (8) et (9). □

4 Majoration de J_ε

On suppose, comme au §3, que ε vérifie $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$. On pose

$$K_\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma=1/2} \left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)}\right|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} \quad \text{et} \quad L_\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma=1/2} \frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} \frac{d\tau}{|s|^2},$$

de sorte que

$$J_\varepsilon = K_\varepsilon - 2L_\varepsilon + 1. \tag{11}$$

Pour majorer J_ε, nous allons calculer exactement L_ε à l'aide du théorème des résidus, et majorer K_ε en utilisant les résultats du paragraphe précédent.

Proposition 5 *(HR) On a*

$$\begin{aligned} L_\varepsilon &= \frac{\gamma - 1}{\zeta(1+\varepsilon)} - \frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta^2(1+\varepsilon)} \\ &= 1 - (\gamma+1)\varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} L_\varepsilon &= \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma=1/2} \frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} \frac{d\tau}{|s|^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma=1/2} Q(s)ds, \end{aligned}$$

où

$$Q(s) = \frac{\zeta(s)/\zeta(s+\varepsilon)}{s(1-s)}.$$

Soit Π le demi-plan $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, et Δ la droite $\sigma = \frac{1}{2}$. La fonction Q est méromorphe dans Π, holomorphe sur Δ. Dans Π elle a un unique pôle, double, en $s = 1$ où son résidu vaut

$$\frac{1-\gamma}{\zeta(1+\varepsilon)} + \frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta^2(1+\varepsilon)}.$$

D'après la proposition 4, *(iii)*, on a $sQ(s) \to 0$ uniformément quand $|s| \to +\infty$, $s \in \Pi$, et

$$\int_\Delta |Q(s)| \cdot |ds| < +\infty.$$

Nous sommes donc en situation d'appliquer une proposition classique du calcul des résidus (cf. par exemple [18]§6.22) pour en déduire

$$\begin{aligned} L_\varepsilon &= -\mathrm{Res}\left(\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} \cdot \frac{1}{s(1-s)}\right)\Big|_{s=1} \\ &= \frac{\gamma - 1}{\zeta(1+\varepsilon)} - \frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta^2(1+\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité vaut

$$1 - (\gamma+1)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

puisque

$$\frac{1}{\zeta(1+\varepsilon)} = \varepsilon - \gamma\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \qquad \square$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'estimation $J_\varepsilon \ll \varepsilon$, objet de la proposition 2. En intégrant l'inégalité *(ii)* de la proposition 4 sur la droite $\sigma = 1/2$ avec la mesure $d\tau/|s^2|$, on obtient

$$K_\varepsilon - 1 \ll \varepsilon.$$

Le résultat découle alors de (11) et de la proposition 5.

En considérant la contribution à J_ε d'un voisinage de l'ordonnée d'un zéro simple de ζ (par exemple $\gamma_1 = 14,1347\ldots$), on peut montrer inconditionnellement que $J_\varepsilon \gg \varepsilon$. Il serait intéressant de préciser le comportement asymptotique de J_ε quand ε tend vers 0.

5 Quelques propriétés de la fonction ζ sous l'hypothèse de Riemann

Afin d'établir la majoration de la proposition 3, nous allons étudier $M_N(s+\varepsilon)$. Pour cela, nous allons utiliser la méthode inventée par Maier et Montgomery dans l'article [12], dévolu à $M_N(0) = M(N)$. Ils y démontrent que

$$M(N) = \sum_{n \leqslant N} \mu(n) \ll \sqrt{N} \exp\bigl((\log N)^{39/61}\bigr)$$

sous l'hypothèse de Riemann. Leur approche a été ensuite perfectionnée par Soundararajan (cf. [14]), qui a obtenu l'estimation

$$M(N) \ll \sqrt{N} \exp\bigl((\log N)^{1/2} (\log\log N)^{14}\bigr),$$

toujours sous l'hypothèse de Riemann. La méthode de Soundararajan donne en fait

$$M(N) \ll_\delta \sqrt{N} \exp\bigl((\log N)^{1/2} (\log\log N)^{5/2+\delta}\bigr),$$

pour tout δ tel que $0 < \delta \leqslant 1/2$. Nous allons maintenant rappeler les éléments de la méthode de Soundararajan qui seront utilisés dans notre argumentation, avec les quelques modifications qui permettent d'obtenir l'exposant $5/2+\delta$. On trouvera les démonstrations dans l'article [14] (cf. aussi [5] pour un exposé détaillé des modifications).

5.1 Ordonnées V-typiques

L'évaluation de $M_N(s+\varepsilon)$ grâce à la formule de Perron fera appel à un contour sur lequel les grandes valeurs de $|\zeta(z)|^{-1}$ seront aussi rares que possible. Pour quantifier cette rareté, Soundararajan a introduit la notion suivante.

Soit T assez grand† et V tel que $(\log\log T)^2 \leqslant V \leqslant \log T/\log\log T$. Un nombre réel t est appelé une **ordonnée V-typique de taille T** si

• $T \leqslant t \leqslant 2T$;

(i) pour tout $\sigma \geqslant 1/2$, on a

$$\Big|\sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}\log n}\frac{\log(x/n)}{\log x}\Big| \leqslant 2V, \quad \text{où } x = T^{1/V};$$

(ii) tout sous-intervalle de $[t-1, t+1]$ de longueur $2\pi\delta V/\log T$ contient au plus $(1+\delta)V$ ordonnées de zéros de ζ ;

(iii) tout sous-intervalle de $[t-1, t+1]$ de longueur $2\pi V/\big((\log V)\log T\big)$ contient au plus V ordonnées de zéros de ζ.

Si $t \in [T, 2T]$ ne vérifie pas l'une des assertions *(i), (ii), (iii)*, on dira que t est une **ordonnée V-atypique de taille T**.

L'apport de cette définition à l'estimation de $M_N(s+\varepsilon)$ via la formule de Perron (§6 ci-dessous) est contenu dans l'énoncé suivant (proposition 9 de [5]).

Proposition 6 *(HR) Soit t assez grand, et $x \geqslant t$. Soit V' tel que $(\log\log t)^2 \leqslant V' \leqslant (\log t/2)/(\log\log t/2)$. On suppose que t est une ordonnée V'-typique (de taille T'). Soit $V \geqslant V'$.*

Alors

$$|x^z\zeta(z)^{-1}| \leqslant \sqrt{x}\exp\big(V\log(\log x/\log t) + (2+3\delta)V\log\log V\big) \qquad (V' \leqslant (\Re z - 1/2)\log x \leqslant V, \quad |\Im z| = t).$$

5.2 Majoration de l'écart entre le nombre de zéros de la fonction ζ et sa moyenne, dans un intervalle de la droite critique

La proposition suivante (cf. [5], proposition 15) donne une majoration de l'écart entre le nombre d'ordonnées de zéros de ζ dans l'intervalle $]t-h, t+h]$ et sa valeur moyenne $(h/\pi)\log(t/2\pi)$. Cet encadrement est exprimé au moyen d'un paramètre Δ, et met notamment en jeu un polynôme de Dirichlet de longueur $\exp 2\pi\Delta$.

Proposition 7 *(HR) Soit $\Delta \geqslant 2$ et $h > 0$. Il existe des nombres réels $a(p) = a(p, \Delta, h)$ (p premier, $p \leqslant e^{2\pi\Delta}$) vérifiant*

• *$|a(p)| \leqslant 4$ pour $p \leqslant e^{2\pi\Delta}$;*

• *pour tout t tel que $t \geqslant \max(4, h^2)$, on a*

$$N(t+h) - N(t-h) - 2h\frac{\log t/2\pi}{2\pi} \leqslant \frac{\log t}{2\pi\Delta} + \sum_{p\leqslant e^{2\pi\Delta}} \frac{a(p)\cos(t\log p)}{p^{\frac12}} + O(\log\Delta).$$

Lorsqu'on majore trivialement le polynôme de Dirichlet qui intervient dans cette proposition, on obtient le résultat suivant, dû à Goldston et Gonek (cf. [10]). Notre énoncé est légèrement plus précis que celui de [10].

†Ici et dans la suite, cela signifie que $T \geqslant T_0(\delta)$, quantité effectivement calculable, et dépendant au plus de δ.

Proposition 8 *Soit t assez grand et $0 < h \leqslant \sqrt{t}$. On a*

$$N(t+h) - N(t-h) - (h/\pi)\log(t/2\pi) \leqslant (\log t)/2\log\log t + \big(1/2 + o(1)\big)\log t \log\log\log t/(\log\log t)^2.$$

Démonstration

On a

$$\Big|\sum_{p\leqslant e^{2\pi\Delta}} \frac{a(p)\cos t\log p}{p^{\frac{1}{2}}}\Big| \ll \sum_{p\leqslant e^{2\pi\Delta}} \frac{1}{\sqrt{p}} \ll \frac{e^{\pi\Delta}}{\Delta}.$$

On choisit $\Delta = \frac{1}{\pi}\log(\log t/\log\log t)$ et on vérifie alors que

$$\frac{\log t}{2\pi\Delta} + O(e^{\pi\Delta}/\Delta) + O(\log\Delta) = (\log t)/2\log\log t + \big(1/2 + o(1)\big)\log t \log\log\log t/(\log\log t)^2. \qquad \square$$

La proposition suivante est une variante un peu plus précise de la première assertion de la Proposition 4 de [14].

Proposition 9 *Soit T assez grand, et V tel que*

$$\frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{2} + \delta\Big)\log\log\log T/\log\log T \leqslant V\log\log T/\log T \leqslant 1.$$

Alors toute ordonnée $t \in [T, 2T]$ est V-typique.

Démonstration

Il faut vérifier les critères *(i), (ii), (iii)* de la définition d'une ordonnée V-typique.

Pour *(i)*, on a pour $\sigma \geqslant 1/2$, $t \in \mathbb{R}$, et $x = T^{1/V}$,

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it}\log n}\frac{\log(x/n)}{\log x}\Big| &\leqslant \sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}\log n}\frac{\log(x/n)}{\log x}\\ &\ll \frac{\sqrt{x}}{(\log x)^2}\\ &\ll \frac{\log T}{(\log\log T)^2} \quad (\text{car } x = T^{1/V} \leqslant (\log T)^2)\\ &= o(V).\end{aligned}$$

Pour *(ii)* on a, avec $t' \in [t-1, t+1]$ et $h = \pi\delta V/\log T$:

$$\begin{aligned}N(t'+h) - N(t'-h) &\leqslant (h/\pi)\log(t'/2\pi) + \frac{1}{2}\log t'/\log\log t' + \big(1/2+o(1)\big)\log t'\log\log\log t'/(\log\log t')^2\\ &\quad \text{(proposition 8)}\\ &\leqslant (h/\pi)\log T + \frac{1}{2}\log T/\log\log T + (1/2+\delta)\log T\log\log\log T/(\log\log T)^2\\ &\leqslant (1+\delta)V.\end{aligned}$$

Pour *(iii)* on a, avec $t' \in [t-1, t+1]$ et $h = \pi V/\big((\log V)\log T\big)$:

$$\begin{aligned} N(t'+h) - N(t'-h) &\leqslant (h/\pi)\log(t'/2\pi) + \frac{1}{2}\log t'/\log\log t' + \big(1/2 + o(1)\big)\log t' \log\log\log t'/(\log\log t')^2 \\ &\leqslant \frac{V}{\log V} + \frac{1}{2}\log T/\log\log T + \big(1/2+o(1)\big)\log T\log\log\log T/(\log\log T)^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2}\log T/\log\log T + (1/2+\delta)\log T\log\log\log T/(\log\log T)^2 \\ &\leqslant V. \end{aligned}$$

□

6 Approximation de l'inverse de la fonction ζ par ses sommes partielles

Le but de ce paragraphe est la démonstration de la proposition suivante.

Proposition 10 *Soit N assez grand et $\varepsilon \geqslant 25(\log\log N)^{5/2+6\delta}(\log N)^{-1/2}$. Alors, pour $|\tau| \leqslant N^{3/4}$,on a*

$$\zeta(s+\varepsilon)^{-1} - M_N(s+\varepsilon) \ll N^{-\varepsilon/4}(1+|\tau|)^{1/2-\beta(\tau)},$$

où $\beta(\tau) = \frac{\log\log\log(16+|\tau|)}{2\log\log(16+|\tau|)}$.

Elle résultera de diverses estimations, valables uniformément quand τ et ε appartiennent à certains intervalles définis en termes de N, longueur du polynôme de Dirichlet M_N, approximant la fonction ζ^{-1}. Pour plus de clarté dans l'exposé, nous développons séparément les analyses relatives aux deux paramètres τ et ε. Nous commençons par l'étude de

$$M_N(i\tau) = \sum_{n\leqslant N}\mu(n)n^{-i\tau},$$

pour $\tau \in \mathbb{R}$.

6.1 Estimation de $M_N(i\tau)$ pour les petites valeurs de $|\tau|$

Commençons par le résultat obtenu par sommation partielle à partir de la majoration de Soundararajan (cf. [14] et [5])

$$M(x) = \sum_{n\leqslant x}\mu(n) \ll \sqrt{x}\exp C(\log x), \quad x \geqslant 3,$$

où $C(u) = u^{1/2}(\log u)^{5/2+\delta}$. Observons que $C'(u) = O(1)$, $u \geqslant 1$.

Proposition 11 *On a uniformément*

$$M_N(i\tau) \ll (1+|\tau|)\sqrt{N}\exp C(\log N), \quad N \geqslant 3, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

La démonstration (standard) est laissée au lecteur. Pour aller plus loin, nous allons appliquer la formule de Perron et suivre la démarche de Soundararajan dans [14].

6.2 Estimation de $M_N(i\tau)$ pour les grandes valeurs de $|\tau|$

Nous utiliserons la majoration simple suivante.

Proposition 12 *Pour $0 < \delta \leqslant 1/12$, N assez grand et*

$$\exp\bigl(3(\log N)^{1/2}(\log\log N)^{5/2+6\delta}\bigr) \leqslant |\tau| \leqslant N^{3/4},$$

on a

$$M_N(i\tau) \ll N^{1/2}|\tau|^{1/2-\kappa(\tau)},$$

où $\kappa(\tau) = \frac{1}{2}\log\log\log|\tau|/\log\log|\tau|$.

Démonstration Dans toute la démonstration, N sera supposé assez grand.

Première étape : formule de Perron

La première étape de la démonstration consiste à appliquer la formule de Perron à la hauteur $N_1 = 2^{\lfloor \log N/\log 2\rfloor}$ (le choix d'une puissance de 2 simplifie l'exposé de [5]), ce qui pour $\tau \in \mathbb{R}$ donne

$$\begin{aligned} M_N(i\tau) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{1+1/\log N - iN_1}^{1+1/\log N+iN1} \zeta(z+i\tau)^{-1}\frac{N^z}{z}dz + O(N\log N_1/N_1) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{1+1/\log N - i(N_1-\tau)}^{1+1/\log N+i(N_1+\tau)} \zeta(z)^{-1}\frac{N^{z-i\tau}}{z-i\tau}dz + O(\log N) \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $|\tau| \leqslant N/5$ et remplaçons l'intégrale par $N^{-i\tau}B_N$, où

$$B_N = B_N(i\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{1+1/\log N - iN_1}^{1+1/\log N+iN_1} \zeta(z)^{-1}\frac{N^z}{z-i\tau}dz.$$

L'erreur commise est alors majorée par

$$\frac{1}{2\pi}\int_{N_1-|\tau|\leqslant|\Im z|\leqslant N_1+|\tau|} |\zeta(z)^{-1}|\Bigl|\frac{N^z dz}{z-i\tau}\Bigr| \quad (\Re z = 1+1/\log N).$$

Or $|\zeta(z)^{-1}| \ll \log N$ si $\Re z = 1+1/\log N$ et $|z-i\tau| \gg N$ si $N_1 - |\tau| \leqslant |\Im z| \leqslant N_1+|\tau|$, donc l'erreur est $O(|\tau|\log N)$.

Pour $N \geqslant 3$ et $|\tau| \leqslant N/5$ on a donc montré

$$M_N(i\tau) = N^{-i\tau}B_N + O\bigl((1+|\tau|)\log N\bigr). \tag{12}$$

Deuxième étape : déformation du chemin d'intégration

Pour majorer $|B_N|$, nous allons remplacer le segment d'intégration $[1+1/\log N - iN_1, 1+1/\log N+iN_1]$ par une variante $\mathcal{S}_N$ du chemin défini par Soundararajan dans [14], chemin sur lequel les grandes valeurs de l'intégrande sont rares. Nous commençons par une description de $\mathcal{S}_N$. Nous posons

$$\kappa = \lfloor(\log N)^{1/2}(\log\log N)^{5/2}\rfloor, \quad K = \lfloor \log N/\log 2\rfloor.$$

Nous posons également $T_k = 2^k$ pour $\kappa \leqslant k \leqslant K$, et $N_0 = T_\kappa$ (on a $N_1 = T_K$).

Le chemin $\mathcal{S}_N$ est symétrique par rapport à l'axe réel, et constitué de segments verticaux et horizontaux. Nous décrivons seulement la partie de $\mathcal{S}_N$ située dans le demi-plan $\Im z \geqslant 0$.

• Il y a d'abord un segment vertical $[1/2 + 1/\log N, 1/2 + 1/\log N + iN_0]$.

• Pour chaque k tel que $\kappa \leqslant k < K$, on considère les entiers n de l'intervalle $[T_k, 2T_k[$. On définit alors V_n comme le plus petit entier de l'intervalle $[(\log\log T_k)^2, \log T_k/\log\log T_k]$ tel que tous les points de $[n, n+1]$ soient V_n-typiques de taille T_k. L'existence de V_n est garantie par la proposition 9. On a même

$$V_n \leqslant \frac{1}{2}\log n/\log\log n + (1/2+\delta)\log n(\log\log\log n)/(\log\log n)^2 + 1.$$

On inclut alors dans $\mathcal{S}_N$ le segment vertical $[1/2 + V_n/\log N + in, 1/2 + V_n/\log N + i(n+1)]$

Il y a enfin des segments horizontaux reliant tous ces segments verticaux :

• le segment $[1/2 + 1/\log N + iN_0, 1/2 + V_{N_0}/\log N + iN_0]$;

• les segments $[1/2 + V_n/\log N + i(n+1), 1/2 + V_{n+1}/\log N + i(n+1)]$, $N_0 \leqslant n \leqslant T_K - 2$;

• le segment $[1/2 + V_{N_1-1}/\log N + iN_1, 1 + 1/\log N + iN_1]$.

D'après le théorème de Cauchy, on a

$$B_N = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{S}_N} \zeta(z)^{-1}\frac{N^z}{z - i\tau}dz.$$

Troisième étape : évaluation de B_N

Lorsque $|z - i\tau|$ n'est pas trop petit devant $|z|$, nous pouvons utiliser les estimations de [14] et [5]. Nous définissons donc $\mathcal{S}_{N,\tau}$ comme la partie de $\mathcal{S}_N$ où $|(\Im z - \tau)/\tau| \leqslant 1/4$ ($\tau \neq 0$).

Si $z \in \mathcal{S}_N \setminus \mathcal{S}_{N,\tau}$, on a $|z - i\tau| \gg |z|$. Par conséquent (cf. [14] et [5]), pour $N \geqslant 3$ et $\tau \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\Big|B_N - \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{S}_{N,\tau}} \zeta(z)^{-1}\frac{N^z}{z - i\tau}dz\Big| &\ll \int_{\mathcal{S}_N}\Big|\frac{\zeta(z)^{-1}N^z dz}{z}\Big| \\ &\ll \sqrt{N}\exp\big((\log N)^{1/2}(\log\log N)^{5/2+6\delta}\big). \end{aligned} \tag{13}$$

Il nous reste à majorer la contribution de $\mathcal{S}_{N,\tau}$.

Supposons $\sqrt{2}N_0 \leqslant |\tau| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}N_1$. Par symétrie, on peut également supposer $\tau > 0$. On a

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{S}_{N,\tau}} \zeta(z)^{-1}\frac{N^z}{z - i\tau}dz\right| \leqslant \sup_{z \in \mathcal{S}_{N,\tau}} |\zeta(z)^{-1}N^z| \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{S}_{N,\tau}}\Big|\frac{dz}{z - i\tau}\Big|\right).$$

Observons que si $z \in \mathcal{S}_N$ et $\Im z \geqslant N_0$, alors z se trouve sur un des segments horizontaux et verticaux décrits ci-dessus. Sur les deux segments (horizontal et vertical) de $\mathcal{S}_{N,\tau}$ situés dans la bande $n < \Im z \leqslant n+1$, on a $|z - i\tau|^{-1} \ll (1 + |n - \tau|)^{-1}$, donc l'intégrale est en $O(\log\tau)$.

Pour majorer $|\zeta(z)^{-1}N^z|$, nous utilisons la proposition 6. En posant $n = \lceil \Im z \rceil - 1$, on peut écrire

$$V' \leqslant (\Re z - 1/2)\log N \leqslant V,$$

avec $(V,V')=(V_n,V_n)$ dans le cas vertical et (V_{n+1},V_n) ou (V_n,V_{n+1}) dans le cas horizontal ($\Im z=n+1$), et $\Im z$ V'-typique (de taille correspondante). On peut donc bien appliquer la proposition 6 pour obtenir

$$|\zeta(z)^{-1}N^z|\leqslant\sqrt{N}\exp\big(V\log(\log N/\log\Im z)+(2+3\delta)V\log\log V\big).$$

Maintenant, si $z\in\mathcal{S}_{N,\tau}$, on a

$$\tau\sqrt{2}\geqslant\Im z\geqslant\tau/\sqrt{2}\geqslant N_0$$

donc

$$\log N/\log\Im z\leqslant\log\Im z\leqslant\log\tau\sqrt{2}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}V&\leqslant\frac{1}{2}\log(n+1)/\log\log(n+1)+(1/2+\delta)\log(n+1)\log\log\log(n+1)/(\log\log(n+1))^2+1\\&\leqslant\frac{1}{2}\log\tau/\log\log\tau+(1/2+2\delta)\log\tau\log\log\log\tau/(\log\log\tau)^2.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}V\log(\log N/\log\Im z)+(2+3\delta)V\log\log V\leqslant&\frac{1}{2}(\log\tau/\log\log\tau)\log(\log N/\log\tau)\\&+(3/2+5\delta)\log\tau\log\log\log\tau/\log\log\tau.\end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\sup_{z\in\mathcal{S}_{N,\tau}}|\zeta(z)^{-1}N^z|\leqslant\sqrt{N}\exp\Big(\frac{1}{2}(\log\tau/\log\log\tau)\log(\log N/\log\tau)+(3/2+5\delta)\log\tau\log\log\log\tau/\log\log\tau\Big).$$

Ainsi, pour $\sqrt{2}N_0\leqslant|\tau|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}N_1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{S}_{N,\tau}}\zeta(z)^{-1}\frac{N^z}{z-i\tau}dz\leqslant&\sqrt{N}\exp\left((\log|\tau|/2\log\log|\tau|)\log(\log N/\log|\tau|)\right.\\&\left.+(3/2+6\delta)\log|\tau|\log\log\log|\tau|/\log\log|\tau|\right),\end{aligned}$$

ce qui donne finalement, en utilisant (13)

$$\begin{aligned}B_N\leqslant&\sqrt{N}\exp\Big(\frac{1}{2}(\log|\tau|/\log\log|\tau|)\log(\log N/\log|\tau|)+(3/2+6\delta)\log|\tau|\log\log\log|\tau|/\log\log|\tau|\Big)\\&+O\left(\sqrt{N}\exp\big((\log N)^{1/2}(\log\log N)^{5/2+6\delta}\big)\right).\end{aligned}\tag{14}$$

Conclusion : estimation de $M_N(i\tau)$

D'après (12) et (14), on a

$$M_N(i\tau)=N^{-i\tau}B_N+O(|\tau|\log N)\quad(1\leqslant|\tau|\leqslant N/5)$$

et

$$
\begin{aligned}
B_N \leqslant & \sqrt{N} \exp\Big(\frac{1}{2}(\log|\tau|/\log\log|\tau|)\log(\log N/\log|\tau|) + (3/2+6\delta)\log|\tau|\log\log\log|\tau|/\log\log|\tau|\Big) \\
& + O\left(\sqrt{N}\exp\big((\log N)^{1/2}(\log\log N)^{5/2+6\delta}\big)\right).
\end{aligned}
$$

On observe que sous les hypothèses de la proposition, on a :

$$
|\tau|\log N \leqslant N^{1/2}|\tau|^{2/5}
$$

et

$$
N^{1/2}\exp\big((\log N)^{1/2}(\log\log N)^{5/2+6\delta}\big) \leqslant N^{1/2}|\tau|^{1/3}.
$$

On a également

$$
\begin{aligned}
\frac{\log|\tau|}{(\log\log|\tau|)^{5/2}} &\geqslant \frac{3(\log N)^{1/2}(\log\log N)^{5/2}}{\Big(\log\big(3(\log N)^{1/2}(\log\log N)^{5/2}\big)\Big)^{5/2}} \\
&\geqslant \sqrt{\log N}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\frac{\log N}{\log|\tau|} \leqslant \frac{\log|\tau|}{(\log\log|\tau|)^5},
$$

ce qui implique

$$
\frac{1}{2}\frac{\log|\tau|}{\log\log|\tau|}\cdot\log\Big(\frac{\log N}{\log|\tau|}\Big) + (3/2+6\delta)\log|\tau|\frac{\log\log\log|\tau|}{\log\log|\tau|} \leqslant \frac{1}{2}\log|\tau| + (-1+6\delta)\log|\tau|\frac{\log\log\log|\tau|}{\log\log|\tau|}
$$

et permet de conclure. □

6.3 Estimations de $\zeta(s+\varepsilon)^{-1} - M_N(s+\varepsilon)$

Démontrons à présent la proposition 10 et revenons à l'estimation de la différence

$$
\zeta(s+\varepsilon)^{-1} - M_N(s+\varepsilon),
$$

que nous exprimons d'abord à l'aide d'une intégrale :

$$
\zeta(s+\varepsilon)^{-1} - M_N(s+\varepsilon) = -M_N(i\tau)N^{-1/2-\varepsilon} + (1/2+\varepsilon)\int_N^\infty t^{-3/2-\varepsilon}M_t(i\tau)dt \quad (N \geqslant 1,\ \varepsilon > 0,\ \tau \in \mathbb{R}) \tag{15}
$$

On suppose N assez grand, $\varepsilon \geqslant 2(\log\log N)^{5/2+\delta}(\log N)^{-1/2}$, et $\tau \in \mathbb{R}$.

Petites valeurs de $|\tau|$

On a d'abord, d'après la proposition 11,

$$M_N(i\tau)N^{-1/2-\varepsilon} \ll (1+|\tau|)N^{-\varepsilon}\exp\big((\log N)^{1/2}(\log\log N)^{5/2+\delta}\big).$$

D'autre part, pour $t \geqslant N$, on a

$$\frac{\varepsilon}{2}\log t \geqslant (\log t)^{1/2}(\log\log t)^{5/2+\delta}.$$

En particulier,

$$M_N(i\tau)N^{-1/2-\varepsilon} \ll (1+|\tau|)N^{-\varepsilon/2}.$$

Et aussi,

$$\begin{aligned}\int_N^\infty t^{-3/2-\varepsilon}M_t(i\tau)dt &\ll (1+|\tau|)\int_N^\infty t^{-1-\varepsilon}\exp\big((\log t)^{1/2}(\log\log t)^{5/2+\delta}\big)dt\\ &\leqslant (1+|\tau|)\int_N^\infty t^{-1-\varepsilon/2}dt\\ &\ll \varepsilon^{-1}(1+|\tau|)N^{-\varepsilon/2}.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-1} &\leqslant (\log\log N)^{-5/2}(\log N)^{1/2}\\ &\leqslant \exp\big(\frac{1}{3}(\log N)^{1/2}(\log\log N)^{5/2+\delta}\big)\\ &\leqslant N^{\varepsilon/6},\end{aligned}$$

donc $\varepsilon^{-1}N^{-\varepsilon/2} \ll N^{-\varepsilon/3}$, ce qui donne sous nos hypothèses, la majoration

$$\zeta(s+\varepsilon)^{-1} - M_N(s+\varepsilon) \ll (1+|\tau|)N^{-\varepsilon/3}.$$

Dans le cas $\exp\big(3(\log N)^{1/2}(\log\log N)^{5/2+6\delta}\big) \geqslant |\tau|$, pour obtenir le résultat de la proposition 10, il nous suffit donc de démontrer que

$$(1+|\tau|)N^{-\varepsilon/3} \ll (1+|\tau|)^{1/3}N^{-\varepsilon/4},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\varepsilon}{12}\log N \geqslant \frac{2}{3}\log(1+|\tau|).$$

Or on a bien dans ce cas

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\log(1+|\tau|) &\leqslant \frac{2}{3}\big(3(\log N)^{1/2}(\log\log N)^{5/2+6\delta} + O(1)\big)\\ &\leqslant \frac{25}{12}(\log N)^{1/2}(\log\log N)^{5/2+6\delta}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{12}\log N.\end{aligned}$$

Grandes valeurs de $|\tau|$

Si $\exp\bigl(3(\log N)^{1/2}(\log\log N)^{5/2+6\delta}\bigr) \leqslant |\tau| \leqslant N^{3/4}$, on a d'abord, d'après la proposition 12,

$$M_N(i\tau)N^{-1/2-\varepsilon} \ll N^{-\varepsilon}|\tau|^{1/2-\kappa(\tau)}.$$

Étudions maintenant l'intégrale

$$\int_N^\infty t^{-3/2-\varepsilon}M_t(i\tau)dt.$$

Pour commencer, observons que $|\tau| \leqslant N^{3/4} \leqslant t^{3/4}$ si $t \geqslant N$.

D'autre part, définissons $\theta = \theta(\tau)$ par la relation

$$|\tau| = \exp\bigl(3(\log\theta)^{1/2}(\log\log\theta)^{5/2+6\delta}\bigr).$$

On a $\theta \geqslant N$ si $|\tau| \geqslant \exp\bigl(3(\log N)^{1/2}(\log\log N)^{5/2+6\delta}\bigr)$, et

$$\int_N^\infty t^{-3/2-\varepsilon}M_t(i\tau)dt = \int_N^\theta t^{-3/2-\varepsilon}M_t(i\tau)dt + \int_\theta^\infty t^{-3/2-\varepsilon}M_t(i\tau)dt.$$

Pour la première intégrale, nous pouvons utiliser la proposition 12 car $t \leqslant \theta \Rightarrow |\tau| \geqslant \exp\bigl(3(\log t)^{1/2}(\log\log t)^{5/2+6\delta}\bigr)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_N^\theta t^{-3/2-\varepsilon}M_t(i\tau)dt &\ll |\tau|^{1/2-\kappa(\tau)}\int_N^\theta t^{-1-\varepsilon}dt\\ &\leqslant |\tau|^{1/2-\kappa(\tau)}\varepsilon^{-1}N^{-\varepsilon}\\ &\leqslant |\tau|^{1/2-\kappa(\tau)}N^{-5\varepsilon/6},\end{aligned}$$

comme dans le cas précédent.

Pour la seconde intégrale, nous pouvons utiliser la proposition 11. On a

$$\int_\theta^\infty t^{-3/2-\varepsilon}M_t(i\tau)dt \ll |\tau|\int_\theta^\infty t^{-1-\varepsilon}\exp\bigl((\log t)^{1/2}(\log\log t)^{5/2+6\delta}\bigr)dt.$$

Maintenant, pour $t \geqslant \theta(\tau)$ ($\geqslant N$), on a

$$\frac{\varepsilon}{2}\log t \geqslant 4(\log t)^{1/2}(\log\log t)^{5/2+6\delta}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_\theta^\infty t^{-3/2-\varepsilon}M_t(i\tau)dt &\ll |\tau|\int_\theta^\infty t^{-1-\varepsilon/2}\exp\bigl(-3(\log t)^{1/2}(\log\log t)^{5/2+6\delta}\bigr)dt\\ &\leqslant |\tau|\exp\bigl(-3(\log\theta)^{1/2}(\log\log\theta)^{5/2+6\delta}\bigr)\int_\theta^\infty t^{-1-\varepsilon/2}dt\\ &= (2/\varepsilon)\theta^{-\varepsilon/2}\\ &\leqslant (2/\varepsilon)N^{-\varepsilon/2}\\ &\ll N^{-\varepsilon/3}\end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\zeta(s+\varepsilon)^{-1} - M_N(s+\varepsilon) \ll N^{-\varepsilon/3}|\tau|^{1/2-\kappa(\tau)}$$

Notons à présent que pour $|\tau|$ grand, on a $\beta(\tau) - \kappa(\tau) \ll 1/\log|\tau|$. Cela permet de conclure la démonstration de la proposition 10. □

7 Majoration de $I_{N,\varepsilon}$

Dans tout ce paragraphe, on pose $\sigma = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $s = \frac{1}{2} + i\tau$.

Proposition 13 *(HR) Pour $N \geqslant 1$, $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$, on a*

$$\int_{|\tau|\geqslant N^{3/4}} |\zeta(s)|^2 |\zeta(s+\varepsilon) - M_N(s+\varepsilon)|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} \ll N^{-1/9}. \tag{16}$$

Démonstration

Il suffit de démontrer que, pour $T \geqslant 1$,

$$I_N(T,\varepsilon) = \int_{T\leqslant|\tau|\leqslant 2T} |\zeta(s)|^2 |\zeta(s+\varepsilon)^{-1} - M_N(s+\varepsilon)|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} \ll T^{-3/2}(T+N)\log N, \tag{17}$$

car (16) résultera de la sommation de (17) pour les valeurs $T = 2^k N^{3/4}$, $k \in \mathbb{N}$.

On a

$$I_N(T,\varepsilon) \ll T^{-2} \int_{T\leqslant\tau\leqslant 2T} |\zeta(s)/\zeta(s+\varepsilon)|^2 d\tau + 4T^{-2} \int_{T\leqslant\tau\leqslant 2T} |\zeta(s)|^2 |M_N(s+\varepsilon)|^2 d\tau.$$

D'une part,

$$\int_{T\leqslant\tau\leqslant 2T} |\zeta(s)/\zeta(s+\varepsilon)|^2 d\tau \ll T^{3/2},$$

d'après le point *(i)* de la proposition 4.

D'autre part,

$$\int_{T\leqslant\tau\leqslant 2T} |\zeta(s)|^2 |M_N(s+\varepsilon)|^2 d\tau \leqslant T^{1/2} \int_{T\leqslant\tau\leqslant 2T} |\sum_{n\leqslant N} \mu(n) n^{-1/2-\varepsilon} n^{-i\tau}|^2 d\tau,$$

d'après l'inégalité $|\zeta(s)| \ll \tau^{1/4}$ (cf. [16], (5.1.8) p.96).

La dernière intégrale vaut

$$\big(T + O(N)\big) \sum_{n\leqslant N} \mu^2(n) n^{-1-2\varepsilon} \leqslant (T+N)\log N,$$

d'après une inégalité de Montgomery et Vaughan (cf. [13], (5) p.128), et car $\sum_{n\leqslant N} n^{-1-2\varepsilon} \ll \log N$. Par conséquent,

$$I_{N,\varepsilon} \ll T^{-3/2}(T+N)\log N.$$ □

Proposition 14 *(HR) Soit N assez grand et $\varepsilon \geqslant 25(\log\log N)^{5/2+6\delta}(\log N)^{-1/2}$. Alors,*

$$\int_{|\tau|\leqslant N^{3/4}} |\zeta(s)|^2 |\zeta(s+\varepsilon)^{-1} - M_N(s+\varepsilon)|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} \ll N^{-\varepsilon/2}.$$

Démonstration

Pour $|\tau| \leqslant N^{3/4}$, on a

$$\zeta(s+\varepsilon)^{-1} - M_N(s+\varepsilon) \ll N^{-\varepsilon/4}(1+|\tau|)^{1/2-\beta(\tau)},$$

d'après la proposition 10. D'autre part,

$$\begin{aligned}|\zeta(s)|^2 &\ll \exp\Big(O\big(\log(3+|\tau|)/\log\log(3+|\tau|)\big)\Big) \qquad \text{([16], (14.14.1))}\\ &\ll (1+|\tau|)^{\beta(\tau)},\end{aligned}$$

donc

$$\int_{|\tau|\leqslant N^{3/4}} |\zeta(s)|^2|\zeta(s+\varepsilon) - M_N(s+\varepsilon)|^2\frac{d\tau}{|s|^2} \ll N^{-\varepsilon/2}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\tau|)^{-1-\beta(\tau)}d\tau,$$

où la dernière intégrale est convergente. □

Les deux propositions précédentes entraînent la proposition 3, ce qui achève la démonstration du théorème.

Références

[1] L. Báez-Duarte, *On Beurling's real variable reformulation of the Riemann hypothesis*, Adv. in Maths. **101** (1993), 10-30.

[2] L. Báez-Duarte, *A class of invariant unitary operators*, Adv. in Maths. **144** (1999), 1-12.

[3] L. Báez-Duarte, M. Balazard, B. Landreau et E. Saias, *Notes sur la fonction ζ de Riemann, 3*, Adv. in Maths. **149** (2000), 130-144.

[4] L. Báez-Duarte, *A strengthening of the Nyman-Beurling criterion for the Riemann hypothesis*, Rend. Mat. Acc. Lincei (9) **14** (2003), 5-11.

[5] M. Balazard et A. de Roton, *Notes de lecture de l'article « Partial sums of the Möbius function » de Kannan Soundararajan*, arXiv :0810.3587

[6] J.-F. Burnol, *A lower bound in an approximation problem involving the zeroes of the Riemann zeta function*, Adv. in Maths. **170** (2002), 56-70.

[7] J.-F. Burnol, *On an analytic estimate in the theory of the Riemann zeta function and a theorem of Báez-Duarte*, Acta Cientifica Venezolana **54** (2003), 210-215.

[8] H. Davenport, Multiplicative number theory, 3rd edition revised by H.L. Montgomery, Springer, 2000.

[9] H.G. Diamond et K.S. McCurley, *Constructive elementary estimates for $M(x)$*, Analytic number theory, Lecture Notes in Mathematics **899**, Springer (1981), 239-253.

[10] D.A. Goldston et S.M. Gonek, *A note on $S(t)$ and the zeros of the Riemann zeta-function*, Bull. London Math. Soc. **39** (2007), 482-486.

[11] J.E. Littlewood, *Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan $\Re s > \frac{1}{2}$*, C.R.A.S. Paris **154** (1912), 263-266.

[12] H. Maier et H.L. Montgomery, *The sum of the Möbius function*, à paraître au J. London Math. Soc.

[13] H.L. Montgomery, Ten lectures at the interface between analytic number theory and harmonic analysis, CBMS **84**, AMS 1994.

[14] K. Soundararajan, *Partial sums of the Möbius function*, arXiv :0705.0723v2

[15] P. Tchebichef (sic), *Mémoire sur les nombres premiers*, J. Maths pures et appliquées, (Ser. I) **17** (1852), 366-390.

[16] E.C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function, 2$^{\text{nd}}$ edition revised by D.R. Heath-Brown, Oxford University Press, 1986.

[17] G. Tenenbaum, Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres, 3$^{\text{e}}$ édition, Belin, 2008.

[18] E.T. Whittaker et G.N. Watson, A course of modern analysis, 4$^{\text{th}}$ edition, Cambridge University Press, 1927.

BALAZARD, Michel
Institut de Mathématiques de Luminy, UMR 6206
CNRS, Université de la Méditerranée
Case 907
13288 Marseille Cedex 09
FRANCE
Adresse électronique : `balazard@iml.univ-mrs.fr`

de ROTON, Anne
Institut Elie Cartan de Nancy, UMR 7502
Nancy-Université, CNRS, INRIA
BP 239
54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex
FRANCE
Adresse électronique : `deroton@iecn.u-nancy.fr`