

# Transferts d'énergie

## IX

### dans les plasmas chauds homogènes

Au chapitre 5, nous avons étudié les échanges d'énergie dans les plasmas froids, en utilisant pour le milieu la description « charges dans le vide »; cette description nous a permis, en utilisant un modèle très simple pour tenir compte des collisions, d'interpréter les équations de bilan d'énergie dans le cas où le milieu est faiblement dissipatif. Nous aurions pu aussi bien choisir la description diélectrique, méthode plus générale, mais d'interprétation physique plus difficile.

Dans le cas des plasmas chauds, nous avons vu aux deux précédents chapitres qu'il existe des mécanismes de pertes d'énergie, même en l'absence de collision. C'est pourquoi, la description « charges dans le vide » ne permettant plus des interprétations simples, nous allons utiliser maintenant la description diélectrique; cette dernière s'applique évidemment aux plasmas froids, ce qui nous permettra de préciser certains aspects rencontrés au chapitre 5.

Nous allons tout d'abord relier la puissance moyenne dissipée dans le milieu,  $P = \frac{\delta \overline{W}_D}{\delta t}$ , aux propriétés diélectriques de ce dernier. Puis nous établirons le théorème de Poynting pour une onde réelle et une onde complexe. Nous montrerons que dans le cas d'un milieu spatialement dispersif, un flux d'énergie vient s'ajouter au vecteur de Poynting, et correspond à de l'énergie mécanique transportée par les particules : ainsi par exemple un flux d'énergie acoustique sera associé à l'onde pseudosonore.

#### 9.1. Puissance dissipée dans le milieu

Dans l'équation (5.2.9), établie au chapitre 5

$$\nabla \cdot \bar{S} + \frac{\partial}{\partial t} \overline{W}_{EM} = -\frac{1}{4} (\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^*) e^{-2\gamma t}$$

le terme du second membre a pu être interprété comme la puissance  $\frac{\delta \overline{W}_D}{\delta t}$  dissipée dans le milieu, à condition de calculer  $\mathbf{J}$  pour une fréquence réelle (Cf. § 5.5.). Dans le cas où la fréquence est complexe, nous retrouverons ce résultat général au § 9.4. Pour l'instant, nous allons donc supposer essentiellement  $\alpha = \omega$  réelle,  $\gamma = 0$ .

Pour un plasma stationnaire et homogène, la composante de Fourier de  $\mathbf{J}$  est telle que

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$$

et l'énergie dissipée sur ce mode  $(\mathbf{k}, \omega)$  a pour expression

$$\begin{aligned} -\frac{\delta \overline{W}_D}{\delta t} &= -\frac{1}{4} (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^*) \\ &= -\frac{1}{4} (\mathbf{E}^* \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{E}^*) \end{aligned}$$

soit

$$(9.1.1) \quad \frac{\delta \overline{W}_D}{\delta t} = \frac{1}{2} \mathbf{E}^* \cdot \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{E}$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_h = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^\dagger)$  est la partie *hermitique*<sup>1</sup> du tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$ . En termes de tenseur diélectrique  $\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_0 \boldsymbol{\kappa}$ , on a  $\boldsymbol{\sigma} = i\omega \epsilon_0 (1 - \boldsymbol{\kappa})$ , d'où

$$(9.1.2) \quad \boldsymbol{\sigma}_h = \epsilon_0 \omega \boldsymbol{\kappa}_a$$

$\boldsymbol{\kappa}_a = \frac{1}{2i} (\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}^\dagger)$  étant la partie *antihermitique* du tenseur  $\boldsymbol{\kappa}$ . Alors

$$(9.1.3) \quad \frac{\delta \overline{W}_D}{\delta t} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \omega \boldsymbol{\kappa}_a \cdot \mathbf{E}.$$

Si  $\boldsymbol{\sigma}_h(\omega)$  [ou  $\boldsymbol{\kappa}_a(\omega)$ ] est nul, le milieu est dit sans perte.

Reprenons l'exemple des oscillations longitudinales de hautes fréquences d'un plasma froid collisionnel, déjà étudié au § 5.5. La constante diélectrique longitudinale  $\kappa_\parallel$  vaut alors, pour  $\alpha$  complexe

$$(9.1.4) \quad \kappa(\alpha) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\alpha^2} \left( 1 - i \frac{\nu_{0e}}{\alpha} \right)$$

et l'équation de dispersion  $\kappa(\alpha) = 0$  s'écrit, au premier ordre en  $\gamma$  et  $\nu_{0e}$

$$(9.1.5) \quad \kappa_h(\alpha) = \kappa_h(\omega - i\gamma) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0$$

1.  $\boldsymbol{\sigma}^\dagger$  est le conjugué hermitique de  $\boldsymbol{\sigma}$  [complexe conjugué du transposé :  $(\boldsymbol{\sigma}^\dagger)_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^*$ ].

$$(9.1.6) \quad \kappa_a(\alpha) = \kappa_a(\omega - i\gamma) = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left( \frac{2\gamma}{\omega} - \frac{\nu_{0e}}{\omega} \right) = 0$$

conduisant à la solution  $\alpha = \omega_p - i\frac{\nu_{0e}}{2}$ , déjà mentionnée au chapitre 5. L'équation (9.1.6) montre bien que l'expression (9.1.3), en prenant la valeur de  $\kappa_a$  pour la fréquence complexe  $\alpha$ , conduirait à  $\frac{\delta \bar{W}_D}{\delta t} = 0$  : il n'y aurait pas de pertes dans le milieu! Au contraire, la valeur  $\kappa_a(\omega)$ , pour la partie réelle  $\omega$  de la fréquence  $\alpha$ , est différente de zéro; en effet, de

$$(9.1.7) \quad \kappa(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left( 1 - \frac{i\nu_{0e}}{\omega} \right)$$

on tire

$$(9.1.8) \quad \kappa_h(\omega) \neq \kappa_h(\alpha) = 0$$

$$(9.1.9) \quad \kappa_a(\omega) = \frac{\nu_{0e}}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{\nu_{0e}}{\omega} \quad \text{pour } \omega = \omega_p.$$

D'après (9.1.3), on retrouve alors le résultat (5.5.13) (avec  $\bar{W}_E = \bar{W}_K$ )

$$\begin{aligned} \frac{\delta \bar{W}_D}{\delta t} &= \frac{1}{2} \epsilon_0 |E|^2 \omega \kappa_a(\omega) = \frac{1}{2} \epsilon_0 |E|^2 \nu_{0e} = \frac{\nu_{0e}}{2} (4\bar{W}_E) \\ &= 2\nu_{0e} \bar{W}_E = 2\nu_{0e} \bar{W}_K = \frac{\delta \bar{W}_E}{\delta t}. \end{aligned}$$

## 9.2. Théorème de Poynting pour une onde réelle (k réel, fréquence réelle)

A l'aide des équations de Maxwell

$$(9.2.1) \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \boldsymbol{\kappa} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \end{cases}$$

le théorème de Poynting instantané s'écrit encore sous la forme (5.1.5), avec une densité d'énergie totale instantanée  $W_0$  telle que

$$(9.2.2) \quad \frac{\partial W_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{E} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (W_M + W_{EP})$$

où  $W_{EP}$  représente à la fois l'énergie électrique de l'onde et l'énergie cinétique des particules (il représente la somme des énergies instantanées  $W_E + W_K$  de l'équation (5.1.7)).

Pour les grandeurs moyennes dans le temps, associées à un mode où  $\mathbf{k}$  et  $\omega$  sont réels, le théorème de Poynting s'écrira (Cf. 5.3.1))

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2} \Re e [(\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}^*] = -\frac{1}{2} \Re e [(\mathbf{k} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{E}] \\ &= 2\omega \bar{W}_M = \frac{1}{4} \omega \varepsilon_0 (\mathbf{E}^* \cdot \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\kappa}^* \cdot \mathbf{E}^*). \end{aligned}$$

Par une transformation analogue à celle du paragraphe précédent, avec la partie hermitique  $\boldsymbol{\kappa}_h$  du tenseur  $\boldsymbol{\kappa}$ ,  $\boldsymbol{\kappa}_h = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\kappa}^\dagger)$ , il vient, pour les densités d'énergie moyennes

$$(9.2.3) \quad \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{S}} = 2\omega \bar{W}_M = 2\omega \bar{W}_{EP}$$

où  $\bar{W}_M$  est défini en (5.2.10), et en posant

$$(9.2.4) \quad \bar{W}_{EP} = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \boldsymbol{\kappa}_h \cdot \mathbf{E}.$$

Il résulte de (9.2.3) la relation

$$(9.2.5) \quad \bar{W}_M = \bar{W}_{EP}$$

qui correspond à (5.5.20), et exprime l'égalité entre les deux formes d'énergies, magnétique d'une part, et, d'autre part, électrostatique et associée aux particules. Mais  $\bar{W}_{EP}$  ne représente pas la somme des énergies moyennes électrostatique et cinétique des particules (Cf. (5.20)); par conséquent, nous allons le voir, la somme  $\bar{W}_M + \bar{W}_{EP}$  n'est pas la densité moyenne d'énergie totale.

### 9.3. Théorème de Poynting pour un milieu faiblement dissipatif ( $\mathbf{k}$ réel, fréquence complexe)

Pour une variation temporelle en  $e^{-i\alpha t}$  avec  $\alpha = \omega - i\gamma$ , les équations de Maxwell s'écrivent

$$(9.3.1) \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = i\alpha \mu_0 \mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = -i\alpha \varepsilon_0 \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{E}. \end{cases}$$

D'après (5.2.6), il vient

$$(9.3.2) \quad \nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{i}{4} [(\alpha - \alpha^*) \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* + \varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot (\alpha \boldsymbol{\kappa} - \alpha^* \boldsymbol{\kappa}^\dagger) \cdot \mathbf{E}] e^{-2\gamma t}$$

où  $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}(\alpha)$ . En développant  $\boldsymbol{\kappa}(\omega - i\gamma)$  au voisinage de  $\omega$  réelle, avec  $\gamma \ll \omega$ , on a, au premier ordre en  $\gamma$

$$\boldsymbol{\kappa}(\alpha) = \boldsymbol{\kappa}(\omega) - i\gamma \frac{\partial}{\partial \omega} \boldsymbol{\kappa}(\omega)$$

soit

$$(9.3.3) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\kappa}_h(\alpha) = \boldsymbol{\kappa}_h(\omega) + \gamma \frac{\partial}{\partial \omega} \boldsymbol{\kappa}_a(\omega) \simeq \boldsymbol{\kappa}_h(\omega) \\ \boldsymbol{\kappa}_a(\alpha) = \boldsymbol{\kappa}_a(\omega) - \gamma \frac{\partial}{\partial \omega} \boldsymbol{\kappa}_h(\omega) \end{cases}$$

puisque  $\kappa_a(\omega)$  est lui-même du premier ordre en  $\gamma$  (ce que l'on vérifiera par la suite). Alors

$$\begin{aligned} \alpha \kappa(\alpha) - \alpha^* \kappa^\dagger(\alpha) &= -2i [\gamma \kappa_h(\alpha) - \omega \kappa_a(\alpha)] \\ &= -2i \left\{ \gamma [\kappa_h(\omega) + \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \kappa_h(\omega)] - \omega \kappa_a(\omega) \right\}. \end{aligned}$$

D'où

$$(9.3.4) \quad \alpha \kappa(\alpha) - \alpha^* \kappa^\dagger(\alpha) = -2i \left\{ \gamma \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \kappa_h(\omega)] - \omega \kappa_a(\omega) \right\}.$$

En portant (9.3.4) dans (9.3.2), il vient

$$(9.3.5) \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{S}} = \left\{ 2\gamma \left[ \frac{1}{4} \mu_0 \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \kappa_h(\omega)] \right) \cdot \mathbf{E} \right] - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \omega \kappa_a(\omega) \cdot \mathbf{E} \right\} e^{-2\gamma t}$$

qui peut s'écrire, en interprétant le terme en  $2\gamma$  d'après (5.2.5)

$$(9.3.6) \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{S}} + \frac{\partial \bar{W}_0}{\partial t} = - \frac{\delta \bar{W}_D}{\delta t}$$

où, en accord avec (9.1.3) (il n'y avait pas le facteur  $e^{-2\gamma t}$  puisqu'alors  $\gamma$  était nul)

$$(9.3.7) \quad \frac{\delta \bar{W}_D}{\delta t} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \omega \kappa_a(\omega) \cdot \mathbf{E} e^{-2\gamma t}$$

et où

$$(9.3.8) \quad \bar{W}_0 = \bar{W}_M + \bar{W}_\varepsilon \quad \text{avec} \quad \bar{W}_\varepsilon = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \kappa_h(\omega)] \cdot \mathbf{E} e^{-2\gamma t}$$

apparaît comme la densité d'énergie totale, somme de la densité d'énergie magnétique  $\bar{W}_M$  et de la densité d'énergie diélectrique  $\bar{W}_\varepsilon$  (sous forme à la fois de l'énergie électrostatique de l'onde et de l'énergie associée aux mouvements cohérents des particules). Dans (9.3.6), le second membre représente la puissance moyenne  $\frac{\delta \bar{W}_D}{\delta t}$  dissipée dans le milieu, par exemple, sous l'effet des collisions ou de l'agitation thermique.

La relation (9.3.6) établit donc le théorème de Poynting pour les milieux anisotropes faiblement dissipatifs et précise, même en l'absence de pertes, l'expression  $\bar{W}_0$  de la densité moyenne d'énergie totale du milieu, ce que la description « charges dans le vide » ne nous avait pas permis de faire dans le cas général d'un milieu anisotrope.

Revenons, une fois de plus, aux oscillations longitudinales d'un plasma froid collisionnel; on a, d'après (9.1.5)

$$\kappa_h = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

On en déduit ( $\bar{W}_M = 0$ )

$$(9.3.9) \quad \bar{W}_0 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \chi_h(\omega)] \cdot \mathbf{E} e^{-2\gamma t}$$

$$\bar{W}_0 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \left( 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) e^{-2\gamma t}$$

somme de l'énergie électrostatique moyenne (1<sup>er</sup> terme) et de l'énergie cinétique moyenne des charges (2<sup>e</sup> terme), qui dans ce cas correspond à la somme  $\bar{W}_E + \bar{W}_K$  du § 5.5. Ces énergies sont égales : l'équation (9.2.5) donne en effet

$$(9.3.10) \quad \bar{W}_{EP} = 0 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \chi_h \cdot \mathbf{E} e^{-2\gamma t}$$

$$= \frac{1}{4} \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) e^{-2\gamma t}$$

$$0 = \bar{W}_E - \bar{W}_K$$

et qui, nous l'avons déjà dit, traduit le fait que l'énergie instantanée est tantôt sous forme électrostatique, tantôt sous forme cinétique. On a donc

$$(9.3.11) \quad \bar{W}_0 = 2\bar{W}_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 e^{-2\gamma t}.$$

Dans le cas d'un plasma chaud, sans collision, la constante diélectrique longitudinale, pour  $\omega$  et  $k$  réels, est complexe et sa partie imaginaire a été donnée en (7.5.4) : on a donc

$$(9.3.12) \quad \chi_a(k, \omega) = -\pi \frac{\omega_p^2}{k^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)_{v=\frac{\omega}{k}}$$

d'où, d'après (9.1.3)

$$\frac{\delta \bar{W}_D}{\delta t} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \omega \chi_a e^{-2\gamma t} = \bar{W}_0 \omega \chi_a$$

identique à l'expression  $P_{//}$  trouvée en (8.7.14) pour le modèle multifaisceaux. Puisque, d'après (9.3.6) (avec  $\bar{S} = 0$ )

$$\frac{\partial \bar{W}_0}{\partial t} = -2\gamma \bar{W}_0 = -\frac{\delta \bar{W}_D}{\delta t}$$

l'amortissement  $\gamma$  est donc donné par

$$(9.3.13) \quad \gamma = \frac{1}{2\bar{W}_0} \frac{\delta \bar{W}_D}{\delta t} = \frac{1}{2} \omega \chi_a = -\frac{\pi \omega_p^2}{2k^2} \omega \left( \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)_{v=\frac{\omega}{k}}$$

en accord avec (7.5.10) (noter le changement de signe : ici  $\alpha = \omega - i\gamma$ , tandis qu'au § 7.5, on avait posé  $\alpha = \omega + i\gamma_L$ ).

#### 9.4. Atténuation des ondes dans un milieu dissipatif. Valeurs moyennes dans l'espace

Lorsque le milieu comporte des pertes faibles, il peut exister, à côté de l'amortissement dans le temps d'un mode propre ( $\mathbf{k}$  réel donné, fréquence complexe), des modes qui décroissent dans l'espace en se propageant dans une direction donnée ( $\omega$  réelle donnée, indice complexe). On devra alors définir les grandeurs moyennes dans l'espace (sur une distance grande devant la quasi-longueur d'onde  $\lambda$ ) de la même manière qu'on a défini les moyennes dans le temps (Cf. § 5.2) : avec  $\beta = \mathbf{k} + i\chi$  ( $|\chi| \ll |\mathbf{k}|$ ), on aura, pour un produit de grandeurs de la forme  $A = A_0 e^{i\beta \cdot \mathbf{r}}$ , une valeur moyenne dans l'espace (notée  $\widehat{AB}$  pour la distinguer de la valeur moyenne  $\overline{AB}$  dans le temps, en un point donné)

$$(9.4.1) \quad \widehat{AB} = \frac{1}{4} (A_0 B_0^* + A^* B_0) e^{-2\chi \cdot \mathbf{r}},$$

cette moyenne, définie à un instant donné, conduit à une variation spatiale (sur des distances grandes devant  $k^{-1} \sim \lambda$ ) de l'onde considérée à cet instant donné, caractérisée par

$$(9.4.2) \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\widehat{AB}) = -2\chi (\widehat{AB})$$

en particulier pour

$$(9.4.3) \quad \widehat{\mathbf{S}} = \frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) e^{-2\chi \cdot \mathbf{r}}$$

on aura

$$(9.4.4) \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \widehat{\mathbf{S}} = -2\chi \cdot \widehat{\mathbf{S}}.$$

Pour une onde complexe,  $\beta = \mathbf{k} + i\chi$ ,  $\alpha = \omega - i\gamma$ , on définira donc une valeur moyenne, dans le temps et dans l'espace, par <sup>1</sup>

$$\overline{\widehat{AB}} = \widehat{\overline{AB}} = \widehat{\overline{AB}} = \frac{1}{4} (A_0 B_0^* + A_0^* B_0) e^{-2\gamma t - 2\chi \cdot \mathbf{r}}$$

c'est-à-dire, d'après (5.2.6)

$$(9.4.5) \quad \overline{\widehat{AB}} = \overline{AB} e^{-2\chi \cdot \mathbf{r}}.$$

En particulier

$$(9.4.6) \quad \overline{\widehat{\mathbf{S}}} = \frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) e^{-2\gamma t - 2\chi \cdot \mathbf{r}}.$$

Multiplions scalairement (9.4.6) par  $\beta$  et par  $\beta^*$ . On a, compte tenu des équations de Maxwell, écrites pour l'onde en  $e^{i(\beta \cdot \mathbf{r} - \alpha t)}$

1. L'ordre dans lequel on effectue les moyennes est évidemment indifférent.

$$\beta \cdot \bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{4} [\alpha \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* + \alpha \varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{E}] e^{-2\gamma t - 2\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\beta^* \cdot \bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{4} [\alpha^* \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* + \alpha^* \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\kappa}^* \cdot \mathbf{E}^*] e^{-2\gamma t - 2\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{r}}$$

Par addition et soustraction on en déduit

$$(9.4.7) \quad (\beta \pm \beta^*) \cdot \bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{4} [(\alpha \pm \alpha^*) \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* + \varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot (\alpha \boldsymbol{\kappa} \pm \alpha^* \boldsymbol{\kappa}^\dagger) \cdot \mathbf{E}] e^{-2\gamma t - 2\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{r}}$$

Dans (9.4.7),  $\boldsymbol{\kappa}$  et  $\boldsymbol{\kappa}^\dagger$  sont évalués pour les valeurs  $\alpha$  et  $\beta$  : avec  $\gamma \ll \omega$  et  $|\boldsymbol{\chi}| \ll |\mathbf{k}|$ , on a donc

$$\boldsymbol{\kappa}(\beta, \alpha) = \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{k}, \omega) + i\boldsymbol{\chi} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{k}, \omega) - i\gamma \frac{\partial}{\partial \omega} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{k}, \omega)$$

et au premier ordre en  $\gamma$  et  $\boldsymbol{\chi}$  ( $\boldsymbol{\kappa}_\alpha$  étant du premier ordre en  $\gamma$  et  $\boldsymbol{\chi}$ )

$$(\alpha \boldsymbol{\kappa} + \alpha^* \boldsymbol{\kappa}^\dagger)_{\beta, \alpha} = 2\omega \boldsymbol{\kappa}_h(\mathbf{k}, \omega)$$

$$(\alpha \boldsymbol{\kappa} - \alpha^* \boldsymbol{\kappa}^\dagger)_{\beta, \alpha} = i \left[ 2\omega \boldsymbol{\kappa}_\alpha - 2\gamma \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \boldsymbol{\kappa}_h) + \omega 2\boldsymbol{\chi} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \boldsymbol{\kappa}_h \right]_{\mathbf{k}, \omega}$$

La somme dans (9.4.7) conduit donc à

$$(9.4.8) \quad \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{S}} = \omega (\bar{\mathbf{W}}_M + \bar{\mathbf{W}}_{EP})$$

où  $\bar{\mathbf{W}}_M$  et  $\bar{\mathbf{W}}_{EP}$  sont déduits, avec (9.4.5), des expressions (5.2.10) et (9.2.4). La relation (9.4.8) est évidemment valable lorsque  $\gamma$  ou/et  $\boldsymbol{\chi}$  sont nuls, c'est-à-dire pour un plasma sans pertes, et correspond (9.2.3).

En effectuant la différence dans (9.4.7), on a

$$2\boldsymbol{\chi} \cdot \bar{\mathbf{S}} = \left[ -2\gamma (\bar{\mathbf{W}}_M + \bar{\mathbf{W}}_\varepsilon) + \frac{\delta \bar{\mathbf{W}}_D}{\delta t} + 2\boldsymbol{\chi} \cdot \omega \frac{\varepsilon_0}{4} \mathbf{E}^* \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \boldsymbol{\kappa}_h \right) \cdot \mathbf{E} \right] e^{-2\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{r}}$$

où  $\bar{\mathbf{W}}_\varepsilon$  et  $\frac{\delta \bar{\mathbf{W}}_D}{\delta t}$  sont définis en (9.3.8) et (9.3.7), le signe  $\sim$  se référant au produit scalaire  $\boldsymbol{\chi} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}$ ; elle s'écrit

$$(9.4.9) \quad -2\boldsymbol{\chi} \cdot (\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{T}}) = 2\gamma \bar{\mathbf{W}}_0 - \frac{\delta \bar{\mathbf{W}}_D}{\delta t}$$

$\bar{\mathbf{W}}_0$  et  $\frac{\delta \bar{\mathbf{W}}_D}{\delta t}$  étant définis avec (9.4.5), et en posant

$$(9.4.10) \quad \bar{\mathbf{T}} \sim = -\frac{1}{4} \varepsilon_0 \omega \mathbf{E}^* \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \boldsymbol{\kappa}_h(\omega) \right] \cdot \mathbf{E} e^{-2\gamma t - 2\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{r}}$$

vecteur colinéaire à  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}$ , indiqué par le signe  $\sim$ .

L'équation (9.4.9) exprime le théorème de Poynting dans le cas des ondes complexes, pour les moyennes dans le temps et dans l'espace, d'après (9.4.2.),

$$(9.4.11) \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{T}}) + \frac{\partial}{\partial t} \bar{W}_0 = - \frac{\delta \bar{W}_D}{\delta t}.$$

Dans (9.4.9) et (9.4.11), le vecteur  $\bar{\mathbf{T}}$  apparaît comme un flux supplémentaire d'énergie, qui existera chaque fois que le milieu sera spatialement dispersif ( $\kappa$  fonction de  $\mathbf{k}$ ).

Pour un mode propre ( $\beta = \mathbf{k}$  réel,  $\chi = 0$ ), (9.4.9) définit l'amortissement de l'onde (en  $e^{-2\gamma t}$ ) [Cf. (9.3.13)]

$$(9.4.12) \quad \gamma = \frac{1}{2} \frac{\delta \bar{W}_D}{\delta t} / \bar{W}_0 = \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \omega \kappa_a(\omega) \cdot \mathbf{E}}{\mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* + \epsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \kappa_\lambda(\omega)] \cdot \mathbf{E}}.$$

Pour une onde qui décroît en se propageant ( $\alpha = \omega$  réelle,  $\gamma = 0$ ), (9.4.9) définit l'inverse  $\chi$  de la longueur d'atténuation (dans la direction du flux d'énergie)

$$(9.4.13) \quad \mathbf{k} \cdot (\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{T}}) = \chi |\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{T}}| = \frac{1}{2} \frac{\delta \bar{W}_D}{\delta t}.$$

Au chapitre 2, nous avons montré (Cf. (2.2.41)) que le module la vitesse de groupe était égal au rapport  $\frac{\chi}{\chi}$

$$|v_g| = \frac{|\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{T}}|}{\bar{W}_0}$$

et s'identifie donc avec la vitesse de propagation de l'énergie. Nous allons montrer cette propriété d'une manière plus précise au § suivant.

## 9.5. Vitesse de groupe dans un milieu sans pertes [ $\kappa_a(\omega) = 0$ ]

Pour un milieu sans pertes ( $\mathbf{k}$  et  $\omega$  réels), on a, d'après (9.4.8)

$$(9.5.1) \quad \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{S}} = \omega (\bar{W}_M + \bar{W}_{EP}).$$

A partir de ce mode ( $\mathbf{k}$ ,  $\omega$ ), effectuons une variation pour passer à un mode propre voisin  $\mathbf{k} + \delta \mathbf{k}$ ,  $\omega + \delta \omega$  (avec  $\mathbf{E} + \delta \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H} + \delta \mathbf{H}$ ), le milieu étant alors caractérisé par

$$(9.5.2) \quad \kappa(\mathbf{k} + \delta \mathbf{k}, \omega + \delta \omega) = \left( 1 + \delta \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} + \gamma \frac{\partial}{\partial \omega} \right) \kappa(\mathbf{k}, \omega).$$

Par variation de (9.5.1), il vient

$$(9.5.3) \quad \delta \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{S}} + \mathbf{k} \cdot \delta \bar{\mathbf{S}} = \delta \omega (\bar{W}_M + \bar{W}_{EP}) + \omega (\delta \bar{W}_M + \delta \bar{W}_{EP}).$$

On calcule, directement à partir des équations de Maxwell,  $\mathbf{k} \cdot \delta \bar{\mathbf{S}}$  et  $\delta(\bar{W}_M + \bar{W}_{EP})$

$$\mathbf{k} \cdot \delta \bar{\mathbf{S}} = \frac{\omega}{4} [\mu_0(\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{H}^* + \mathbf{H}^* \cdot \delta \mathbf{H}) + \varepsilon_0(\delta \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\kappa}^* \cdot \mathbf{E}^* + \delta \mathbf{E}^* \cdot \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{E})]$$

où, puisque  $\boldsymbol{\kappa}_a = 0$ ,  $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^\dagger = \boldsymbol{\kappa}_h$  ; de  $\bar{W}_M$  et  $\bar{W}_{EP}$ , on tire

$$\delta \bar{W}_M = \frac{1}{4} \mu_0 (\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{H}^* + \mathbf{H}^* \cdot \delta \mathbf{H})$$

$$\delta \bar{W}_{EP} = \frac{1}{4} \varepsilon_0 (\delta \mathbf{E}^* \cdot \boldsymbol{\kappa}_h \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E}^* \cdot \boldsymbol{\kappa}_h \cdot \delta \mathbf{E} + \mathbf{E}^* \cdot \delta \boldsymbol{\kappa}_h \cdot \mathbf{E}).$$

Alors (9.5.3) devient

$$\delta \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{S}} = \delta \omega (\bar{W}_M + \bar{W}_{EP}) + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \omega \mathbf{E}^* \cdot \delta \boldsymbol{\kappa}_h \cdot \mathbf{E}$$

qui, compte tenu de (9.5.2), se met sous la forme

$$(9.5.4) \quad \delta \mathbf{k} \cdot (\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{T}}) = \bar{W}_0 \delta \omega$$

où  $\bar{W}_0$  et  $\bar{\mathbf{T}}$  sont définis en (9.3.8) et (9.4.10), avec  $\gamma = \boldsymbol{\chi} = 0$ . On retrouve le vecteur  $\bar{\mathbf{T}}$  qui représente une densité de flux d'énergie moyenne liée au milieu.

Pour  $\omega$  fixé, (9.5.4) donne

$$(9.5.5) \quad \delta \mathbf{k} \cdot (\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{T}}) = 0.$$

Traçons la surface des indices. Si l'on passe d'un mode propre  $(\mathbf{k}, \omega)$  à un mode propre voisin  $(\mathbf{k} + \delta \mathbf{k}, \omega)$ , le vecteur  $\delta \mathbf{k}$  est tangent à cette surface. Il en résulte que le flux d'énergie moyenne  $\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{T}}$  est perpendiculaire à la surface des indices (fig. 9.1), généralisant le résultat déjà obtenu au chapitre 5, pour la direction du flux d'énergie.

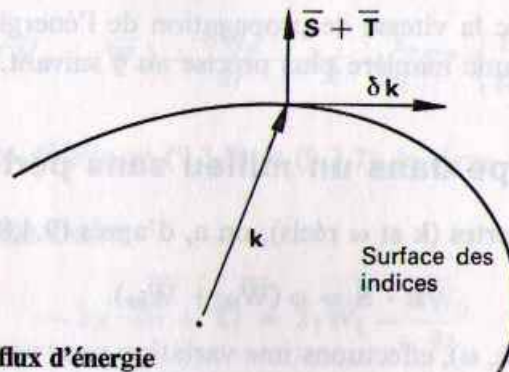


FIGURE 9.1.

Surface des indices et direction du flux d'énergie

De (9.5.4), on tire l'expression de la composante de la vitesse de groupe dans la direction  $\xi$  du flux d'énergie

$$(9.5.6) \quad (v_g)_\xi = \left( \frac{\delta \omega}{\delta \mathbf{k}} \right)_\xi = \frac{\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{T}}}{\bar{W}_0} = \mathbf{v}_E$$

qui est donc la vitesse d'énergie, et dont la direction est celle du flux total d'énergie.

Dans le cas des plasmas froids,  $\kappa$  est indépendant de  $\mathbf{k}$ , et donc  $\bar{\mathbf{T}} = 0$  : le vecteur  $\bar{\mathbf{S}}$  représente alors le flux total d'énergie, perpendiculaire à la surface des indices, et on a

$$v_g = \bar{\mathbf{S}}/\bar{W}_0 = v_E. \tag{9.5.6}$$

A titre d'exemple, appliquons les résultats précédents aux oscillations longitudinales d'un plasma chaud.

Application aux ondes plasmas 9.5.1

Nous avons déjà montré, pour la puissance dissipée dans le milieu, l'accord entre le calcul direct (chap. 7 et 8) et l'expression (9.1.3). Pour calculer la densité et le flux d'énergie associés au milieu, nous prendrons l'expression approchée

$$\kappa_h = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{3k^2}{\omega^2} V_e^2, \quad V_e^2 = \frac{KT_e}{m_e} \tag{9.5.7}$$

qui correspond à l'expression (7.5.3) de Bohm et Gross, en y négligeant l'amortissement. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \kappa_h) &= 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{3k^2}{\omega^2} V_e^2 \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} (\kappa_h) &= -2\mathbf{k} \frac{\partial \kappa_h}{\partial (k^2)} = -2\mathbf{k} \frac{3V_e^2}{\omega^2}. \end{aligned}$$

D'où, d'après (9.3.8) et (9.4.10)

$$\bar{W}_0 = \left( 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{3k^2}{\omega^2} V_e^2 \right) \bar{W}_E = 2\bar{W}_E, \quad \text{d'après (7.4.3)} \tag{9.5.7}$$

$$\bar{\mathbf{T}} = 6\bar{W}_E \frac{V_e^2}{\omega^2} \mathbf{k} = 3\bar{W}_0 \frac{V_e^2}{\omega^2} \mathbf{k}. \tag{9.5.8}$$

Le terme supplémentaire dans (9.5.7) apparaît comme une correction de température et va conduire à remplacer l'égalité  $\bar{W}_E = \bar{W}_K$  (Cf. (5.5.20)) par  $\bar{W}_E = \bar{W}_K + \bar{W}_P$  où  $\bar{W}_P$  représente l'énergie potentielle moyenne liée à la compression du milieu; cette dernière est mesurée par le travail que le milieu peut fournir en revenant de la pression  $P$  à la pression  $P_0$  (le volume variant alors de  $V$  à  $V_0$ ); on a, pour les grandeurs instantanées

$$W_P = \int_{V_0}^V P_1 dV, \quad P_1 = P - P_0, \quad dV = d(V_0 + V_1) = dV_1.$$

Pour une compression adiabatique, on tire de  $PV^\gamma = C^{te}$ ,  $P_1 = -\gamma P_0 \frac{V_1}{V_0}$  d'où

$$W_P = \frac{1}{2} \gamma P_0 V_0 \left( \frac{V_1}{V_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \gamma n_0 KT \left( \frac{n_1}{n_0} \right)^2 \tag{9.5.9}$$

cel-00339201, version 1 - 11 Dec 2008

puisque  $\frac{V_1}{V_0} = -\frac{n_1}{n_0}$ ,  $n_1$  étant la perturbation de densité. Pour les grandeurs moyennes, on a donc, avec  $\gamma = 3$

$$(9.5.10) \quad \bar{W}_P = \frac{3}{4} n_0 K T \frac{n_1 n_1^*}{n_0^2}$$

Or, en prenant  $\bar{W}_E \# \bar{W}_K = \frac{1}{4} n_0 m v_1 \cdot v_1^*$ , le terme correctif, dépendant de  $k$  dans (9.5.7), s'écrit

$$\frac{3}{4} \frac{K T}{m} \frac{k^2}{\omega^2} n_0 m v_1 \cdot v_1^*$$

qui, puisque  $v_1$  est colinéaire à  $k$ , et en tenant compte de l'équation de continuité  $\omega n_1 = n_0 k v_1$ , redonne (9.5.10). On a donc

$$(9.5.11) \quad \bar{W}_0 = \bar{W}_E + \bar{W}_K + \bar{W}_P \quad \text{d'où} \quad \bar{W}_E = \bar{W}_K + \bar{W}_P$$

Le vecteur  $\bar{T}$  s'interprète comme le flux moyen d'énergie, transporté par la perturbation. En effet, le flux total d'énergie a pour valeur instantanée

$$\Phi = W_0 v_\varphi = (W_E + W_K + W_P) v_\varphi$$

On vérifie que, comme dans le cas des plasmas froids, le flux d'énergie  $W_E v_\varphi$ , associé à l'énergie électrostatique, compense exactement le flux d'énergie associé à l'oscillation des particules : il ne restera donc que le flux de l'énergie d'agitation thermique. En effet, avec  $n_1 v_\varphi = n_0 v_1$ , et  $i \epsilon_0 k E = q n_1$  on a

$$W_K v_\varphi = \frac{1}{2} n_0 m v_1^2 v_\varphi = \frac{1}{2} m n_1 v_1 \left( \frac{\omega_p^2}{k^2} + 3 V_e^2 \right), \quad \text{d'après (7.5.3)}$$

$$W_E v_\varphi = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 v_\varphi = \frac{1}{2} m n_1 v_1 \frac{\omega_p^2}{k^2}$$

et, de (9.5.9),

$$W_P v_\varphi = \frac{3}{2} K T \frac{n_1^2}{n_0} v_\varphi = \frac{3}{2} K T n_1 v_1$$

D'où

$$\Phi = 3 K T n_1 v_1$$

dont la valeur moyenne est

$$\bar{\Phi} = 3 K T \bar{n_1 v_1} = \frac{3}{4} K T (n_1 v_1^* + n_1^* v_1) = \frac{6 K T}{v_\varphi} \frac{1}{4} n_0 v_1 v_1^*$$

$$\bar{\Phi} = \frac{6 V_e^2}{v_\varphi} \bar{W}_K = |\bar{T}|$$

en prenant encore  $\bar{W}_E \# \bar{W}_K$  pour évaluer  $\bar{T}$  dans (9.5.8).

On vérifie bien que la vitesse de groupe est dans la direction de  $k$  et a pour module

$$(9.5.12) \quad v_g = \frac{\bar{T}}{\bar{W}_0} = \frac{6\bar{W}_E V_e^2 \frac{k}{\omega}}{2\bar{W}_E} = \frac{3V_e^2}{v_\varphi}$$

en accord avec (7.5.13).

Application aux ondes pseudosonores 9.5.2

On a, d'après (7.3.11) et (7.5.16), avec  $\omega_p = k_{De} V_e$

$$(9.5.13) \quad x_h = 1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2} - \frac{3k^2 V_i^2}{\omega^2} + \frac{k_{De}^2}{k^2} \quad V_i^2 = \frac{KT_i}{m_i}$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial \omega} (\omega x_h) = 1 + \frac{\Omega_p^2}{\omega^2} + \frac{3k^2 V_i^2}{\omega^2} + \frac{k_{De}^2}{k^2}$$

$$\omega \frac{\partial}{\partial \omega} (x_h) = -2 \left[ \frac{3V_i^2}{v_\varphi} + v_\varphi \frac{k_{De}^2}{k^2} \right] \quad \text{où} \quad v_\varphi^2 = V_{Ps}^2 = \frac{KT_e}{m_i}$$

Dans  $\bar{W}_0$ , les termes ioniques s'interprètent de la même manière que les termes électroniques dans l'exemple précédent : d'où

$$\bar{W}_0 = \bar{W}_E + \bar{W}_K^{(i)} + \bar{W}_P^{(i)} + \frac{k_{De}^2}{k^2} \bar{W}_E;$$

cependant on a  $\bar{W}_K^{(i)}/\bar{W}_E = \Omega_p^2/\omega^2 \gg 1$ , et  $\bar{W}_P^{(i)}/\bar{W}_E = 3V_i^2/V_{Ps}^2 = 3T_i/T_e \ll 1$ ; de plus, le dernier terme (électronique) est du même ordre que  $\bar{W}_K^{(i)}$ : en effet  $(k_{De}^2/k^2) \bar{W}_E = \bar{W}_K^{(i)}$ .

Donc

$$(9.5.14) \quad \bar{W}_0 \simeq 2\bar{W}_K^{(i)}$$

et  $\bar{T}$  s'écrit, en module

$$(9.5.15) \quad \bar{T} = 2V_{Ps} \left[ \bar{W}_K^{(i)} + \frac{3V_i^2}{V_{Ps}^2} \right] \approx 2\bar{W}_K^{(i)} V_{Ps}$$

(9.5.14) et (9.5.15) montrent que toute l'énergie est pratiquement contenue dans l'onde sous forme cinétique  $2\bar{W}_K^{(i)} = \left( \frac{\Omega_p^2}{\omega^2} + \frac{k_{De}^2}{k^2} \right) \bar{W}_E$ , et que le flux d'énergie, comme il fallait s'y attendre, met en jeu la vitesse  $V_{Ps}$  qui, dans ce cas, se confond avec la vitesse de groupe  $v_g = \frac{\bar{T}}{\bar{W}_0}$ .