Interpolation polynomiale et rationnelle d'une fonction de plusieurs variables complexes

Claudine Chaffy-Camus

▶ **To cite this version:**

Claudine Chaffy-Camus. Interpolation polynomiale et rationnelle d'une fonction de plusieurs variables complexes. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1984. Français. NNT : . tel-00311635

HAL Id: tel-00311635

https://theses.hal.science/tel-00311635

Submitted on 19 Aug 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

l'Institut National Polytechnique de Grenoble

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE 3ème CYCLE
«Mathématiques appliquées»

par

Claudine CHAFFY–CAMUS

INTERPOLATION POLYNOMIALE ET RATIONNELLE D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES.

Thèse soutenue le 29 juin 1984 devant la commission d'examen.

C. BREZINSKI	Président
J. DELLA–DORA	Examinateurs
M. DUC–JACQUET	
P.J. LAURENT	

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Année universitaire 1982-1983

Président de l'Université : M. TANCHE

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

(RANG A)

SAUF ENSEIGNANTS EN MEDECINE ET PHARMACIE

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

ARNAUD Paul	Chimie organique
ARVIEU Robert	Physique nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S.
AYANT Yves	Physique approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale C.N.R.S. (labo de magnétisme)
BARJON Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose-Biologie
BARRA Jean-René	Statistiques - Mathématiques appliquées
BELORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude (M.)	Mathématiques pures
BERNARD Alain	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
BILLET Jean	Géographie
BONNIER Jean-Marie	Chimie générale
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
CRABBE Pierre (détaché)	C.E.R.M.O.
CYROT Michel	Physique du solide
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude (M.)	M.I.A.G. Mathématiques appliquées
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique

.../...

GASTINEL Noël	Analyse numérique - Mathématiques appliquées
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KAHANE André (détaché DAFCO)	Physique
KAHANE Josette	Physique
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
KUPTA Yvon	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Thermodynamique
LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires I.S.N.
LOUP Jean	Géographie
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAYNARD Roger	Physique du solide
MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie (géologie)
MOZIERES Philippe	Spectrométrie - Physique
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (biologie végétale)
PAYAN Jean-Jacques (détaché)	Mathématiques pures
PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRIAUX Jacques	Géologie
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
RICHARD Lucien	Biologie végétale
RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
SENGEL Philippe	Biologie animale
SERGERAERT Francis	Mathématiques pures
SOUTIF Michel	Physique
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique nucléaire I.S.N.
VAN CUTSEN Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VIALON Pierre	Géologie

PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

ADIBA Michel	Mathématiques pures
ARMAND Gilbert	Géographie

.../...

AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
BEGUIN Claude (M.)	Chimie organique
BOEHLER Jean-Paul	Mécanique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BORNAREL Jean	Physique
BRUN Gilbert	Biologie
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKOVE Claude (M.)	Géologie
LE BRETON Alain	Mathématiques appliquées
LONGEQUEUE Nicole	Sciences nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physiques
LUNA Domingo	Mathématiques pures
MASCLE Georges	Géologie
NEMOZ Alain	Thermodynamique (CNRS - CRTBT)
OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude (détaché)	Physique du solide
PIBOULE Michel	Géologie
PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
ROBERT Gilles	Mathématiques pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
ROSSI André	Physiologie végétale
SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
SARROT REYNAUD Jean	Géologie
SAXOD Raymond	Biologie animale
SOUTIF Jeanne	Physique
SCHOOL Pierre-Claude	Mathématiques appliquées
STUTZ Pierre	Mécanique
SUBRA Robert	Chimie
VIDAL Michel	Chimie organique
VIVIAN Robert	Géographie

Je tiens à exprimer ici ma profonde gratitude à mon Directeur de recherche Jean DELLA DORA, pour son attention et les précieux conseils qu'il m'a prodigués tout au long de ce travail, ainsi qu'à Monsieur Noël GASTINEL, qui m'a quelquefois secourue.

Je remercie vivement Monsieur Claude BREZINSKI d'avoir accepté de présider cette thèse, et Messieurs Marc DUC-JACQUET et Pierre-Jean LAURENT d'avoir participé au jury.

Enfin, je n'oublie pas les membres de l'équipe TIM 3, et en particulier Claire DI CRESCENZO et Evelyne TOURNIER pour l'aide qu'elles m'ont apportée en calcul formel.

INTERPOLATION POLYNOMIALE ET RATIONNELLE D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES

Table des matières

pages

0. Introduction 9

1. Une construction "homogène" d'approximants de Padé à deux variables complexes

1 Introduction 19
2 Fonctions holomorphes de deux variables complexes 21
I Construction d'approximants de Padé d'une fonction holomorphe dans le polydisque $\Delta = D(0,R_1) \times D(0,R_2)$ de $\mathbb{C}^2$ 22
1) Polynôme de Taylor $[L/0]_\lambda$ de F_λ . 23
2) Fraction $[L/1]_\lambda$ de F_λ . 24
3) Plus généralement, fraction $[L/M]_\lambda$ de F_λ 25
II Quelques propriétés algébriques des approximants "homogènes"
1) Projection 28
2) Dualité
3) Invariance homographique des approximants diagonaux 29
4) Invariance par certains changements de variables. 30
III Formules intégrales d'erreur et questions de convergence
1) Interpolation polynômiale 31
2) Exemple d'interpolation rationnelle 36
Conclusion 41
Références 43

2. E-algorithme et approximants de Padé à plusieurs variables

pages

Introduction 45

I E-algorithme et approximants de Padé "homogènes"

1) Moyen de calcul 51

2) Exemples 53

3) Première généralisation: changement de paramétrisation de $\mathbb{C}^2$. 54

II Initialisation de l'E-algorithme avec des sommes partielles généales 57

1) Transformation de Thanks 58

2) Propriétés 60

III qd. algorithme et approximants de Padé

1) Définition 64

2) Application aux approximants de Padé usuels 66

3) Utilisation dans le cadre des approximants "homogènes". 68

Références 70

Calcul d'approximants de Padé à plusieurs variables dans le langage de calcul formel REDUCE

1) E-algorithme appliqué à des suites numériques 73

2) E-algorithme appliqué à des séries de Mac-Laurin 79

3) E-algorithme et approximants de Padé "homogènes" 82

4) E-algorithme et approximants de Padé "carrés". 93

5) qd. algorithme et approximants de Padé "homogènes". 94

3. Formule d'erreur dans l'interpolation rationnelle multipoints d'une fonction de la variable complexe

pages

I Rappels sur l'interpolation d'Hermite d'une fonction holomorphe

1) Notations 105

2) Polynôme de Newton et expression intégrale du reste 106

II Interpolation rationnelle

1) Problème initial 108

2) Problème linéaire 109

3) Cas de l'approximation de Padé en 0 111

4) N-points Padé 113

III Forme intégrale du reste relatif au couple $(u^{[L/M]}, v^{[L/M]})$.

1) Lemme 118

2) Remarques 121

IV Extension du théorème de Montessus à l'approximation rationnelle multipoints.

1) Rappel: théorème de Montessus 122

2) Cas des multipoints 123

3) Remarques 124

4) Preuve détaillée 125

5) Pôles multiples 130

Conclusion 131

Références 132

Quelques références sur les algorithmes de calcul d'approximants de Padé. Newton 133

4. Interpolation polynômiale d'une fonction de plusieurs variables complexes

Introduction

A) Formules de Taylor et Newton "rectangle". 135

I Taylor

pages

1) Polynôme d'interpolation 139
2) Reste 140
3) Interprétation des termes du reste 142
4) Remarque 144

II Newton

1) Construction
2) Reste 147
3) Différences divisées à deux variables, formules intégrales 148
4) Convergence 150
5) Forme de Lagrange des polynômes d'interpolation "rectangles" 151

B) Formules de Taylor et Newton "triangle"

I Taylor

1) Polynôme d'interpolation 152
2) Reste 153

II Newton

1) Construction 154
2) Forme intégrale du reste 155

C) Généralisation 156
Conclusion 158
Références 160

Quelques polynômes de Newton à deux variables calculés en REDUCE. 161

5. Formules d'Hermite et différences divisées généralisées

I Introduction 169

1) Motivation: forme intégrale de l'erreur dans l'interpolation polynômiale.
2) Polynômes d'Hermite 170

pages

II Formalisme de Grothendieck
1) Résidus dans $\mathbb{C}^n$ 179
2) Propriétés 182
3) Théorème de Jacobi-Kronecker, application à la formule de Lagrange 192
4) Utilisation de ce formalisme dans un cas particulier
III Exemple : points à l'intersection d'une courbe algébrique et d'un ensemble fini de droites. 197
1) Système triangulaire et "différences divisées" 198
2) Existence de formules d'Hermite 199
IV Etude d'un réseau : deux systèmes de droites D_i $(0 \leq i \leq m)$ et E_j $(0 \leq j \leq n)$
1) Interpolation de Newton 212
2) Résolution du système triangulaire $TA = F$ quand les droites D_i sont parallèles 217
3) Différences divisées (doubles) et résidus 223
V Interpolation polynômiale "circulaire" d'une fonction de deux variables complexes.
1) Différences divisées. 225
Références 228

6. Approximants de Padé multipoints d'une fonction de deux variables complexes
Introduction 229
A) Approche théorique : équations
I Ecriture des équations 229
1) Formule de Leibniz établie par le procédé tensoriel 231
2) Considérations sur la nature de P, Q et des conditions d'interpolation. 233

pages

II Exemples

1) Tentative de prolongement des approximants "homogènes". 233

2) Exemple de résolution des équations 239

B) Approche constructive : fractions continues d'interpolation à deux variables.

I Parallèle entre l'interpolation polynômiale et l'interpolation rationnelle 245

1) Développements de Newton et de Thiele

2) Cas limite où tous les x_i valent 0 249

II Construction de fractions continues d'interpolation à deux variables.

1) Principe 251

2) Généralisations 254

3) Interprétation utilisant des transformations homographiques (dans deux directions) 259

4) Conclusion

Références 260

Fractions continues à deux variables : quelques exemples des espaces vectoriels auxquels appartiennent numérateur et dénominateur. 261

0. Introduction

Si de nombreux mathématiciens, parmi lesquels Frobenius Euler, Abel, Tchebicheff et Heine s'étaient déjà intéressés aux fractions continues algébriques, Henri Padé (1863-1953) fut le premier à étudier systématiquement les fractions rationnelles, dont le développement suivant les puissances croissantes de la variable coïncidait avec une série entière à l'ordre le plus élevé pomible.

Les approximations rationnelles, qui portent maintenant son nom, s'avèrent très efficaces dans des domaines variés : théorie des nombres (application à la transcendance de e par exemple), aussi bien qu'analyse : accélération de la convergence, sommation d'une série entière divergente (les approximants définissent une fonction à l'extérieur du disque de convergence de la série initiale), prolongement analytique, recherche des zéros et singularités d'une fonction grâce à des théorèmes de convergence (Montessus de Ballore, Wilson). Pour ce type de problèmes, un développement en fraction continue de la fonction apporte plus d'informations que ses développements en série entière ou produit infini.
Les exemples les plus classiques rencontrés dans la littérature concernent e^x, $(1+x)^m$, $\log(1+x)$.

En particulier, les approximants de Padé fournissent un moyen pratique de calcul numérique de certaines fonctions (fonctions spéciales), et d'intégration.
Ils s'appliquent aussi à la physique théorique ou à la

mécanique des fluides (travaux de Fisher en thermodynamique sur le comportement de systèmes ferromagnétiques, antiferromagnétiques, fluides au voisinage de points critiques ; ouvrage édité par H. Cabannes: " Padé Approximants Method and its applications to Mechanics ") ; ils donnent en général de bons résultats pour les séries de Stieljes (théorème de Markov) qui apparaissent dans de nombreux problèmes physiques : ils fournissent des bornes précises sur certaines quantités (Baker, Gammel, Graves-Morris).

Cependant, le physicien, l'analyste numéricien et l'informaticien sont le plus souvent confrontés à des problèmes multidimensionnels (filtrage bidimensionnel, traitement d'images et travaux de Bultheel). C'est pourquoi notre travail porte sur certaines généralisations de ces approximants aux fonctions de plusieurs variables.

Plusieurs définitions sont en effet concevables: Brezinski, Chisholm, Cuyt, Levin, Karlsson-Wallin, Lutterodt. Pour notre part, nous leur demandons de conserver de "bonnes" propriétés, tant du point de vue théorique de la convergence de ces approximants que du point de vue pratique de leur calcul : existence d'algorithmes.

Nous choisissons de nous placer dans $\mathbb{C}^n$ $(n>0)$, car l'expérience montre que les résultats sont en général plus agréables dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$:
- existence de fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, indéfiniment dérivables à l'origine et dont le développement en série a un rayon de convergence nul, alors qu'une fonction holomorphe en un point de $\mathbb{C}$ y est analytique.

- soit $f \in C([a,b], \mathbb{R})$: les polynômes de Lagrange de f, p_n de $d^o \leq n$, qui l'interpolent en $n+1$ points équidistants de l'intervalle, ne convergent pas forcément vers f. (Runge, Bernstein, Faber).

Ou encore, quand $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$, $f(0)=0$, et $x_n = \frac{1}{n+1}$ les polynômes qui interpolent f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont tous identiquement nuls ; ils ne risquent pas de converger vers f, qui est continue sur $\mathbb{R}$.

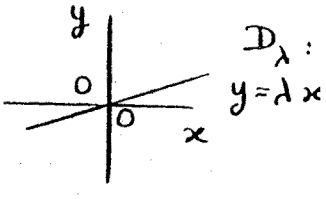
Par contre, il existe des théorèmes de convergence simple ou uniforme quand f est holomorphe dans un domaine convenable. [2] [4], établis essentiellement grâce à la formule de Cauchy, et où l'on se rend compte du rôle primordial des lemniscates : $|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| = r^{n+1}$ $(r>0)$

car $f(x) - p_n(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(t) \frac{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{\prod_{i=0}^{n}(t-x_i)}\, dt$

Γ contour fermé simple entourant les x_i :

Considérons tout d'abord le cas où <u>les données sur la fonction f</u> : $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ <u>sont concentrées en un seul point</u> : l'origine. Soit $f(x,y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{i,j}\, x^i y^j$ le développement formel de f.

La restriction $F_\lambda : x \to f(x, \lambda x)$ de f à chaque droite $D_\lambda : y = \lambda x$ passant par l'origine est fonction de la seule variable x.



En exigeant de retrouver les approximants de Padé usuels de F_λ à partir de ceux de f, nous obtenons les <u>approximants " homogènes"</u> du chapitre 1, écrits comme quotients de déterminants dans le cas générique.

Remarquons que cette paramétrisation ne permet pas d'atteindre tous les points (x,y) de $\mathbb{C}^2$ (il manque l'axe des y), mais l'utilisation de $G_\mu(y) = f(\mu y, y)$ donne les mêmes quotients.

Cette méthode présente deux énormes avantages :

- d'une part, les propriétés algébriques habituelles sont conservées : dualité (qui permet de construire toute la table de Padé des fractions $[L/M]$, L "degré" du numérateur, M "degré" du dénominateur, à partir d'un algorithme en donnant seulement la moitié : $L \geq M$), invariance par certaines transformations homographiques sur les variables ou sur les fonctions.

Dans des cas particuliers, cette démarche nous fournit des résultats de convergence simple de suites de telles fractions vers une fonction méromorphe.

Par exemple, de même que le développement de Mac-Laurin d'un polynôme est fini, les approximants "homogènes" d'ordre suffisamment élevé d'une fraction rationnelle sont exactement cette fraction ; et les dénominateurs des fractions réduites $[2\ell/1]$ associées à la fonction $e^{xy}/(x+y-1)$ sont tous : $x+y-1$.
Par contre, nous perdons la convergence uniforme, la principale difficulté étant la localisation des singularités de la fonction, qui ne sont plus isolées.

- d'autre part, les algorithmes de calculs d'approximants de Padé à une variable s'adaptent facilement aux approximants "homogènes", puisqu'il s'agit en fait de calculer ceux de F_λ. Un système de calcul formel comme "Reduce", qui manipule polynômes et

fractions rationnelles de manière exacte, est tout à fait adapté à ce type de calculs.

En fait, dans les algorithmes habituels, (ε-algorithme q.d algorithme ...), il suffit de substituer au terme $c_k x^k$ d'une série $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$ la partie homogène de degré k : $P_k(x,y) = \sum_{i+j=k} a_{i,j}\, x^i y^j$ de la série double $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{i,j}\, x^i y^j$.

C'est l'objet du chapitre 2, où nous répertorions aussi d'autres types d'approximants dans $\mathbb{C}(x,y)$, obtenus :

- soit en changeant de paramétrisation de $\mathbb{C}^2$,
- soit en modifiant l'initialisation des algorithmes précédents.

Dans un second temps, nous nous intéressons aux approximants multipoints : les données portent sur plusieurs points à la place d'un seul ; ces approximants sont aux fractions rationnelles ce que l'interpolation de Newton est aux polynômes.

Afin d'utiliser des techniques performantes pour les fonctions de plusieurs variables, nous donnons dans le troisième chapitre un rapide aperçu des approximants de Padé-Newton dans le cas univariable (travaux de Claessens). Toutefois, la formule d'Hermite relative aux différences divisées d'une fonction holomorphe nous permet d'étendre à ce cadre le théorème de convergence uniforme de Montessus de Ballore.

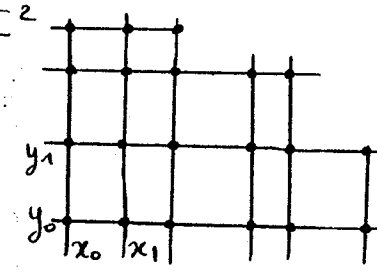
Pour clarifier la situation avant d'aborder les fractions rationnelles, le quatrième chapitre traite l'interpolation polynômiale d'une fonction de deux variables complexes.

Le procédé tensoriel utilisé privilégie les ensembles $\mathcal{S}$ de points d'interpolation de type rectangulaire, à savoir :

$$\mathcal{S} = \{ (x_k, y_\ell) \;/\; (k,\ell) \in \mathcal{J} \} \subset \mathbb{C}^2$$

où $\mathcal{J}$ vérifie : $\mathcal{J} \subset \mathbb{N}^2$

$$\left.\begin{array}{l} i \leq k \\ j \leq \ell \\ (k,\ell) \in \mathcal{J} \end{array}\right\} \Rightarrow (i,j) \in \mathcal{J}$$



Le procédé n'est autre qu'une paramétrisation de $\mathbb{C}^2$ par des droites $y =$ constante (ou $x =$ constante).

Apparaissent alors naturellement des différences divisées à deux variables, notées $[x_0, x_1, \ldots, x_m ; y_0, y_1, \ldots, y_n ; f(x,y)]$ (et qui se calculent récursivement), quand on utilise le système libre des polynômes $\omega_k(x)\,\Omega_\ell(y)$, où :

$$\omega_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \quad ; \quad \Omega_\ell(y) = \prod_{j=0}^{\ell-1} (y - y_j)$$

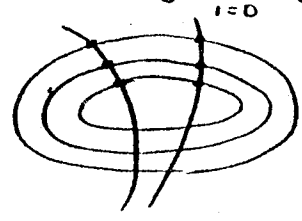
$$\omega_0 = \Omega_0 = 1 .$$

Les différences divisées ne dépendent que des valeurs de f aux points $(x_i, y_j)_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}}$, et se représentent sous forme d'intégrales doubles quand f est holomorphe dans un ouvert suffisamment grand, que les abscisses (respectivement les ordonnées) des points d'interpolation soient confondues ou non. Ces formules d'Hermite fournissent des conditions suffisantes de convergence ; et nous interprétons l'erreur quand tous les points sont concentrés en $(0,0)$.

Le rôle fondamental des différences divisées nous conduit à tenter de les construire pour des configurations de points d'interpolation dans $\mathbb{C}^2$, un peu moins restreintes, et de les relier à l'outil géométrique que sont les résidus de Grothendieck ; car c'est ce que laisse entendre Chudnovsky et qui est réalisé effectivement dans le cas précédent. La formule de Lagrange, par exemple, découle du théorème de Jacobi-Kronecker.

Dans le cinquième chapitre, on s'intéresse donc à des points d'interpolation à l'intersection de deux courbes algébriques : $(g(x,y)=0) \cap (h(x,y)=0)$ $\left(\text{où } \frac{g}{h} \in \mathbb{C}[x,y]\right)$ sans composante commune.

Quand l'une des deux courbes est du type $g = \prod_{i=0}^{m}(g_0+a_i)$, $a_i \in \mathbb{C}$, $g_0 \in \mathbb{C}[x,y]$ des formules récurrentes, simples en raison de ce parallélisme, permettent de calculer les différences divisées, définies par ailleurs comme coefficients du polynôme d'interpolation dans une base particulière.



Par contre, les résultats géométriques ne se généralisent pas aussi facilement qu'on l'espérait.

Après ce détour par l'interpolation polynômiale, le sixième chapitre porte enfin sur l'interpolation dans $\mathbb{C}(x,y)$, pour des points non nécessairement confondus. Là aussi, nous utilisons le procédé tensoriel pour des conditions d'interpolation de type rectangulaire.

En effet, il existe à priori autant de définitions de tels approximants qu'il en existe quand les points sont confondus ; c'est pourquoi il nous semble malhabile de

se lancer brutalement dans l'étude des équations :

$$(Qf - P)(x_k, y_\ell) = 0 \qquad \begin{matrix} 0 \leq k \leq m \\ 0 \leq \ell \leq n \end{matrix},$$

où l'incertitude pèse à la fois sur le choix des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}[x,y]$, auxquels appartiennent le numérateur P et le dénominateur Q.

Par contre, en appliquant successivement en x, puis en y (ou l'inverse), les <u>développements en fractions continues multipoints</u>, connus pour les fonctions d'une seule variable, nous construisons différentes <u>fractions rationnelles qui prennent les valeurs imposées aux points (x_k, y_ℓ)</u> du rectangle : elles répondent donc à la question.

Leurs coefficients sont des <u>différences inverses divisées</u>, qui se calculent encore récursivement.

Cependant, le sujet n'est pas épuisé : en particulier, quelle est la nature de l'erreur commise, ainsi que celle des approximants obtenus quand tous les points sont confondus ?

References

[1] H. CABANNES (1976). Padé approximants method and its applications to mechanics. Lecture Notes in Physics. 47. Springer. Verlag.

[2] P.J. DAVIS (1963) Interpolation and approximation. Blaisdell Publishing Company

[3] E.B. SAFF, R.S. VARGA (1977) Padé and rational approximation : theory and applications. Academic Press

[4] J.L. WALSH (1960). Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. Amer. Math. Soc. vol 20.

[5] L. WUYTACK (1979) Padé approximation and its applications. Lecture Notes in Mathematics. 765 Springer. Verlag.

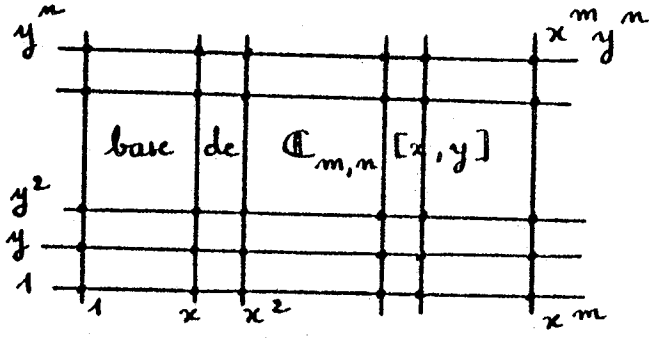
1. Une construction "homogène" d'approximants de Padé à deux variables complexes

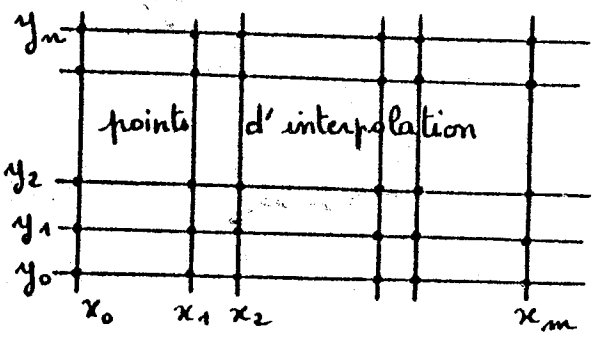
1 Introduction

Toutes les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Dans le cadre de fonctions d'une seule variable complexe, on recherche habituellement les <u>polynômes d'interpolation</u> dans les sous-espaces vectoriels $\mathbb{C}_n[x]$: polynômes de degré $\leq n$ de $\mathbb{C}[x]$. Par contre, pour les fonctions de deux ou plusieurs variables complexes, <u>plusieurs types</u> de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}[x,y]$ se présentent ; par exemple :

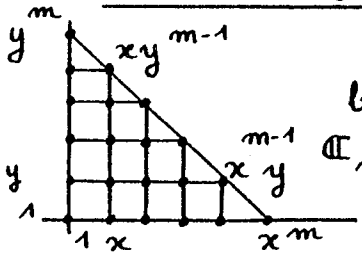
. les $\mathbb{C}_{m,n}[x,y]$: polynômes de degré $\begin{matrix} \leq m \text{ en } x \\ \leq n \text{ en } y \end{matrix}$,



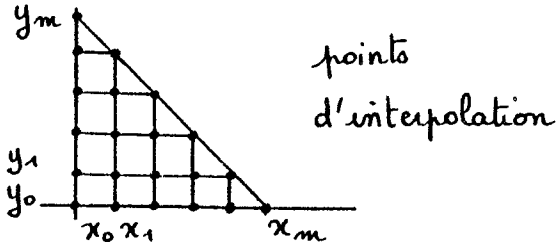


qui apparaissent naturellement si l'on utilise une démarche tensorielle, et donc particulièrement adaptés aux configurations "<u>rectangulaires</u>" de points d'interpolation, et aux fonctions $f(x,y)$ du type $g(x)\,h(y)$.

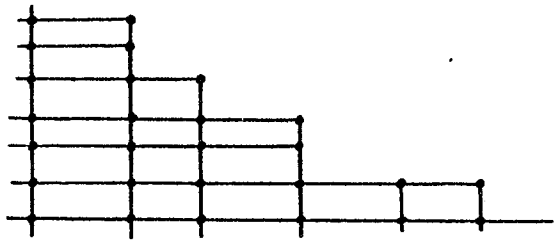
• les $\mathbb{C}_m[x,y]$: polynômes de degré total $\leq m$,



qui apparaissent par exemple si l'on considère (x,y) comme une seule variable vectorielle, ou pour des configurations "triangulaires" de points d'interpolation.



• Plus généralement, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}[x,y]$ engendrés par des $(x^i y^j)_{(i,j)\in I}$ I fini $\subset \mathbb{N}^2$ vérifiant:



$$\left.\begin{array}{l}(i,j)\in I\\ k\leq i\\ l\leq j\end{array}\right\} \Rightarrow (k,l)\in I$$

On retrouve les mêmes possibilités pour les interpolations rationnelles : choix des sous-espaces vectoriels auxquels appartiennent numérateur, dénominateur, et écriture des conditions d'interpolation.

Dans ce chapitre, nous nous limitons à des points d'interpolation tous confondus à l'origine (conditions de Mac-Laurin). En utilisant uniquement l'approximation de Padé de fonctions d'une seule variable, nous engendrons un certain type d'approximants de Padé à deux variables, qui s'avèrent "triangulaires".

Notations

Etant donnée une fonction $f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i x^i$ holomorphe en 0, $u^{[L/M]}(x)$ et $v^{[L/M]}(x)$ désignent les déterminan

$$u^{[L/M]}(x) = \begin{vmatrix} c_{L-M+1} & \cdots & c_L & \sum_{i=0}^{L-M} c_i x^{M+i} \\ c_{L-M+2} & \cdots & c_{L+1} & \sum_{i=0}^{L-M+1} c_i x^{M+i-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{L+1} & \cdots & c_{L+M} & \sum_{i=0}^{L} c_i x^i \end{vmatrix} ; \quad v^{[L/M]}(x) = \begin{vmatrix} c_{L-M+1} & \cdots & c_L & x^M \\ c_{L-M+2} & \cdots & c_{L+1} & x^{M-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{L+1} & \cdots & c_{L+M} & 1 \end{vmatrix}$$

qui vérifient :

$$v^{[L/M]}(x)\, f(x) - u^{[L/M]}(x) = O(x^{L+M+1})$$

On note $[L/M]$ la fraction $\dfrac{u^{[L/M]}}{v^{[L/M]}}$ quand elle est définie. $(L,M) \in \mathbb{N}^2$

2 Fonctions holomorphes de deux variables complexes [3], [4]

Définition :

$f : \Omega$ ouvert de $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ est <u>analytique</u> (ou holomorphe) dans Ω si en tout point (x_0, y_0) de Ω, f admet un développement en série entière convergent dans un voisinage ouvert U de (x_0, y_0) contenu dans $\mathcal{D}$:

$$\forall (x,y) \in U \qquad f(x,y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{ij} (x-x_0)^i (y-y_0)^j .$$

f est alors continue dans Ω et holomorphe en chaque variable séparément. Le <u>lemme d'Osgood</u> établit la réciproque grâce à la <u>formule intégrale de Cauchy</u> pour les polydisques :

Pour f analytique dans $\Delta = D(x_0, r_1) \times D(y_0, r_2)$, continue sur $\overline{\Delta}$, deux applications de la formule de Cauchy à une variable donnent :

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{|\zeta - x_0| = r_1} \frac{d\zeta}{\zeta - x_0} \int_{|\eta - y_0| = r_2} f(\zeta, \eta) \frac{d\eta}{\eta - y_0}$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\partial_0 \Delta} \frac{f(\zeta, \eta)}{(\zeta - x_0)(\eta - y_0)} \, d\zeta \, d\eta$$

par continuité de l'intégrand sur $\partial_0 \Delta = \partial D(x_0, r_1) \times \partial D(y_0, r_2)$

$\partial_0 \Delta \subset \partial \Delta$,

chaque circonférence est orientée positivement.

Si f est holomorphe dans un ouvert Ω, son développement en série entière au voisinage d'un point a de Ω est $\left\{\begin{matrix}\text{normalement} \\ \text{convergent}\end{matrix}\right.$ dans tout polydisque centré en a, contenu dans Ω.

I Construction d'approximants de Padé d'une fonction holomorphe dans le polydisque $\Delta = D(0, R_1) \times D(0, R_2)$ de $\mathbb{C}^2$

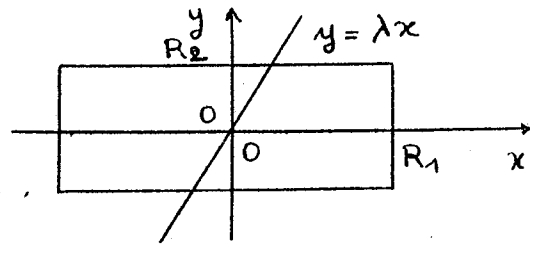
Dans Δ, $f(x, y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{i,j} \, x^i \, y^j$.

Considérons la restriction de f à chaque droite

$L_\lambda : y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

(Seuls ne sont pas atteints les points de Δ d'abscisse nulle, auquel cas on considère les droites : $x = \mu y$.)

Trace dans $\mathbb{R}^2$ de L_λ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.



Soit F_λ définie par :

$x \longrightarrow f(x, \lambda x)$ pour $\begin{cases} x \in D(0, R_1) \text{ si } \lambda = 0 \\ x \in D\left(0, \inf\left(R_1, \frac{R_2}{|\lambda|}\right)\right) \text{ si } \lambda \neq 0 \end{cases}$

Dans ce disque, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j=0}^{k} a_{k-j,j} \lambda^j \right) x^k$

est absolument convergente, donc convergente, et F_λ y est holomorphe.

1) Polynôme de Taylor $[L/0]_\lambda$ de F_λ.

$$[L/0]_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{L} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{k} a_{k-j,j} \lambda^j \right)}_{\text{noté } c_k} x^k$$

Soit $(x,y) \in \Delta \cap L_\lambda$, $(x,y) \neq (0,0)$:

$$[L/0]_{\frac{y}{x}}(x) = \sum_{k=0}^{L} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{k} a_{k-j,j} x^{k-j} y^j \right)}_{\text{noté } P_k(x,y)} \equiv U^{[L/0]}(x,y)$$

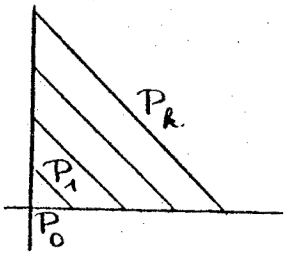
$P_k(x,y)$ polynôme homogène de d° k

De plus, $[L/0]_\lambda(0) = a_{0,0} = U^{[L/0]}(0,0)$.

Ainsi apparaît le polynôme de Taylor "triangulaire" de f dans $\mathbb{C}_L[x,y]$.

Remarquons que si l'on procède à partir des droites $x = \mu y$, le polynôme de Taylor d'ordre L de la fonction $G_\mu(y) = f(\mu y, y)$ engendre le même polynôme.

$$U^{[L/0]}(x,y) = \sum_{k=0}^{L} P_k(x,y)$$



2) Fraction $[L/1]_\lambda$ de F_λ.

$$v_\lambda^{[L/1]}(x) = \begin{vmatrix} c_L & x \\ c_{L+1} & 1 \end{vmatrix} \quad ; \quad u_\lambda^{[L/1]}(x) = \begin{vmatrix} c_L & \sum_{i=0}^{L-1} c_i x^{i+1} \\ c_{L+1} & \sum_{i=0}^{L} c_i x^i \end{vmatrix}$$

$$x^L v_\lambda^{[L/1]}(x) = \begin{vmatrix} x^L c_L & x \\ x^L c_{L+1} & 1 \end{vmatrix} \underset{x \neq 0}{= x} \begin{vmatrix} x^L c_L & 1 \\ x^L c_{L+1} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^L c_L & 1 \\ x^{L+1} c_{L+1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} P_L(x, \lambda x) & 1 \\ P_{L+1}(x, \lambda x) & 1 \end{vmatrix} \quad \text{car } c_k x^k = P_k(x, \lambda x) = P_k(x, y) \text{ quand } \lambda = \frac{y}{x}.$$

Les mêmes opérations donnent :

$$x^L u_\lambda^{[L/1]}(x) = \begin{vmatrix} P_L & \sum_{k=0}^{L-1} P_k \\ P_{L+1} & \sum_{k=0}^{L} P_k \end{vmatrix}$$

(convention : $\sum_{k=i}^{j} (\ )_k = 0$ si $j < i$)

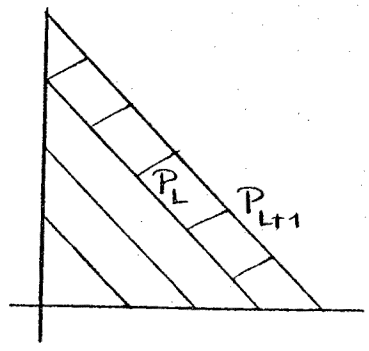
La fraction $[L/1]_\lambda$ de F_λ engendre la fraction à deux variables :

$$\begin{vmatrix} P_L(x,y) & \sum_{k=0}^{L-1} P_k(x,y) \\ P_{L+1}(x,y) & \sum_{k=0}^{L} P_k(x,y) \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} P_L(x,y) & 1 \\ P_{L+1}(x,y) & 1 \end{vmatrix}$$

Remarquons que le dénominateur n'est pas de degré 1.

Une construction analogue à partir des G_μ donnerait la même fraction, qui s'écrit encore :

$$\sum_{k=0}^{L-1} P_k + \frac{P_L^2}{P_L - P_{L+1}}$$



3) Plus généralement, fraction $[L/M]_\lambda$ de F_λ

Propriété :

La fraction $[L/M]_\lambda$ de F_λ engendre la fraction $[L/M] = U^{[L/M]} / V^{[L/M]}$ où :

$$V^{[L/M]} = \begin{vmatrix} P_{L-M+1} & P_{L-M+2} & \dots & P_L & 1 \\ P_{L-M+2} & P_{L-M+3} & \dots & P_{L+1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{L+1} & P_{L+2} & \dots & P_{L+M} & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad U^{[L/M]} = \begin{vmatrix} P_{L-M+1} & \dots & P_L & \sum_{i=0}^{L-M} P_i \\ P_{L-M+2} & \dots & P_{L+1} & \sum_{i=0}^{L-M+1} P_i \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{L+1} & \dots & P_{L+M} & \sum_{i=0}^{L} P_i \end{vmatrix}$$

Preuve :

$$v_\lambda^{[L/M]}(x) = \begin{vmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \dots & c_L & x^M \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \dots & c_{L+1} & x^{M-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{L+1} & c_{L+2} & \dots & c_{L+M} & 1 \end{vmatrix}$$

$$x^{LM}\, v_\lambda^{[L/M]}(x) = x^{L-M+1} \cdot x^{L-M+2} \dots x^{L} \cdot x^{M-1} \cdot x^{M-2} \dots 1 \cdot v_\lambda^{[L/M]}(x)$$

puissances qu'on répartit sur

1ère colonne, 2ème colonne, … Mième colonne

comme $c_i x^i = P_i(x,y)$ pour $\frac{y}{x} = \lambda$, on obtient :

$$x^{LM}\, v_\lambda^{[L/M]}(x) = \begin{vmatrix} P_{L-M+1} & P_{L-M+2} & \dots & P_L & x^M \\ \frac{P_{L-M+2}}{x} & \frac{P_{L-M+3}}{x} & \dots & \frac{P_{L+1}}{x} & x^{M-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{P_{L+1}}{x^M} & \frac{P_{L+2}}{x^M} & \dots & \frac{P_{L+M}}{x^M} & 1 \end{vmatrix} \cdot x^{M-1} \cdot x^{M-2} \dots 1$$

$$= \begin{vmatrix} P_{L-M+1} & P_{L-M+2} & \dots & P_L & 1 \\ \frac{P_{L-M+2}}{x} & \frac{P_{L-M+3}}{x} & \dots & \frac{P_{L+1}}{x} & \frac{1}{x} \\ \vdots & & & & \\ \frac{P_{L+1}}{x^M} & \frac{P_{L+2}}{x^M} & \dots & \frac{P_{L+M}}{x^M} & \frac{1}{x^M} \end{vmatrix} \cdot x^M \cdot x^{M-1} \dots 1$$

en mettant x^M en facteur dans la dernière colonne.
Il reste à répartir les puissances x^i sur la $i+1^{ème}$ ligne

$$x^{LM}\, v_\lambda^{[L/M]}(x) = \begin{vmatrix} P_{L-M+1} & P_{L-M+2} & \dots & P_L & 1 \\ P_{L-M+2} & P_{L-M+3} & \dots & P_{L+1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{L+1} & P_{L+2} & \dots & P_{L+M} & 1 \end{vmatrix}(x,y) \equiv V^{[L/M]}(x,y)$$

Les mêmes opérations sur $x^{LM}\, u_\lambda^{[L/M]}(x)$ donnent le résultat annoncé et on obtient aussi :

$$V^{[L/M]} f - U^{[L/M]} = \begin{vmatrix} P_{L-M+1} & P_{L-M+2} & \dots & P_L & \sum_{i=1}^{+\infty} P_{L+i} \\ P_{L-M+2} & P_{L-M+3} & \dots & P_{L+1} & \sum_{i=1}^{+\infty} P_{L+i+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ P_{L+1} & P_{L+2} & \dots & P_{L+M} & \sum_{i=1}^{+\infty} P_{L+i+M} \end{vmatrix}$$

Les approximants ainsi obtenus ne sont pas nouveaux : ce sont des " Abstract Padé approximants " étudiés par A. Cuyt [2].

Ainsi $U^{[L/M]}$ et $V^{[L/M]}$ s'écrivent-ils sous la forme :

$$U^{[L/M]} = \sum_{k=LM}^{L(M+1)} U_k \quad : U_k \text{ polynômes homogènes de d° } k$$

$$V^{[L/M]} = \sum_{k=LM}^{(L+1)M} V_k \quad : V_k \text{ polynômes homogènes de d° } k$$

et vérifient-ils :

$$V^{[L/M]} f - U^{[L/M]} = O(X^{(L+1)(M+1)}) \qquad [2]$$

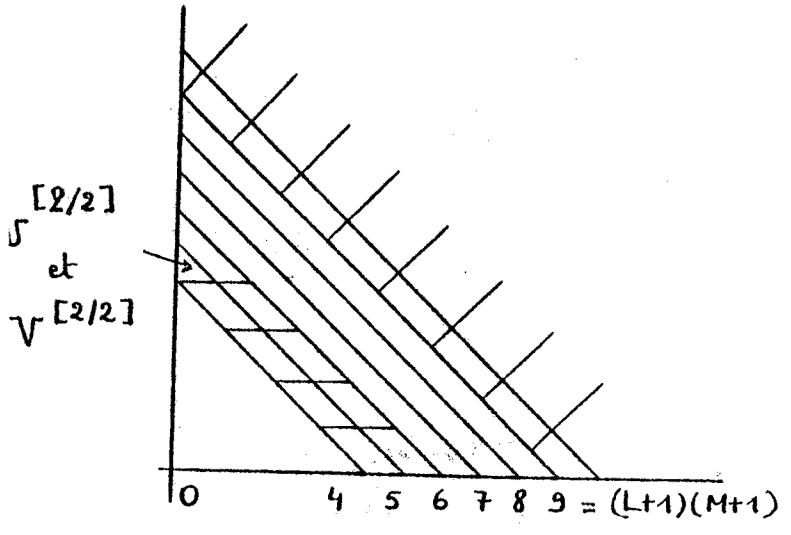
ce qui signifie :

$$= \sum_{k \geq (L+1)(M+1)} R_k \quad \text{polynômes homogènes de d° } k.$$

Exemple :

$$L = M = 2$$

$$V^{[2/2]} f - U^{[2/2]} = O(X^9)$$



Les équations correspondent à la nullité des parties homogènes de d° 4 à 8 de $Vf - U$.

$U^{[2/2]}$ et $V^{[2/2]}$ sont des polynômes en X^4, X^5, X^6 : dans un sect. stict de $\mathbb{C}_6[x,y]$.

Remarque :

L'homogénéisation faite à partir des approximants de Padé de G_μ engendre les mêmes fractions à deux variables.

Calcul :

Pour obtenir ces approximants, nous n'avons donc pratiquement besoin que d'algorithmes de calculs d'approximants de Padé à une variable, à condition d'écrire leur forme exacte en fonction du paramètre λ, ce qui est le propre du calcul formel. C'est l'objet du chapitre suivant.

Certains calculs peuvent être facilités par des propriétés algébriques de ces approximants, qui découlent naturellement de celles des approximants de Padé à une variable.

II Quelques propriétés algébriques des approximants "homogènes".

1) Projection

Par construction même, quand on les projette sur une droite complexe : $\alpha x + \beta y = 0$ passant par l'origine, les approximants de Padé "homogènes" [L/M] sont les approximants de Padé à une variable (qui paramétrise la droite) de même ordre. Cette propriété est aussi vérifiée par les approximants de Karlsson-Wallin, mais non par ceux de Chisholm.

2) Dualité

Pour une fonction f analytique en $(0,0)$ telle que $f(0,0) \neq 0$, la série réciproque $g = 1/f$ est aussi analytique en $(0,0)$.

Soit alors $F_\lambda(x) = f(x, \lambda x)$ et $G_\lambda(x) = g(x, \lambda x)$: $G_\lambda = 1/F_\lambda$
Sous réserve que les approximants suivants existent, on a :

$$[L/M]_{G_\lambda} = \frac{1}{[M/L]_{F_\lambda}}$$

et ainsi

$$\boxed{[L/M]_{g} = \frac{1}{[M/L]_{f}}},$$

car ces deux fractions coïncident pour suffisamment de couples (x,y) de $\mathbb{C}^2$.

Par exemple, les approximants de Padé :

$$[0/n]_{e^{-(x+y)}} = \frac{1}{[n/0]_{e^{x+y}}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{(x+y)^k}{k!}} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Cette propriété de dualité permet de <u>construire toute la table de Padé</u> ($[L/M]$, $(L,M) \in \mathbb{N}^2$) d'une série f inversible, à l'aide d'un procédé qui n'en fournit que la moitié inférieure ($L \geq M$) ou supérieure ($L \leq M$) : pour obtenir l'autre moitié, il suffit d'appliquer le même procédé à $1/f$.
De la même manière, elle lie les théorèmes sur les colonnes de la table de Padé (M constant) et les pôles d'une fonction méromorphe (Montessus de Ballore ...) à ceux qui concernent les lignes (L constant) et les zéros ; elle ramène aussi l'étude de la convergence des diagonales supérieures à celle des diagonales inférieures.

3) <u>Invariance homographique des approximants diagonaux</u>

Soit $g(x,y) = \dfrac{a + b f(x,y)}{c + d f(x,y)}$ quand $\begin{cases} ad - bc \neq 0 \\ c + d f(0,0) \neq 0 \end{cases}$

Alors $$\boxed{[L/L]_g = \frac{a + b\,[L/L]_f}{c + d\,[L/L]_f}}$$

Cette "invariance" est une des raisons de l'importance des approximants diagonaux.

4) Invariance par certains changements de variables.

En tenant compte du procédé de construction, nous privilégions les transformations de $\mathbb{C}^2$ qui conservent l'origine et les droites passant par l'origine.

Ainsi, les transformations linéaires :

$\varphi : (x,y) \in \mathbb{C}^2 \longrightarrow (u,v) = (ax+by, cx+dy)$ où $ad-bc \neq 0$

Soit f une fonction holomorphe en $(0,0)$ et $g = f \circ \varphi$.

Alors,

$$\boxed{[L/M]_g = [L/M]_f \circ \varphi} \qquad (*)$$

En effet, notons :

$G_\lambda(x) = g(x, \lambda x)$ et $F_\mu(x) = f(x, \mu x)$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $a+b\lambda \neq 0$, $G_\lambda(x) = f((a+b\lambda)x, (c+d\lambda)x)$

$$= F_{\frac{c+d\lambda}{a+b\lambda}}((a+b\lambda)x)$$

Donc,

$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2$, $ax+by \neq 0$, $[L/M]_g(x,y) = [L/M]_f(\varphi(x,y))$,

ce qui prouve l'égalité des deux fractions rationnelles (*).

• Remarquons que si P_k est un polynôme homogène de d°k, $\varphi(P_k)$ l'est aussi ; on peut donc aussi établir la propriété (*) directement sur la relation :

$$(V^{[L/M]} \circ \varphi)_g - U^{[L/M]} \circ \varphi = O(X^{(L+1)(M+1)})$$

• Cette invariance a pour conséquence la propriété de symétrie suivante :

si $V(x,y) \quad f(x,y) = f(y,x)$

alors $[L/M]_f(x,y) = [L/M]_f(y,x)$

(utiliser $\varphi(x,y) = (y,x)$)

III Formules intégrales d'erreur et questions de convergence.

Les formules que nous obtenons ne sont pas les mêmes suivant que l'on considère $f(x,y)$ comme $F_\lambda(x)$ $(\lambda = y/x)$ ou comme $G_\mu(y)$ $(\mu = x/y)$. Elles concernent d'ailleurs des ensembles différents de points.

1) Interpolation polynômiale.

Soit $R_L(x,y) = f(x,y) - \sum_{k=0}^{L} P_k(x,y)$, défini dans le polydisque $\Delta = D(0,R_1) \times D(0,R_2)$.

f étant holomorphe dans Δ, est développable en série entière dans Δ, et nous savons déjà qu'en particulier, $R_L(x,y) \xrightarrow[L \to +\infty]{} 0$ dans Δ (la convergence étant uniforme sur les compacts de Δ)

Cependant, par analogie avec la démonstration du théorème de Montessus de Ballore, nous avons besoin d'une expression intégrale du reste, pour conclure dans le cas de fractions qui interpolent une fonction méromorphe.

Les difficultés de la suite proviennent essentiellement de l'écriture des domaines de définition des fonctions.

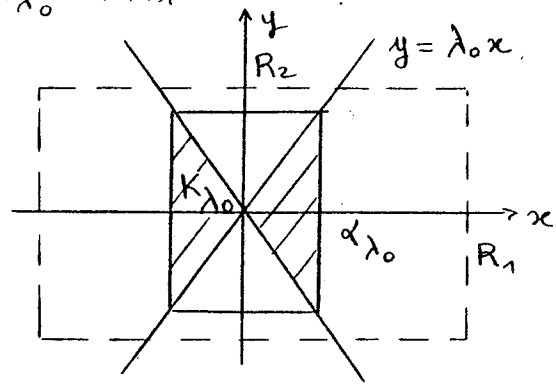
a) Utilisation de $F_\lambda(x)$.

Les compacts où nous nous plaçons sont du type:

$$K_{\lambda_0} = \{ (x, \lambda x) \ / \ |\lambda| \leq \lambda_0 \text{ réel positif}, \ |x| \leq \alpha_{\lambda_0} \},$$

où α_{λ_0} est choisi en fonction de λ_0 de sorte que:
$\lambda_0 \alpha_{\lambda_0} < R_2$ et $\alpha_{\lambda_0} < R_1$.

Trace dans $\mathbb{R}^2$ de K_{λ_0}



• Un point (x,y) de Δ qui n'est pas sur l'axe des y est toujours dans un tel compact.

La fonction F_λ est holomorphe dans $D(0, \alpha_{\lambda_0})$ pour tout λ de module $\leq \lambda_0$.

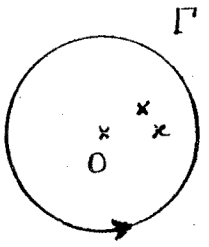
L'expression intégrale du reste dans la formule de Taylor à une variable est:

$$F_\lambda(x) - \sum_{k=0}^{L} P_k(x, \lambda x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{F_\lambda(\zeta)}{\zeta - x} \left(\frac{x}{\zeta}\right)^{L+1} d\zeta$$

Γ contour fermé simple entourant 0 et x, orienté positivement

• Nous choisissons pour Γ le contour suivant: (qui dépend de x)

$\zeta = x\,\xi$ où $|\xi| = a_{\lambda_0}$, si $x \neq 0$.



a_{λ_0} est fixé de sorte que :

* Γ entoure x : $a_{\lambda_0} > 1$
* $\forall\, \zeta \in \Gamma \quad \forall x \in D(0, \alpha_{\lambda_0}) \quad (\zeta, \lambda\zeta) \in \Delta$

Pour cela, il suffit que :

$$\alpha_{\lambda_0}\, a_{\lambda_0} < R_1$$
$$\lambda_0\, \alpha_{\lambda_0}\, a_{\lambda_0} < R_2$$

Comme $\alpha_{\lambda_0} < R_1$ et $\lambda_0 \alpha_{\lambda_0} < R_2$, le choix d'un tel $a_{\lambda_0} > 1$ est possible.

Par un changement de variable, on obtient :

$$\forall x \in \dot{D}(0, \alpha_{\lambda_0}) \quad \forall \lambda \in D(0, \lambda_0)$$

$$f(x, \lambda x) - \sum_{k=0}^{L} P_L(x, \lambda x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\xi| = a_{\lambda_0}} \frac{f(x\xi, \lambda x \xi)}{(\xi - 1)\, \xi^{L+1}}\, d\xi$$

$|\xi| = a_{\lambda_0}$ ↪ +

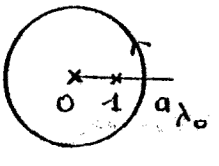
• Remarquons que pour $x = 0$, cette égalité est encore vraie. En effet, $P_0(0,0) = f(0,0)$ et

$$\forall L \in \mathbb{N}^* \quad P_L(0,0) = 0$$

D'autre part,

$$\int_{|\xi| = a_{\lambda_0} > 1} \frac{d\xi}{(\xi - 1)\, \xi^{L+1}} = 0$$

somme des résidus en 0 et 1 (cas particulier du théorème de Jacobi-Kronecker)



Nous obtenons :

$$\forall (x,y) \in K_{\lambda_0} \qquad R_L(x,y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\substack{|\xi| = a_{\lambda_0} \\ \cup \\ +}} \frac{f(x\xi, y\xi)}{(\xi - 1)\ \xi^{L+1}}\, d\xi$$

• Pour faire apparaître une intégrale double, appliquons maintenant la formule de Cauchy à :

$y \longrightarrow f(x\xi, y\xi)$ holomorphe dans $D(0, \beta_{\lambda_0})$ (par composition et f étant holomorphe en chacune des variables), où $\beta_{\lambda_0} > \lambda_0 \alpha_{\lambda_0}$ et vérifie :

$$\beta_{\lambda_0} a_{\lambda_0} < R_2 ,$$

ce qui est possible, car $\lambda_0 \alpha_{\lambda_0} a_{\lambda_0} < R_2$

$$f(x\xi, y\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\substack{\text{contour fermé} \\ \text{simple orienté positivement} \\ \text{entourant } y}} \frac{f(x\xi, \eta\xi)}{\eta - y}\, d\eta$$

Pour $y \neq 0$, soit le contour : $\eta = y\psi$, $|\psi| = b_{\lambda_0}$ tel que :

* $b_{\lambda_0} > 1$
* $b_{\lambda_0} \beta_{\lambda_0} a_{\lambda_0} < R_2$ (qui existe).

$$f(x\xi, y\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\substack{|\psi| = b_{\lambda_0} \\ \cup \\ +}} \frac{f(x\xi, y\psi\xi)}{\psi - 1}\, d\psi$$

égalité qui reste vraie pour $y = 0$.

Avec les précautions prises dans le choix de a_{λ_0} et b_{λ_0}, la fonction à intégrer étant continue sur le domaine d'intégration, on obtient :

$$\forall (x,y) \in K_{\lambda_0} \quad R_L(x,y) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{|\xi| = a_{\lambda_0}} \int_{|\psi| = b_{\lambda_0}} \frac{f(x\xi, y\psi\xi)}{\xi^{L+1}(\xi-1)(\psi-1)} d\xi$$

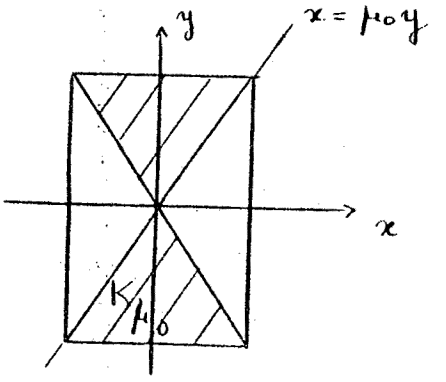
chaque cercle étant orienté positivement.

Remarque :

La fonction $f(x\xi, y\psi\xi)$ étant bornée sur : $\{ (x,y) \in K_{\lambda_0}, |\xi| = a_{\lambda_0}, |\psi| = b_{\lambda_0} \}$ car $(x\xi, y\psi\xi)$ décrit alors un compact de Δ, on retrouve bien la convergence uniforme sur K_{λ_0} de $R_L(x,y)$ vers 0, à cause du terme ξ^{L+1}.

b) Utilisation de $G_\mu(y)$.

De manière tout à fait analogue, en échangeant les rôles de x et y, on obtient sur les compacts :



$$K_{\mu_0} = \{ (\mu y, y) / |\mu| \leq \mu_0 ; |y| \leq \beta_{\mu_0} \}$$

où $\beta_{\mu_0} < R_2$, $\mu_0 \beta_{\mu_0} < R_1$,

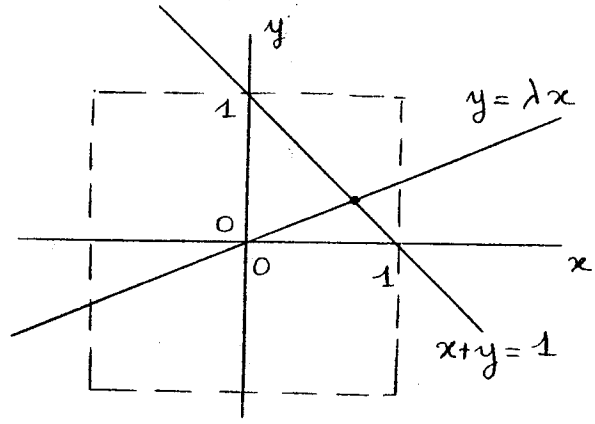
la convergence uniforme de R_L vers 0 :

$$R_L(x,y) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{|\zeta| = a_{\mu_0}} \int_{|\eta| = b_{\mu_0}} \frac{f(x\zeta\eta, y\eta)}{(\zeta-1)(\eta-1)\eta^{L+1}} d\zeta d\eta$$

On atteint les points de l'axe des y qui n'étaient pas atteints précédemment.

2) Exemple d'interpolation rationnelle.

Soit $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{x+y-1}$ méromorphe dans $\mathbb{C}^2$, comme quotient de deux fonctions holomorphes. Elle n'admet pour singularités que des singularités non essentielles et de première espèce : les points de la droite $x+y=1$, qui ne passe pas par l'origine.

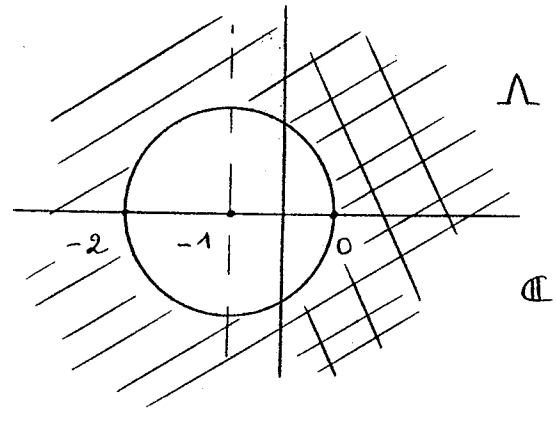


Pour (x,y) décrivant le polydisque $\Delta = D(0,1) \times D(0,1)$, la fonction méromorphe F_λ n'admet pas le même nombre de pôles dans Δ suivant les valeurs de λ.

Lieu des λ pour lesquels F_λ admet un pôle (simple) dans Δ :

$$\Lambda = \{ \lambda \in \mathbb{C} \ / \ |1+\lambda| > 1 \text{ et } |1+\lambda| > |\lambda| \}$$

ce pôle étant $\dfrac{1}{1+\lambda} \neq 0$.



Contrairement aux fonctions méromorphes d'une seule variable, les singularités ne sont plus isolées.

• Que conclure du <u>théorème de Montessus</u> à une seule variable concernant les approximants de Padé $[L/1]_\lambda$ de F_λ ? Ce théorème affirme que les $[L/1]_\lambda$ existent tous pour L assez grand (dépendant à priori de λ) et convergent uniformément vers F_λ quand $L \longrightarrow +\infty$, sur tout compact de $D(0,1) \setminus \left\{ \frac{1}{1+\lambda} \right\}$.

<u>Il en résulte au moins la convergence simple des</u> $\frac{U^{[L/1]}}{V^{[L/1]}}(x,y)$ <u>vers</u> $f(x,y)$ aux points (x,y) correspondants

En fait, pour tout $\lambda \neq -1$, les $[L/1]_\lambda$ convergent vers F_λ, uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1}{1+\lambda} \right\}$.

Quant à F_{-1}, elle est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et $v^{[L/1]}$ est de degré 0 ; $[L/1]_{-1} = [L/0]_{-1} \underset{L \to +\infty}{\longrightarrow} F_{-1}$,

uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.

En étudiant le cas du point (0,0) et en utilisant G_μ, nous obtenons ainsi la <u>convergence simple des fractions</u> $\frac{U^{[L/1]}}{V^{[L/1]}}$ (définies pour L assez grand) <u>vers</u> f <u>en tout point de</u> $\mathbb{C}^2 \setminus \{$ singularités : $x+y=1 \}$

• Ci-dessous, nous établissons la <u>convergence uniforme sur des compacts</u> de $\Delta \setminus \{ x+y=1 \}$ de la sous-suite $\left(\frac{U^{[2l/1]}}{V^{[2l/1]}} \right)_{l \in \mathbb{N}}$ vers f, en étudiant plus précisément la dépendance en λ.

Evaluons $u_\lambda^{[L/1]}$ et $v_\lambda^{[L/1]}$.

$$F_\lambda(x) = \frac{e^{\lambda x^2}}{(1+\lambda)x - 1} = \frac{-e^{\lambda x^2}}{1-(1+\lambda)x} = -\left(\sum_{p\geq 0} \frac{\lambda^p x^{2p}}{p!}\right)\left(\sum_{q\geq 0} (1+\lambda)^q x^q\right)$$

pour $|(1+\lambda)x| < 1$.

Les coefficients du développement de Taylor de F_λ, holomorphe en 0, sont donc :

$$l \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} c_{2l} = -\sum_{p=0}^{l} \frac{\lambda^p}{p!} (1+\lambda)^{2(l-p)} \\ c_{2l+1} = -\sum_{p=0}^{l} \frac{\lambda^p}{p!} (1+\lambda)^{2(l-p)+1} = (1+\lambda)\, c_{2l} \end{cases}$$

D'où :

$$v_\lambda^{[2l/1]}(x) = \begin{vmatrix} c_{2l} & x \\ (1+\lambda)c_{2l} & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad u_\lambda^{[2l/1]}(x) = \begin{vmatrix} c_{2l} & x\sum_{k=0}^{2l-1} c_k x^k \\ (1+\lambda)c_{2l} & \sum_{k=0}^{2l} c_k x^k \end{vmatrix}$$

Par construction,
$F_\lambda(x)\, v_\lambda^{[2l/1]}(x) - u_\lambda^{[2l/1]}(x) = O(x^{2l+2})$:

$u_\lambda^{[2l/1]}$ est le polynôme de Taylor de $F_\lambda\, v_\lambda^{[2l/1]}$ d'ordre $2l+1$.

Or, dans ce cas précis, $\underline{F_\lambda\, v_\lambda^{[2l/1]}}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$, ce qui permet d'écrire le reste sous la forme :

$$F_\lambda(x)\, v_\lambda^{[2l/1]}(x) - u_\lambda^{[2l/1]}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{(F_\lambda\, v_\lambda^{[2l/1]})(\zeta)}{\zeta - x} \left(\frac{x}{\zeta}\right)^{2l+2} d\zeta$$

pour $|x| < 1$

c'est-à-dire :

$$c_{2\ell}\left(F_\lambda(x)\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1+\lambda & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x\sum_{k=0}^{2\ell-1} c_k x^k \\ 1+\lambda & \sum_{k=0}^{2\ell} c_k x^k \end{vmatrix}\right)$$

$$= \frac{c_{2\ell}}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{F_\lambda(\zeta)\begin{vmatrix} 1 & \zeta \\ 1+\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\zeta - x} \left(\frac{x}{\zeta}\right)^{2\ell+2} d\zeta$$

Pour un entier ℓ fixé, $c_{2\ell}$ est un polynôme en λ, qui admet un nombre fini de racines. Pour toute valeur de λ différente de ces racines, on a :

$$(*)\quad \left\{ \begin{array}{l} F_\lambda(x)\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1+\lambda & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x\sum_{k=0}^{2\ell-1} c_k x^k \\ 1+\lambda & \sum_{k=0}^{2\ell} c_k x^k \end{vmatrix} \\ \\ = \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{F_\lambda(\zeta)\begin{vmatrix} 1 & \zeta \\ 1+\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\zeta - x} \left(\frac{x}{\zeta}\right)^{2\ell+2} d\zeta \\ \text{pour } |x|<1 \end{array} \right.$$

Or, à x fixé, chacun de ces deux membres est une fonction continue de λ parcourant $\mathbb{C}$; en effet :

$$F_\lambda(x)\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1+\lambda & 1 \end{vmatrix} = -e^{\lambda x^2}\begin{vmatrix} 1 & x\sum_{k=0}^{2\ell-1} c_k x^k \\ 1+\lambda & \sum_{k=0}^{2\ell} c_k x^k \end{vmatrix}$$

est un polynôme en λ ; l'intégrale du second membre vaut :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{-e^{-\lambda\theta^2}}{e^{i\theta}-x}\left(\frac{x}{e^{i\theta}}\right)^{2\ell+2} e^{i\theta}}_{\phi(\theta,\lambda)} d\theta$$

$\phi(\theta,\lambda)$ est une fonction continue sur $[0,2\pi]\times\mathbb{C}$, d'où la continuité de l'intégrale dépendant du

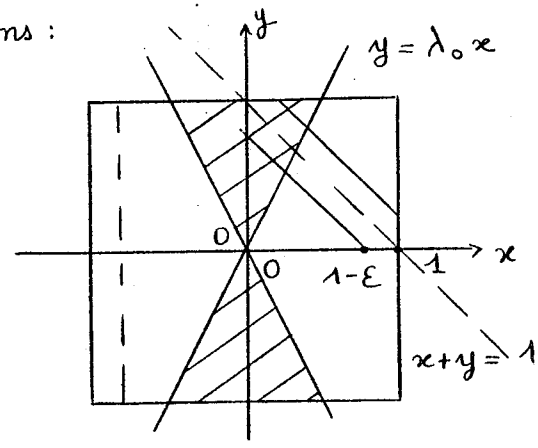
L'identité (*) est donc vraie pour toute valeur de λ, y compris les racines de $c_{2\ell}$.

Considérons les compacts de :

$\left(\Delta \setminus \left(\{ x=0 \text{ ou } x+y=1 \} \cap \Delta \right) \right) \cup \{(0,0)\}$ du type :

$$K_{\lambda_0,\varepsilon} = \left\{ (x,\lambda x) \;/\; |x| \leq 1-\varepsilon,\ |\lambda| \leq \lambda_0,\ |(1+\lambda)x-1| \geq \varepsilon > 0 \right\} \cap \Delta$$

Pour $(x,\lambda x) \in K_{\lambda_0,\varepsilon}$, nous avons :



$$F_\lambda(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & \sum_{k=0}^{2\ell-1} c_k x^k \\ 1+\lambda & & \sum_{k=0}^{2\ell} c_k x^k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1+\lambda & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-1}{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1+\lambda & 1 \end{vmatrix}} \int \frac{e^{\lambda\zeta^2}}{\zeta - x} \left(\frac{x}{\zeta}\right)^{2\ell+2} d\zeta \qquad (2i\pi)$$

$(\lambda,\zeta) \longrightarrow e^{\lambda\zeta^2}$ est bornée par M sur le compact $D(0,\lambda_0) \times C(0,1)$ et ainsi : $\forall\ (x,\lambda x) \in K_{\lambda_0,\varepsilon}$:

$$\left| F_\lambda(x) - \frac{\left| \quad \right|}{\left| \quad \right|} \right| \leq \frac{1}{2\pi\varepsilon} \times \frac{2\pi M}{\varepsilon} \times (1-\varepsilon)^{2\ell+2} \underset{\ell \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, $\boxed{\dfrac{U^{[2\ell/1]}}{V^{[2\ell/1]}} \underset{\ell \to +\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{uniformément sur tout } K_{\lambda_0,\varepsilon}}$

Plus généralement, dans le cas de fonctions méromorphes du type $f(x,y) = \dfrac{g(x,y)}{P(x,y)}$ où g est holomorphe dans un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant l'origine, et P un polynôme ne s'annulant pas à l'origine, nous cherchons à répondre aux questions de convergence simple et uniforme sur certains compacts des fractions $\dfrac{U^{[L/M]}}{V^{[L/M]}}$ vers f, où $M = d^o P$.

Conclusion

Généralisation.

Remarquons que le même procédé permet de passer de $\mathbb{C}^2$ à $\mathbb{C}^3$, et plus généralement, de construire des approximants "homogènes" dans $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons en effet que les approximants "homogènes" de f holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^n$ soient donnés sous forme générique comme quotient des deux déterminants du I 3 :

$$V^{[L/M]} = \cdot \begin{vmatrix} P_{L-M+1} & \cdots & P_L & 1 \\ P_{L-M+2} & \cdots & P_{L+1} & 1 \\ \vdots & & & \\ P_{L+1} & \cdots & P_{L+M} & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad U^{[L/M]} = \begin{vmatrix} P_{L-M+1} & \cdots & P_L & \sum_{i=0}^{L-M} P_i \\ P_{L-M+2} & \cdots & P_{L+1} & \sum_{i=0}^{L-M+1} P_i \\ \vdots & & & \\ P_{L+1} & \cdots & P_{L+M} & \sum_{i=0}^{L} P_i \end{vmatrix}$$

où les polynômes P_k sont les parties homogènes de $d^o k$ du développement de Mac-Laurin de f.

Soit alors $f : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe à l'origine.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}} a_{i_1, \dots, i_{n+1}} x_1^{i_1} \cdots x_{n+1}^{i_{n+1}}$$

au voisinage de l'origine.

Considérons cette fois la restriction de f à un hyperplan $x_{n+1} = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ passant par l'origine (Pour recouvrir $\mathbb{C}^{n+1}$, il faut aussi utiliser d'autres paramétrisations, car il nous manque les points qui vérifient : $\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n = 0$).

$$F_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n, \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)$$

Les approximants "homogènes" de $F_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ sont donnés par les déterminants précédents, où :

$P_{k, \lambda_1, \dots, \lambda_n}$ est la partie homogène de d° k de $F_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$, développée à l'origine, c'est-à-dire :

$$P_{k, \lambda_1, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 + \cdots + i_n = 0}^{k} a_{i_1, \dots, i_n, k-(i_1 + \cdots + i_n)} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} (\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)^{k-(i_1 + \cdots + i_n)}$$

$$= \sum_{i_1 + \cdots + i_n = 0}^{k} a_{i_1, \dots, i_n, k-(i_1 + \cdots + i_n)} \sum_{h_1 + \cdots + h_n = k} C_k^{h_1, \dots, h_n} \lambda_1^{h_1} \cdots \lambda_n^{h_n} x_1^{i_1 + h_1} \cdots x_n^{i_n + h_n}$$

Mais, pour $x_{n+1} = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ $P_{k, \lambda_1, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_n)$ vaut encore :

$$\sum_{i_1 + \cdots + i_n = 0}^{k} a_{i_1, \dots, i_n, k-(i_1 + \cdots + i_n)} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} x_{n+1}^{k-(i_1 + \cdots + i_n)}$$

$$= \sum_{i_1 + \cdots + i_n + i_{n+1} = k} a_{i_1, \dots, i_n, i_{n+1}} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} x_{n+1}^{i_{n+1}}$$

qui n'est autre que $P_k(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$: partie homogène de d° k du développement de f.

Les approximants " homogènes " de f sont donc définis par des formules analogues.
Ainsi, les mêmes algorithmes serviront à leur calcul, les propriétés algébriques seront conservées, de même que les théorèmes de convergence simple.
Le chapitre suivant est consacré à l'étude plus précise de quelques méthodes de calcul de ces approximants.

Références

[1] BAKER - GRAVES-MORRIS (1981) Padé approximants. I Basic theory - Encyclopedia of mathematics and its applications. vol 13 (G.C. Rota ed.)

[2] A. CUYT (1982) Abstract Padé approximants for operators: theory and applications. Thèse Universiteit Antwerpen.

[3] M. FIELD (1982) Several complex variables and complex manifolds I. London Mathematical Society. Lecture Note Series 65.

[4] B.P. FUKS (1965) Introduction to the theory of analytic functions of several complex variables. Translations of Mathematical Monographs.

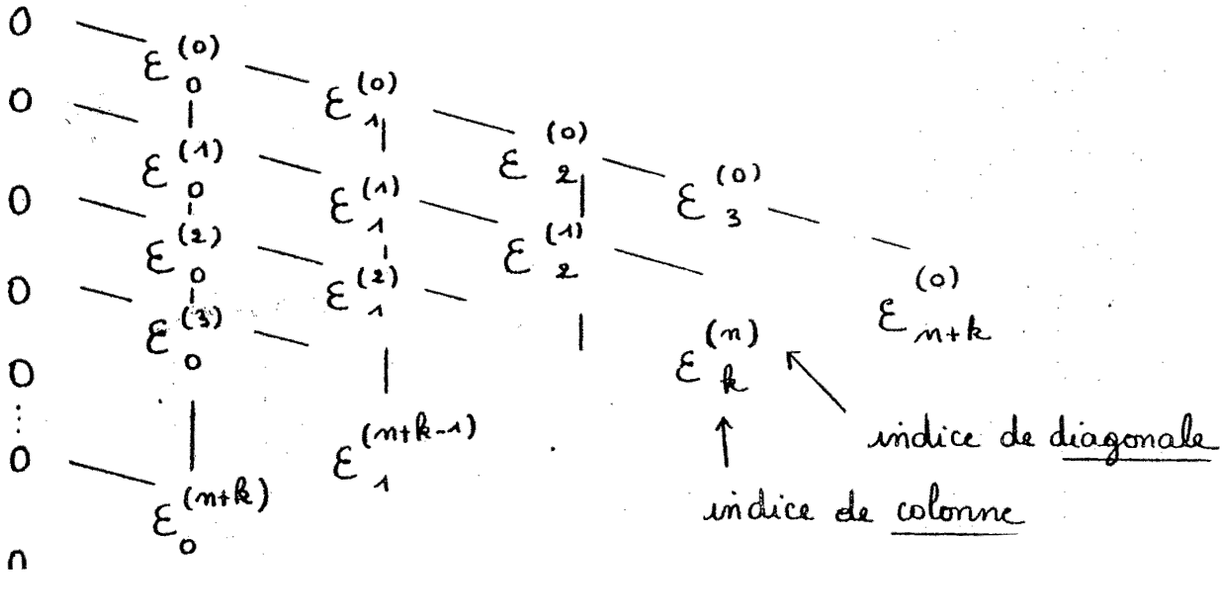
2. ε - algorithme et approximants de Padé à plusieurs variables

Introduction

L'ε-algorithme de Wynn est extrêmement utilisé et efficace en accélération de la convergence. C'est une généralisation du classique procédé Δ^2 d'Aitken, qui associe à une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$T_n = S_n - \frac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n} \quad \text{où} \begin{cases} \Delta S_n = S_{n+1} - S_n \\ \Delta^2 S_n = \Delta(\Delta S_n) \\ \qquad = S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n \end{cases}$$

Les résultats de l'ε-algorithme sont présentés dans une table à double entrée :



Il s'applique à une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numérique ou fonctionnelle.

Initialisation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \varepsilon_{-1}^{(n)} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{0}^{(n)} = S_n .$$

Règle du losange :

$$\varepsilon_{k-1}^{(n+1)} \;\nearrow\; \varepsilon_{k}^{(n)} \;\searrow\; \varepsilon_{k+1}^{(n)} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{k-1}^{(n+1)} \;\searrow\; \varepsilon_{k}^{(n+1)} \;\nearrow\; \varepsilon_{k+1}^{(n)}$$

$$\varepsilon_{k+1}^{(n)} = \varepsilon_{k-1}^{(n+1)} + \frac{1}{\varepsilon_{k}^{(n+1)} - \varepsilon_{k}^{(n)}}$$

à condition que les dénominateurs ne s'annulent pas.

En pratique, seuls sont intéressants les termes $\varepsilon_{2k}^{(n)}$ des colonnes paires, ceux des colonnes impaires servent de calculs intermédiaires. La 4ième colonne est formée de la suite obtenue par le Δ^2 d'Aitken à partir de $(S_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Il existe des critères portant sur les suites initiales permettant d'affirmer si les colonnes $\left(\varepsilon_{2k}^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ou les diagonales $\left(\varepsilon_{2k}^{(d)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de la table obtenue à partir d'une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent plus vite que cette suite vers sa limite S.

Par exemple, la convergence de la suite numérique : $\left(4 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers π est très fortement accélérée, ainsi que celle de $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\log 2$. [2]

Notons qu'il est possible de n'utiliser que les termes des colonnes paires ; pour cela, il faut initialiser par

l'∞ et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et respecter la règle de la croix :

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ W & C & E \\ & S & \end{array} \quad : \quad \frac{1}{N-C} + \frac{1}{S-C} = \frac{1}{W-C} + \frac{1}{E-C} \; ;$$

mais il est plus facile de construire toute la table.

Remarque : plus les résultats sont bons, c'est-à-dire plus les $\varepsilon_{2k}^{(n)}$ sont proches d'une limite S, plus les dénominateurs de la colonne intermédiaire suivante ont tendance à s'annuler : des erreurs numériques répétées et trop importantes peuvent ainsi stopper l'algorithme alors qu'il devient justement très efficace : d'où l'intérêt d'effectuer les calculs de manière exacte avec un code de calcul formel comme REDUCE (*).

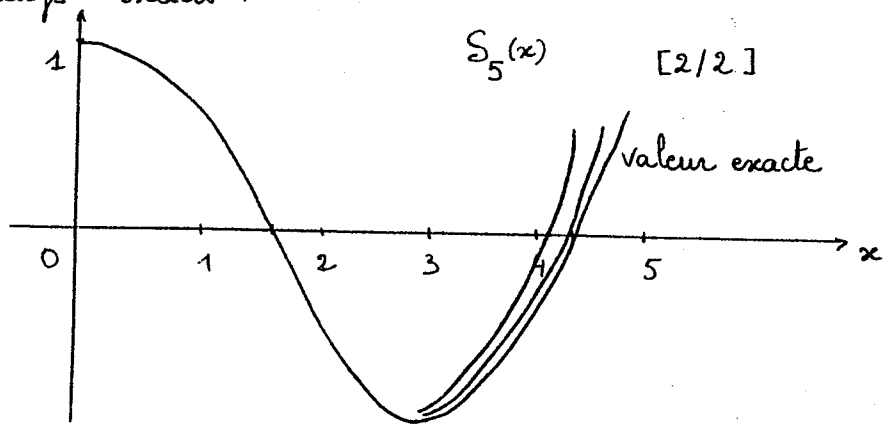
Ce procédé s'applique aux suites numériques, mais sert aussi à sommer des séries entières : $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$; ici apparaît le lien avec les approximants de Padé usuels, qu'utilisent analystes numériciens, physiciens théoriciens, et mécaniciens des fluides.

Lorsqu'on ne connaît que les premiers coefficients de la série (problèmes physiques), l'interpolation par les fractions rationnelles que sont les approximants de Padé s'avère meilleure que le développement en série initial : une fraction $\sum_{i=0}^{p} a_i x^i \Big/ \sum_{j=0}^{q} b_j x^j$ dont le développement suivant les puissances croissantes de x coïncide avec celui de f jusqu'à l'ordre $p+q$, est unique lorsqu'elle existe : on la note $[p/q]_f$ et on a l'habitude de la ranger dans la table de Padé de f :

$$\begin{array}{lll} [0/0]_f & [0/1]_f & [0/2]_f \quad \ldots \\ [1/0]_f & [1/1]_f & [1/2]_f \quad \ldots \\ [2/0]_f & [2/1]_f & [2/2]_f \quad \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & & [p/q]_f \end{array}$$

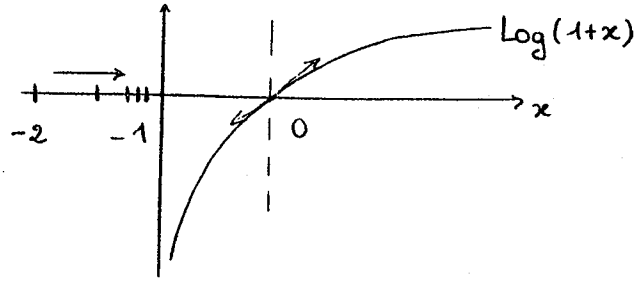
la première colonne étant formée des sommes partielles def.

Par exemple, $[3/3]_{\cos x}$ fournit une bonne approximation de cos sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{3}]$: dix chiffres significatifs exacts.



Quant à la singularité en -1 de $\log(1+x)$, elle est mise en évidence par les pôles des fractions $[p/1]_{\log(1+x)}$ qui sont :

$-2, -3/2, -4/3, -5/4, -6/5, \ldots, -(p+2)/(p+1) \ldots$ (*)



Or, si l'ε-algorithme est initialisé avec les sommes partielles : $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ de la série $f(x)$, il donne la moitié de la table de Padé de f. En effet, Wynn a établi la relation : [11]

$$\boxed{\varepsilon_{2k}^{(n)} = [n+k/k]_f}$$

Pour cela, il a fait le lien entre l'ε-algorithme et la transformation de Thanks, où interviennent des quotients de <u>déterminants de Hankel</u>, qu'il est hors de question de calculer directement sur ordinateur, mais qui apparaissent naturellement lors de la résolution de:

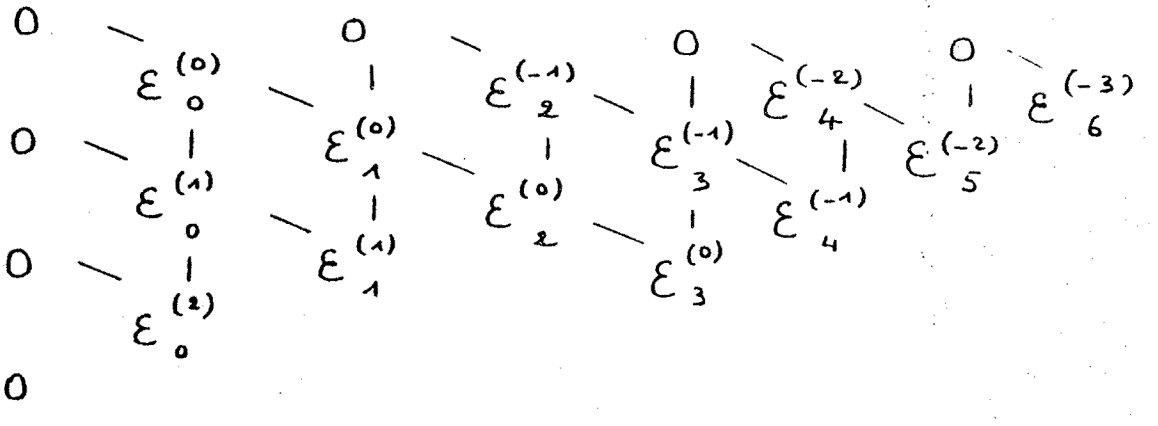
$(Qf - P)(x) = O(x^{p+q+1})$, $d^\circ P \leq p$, $d^\circ Q \leq q$.

Lorsque tous les approximants de Padé existent, pour obtenir la <u>table entière</u>, si c'est possible, on essaye:

- d'appliquer l'ε-algorithme à la série réciproque $1/f$ de f quand $f(0) \neq 0$, car dans ce cas:

<u>$1/[p/q]_f = [q/p]_{1/f}$</u>.

- ou de compléter l'ε-algorithme de la manière suivante: [2].



avec la même règle du losange et les conditions initiales supplémentaires: $\forall k \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_{2k}^{(-k-1)} = 0$

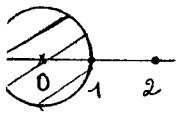
auquel cas:

<u>$\varepsilon_{2k}^{(n)} = [n+k/k]$</u> pour $k \in \mathbb{N}$, $n = -k, -k+1, \ldots$

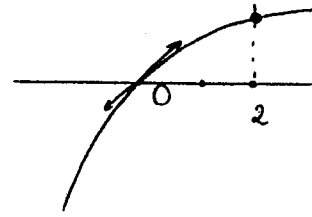
On dispose de théorèmes sur la <u>convergence (uniforme)</u> des diagonales de la table de Padé des séries de Stieltjes

(Markov) ou certaines colonnes de la table de fonctions méromorphes (Montessus de Ballore), la principale difficulté théorique étant la localisation des pôles de ces approximants.

L'ε-algorithme peut même fournir le prolongement analytique de la série en dehors de son disque de convergence, quand il existe. Ainsi, pour $\log(1+x)$, alors que la suite des sommes partielles



$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} 2^{k+1}$$ diverge, l'ε-algorithme



converge rapidement vers $\log 3$.

En pratique, les approximants de Padé servent aussi aux calculs sur ordinateur de certaines fonctions spéciales.

Signalons encore que l'ε-algorithme admet des applications, non seulement aux recherches de limites, mais aussi à la résolution des équations [2].

Une telle efficacité nous a conduits à essayer d'utiliser l'ε-algorithme dans le cadre des fonctions de plusieurs variables, qui sont aussi des fonctions d'une seule variable dépendant de paramètres.

Pour des raisons de simplicité, nous nous limitons ici à des fonctions $f(x,y)$ de deux variables complexes, holomorphes à l'origine $(0,0)$, et données par leur développement en série double :

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{i,j}\, x^i y^j$$ au voisinage de $(0,0)$.

$a_{i,j} \in \mathbb{C}$

Ce voisinage contient un polydisque $D(0,r) \times D(0,s)$, $r>0$, $s>0$, sur tout compact duquel le développement est normalement convergent.

I $\mathcal{E}$-algorithme et approximants de Padé "homogènes".

1) Moyen de calcul

Etant donnée une série double $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{i,j}\, x^i y^j$,

en dehors de toute information supplémentaire, il semble "naturel" d'initialiser l'$\mathcal{E}$-algorithme avec les sommes partielles :

$S_n(x,y) = \sum_{0\leq i+j\leq n} a_{i,j}\, x^i y^j$, de manière analogue à ce qu'on utilise pour les séries d'une seule variable.

(Lien avec la démarche du chapitre 1)

Or, notre construction d'approximants de Padé "homogènes" nous a conduits à initialiser l'$\mathcal{E}$-algorithme avec les sommes partielles $S_n^\lambda(x)$ de la série $F_\lambda(x) = f(x,\lambda x)$.

$$S_n^\lambda(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(\lambda)\, x^k \quad \text{où} \quad c_k(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} a_{k-i,i}\, \lambda^i$$

et la relation habituelle liant $\mathcal{E}$-algorithme et approximants de Padé à une variable s'écrit :

$$\lambda\, \mathcal{E}_{2k}^{(n)} = [n+k/k]_{F_\lambda}.$$

mais, pour $y=\lambda x$ et $x\neq 0$, $[n+k/k]_{F_\lambda}(x) = [n+k/k]_f(x,y)$ et $S_n^\lambda(x) = S_n(x,y)$.

L'$\mathcal{E}$-algorithme nous fournit donc un procédé récursif de calcul des approximants de Padé "homogènes", qui s'écrivent dans le cas générique comme quotient de deux déterminants : $[L/M]_f = \mathcal{U}^{[L/M]} / \mathcal{V}^{[L/M]}$, le numérateur étant de $d^\circ \leq L(M+1)$ et le dénominateur de $d^\circ \leq M(L+1)$, qui

vérifient : $V^{[L/M]} f - U^{[L/M]} = O(X^{(L+1)(M+1)})$

avec les notations concernant les " Abstract Padé approximant de Cuyt [8] ..

En particulier, le procédé Δ^2 d'Aitken (initialisé avec les $S_n(x,y)$) engendre la colonne $[L/1]_f$ de la table des approximants " homogènes " de f.

Remarquer qu'à priori le dénominateur est un polynôme formé de termes de degré L et L+1, et non de degré 1.

Exemples (*)

- $\forall L \in \mathbb{N}^*$ $[L/1]_{\frac{1}{1-(x+2y)}} = \dfrac{1}{1-(x+2y)}$

Dans le cas de cette fraction rationnelle dont le dénominateur est de degré 1, on obtient exactement la fraction, à condition de l'écrire sous forme réduite (option "on gcd", en REDUCE)

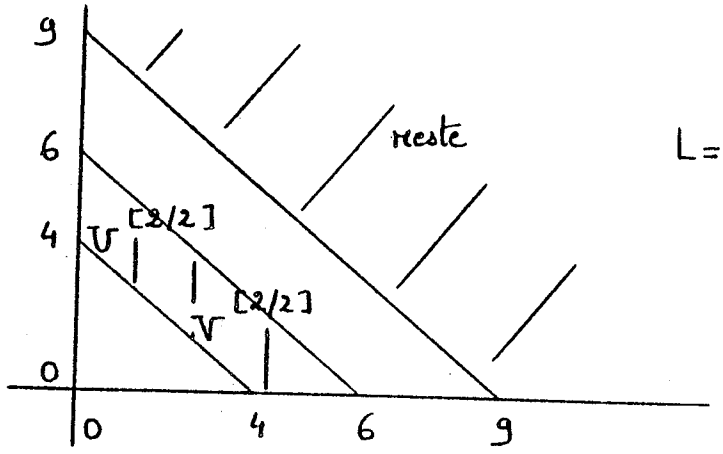
- Considérant cette fois les approximants $[L/1]_{\frac{e^{xy}}{1-x-y}}$, pour les entiers L positifs pairs, la fraction réduite a comme dénominateur $1-x-y$; mais ce n'est pas le cas pour L impair.

Pour obtenir toute la table, on procèdera de la même manière qu'à une variable :

- soit en appliquant l'ε-algorithme à $1/f$ quand $f(0,0) \neq 0$, car la propriété $1/[L/M]_f = [M/L]_{1/f}$ est encore vraie (par construction).
- soit en complétant la table de l'ε-algorithme.

2) Exemples (*)

Le numérateur $U^{[L/M]}$ est une somme de polynômes homogènes de degré LM à L(M+1), le dénominateur $V^{[L/M]}$ est une somme de polynômes homogènes de degré LM à (L+1) M.



$L = M = 2$

- fraction rationnelle $\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1-y}$

Les approximants [L/2] calculés valent tous $\dfrac{-x-y+2}{xy-x-y+1}$ (après réduction)

- fonction d'une seule variable : on retrouve les approximants classiques.

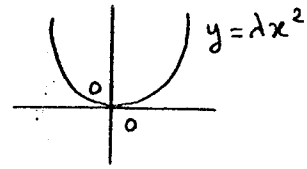
$f(x,y) = \log(1+x)$

- $f(x,y) = \sum_{i+j>0} \dfrac{x^i y^j}{i+j}$
- $f(x,y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \dfrac{x^i y^j}{(i+j)!}$
- $f(x,y) = e^{x+y} = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \dfrac{x^i y^j}{i!\,j!}$
- $f(x,y) = \log(1+x-y)$

} pour ces deux dernières fonctions, voir la remarque du paragraphe suivant.

3) Première généralisation : changement de paramétrisation de $\mathbb{C}^2$.

Au lieu de se placer sur les droites passant par l'origine de $\mathbb{C}^2$, pour ramener l'étude des approximants d'une fonction de deux variables à celle des approximants d'une fonction d'une seule variable, utilisons des courbes algébriques plus générales, qui passent toujours par l'origine.



Par exemple,

$y = \lambda x^2$, $x \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

(et $x = \mu y^2$ pour atteindre tous les points de $\mathbb{C}^2$.)

ce qui conduit à définir :

$$F_\lambda(x) = f(x, \lambda x^2) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{i,j}\, \lambda^j\, x^{i+2j}$$

$$F_\lambda(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k(\lambda)\, x^k \quad \text{où} \quad c_k(\lambda) = \sum_{i+2j=k} a_{i,j}\, \lambda^j$$

Dans l'ε-algorithme, on utilisera donc les sommes partielles suivantes :

$$S_n(x,y) = \sum_{i+2j \leq n} a_{i,j}\, x^i\, y^j$$ et les polynômes :

$$P_n(x,y) = \sum_{i+2j=n} a_{i,j}\, x^i\, y^j$$

Plus généralement, en utilisant le paramétrage :

$$\begin{cases} x = t^p \\ y = \lambda t^q \end{cases} \qquad t \in \mathbb{C},\ \lambda \in \mathbb{C},\ (p,q) \in \mathbb{N}^2$$

les approximants de Padé correspondants feront intervenir les sommes partielles :

$$S_n(x,y) = \sum_{pi+qj \leq n} a_{i,j}\, x^i\, y^j$$ et les polynômes :

$$P_n(x,y) = \sum_{pi+qj=n} a_{i,j}\, x^i\, y^j$$

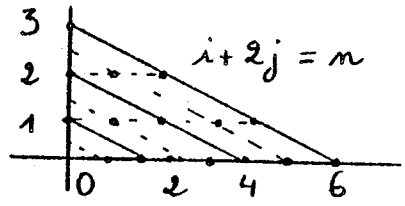
Remarque :

$\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \ / \ pi + qj = n\} \neq \emptyset \Rightarrow p \wedge q \mid n$

Lorsque p et q ne sont pas premiers entre eux, certains des polynômes P_n peuvent être nuls, et ainsi certaines sommes partielles S_n consécutives égales ; on ne peut donc appliquer l'ε-algorithme à toute la suite S_n (on rencontre le même problème à une variable avec le développement de Mac-Laurin de $\cos x$).

Ces changements de paramétrage ont pour conséquence de "basculer" les sommes partielles, qui étaient triangulaires "isocèles" pour les approximants de Padé "homogènes", et qui ne sont plus que triangulaires.

$p=1$, $q=2$



attention :

$\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \ / \ i+2j=1\} = \{(1,0)$

Remarque :

Pour une fonction du type $g(x,y) = f(ax+by)$, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, où f est une fonction holomorphe d'une seule variable à l'origine, les approximants de Padé "homogènes" $[L/M]_g(x,y)$ sont aussi les $[L/M]_f(ax+by)$; il y a égalité, car si :

$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k z^k$ et $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$, alors

$g(x,y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k (ax+by)^k$ et admet comme somme partielle "homogène" d'ordre n : $S_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} c_k (ax+by)^k$ qui est aussi $s_n(ax+by)$

($ax+by$ étant un polynôme de d° 1)

C'est le cas par exemple des fonctions e^{x+y} et $\mathrm{Log}(1+x-y)$.

Plus généralement, pour une fonction $g = f \circ \varphi$, où f est une fonction holomorphe d'une seule variable à l'origine, ($f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k z^k$) et φ un polynôme en x, y tel que $\varphi(0,0) = 0$, considérons les fractions $[L/M](x,y)$ obtenues en remplaçant z par $\varphi(x,y)$ dans $[L/M]_f(z)$.

Si $(Qf - P)(z) = O(z^{L+M+1})$, on a :

$((Q \circ \varphi) g - (P \circ \varphi))(x,y) = O((\varphi(x,y))^{L+M+1})$, donc au moins $O(x^{L+M+1})$.

Par exemple, soit $\varphi(x,y) = x^2 + y$; les sommes partielles de $f \circ \varphi$ sont :

$\sum_{k=0}^{n} c_k (x^2+y)^k$, c'est-à-dire les $\sum_{i+2j \leq 2n} a_{i,j} x^i y^j$

(où $g(x,y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{i,j} x^i y^j$).

Pour cette raison, et pour que les sommes partielles successives soient en général distinctes, on peut donc associer au paramétrage $(x, \lambda x^2)$ la suite des $\left(\sum_{i+2j \leq 2n} a_{i,j} x^i y^j \right)_{n \in \mathbb{N}}$ plutôt que celle des $\left(\sum_{i+2j \leq n} a_{i,j} x^i y^j \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Mais pourquoi se limiter à des sommes partielles triangulaires ? Il existe d'autres découpages de la série double, que nous allons étudier maintenant.

II Initialisation de l'E.algorithme avec des sommes partielles générales

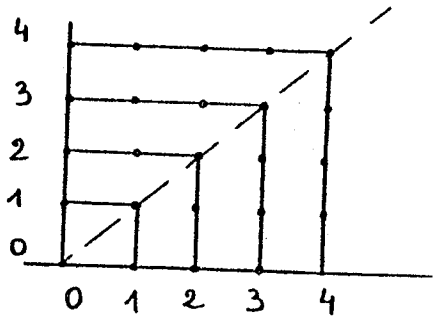
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de sous-ensembles de $\mathbb{N}^2$, telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = \mathbb{N}^2$.

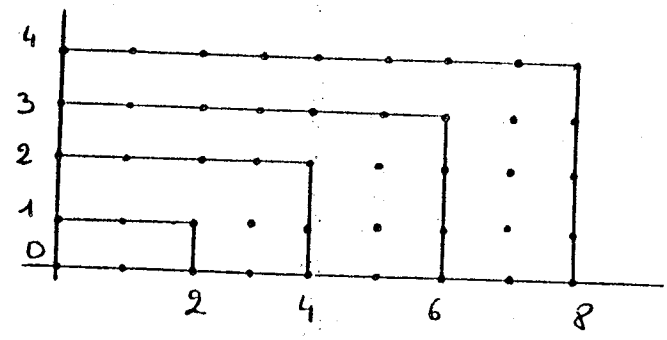
On note $S_n(x,y) = \sum\!\!\!\!\!\!\int_{(i,j)\in I_n} a_{i,j}\, x^i y^j$

et $P_n(x,y) = \sum\!\!\!\!\!\!\int_{(i,j)\in I_n \setminus I_{n-1}} a_{i,j}\, x^i y^j$

Dans ce cadre rentrent les sommes partielles "carrées" ou "rectangulaires":

$$I_n = \left\{(i,j) \,/\, \begin{matrix} 0\le i\le n \\ 0\le j\le n \end{matrix}\right\} \qquad I_n = \left\{(i,j) \,/\, \begin{matrix} 0\le i\le pn \\ 0\le j\le qn \end{matrix}\right\}$$





$p=2,\ q=1$

L'absolue convergence de la série $\sum\!\!\!\!\!\!\int_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{i,j}\, x^i y^j$ dans un voisinage de $(0,0)$ nous assure que :

$S_n(x,y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x,y)$ dans ce voisinage.

1) Transformation de Shanks

Quand l'ε-algorithme est initialisé avec la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, Wynn a établi la relation [11] :

$$\boxed{\varepsilon_{2k}^{(n)} = e_k(S_n)}$$

où $e_k(S_n)$ est le rapport de deux déterminants de Hankel : $H_{k+1}^{(n)}(S_n) \,/\, H_k^{(n)}(S_n)$, c'est-à-dire :

$$\varepsilon_{2k}^{(n)} = \underbrace{\begin{vmatrix} S_n & \cdots & S_{n+k} \\ S_{n+1} & \cdots & S_{n+k+1} \\ \vdots & & \\ S_{n+k} & \cdots & S_{n+2k} \end{vmatrix}}_{\text{d'ordre } k+1} \Big/ \underbrace{\begin{vmatrix} \Delta^2 S_n & \cdots & \Delta^2 S_{n+k-1} \\ \vdots & & \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \cdots & \Delta^2 S_{n+2k-2} \end{vmatrix}}_{\text{d'ordre } k}$$

Notons $P_0 = S_0$ et pour $n \geq 1$, $P_n = S_n - S_{n-1} = \Delta S_{n-1}$

Grâce à quelques opérations sur lignes et colonnes de ces déterminants de Hankel, écrivons les fractions obtenues sous une forme analogue à celle donnée pour les approximants de Padé "homogènes", qui utilise les termes P_n et S_n.

$$\begin{vmatrix} S_n & S_{n+1} & \cdots & S_{n+k} \\ S_{n+1} & S_{n+2} & \cdots & S_{n+k+1} \\ \vdots & & & \\ S_{n+k} & S_{n+k+1} & \cdots & S_{n+2k} \end{vmatrix} = (-1)^k \begin{vmatrix} S_{n+1} & S_{n+2} & \cdots & S_{n+k} & S_n \\ S_{n+2} & S_{n+3} & \cdots & S_{n+k+1} & S_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ S_{n+k+1} & S_{n+k+2} & \cdots & S_{n+2k} & S_{n+k} \end{vmatrix}$$

permutation circulaire sur les vecteurs colonnes

$$= (-1)^k \begin{vmatrix} S_{n+1} & S_{n+2} & \dots & P_{n+k} & S_n \\ S_{n+2} & S_{n+3} & \dots & P_{n+k+1} & S_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_{n+k+1} & S_{n+k+2} & \dots & P_{n+2k} & S_{n+k} \end{vmatrix}$$

en retranchant la $k-1^{\text{ième}}$ colonne à la $k^{\text{ième}}$

$$= (-1)^k \begin{vmatrix} S_{n+1} & P_{n+2} & \dots & P_{n+k} & S_n \\ S_{n+2} & P_{n+3} & \dots & P_{n+k+1} & S_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_{n+k+1} & P_{n+k+2} & \dots & P_{n+2k} & S_{n+k} \end{vmatrix}$$

en retranchant la $i^{\text{ième}}$ colonne à la $i+1^{\text{ième}}$: $i = 1, \dots, k-2$

$$= (-1)^k \begin{vmatrix} P_{n+1} & P_{n+2} & \dots & P_{n+k} & S_n \\ P_{n+2} & P_{n+3} & \dots & P_{n+k+1} & S_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{n+k+1} & P_{n+k+2} & \dots & P_{n+2k} & S_{n+k} \end{vmatrix}$$

en retranchant la dernière colonne à la première.

Quant au dénominateur, il s'écrit :

$$\begin{vmatrix} \Delta^2 S_n & \dots & \Delta^2 S_{n+k-1} \\ \vdots & & \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_{n+2} - P_{n+1} & \dots & P_{n+k+1} - P_{n+k} \\ \vdots & & \\ P_{n+k+1} - P_{n+k} & \dots & P_{n+2k} - P_{n+2k-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{k+2} \begin{vmatrix} P_{n+1} & \dots & P_{n+k} & 1 \\ P_{n+2} - P_{n+1} & \dots & P_{n+k+1} - P_{n+k} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{n+k+1} - P_{n+k} & \dots & P_{n+2k} - P_{n+2k-1} & 0 \end{vmatrix}$$

en développant ce déterminant par rapport à la dernière colonne.

Puis, en ajoutant la $1^{\text{ière}}$ ligne à la seconde, la seconde à la troisième, ..., la $k^{\text{ième}}$ à la dernière, successivement, on obtient :

$$(-1)^k \begin{vmatrix} P_{n+1} & P_{n+2} & \dots & P_{n+k} & 1 \\ P_{n+2} & P_{n+3} & \dots & P_{n+k+1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{n+k+1} & P_{n+k+2} & \dots & P_{n+2k} & 1 \end{vmatrix}$$

$e_k(S_n)$ apparaît ainsi comme le quotient de deux déterminants d'ordre $k+1$, dont les k premières colonnes sont identiques.

$$e_k(S_n) = \begin{vmatrix} P_{n+1} & \dots & P_{n+k} & S_n \\ P_{n+2} & \dots & P_{n+k+1} & S_{n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{n+k+1} & \dots & P_{n+2k} & S_{n+k} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} P_{n+1} & \dots & P_{n+k} & 1 \\ P_{n+2} & \dots & P_{n+k+1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{n+k+1} & \dots & P_{n+2k} & 1 \end{vmatrix}$$

2) Propriétés

L'ε-algorithme initialisé avec des sommes partielles du type précédent (associées à f ou $1/f$ suivant que $L \geqslant M$ ou $M \geqslant L$) engendre donc les fractions $U^{[L/M]}$ / $V^{[L/M]}$ définies par :

$$U^{[L/M]} = \begin{vmatrix} P_{L-M+1} & P_{L-M+2} & \dots & P_L & S_{L-M} \\ P_{L-M+2} & P_{L-M+3} & \dots & P_{L+1} & S_{L-M+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{L+1} & P_{L+2} & \dots & P_{L+M} & S_L \end{vmatrix}$$

et $$V^{[L/M]} = \begin{vmatrix} P_{L-M+1} & P_{L-M+2} & \dots & P_L & 1 \\ P_{L-M+2} & P_{L-M+3} & \dots & P_{L+1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{L+1} & P_{L+2} & \dots & P_{L+M} & 1 \end{vmatrix}$$

Convention : $k < 0$ $P_k = 0$ et $S_k = 0$.

Ces expressions généralisent tout à fait les approximants de Padé "homogènes" ; de plus, le reste

$$V^{[L/M]}f - U^{[L/M]} = \begin{vmatrix} P_{L-M+1} & \cdots & P_L & \sum_{\lambda=1}^{+\infty} & P_{L+i} \\ P_{L-M+2} & \cdots & P_{L+1} & \sum_{\lambda=1}^{+\infty} & P_{L+i+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ P_{L+1} & \cdots & P_{L+M} & \sum_{\lambda=1}^{+\infty} & P_{L+i+M} \end{vmatrix}$$

Il est donc de la forme $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \setminus I_{(L+1)(M+1)-1}} e_{i,j}\, x^i y^j$,

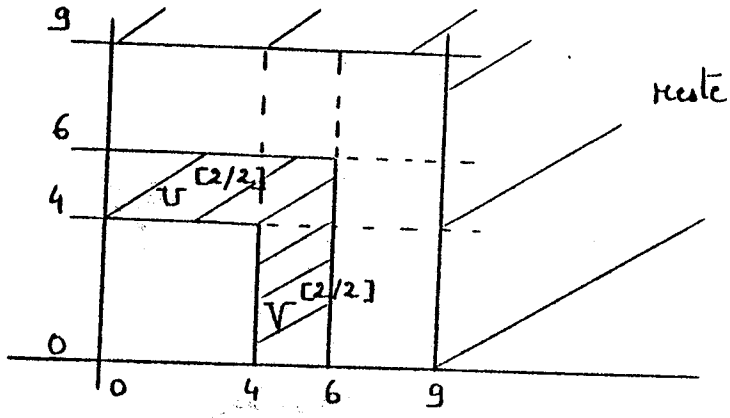
alors que le numérateur s'écrit :

$$U^{[L/M]} = \sum_{(i,j) \in I_{L(M+1)} \setminus I_{LM-1}} u_{i,j}\, x^i y^j$$

et le dénominateur :

$$V^{[L/M]} = \sum_{(i,j) \in I_{M(L+1)} \setminus I_{LM-1}} v_{i,j}\, x^i y^j .$$

Exemple : $L = M = 2$, approximants "carrés".



Différents découpages de la série double $f(x,y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{i,j} x^i y^j$ conduisent à de nouveaux types d'approximants rationnels de $f(x,y)$, qui ont l'avantage de se calculer récursivement.

Remarque : pour un découpage carré de la scie, ces approximants ne sont pas ceux que définit Chisholm, ni ceux de Lutterodt (de même que pour un découpage triangulaire, les approximants " homogènes" ne sont pas les approximants de Karlsson - Wallin).

En effet, pour U et V de la forme :

$$U = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} u_{i,j}\, x^i y^j$$

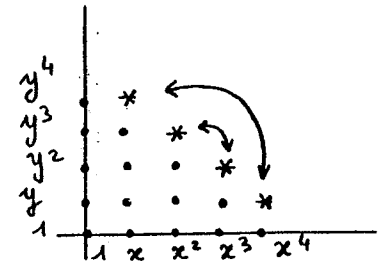
$$V = \sum_{i=0}^{q} \sum_{j=0}^{r} v_{i,j}\, x^i y^j ,$$

. Lutterodt impose $Vf - U = \sum e_{i,j}\, x^i y^j$ avec $e_{i,j} = 0$ pour $(i,j) \in S \subset \mathbb{N}^2$, de cardinal : $(n+1)^2 + (r+1)^2 - 1$, contenant $\{ (i,j) / (i,j) \leq (n,n) \}$ et satisfaisant la règle du rectangle :
$(i,j) \in S$ et $(k,l) < (i,j) \Rightarrow (k,l) \in S$.
(avec l'ordre partiel habituel dans $\mathbb{N}^2$)

. Pour Chisholm, S est plus petit :
$S = \{ (i,j) / (i,j) \leq (n,n)$ ou $i+j \leq r+n \}$

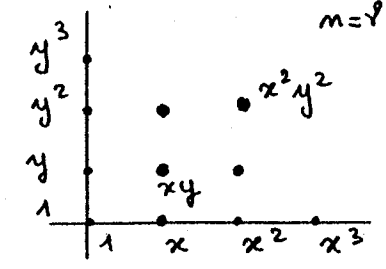
mais les $e_{i,j}$ doivent de plus vérifier :

$e_{r+n+1-p,\,p} + e_{p,\,r+n+1-p} = 0$
pour $p = 1, \ldots, r+n$.



. Pour $U = \sum_{i+j \leq n} u_{i,j}\, x^i y^j$

et $V = \sum_{i+j \leq r} v_{i,j}\, x^i y^j$,



Karlsson - Wallin choisissent S contenant $\{ (i,j) / i+j \leq n \}$, satisfaisant la règle du rectangle et de cardinal $(n+1)(n+2)/2 + (r+1)(r+2)/2 - 1$.

Exemple : approximants carrés de $f(x,y) = e^{x+y}$, qui est du type $g(x)\,h(y)$ et symétrique en x, y.
(calculs en REDUCE (*)).

Il reste à étudier le choix d'un découpage approprié à la fonction.
Si $f(x,y)$ est une fonction symétrique en x et en y ($a_{i,j} = a_{j,i}$), on aura tout intérêt à choisir un découpage symétrique par rapport à la première diagonale (par exemple, triangulaire ou carré).
S'il s'agit d'une fonction du type $g(x+y)$, (relations entre les $a_{i,j}$, $i+j$ = constante), on choisira les approximan de Padé "homogènes"; si elle est de la forme $g(x)\,h(y)$ ($a_{i,j} = a_{i,0}\,a_{0,j}$), on utilisera un découpage carré ou rectangulaire, (suivant l'importance relative de g et h).

Remarque : Le procédé se généralise immédiatement au cas d'une fonction holomorphe d'un nombre fini de variables, à l'origine ; on choisit cette fois des sommes partielles de la série multiple correspondante. Formellement, l'écriture des approximants est la même.

D'autre part, un des principaux attraits de la construction "homogène" d'approximants de Padé à plusieurs variables est qu'elle montre que tous les algorithmes de calcul d'approximants de Padé à une variable permettent aussi le calcul des approximants "homogènes". Il suffit en effet de modifier les conditions initiales de ces algorithmes de la manière suivante :

remplacer chaque somme partielle $s_n(x) = \sum_{i \leq n} c_i x^i$

correspondant à $f(x)$ par la somme partielle $S_n(x,y) = \sum_{i+j \leq n} a_{i,j} x^i y^j$ associée à $f(x,y)$.

(ce qui provient de l'étude de la fonction $F_\lambda(x) = f(x, \lambda x)$).

Par exemple :

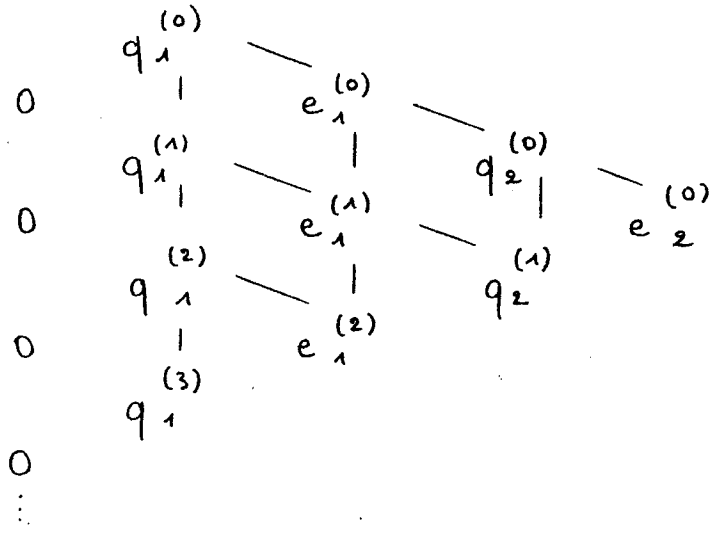
III qd. algorithme et approximants de Padé.

1) Définition

Appliqué à une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il définit (quand ils existent) les termes :

$q_m^{(n)}$ $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^*$ indice de colonne,

et $e_m^{(n)}$ n indice de diagonale, disposés dans la table qd :

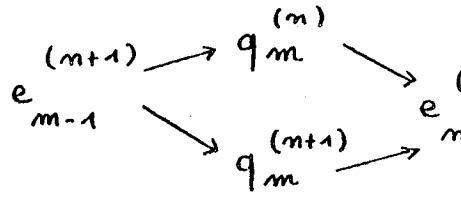


à partir des conditions initiales : $n \in \mathbb{N}^*$ $e_0^{(n)} = 0$

$n \in \mathbb{N}$ $q_1^{(n)} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

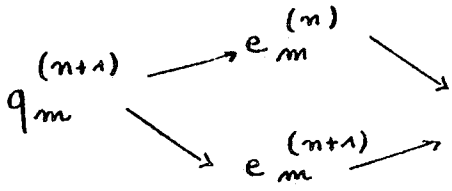
et des règles du losange :

$m \in \mathbb{N}^*$ $n \in \mathbb{N}$



$$e_{m-1}^{(n+1)} + \left(q_m^{(n+1)} - q_m^{(n)} \right)$$

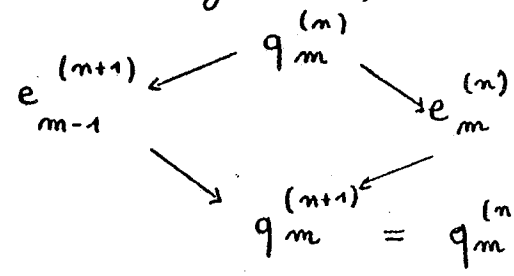
terme correcteur par rapport à la colonne des e précédente.



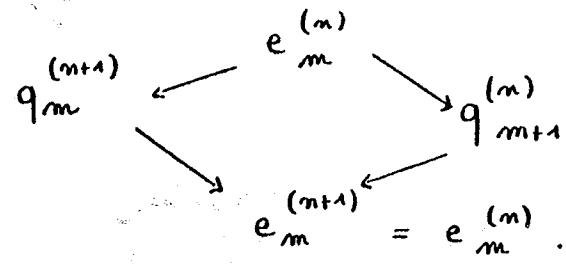
$$q_m^{(n+1)} \cdot \frac{e_m^{(n+1)}}{e_m^{(n)}}$$

terme correcteur par rapport à la colonne des q précédente.

Les colonnes de la table qd sont ainsi construites de la gauche vers la droite, mais l'algorithme est instable numériquement. Il en existe une forme plus stable : la forme progressive du qd. algorithme qui calcule les termes à partir d'une diagonale, du haut vers le bas, grâce aux règles :



$$q_m^{(n+1)} = q_m^{(n)} + \left(e_m^{(n)} - e_{m-1}^{(n+1)} \right)$$



$$e_m^{(n+1)} = e_m^{(n)} \cdot \frac{q_{m+1}^{(n)}}{q_m^{(n+1)}}$$

Mais de toute manière, nous effectuons les calculs de manière exacte en REDUCE.

2) Application aux approximants de Padé usuels.

a) Théorème.

Lorsque la table qd est définie à partir de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des coefficients de la série de Mac-Laurin de f : $f(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$, les valeurs obtenues dans le cas normal

$$\left(\forall n, m \geq 0 \quad H_m^{(n)} = \begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+m-1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{n+m} \\ \vdots & & & \\ c_{n+m-1} & c_{n+m} & \cdots & c_{n+2m-2} \end{vmatrix} \neq 0 \right)$$

déterminants de Hankel associés à f.

sont liées à f par :

$$q_m^{(n)} = \frac{H_m^{(n+1)} \; H_{m-1}^{(n)}}{H_m^{(n)} \; H_{m-1}^{(n+1)}} \quad ; \quad e_m^{(n)} = \frac{H_{m+1}^{(n)} \; H_{m-1}^{(n+1)}}{H_m^{(n)} \; H_m^{(n+1)}}$$

$m \in \mathbb{N}^*$
$n \in \mathbb{N}$

b) Localisation des pôles et des zéros d'une fonction méromorphe.

Il résulte d'une étude poussée de ces déterminants l'importante propriété analytique suivante :

- Pour f méromorphe, analytique en 0, ayant des pôles simples de modules distincts dans $D(0, R)$, notés α_i tels que : $0 < |\alpha_1| < |\alpha_2| < \dots$, et si les termes considérés dans la table qd. existent, on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} q_m^{(n)} = 1/\alpha_m \\ \lim\limits_{n \to +\infty} e_m^{(n)} = 0 \end{cases}$$

Ce résultat admet des généralisations à des situations plus compliquées quant à la configuration des pôles.
D'autre part, grâce à la dualité entre :

f	$\longleftrightarrow$	$1/f$
les valeurs limites des e-lignes associées à f	$\longleftrightarrow$	les valeurs limites des q-colonnes associées à $1/f$
les zéros de f	$\longleftrightarrow$	les pôles de $1/f$,

on peut aussi localiser les zéros de f.
(d'où les applications du qd. algorithme à la recherche de zéros de polynômes ou de fonctions entières, par exemple, les polynômes de Laguerre et les fonctions de Bessel).

c) Lien précis avec les approximants de Padé de f.

Théorème : $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Les convergents de la fraction continue :

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1} + \cfrac{c_n x^n}{1} - \cfrac{q_1^{(n)} x}{1} - \cfrac{e_1^{(n)} x}{1} - \cfrac{q_2^{(n)} x}{1} - \cfrac{e_2^{(n)} x}{1}$$

forment la suite en escalier :

$[n/0]$ $[n/1]$
$[n+1/1]$ $[n+1/2]$
$[n+2/2]$ $[n+2/3]$
$[n+3/3]$ ...
⋮

dans la table de Padé de f.

($\cfrac{a_0}{b_0} + \cfrac{a_1}{b_1} + \cdots + \cfrac{a_n}{b_n} + \cdots$ désigne $\cfrac{a_0}{b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cdots + \cfrac{a_n}{}}}$)

Remarque : quand c'est possible, on calcule l'autre moitié de la table de Padé de f à l'aide de la table qd de la série réciproque $1/f$.

3) Utilisation dans le cadre des approximants "homogènes"

Principe.

Modifions quelque peu le qd algorithme précédent, pour en donner une formulation plus adaptée au cas de fonctions de plusieurs variables, en privilégiant les termes $c_n x^n$.

Remplaçons dans 2) les conditions initiales par :

$$\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* & e_0^{u(n)} = 0 \\ n \in \mathbb{N} & q_1^{u(n)} = \dfrac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} \end{cases}$$

en conservant les mêmes règles.

Alors on obtient : $\begin{cases} e_m^{u(n)} = e_m^{(n)} x \\ \text{et } q_m^{u(n)} = q_m^{(n)} x \end{cases}$

Preuve par récurrence sur m et n.

* C'est vrai pour les termes initiaux : $e_0^{u(n)} = e_0^{(n)} x = 0$

$q_1^{u(n)} = q_1^{(n)} x$

* puis, alternativement sur les q-colonnes et les e-colonnes :

$$e_m^{u(n)} = e_{m-1}^{(n+1)} x + (q_m^{(n+1)} - q_m^{(n)}) x = e_m^{(n)} x$$

$$q_m^{u(n)} = q_m^{(n+1)} x \cdot \frac{e_m^{(n+1)} x}{e_m^{(n)} x} = q_m^{(n)} x$$

Conséquence : Les fractions continues du 2) c) s'écrivent aussi :

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1} + \cfrac{c_n x^n}{1} \Bigg| - \cfrac{q_1^{u(n)}}{1} \Bigg| - \cfrac{e_1^{u(n)}}{1} \Bigg| - \cfrac{q_2^{u(n)}}{1} \Bigg| - \cfrac{e_2^{u(n)}}{1} \Bigg| - \cdots$$

En appliquant cette dernière forme du qd. algorithme à $F_\lambda(x) = f(x, \lambda x)$, on obtient la suite en escalier :

$[n/0]$ $[n/1]$

$[n+1/1]$ $[n+1/2]$

$[n+2/2]$ $[n+2/3]$

⋮ ...

des approximants "homogènes" de $f(x,y)$.

Résumons :

Soit P_k la partie homogène de degré k de $f(x,y)$.

$$P_k(x,y) = \sum_{i=0}^{k} a_{i,k-i}\, x^i\, y^{k-i}.$$

On initialise le qd. algorithme avec :

$$\begin{cases} e_0^{(n)} = 0 \\ q_1^{(n)} = \dfrac{P_{n+1}(x,y)}{P_n(x,y)} \end{cases}$$

et on calcule ensuite les fractions continues :

$$P_0 + P_1 + \cdots + P_{n-1} + \cfrac{P_n}{1} - \cfrac{q_1^{(n)}}{1} - \cfrac{e_1^{(n)}}{1} - \cfrac{q_2^{(n)}}{1} - \cdots$$

Remarque : De la même manière que l'ε-algorithme, le qd. algorithme fournit un autre moyen de calcul des approximants plus généraux du II.

De façon générale, le choix de l'algorithme dépend du problème à traiter : évaluation ponctuelle de la fraction, ou calcul exact des coefficients de la fraction (ce qui est préférable si on doit l'évaluer en de nombreux points), calcul d'un seul approximant ou de toute une suite d'approximants ...

References

[1] G.A. BAKER (1973) Recursive calculation of Padé approximants, in "Padé approximants and their applications" Academic Press. P.R. Graves-Morris ed. p 83-91

[2] C. BREZINSKI (1978) Algorithmes d'accélération de la convergence. Etude numérique. Editions Technip. Paris

[3] C. BREZINSKI (1976) Computation of Padé approximants and continued fractions. J. Comp. Applied Maths. vol 2 n°2 p. 113-123.

[4] C. BREZINSKI (1977) Accélération de la convergence en analyse numérique. Lecture Notes in Mathematics. 584 Springer-Verlag.

[5] A. BULTHEEL (1980) Division algorithms for continued fractions and the Padé table. J. Comp. Applied Maths. vol 6 n°4 p 259-266.

[6] J.S.R. CHISHOLM (1976) Rational polynomial approximants in N variables, in "Padé approximants methods and its applications to mechanics". H. Cabannes ed.

[7] G. CLAESSENS (1975) A new look at the Padé table and the different methods for computing its elements. J. Comp. Applied Maths 1 p 141-152

[8] A. CUYT (1982) Abstract Padé approximants for operators : theory and applications. Thèse Universiteit Antwerpen.

[9] J. KARLSSON, H. WALLIN (1977) Rational approximation by an interpolation procedure in several variables, in " Padé and rational approximation " Saff - Varga ed. p 83 - 100.

[10] C.H. LUTTERODT (1976) Rational approximants to holomorphic functions in n dimensions. Lecture Notes in Physics. 47 Springer - Verlag p 33 - 54

[11] P. WYNN (1956) On a device for computing the $e_m(S_n)$ transformation. M.T.A.C. 10 p 91 - 96.

Calcul d'approximants de Padé à plusieurs variables dans le langage de calcul formel REDUCE.

1) ε - algorithme appliqué à des suites numériques

epsilonusuel

```
% construction à partir d'une suite s(m);
% si c'est une suite numerique, mettre l'option float à on ;
% si c'est une suite polynomiale, mettre l'option gcd à on pour que
  les fractions obtenues soient reduites ;

operator epsil;
for all s,m Let epsil(s,m,-1)=0;
for all s,m Let epsil(s,m,0)=s(m);
for all s,m,k such that k>=1 Let epsil(s,m,k)=epsil(s,m+1,k-2)
+1/(epsil(s,m+1,k-1)-epsil(s,m,k-1));

procedure diago(s,m,n);

% m est le numero de la diagonale, n en est la longueur;

begin
write s;
for k=0:n do
    begin
    write s(m+2*k)," ",epsil(s,m,2*k);
    end;
end;

procedure colonne(s,k,n);

%2*k est le numero de la colonne, n en est la longueur;

begin
write s;
for i=0:n do write s(2*k+i)," ",epsil(s,i,2**k);
end;
end;
```

Dans un tel programme, les commentaires sont entre % et ; l'opérateur epsil s'applique aussi bien à une suite s numérique que fonctionnelle :

epsil $(s, m, k) = \varepsilon_k^{(m)}$ de l'ε-algorithme appliqué à la suite s ; ici, elle est choisie parmi les suites numériques suivantes.

suitesnum.donnees

```
operator riemann;
%serie des 1/n**2;
Let riemann(0)=0;
for all n such that n>0 Let riemann(n)=riemann(n-1) + 1/n**2;

operator geom;
%serie des 1/2**n;
Let geom(0)=1;
for all n such that n>0 Let geom(n)=geom(n-1) +  1/2**n;

operator geomdouble;
%serie des (1/2**n)-(1/3**n);
Let geomdouble(0)=0;
for all n such that n>0 Let geomdouble(n)=geomdouble(n-1)+1/2**n-1/3**n;

procedure g(n);
1+1/2**n;

operator pi;
Let pi(0)=4;
for all n such that n>0 Let pi(n)=pi(n-1)+4*((-1)**n)/(2*n+1);

operator l3;
Let l3(0)=0;
for all n such that n>0 Let l3(n)=l3(n-1)+((-1)**(n+1))*(2**n)/n;

end;
```

Exemple :
riemann

diago(riemann, 0, 5);

```
0                                0

5/4                              4/3

205/144                          135/89

5369/3600                  798404020/506758140

1077749/705600   44900622571906223220142000/28037329265871159129149760

9841645/6350400

        484971759152697215366333298143432636537423836907513994802549 60

        300260466946310199538912694034930750754493287748972918689680 00
```

les termes de la 1ère colonne sont les termes initiaux de la suite dont on a besoin pour calculer ceux de la diagonale : $\varepsilon_{2k}^{(0)}$

$0 \leq k \leq 5$

diago(riemann, 0, 5);

0	0
1.25	1.333333/0.99999999
1.423611/0.99999999	1.5168539
1.491388/0.99999999	1.5755134
1.52742/0.99999999	1.6014697/0.99999999
1.549767/0.99999999	1.615664/0.99999999

cette fois, l'option "on float" évalue les nombres sous forme : précision de 10^{-8} au lieu de les laisser sous forme rationnelle

```
a:=epsil(riemann,0,8);
a := 44900622571906223220142000/2803732926587115912914976O

a;
44900622571906223220142000/2303732926587115912914976O
```

on float;
a;
1.6014586 ≠ 1.6014697/0.99999999 , car on évalue ici le nombre tout à la fin, au lieu de faire tous les calculs avec la précision 10^{-8}.

La diagonale principale de l'ε-algorithme converge plus vite vers la limite de $\sum_{n>0} 1/n^2$ que la suite initiale (colonne de gauche)

Exemple geom

colonne(geom,1,10);

geom	
7/4	2
15/8	2
31/16	2
63/32	2
127/64	2
255/128	2
511/256	2
1023/512	2
2047/1024	2
4095/2048	2
8191/4096	2

forme algébrique

on a: $\forall k \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_2^{(k)} = 2 = \sum 1$

on float;
colonne(geom,1,10);

geom	
1.75	2.0
1.875	2.0
1.9375	2.0
1.96875	2.0
1.984375	2.0
1.9921875	2.0
1.9960938	2.0
1.9980469	2.0
1.9990234	2.0
1.9995117	2.0
1.9997559	2.0

forme évaluée

Exemple geomdouble

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} - \sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

```
off float;
colonne(geomdouble,2,10);
geomdouble
```

575/1296	1/2
3661/7776	1/2
22631/46656	1/2
137845/279936	1/2
833375/1679616	1/2
5019421/10077696	1/2
30174551/60466176	1/2
181222405/362797056	1/2
1087861775/2176782336	1/2
6528756781/13060694016	1/2
39177307271/78364164096	1/2

$\forall k \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_4^{(k)} = \frac{1}{2}$

```
on float; forme évaluée
colonne(geomdouble,2,10);
geomdouble
```

0.44367282	0.49999994
0.4708076/0.99999999	0.4999996/0.99999999
0.48506085	0.49999991
0.4924160/0.99999999	0.4999996/0.9999999
0.49616993	0.49999994
0.4980725/0.99999999	0.4999994/0.9999999
0.49903187	0.49999992
0.4995145/0.99999999	0.4999991/0.99999999
0.49975675	0.49999993
0.4998781/0.99999999	0.4999992/0.99999999

⟷

***** zero denominator

l'algorithme s'arrête par manque de précision.

Exemple g

$$1 + \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

```
colonne(g,1,10);
g
```

5/4	1
9/8	1
17/16	1
33/32	1
65/64	1
129/128	1
257/256	1
513/512	1
1025/1024	1
2049/2048	1
4097/4096	1

$\forall k \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_2^{(k)} = 1$

```
on float;
colonne(g,1,10);
g
```

forme évaluée

1.25	1.0
1.125	1.0
1.0625	1.0
1.03125	1.0
1.015625	1.0
1.0078125	1.0
1.0039063	1.0
1.0019531	1.0
1.0009766	1.0
1.0004883	1.0
1.0002441	1.0

Exemple pi

$$4 \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} \longrightarrow \pi \quad (n \to +\infty)$$

```
diago(pi,0,6);
pi

4   4

52/15   19/6

1052/315   1744/555

14716/45045   10116/3220

2490548/765765   925945660416O/2947375960200

4702892/14549535   10329847451709338447541324801/

32880925463025949378113230O

5385020324/1673196525   369517355001633126446769869893486333637146624O1/

11762102719203066914929164080717168533386866400
```

diagonale principale

$\varepsilon_{2k}^{(0)} \quad : \quad 0 \leq k \leq 6$

```
on float;
diago(pi,0,6);
pi

4   4

3.4666666/0.99999999   3.1666667

3.3396825   3.1423423

3.2837384   3.1416148/0.99999999

3.2523658   3.1415931
```

forme évaluée

```
***** zero denominator
```

$\leftarrow \varepsilon_8^{(0)}$ n'est pas calculé, par manque de précision (alors qu'il est défini : voir tableau ci-dessus) ou encore :

$a := \varepsilon_8^{(0)}$

```
off float;
a:=epsil(pi,0,8);
a := 925945660416O/2947375960200

on float;
a;
3.1415933
```

l'évaluation de $\varepsilon_8^{(0)}$ est : 3.1415933

```
off float;
a:=epsil(pi,0,10);
a := 10329847451709338447541324801/32880925463025949378113280O

on float;
a;
3.1415927
```

La diagonale principale converge plus

Exemple l3

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} \, 2^n}{n}$ diverge mais la diagonale principale de l'ε-algorithme converge vers Log 3.

ici, $\varepsilon_{2k}^{(0)}$: $0 \leq k \leq 7$

```
diago(l3,0,7);
l3

0    0

0    1

( - 4)/3    12/11

( - 56)/10    5152/4692

( - 1352)/70    1283964380/1168759812

( - 4084)/63    197635301600/179895903000

( - 609776)/2772    894313955320316913173796519736825840 00/
                    814039806474365593952350534370870 70000

( - 1956520)/2574    471288814161581565855274559 76/
                     428985571940563533788655601 30
```

$\longleftarrow \varepsilon_{14}^{(0)}$

```
on float;
diago(l3,0,7);
l3

0    0

0    1

 - 1.3333333    1.0909091

( - 5.6000001)/0.99999999    1.0980392

 - 19.314286    1.0985702/0.99999999

 - 64.825397    1.0986091/0.99999999

 - 219.97691    1.0986117
```

```
off float;
a:=epsil(l3,0,10);
a := 197635301600/179895903000

on float;
a;
1.0986092
```

$\varepsilon_{10}^{(0)}$

```
***** zero denominator
```

$\longleftarrow$ $\varepsilon_{14}^{(0)}$ n'est pas calculé par manque de précision (alors qu'il est défini)

```
off float;
a:=epsil(l3,0,14);
a := 471288814161581565855274559 76/428985571940563533788655601 30
```

$a := \varepsilon_{14}^{(0)}$

```
on float;
a;
1.0986123/0.99999999
```

: évaluation de $\varepsilon_{14}^{(0)}$

On peut aussi appliquer epsilonnuel aux sommes partielles de séries entiè

2) E-algorithme appliqué à des séries de Mac-Laurin

fonctions.donnees

```
operator fac;
Let fac(0)=1;
for all n such that n>0 Let fac(n)=n*fac(n-1);

operator ex;
%sommes partielles de e**x;
Let ex(0)=1;
for all n such that n>0 Let ex(n)=ex(n-1)+(x**n)/fac(n);

operator nex;
%sommes partielles de e**(-x);
Let nex(0)=1;
for all n such that n>0 Let nex(n)=nex(n-1)+((-x)**n)/fac(n);

operator tlog;
%sommes partielles de Log(1+x);
Let tlog(0)=0;
for all n such that n>0 Let tlog(n)=tlog(n-1)+((-1)**(n+1))*(x**n)/n;

operator frac1;
%sommes partielles de 1/(1-x);
Let frac1(0)=1;
for all n such that n>0 Let frac1(n)=frac1(n-1)+x**n;

operator frac2;
%sommes partielles de 1/(1-2*x)+1/(1-x);
Let frac2(0)=2;
for all n such that n>0 Let frac2(n)=frac2(n-1)+(1+2**n)*(x**n);

end;
```

ex : fonction e^x

$[0/0] = 1$

$[1/\underline{1}] = (-x-2)/(x-2)$

$[2/2] = (x^2+6x+12)/(x^2-6x+12)$

$[3/3] = (-x^3-12x^2-60x-120)/(x^3-12x^2+60x-120)$

$[4/4] = (x^4+20x^3+180x^2+840x+1680)/(x^4-20x^3+180x^2-840x+1680)$

$[1/0] = x+1$

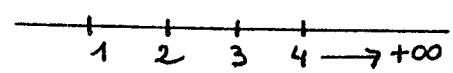
$[2/\underline{1}] = (-x^2-4x-6)/2(x-3)$

$[3/2] = (x^3+9x^2+36x+60)/3(x^2-8x+20)$

[3/1] = $(-x^3 - 6x^2 - 18x - 24) / 6(x-4)$

[4/3] = $(-x^4 - 16x^3 - 120x^2 - 480x - 840) / 4(x^3 - 15x^2 + 90x - 210)$

Les singularités des $[L/1]_{e^x}$ sont : L+1




```
[3/3] = ( - x^4 - 7*x^3 + 180*x + 600)/(x^4 - 17*x^3 + 120*x^2 - 420*x + 600)

[4/4] = (x^7 + x^6 - 74*x^5 - 354*x^4 + 2520*x^3 +
21000*x^2 - 35280*x - 493920)/(x^7 - 39*x^6 + 686*x^5 - 7074*x^4 + 46200*x^3
 - 190680*x^2 + 458640*x - 493920)

[3/2] = (2*(x^4 + 5*x^3 - 84*x - 240))/(6*(x^3 - 12*x^2 + 52*x - 80))

[4/3] = (6*( - x^9 + 9*x^8 + 26*x^7 - 234*x^6 - 1780*x^5 +
5160*x^4 + 62640*x^3 - 109200*x^2 - 114480*x + 3024000))/(24*(x^8 - 40*
x^7 + 719*x^6 - 7580*x^5 + 51180*x^4 - 226140*x^3 + 636900*x^2 - 1042200*x
 + 756000))
```

---

nexp : fonction e^{-x}

c'est la fonction réciproque de e^x :

$1/[L/M]_{e^{-x}} = [M/L]_{e^x}$

[0/0] = 1

[1/1] = $(-x+2) / (x+2)$

[2/2] = $(x^2 - 6x + 12) / (x^2 + 6x + 12)$

[3/3] = $(-x^3 + 12x^2 - 60x + 120) / (x^3 + 12x^2 + 60x + 120)$

---

tlog : fonction Log(1+x)

[0/0] = 0

[1/1] = $2x / (x+2)$

[2/2] = $3x(x+2) / (x^2 + 6x + 6)$

$$[3/3] = x(11x^2+60x+60) / 3(x^3+12x^2+30x+20)$$
$$[4/4] = 5x(5x^3+52x^2+126x+84) / 6(x^4+20x^3+90x^2 + 140x+70)$$

$$[2/\underline{1}] = x(x+6) / 2(\underline{2x+3})$$
$$[3/\underline{1}] = x(-x^2+6x+24) / 6(\underline{3x+4})$$
$$[4/\underline{1}] = x(x^3-4x^2+18x+60) / 12(\underline{4x+5})$$
$$[5/\underline{1}] = x(-3x^4+10x^3-30x^2+120x+360) / 60(\underline{5x+6})$$
$$[6/\underline{1}] = x(2x^5-6x^4+15x^3-40x^2+150x+420) / 60(\underline{6x+7})$$
$$[7/\underline{1}] = x(-10x^6+28x^5-63x^4+140x^3-350x^2+1260x + 3360) / 420(\underline{7x+8})$$
$$[8/\underline{1}] = x(15x^7-40x^6+84x^5-168x^4+350x^3-840x^2 + 2940x+7560) / 840(\underline{8x+9})$$

Les singularités des $[L/1]_{Log(1+x)}$ sont : $-(L+1)/L \xrightarrow{L\to+\infty} -1$

$$[3/2] = x(x^2+21x+30) / 3(3x^2+12x+10)$$
$$[4/2] = x(-x^3+12x^2+150x+180) / 12(6x^2+20x+15)$$
$$[5/2] = x(2x^4-15x^3+120x^2+1170x+1260) / 60(10x^2+30x+$$
$$[6/2] = x(-x^5+6x^4-30x^3+200x^2+1680x+1680) / 60(15x^2+42x+28)$$
$$[7/2] = x(4x^6-21x^5+84x^4-350x^3+2100x^2+1596x + 15120) / 420(21x^2+56x+36).$$

$$[3/2] = (2*x*(3*x^3 + 67*x^2 + 174*x + 120))/(6*(9*x^3 + 48*x^2 + 78*x + 40)$$

$$[4/2] = (x*(-4*x^4 + 43*x^3 + 660*x^2 + 1470*x + 900))/(12*(24*x^3 + 110*x^2 + 160*x + 75)$$

frac 1 : fraction rationnelle $1/(1-x)$

$[1/1] = -1/(x-1)$
$[2/1] = -1/(x-1)$
$[3/1] = -1/(x-1)$
⋮

} la colonne des $\varepsilon_2^{(n)}$ donne exactement la fraction (dénominateur de d° 1)

frac 2 : fraction rationnelle $1/(1-x) + 1/(1-2x)$

$[2/2] = (-3x+2)/(2x^2-3x+1)$
$[3/2] = (-3x+2)/(2x^2-3x+1)$
$[4/2] = (-3x+2)/(2x^2-3x+1)$
⋮

} la colonne des $\varepsilon_4^{(n)}$ donne la fraction (dénominateur de d° 2)

3) ε-algorithme et approximants de Padé "homogènes"

a) On se donne une série double $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{i,j}\, x^i y^j$ par le tableau à double entrée des $a(i,j)$.

Par exemple, $\dfrac{1}{1-(x+2y)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} (x+2y)^k = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \dfrac{2^j (i+j)!}{i!\,j!} x^i y^j$

```
operator tab5;
%developpement de 1/(1-x-2*y);
for all i,j Let tab5(i,j)=(2**j)*fac(i+j)/(fac(i)*fac(j));
```

b) **Cas particulier : le Δ^2 d'Aitken**

On l'applique à la suite des sommes partielles de la série :

$\sum_{i+j\le n} a_{i,j}\, x^i y^j$ = tritonqué (a,n) = $\sum_{0\le k\le n}$ homogène (a,k).

aitken

```
procedure homogene(a,k);
for i=0:k sum a(i,k-i)*(x**i)*(y**(k-i));

operator tritronque;
%sommes partielles triangulaires de la serie double associee a a;
for all a Let tritronque(a,-1)=0;
for all a,n such that n>-1 Let tritronque(a,n)
                    =tritronque(a,n-1)+homogene(a,n);
```

```
procedure delta(a,n);
%suite obtenue par le delta2 d'aitken a partir de a;
%le denominateur est de degre n+1;
%attention:les parties homogenes de degre n et n+1 ne doivent pas etre nul
en meme temps;
tritronque(a,n-1)+((homogene(a,n))**2)/(homogene(a,n)-homogene(a,n+1));

procedure listedelta(a,n);
%retourne les termes d'ordre 0 a n de la suite ainsi construite;
begin
write a;
write "le debut du developpement est:";
write tritronque(a,n+1),";";
for k=0:n do write "delta(",a,",",k,")=",delta(a,k);
end;

end;
```

Appliquons le Δ^2 d'Aitken au développement de $1/(1-x-2y)$:

tab5

le debut du developpement est:

$$x^7 + 14*x^6*y + x^6 + 84*x^5*y^2 + 12*x^5*y + x^5 + 280*x^4*y^3 + 60*x^4*y^2 + 10*x^4$$

$$y + x^4 + 560*x^3*y^4 + 160*x^3*y^3 + 40*x^3*y^2 + 8*x^3*y + x^3 + 672*x^2*y^5 + 240*$$

$$x^2*y^4 + 30*x^2*y^3 + 24*x^2*y^2 + 6*x^2*y + x^2 + 448*x*y^6 + 192*x*y^5 + 80*x*y^4$$

$$+ 32*x*y^3 + 12*x*y^2 + 4*x*y + x + 128*y^7 + 64*y^6 + 32*y^5 + 16*y^4 + 8*y^3 +$$

$$4*y^2 + 2*y + 1;$$

```
delta(tab5,0)=( - 1)/(x + 2*y - 1)
delta(tab5,1)=( - 1)/(x + 2*y - 1)
delta(tab5,2)=( - 1)/(x + 2*y - 1)
delta(tab5,3)=( - 1)/(x + 2*y - 1)
delta(tab5,4)=( - 1)/(x + 2*y - 1)
delta(tab5,5)=( - 1)/(x + 2*y - 1)
delta(tab5,6)=( - 1)/(x + 2*y - 1)
```

la procedure donne exactement la fraction

$\boxed{\text{Cas de } e^{xy}/(1-x-y)}$, dont les parties homogènes de degré n s'écrivent différemment suivant que n est pair ou impair.

```
operator c;
%coefficients du binome;
for all i,j such that i<=j Let c(i,j)=fac(j)/(fac(i)*fac(j-i));

operator tab6;
%developpement de e**xy/(1-x-y);
for all i,j such that i<=j and fixp((i+j)/2) Let tab6(i,j)=
        (for k=0:i sum c(i-k,2*(((i+j)/2)-k))/fac(k));
for all i,j such that i<=j and fixp((i+j-1)/2) Let tab6(i,j)=
        (for k=0:i sum c(i-k,2*(((i+j-1)/2)-k)+1)/fac(k));
for all i,j such that i>j Let tab6(i,j)=tab6(j,i);
end;
```

commentaire : $e^{xy}/(1-x-y) = \sum_{(i,j)} a_{i,j}\, x^i y^j$: $\underline{a_{i,j} = a_{j,i}}$

- pour $i \leq p$ $\quad \underline{a_{2p-i,i}} = \dfrac{C_{2p}^{i}}{0!} + \dfrac{C_{2(p-1)}^{i-1}}{1!} + \dfrac{C_{2(p-2)}^{i-2}}{2!} + \dots + \dfrac{C_{2(p-i)}^{0}}{i!}$
- pour $i \leq p$ $\quad \underline{a_{2p+1-i,i}} = \dfrac{C_{2p+1}^{i}}{0!} + \dfrac{C_{2(p-1)+1}^{i-1}}{1!} + \dfrac{C_{2(p-2)+1}^{i-2}}{2!} + \dots + \dfrac{C_{2(p-i)+1}^{0}}{i!}$

tab6

le debut du developpement est:

$$(6*x^7 + 48*x^6*y + 6*x^6 + 159*x^5*y^2 + 42*x^5*y + 6*x^5 + 280*x^4*y^3 + 117*x^4*y$$
$$+ 36*x^4*y + 6*x^4 + 280*x^3*y^4 + 163*x^3*y^3 + 81*x^3*y^2 + 30*x^3*y + 6*x^3 +$$
$$159*x^2*y^5 + 117*x^2*y^4 + 31*x^2*y^3 + 51*x^2*y^2 + 24*x^2*y + 6*x^2 + 48*x*y^6 +$$
$$42*x*y^5 + 36*x*y^4 + 30*x*y^3 + 24*x*y^2 + 18*x*y + 6*x + 6*y^7 + 6*y^6 + 6*y^5$$
$$+ 6*y^4 + 6*y^3 + 6*y^2 + 6*y + 6)/6;$$

delta(tab6,$\underline{0}$)=(- 1)/$\underline{(x + y - 1)}$

delta(tab6,1)=$(x*y - x - y)/(x^2 + 3*x*y - x + y^2 - y)$

delta(tab6,$\underline{2}$)=(- (x*y + 1))/$\underline{(x + y - 1)}$

On liste ici les premiers termes obtenus par le Δ^2 d'Aitken appliqué au développement de $e^{xy}/(1-x-y) \longleftrightarrow$ tab 6.

```
delta(tab6,3)=(x^4*y^2 - 2*x^4*y + 3*x^3*y^3 - 7*x^3*y^2 - 2*x^3 + x^2*y^4 - 7*x^2*y^3
 + x^2*y^2 - 3*x^2*y - 2*x*y^4 - 3*x*y^3 - 2*y^2)/(2*x^3 + 10*x^2*y
 - 2*x^2 + 12*x^2*y - 3*x^2*y + 10*x*y^2 - 3*x*y^3 + 2*y^4 - 2*
y^3)

delta(tab6,4)=( - x^2*y^2 - 2*x*y - 2)/(2*(x + y - 1))

delta(tab6,5)=(2*x^7*y^3 - 6*x^7*y^2 + 10*x^6*y^4 - 34*x^6*y^3 + 12*x^6*y^2 + 17*x^5*y^5
 - 73*x^5*y^4 + 2*x^5*y^3 - 72*x^5*y^2 - 12*x^5 + 10*x^4*y^5 - 73*x^4*
y^5 + 6*x^4*y^4 - 160*x^4*y^3 - 72*x^4*y^2 + 2*x^3*y^6 - 34*x^3*y^5 + 2*
x^3*y^4 - 160*x^3*y^3 + 2*x^3*y^2 - 162*x^2*y^7 - 6*x^2*y^6 - 72*x^2*y^5
 - 162*x^2*y^3 - 12*x^6 - 72*x^5*y - 12*y^6)/(2*(6*x^5 + 42*x^4*y
 - 6*x^5 + 117*x^4*y^2 - 36*x^4*y^3 + 163*x^3*y^3 - 31*x^3*y^2 +
 117*x^2*y^4 - 31*x^2*y^3 + 42*x*y^5 - 36*x*y^4 + 6*y^6 - 6*y^5)
)

delta(tab6,6)=( - x^3*y^3 - 3*x^2*y^2 - 6*x*y - 6)/(6*(x + y - 1))
```

Les termes d'indices pairs obtenus par le Δ^2 d'Aitken reflètent exactement les singularités de tab6, puisque (après réduction de la fraction grâce à l'option "ongcd"), le dénominateur est x+y-1

```
delta(tab6,8);
```

```
( - x^4*y^4 - 4*x^3*y^3 - 12*x^2*y^2 - 24*x*y - 24)/(24*(x + y - 1))
```

```
delta(tab6,10);
```

```
( - x^5*y^5 - 5*x^4*y^4 - 20*x^3*y^3 - 60*x^2*y^2 - 120*x*y - 120)/(120*(x + y - 1)
```

```
h7:=den(delta(tab6,7));
              8          7          7          6  2          6            5  3
h7 := 6*(24*x  + 216*x *y - 24*x  + 823*x *y  - 192*x *y + 1756*x *y  - 636

            5  2          4  4          4  3          3  5          3  4
          *x *y  + 2241*x *y  - 1120*x *y  + 1756*x *y  - 1120*x *y  + 828*

           2  6          2  5          7          6          8          7
          x *y  - 636*x *y  + 216*x*y  - 192*x*y  + 24*y  - 24*y )

h9:=den(delta(tab6,9));
               10          9          9          8  2          8            7
h9 := 24*(120*x  + 1320*x *y - 120*x  + 6420*x *y  - 1200*x *y + 18140*x *

           3          7  2          6  4          6  3          5  5
          y  - 5220*x *y  + 32905*x *y  - 12920*x *y  + 39971*x *y  - 19985

            5  4          4  6          4  5          3  7          3  6
          *x *y  + 32905*x *y  - 19985*x *y  + 18140*x *y  - 12920*x *y  +

                2  8          2  7          9          8          10
          6420*x *y  - 5220*x *y  + 1320*x*y  - 1200*x*y  + 120*y  - 120*

           9
          y )
```

Les fractions d'indice impair ne se simplifient pas aussi bien ; cependant, on peut étudier asymptotiquement les dénominateurs.

c) **ε - algorithme**

epsilon

```
procedure homogene(a,k);
for i=0:k sum a(i,k-i)*(x**i)*(y**(k-i));

operator tritronque;
%sommes partielles triangulaires de la serie double associee a a;
for all a Let tritronque(a,-1)=0;
for all a,n such that n>-1 Let tritronque(a,n)
                    =tritronque(a,n-1)+homogene(a,n);

operator eps;
%seules les colonnes paires servent;
%schema triangulaire,m est l'indice de diagonale,k l'indice de
colonne;
%si aucun denominateur ne s'est annule, eps(a,m,2*k)=[m+k/k] de a;

%initialisation;
for all a,n Let eps(a,m,-1)=0;
for all a,m Let eps(a,m,0)=tritronque(a,m);

%regle;
for all a,m,k such that k>0 Let eps(a,m,k)=eps(a,m+1,k-2)
-1/(eps(a,m+1,k-1)-eps(a,m,k-1));

procedure diagonalepade(a,n);
%retourne les approximants de Pade [k/k] pour k variant de 0 a n;

begin
write a;
write "le debut du developpement est:";
write tritronque(a,2*n);
for k=0:n do write "[",k,"/",k,"]=",eps(a,0,2*k);
end;
```

```
procedure colonnepade(a,k,n);
%retourne les approximants de Pade [i+k/k] pour i variant de 0 a n;

begin
write a;
write "le debut du developpement est:";
write tritronque(a,2*k+n);
for i=0:n do write "[",i+k,"/",k,"]=",epsa(a,i,2*k);
end;

end;
```

On peut lister au choix les premiers termes de la colonne d'indice 2k (colonnepadé) ou ceux de la diagonale principale (diagonalepadé)

Exemple : 1/(1-x) + 1/(1-y)

```
operator tab0;
%developpement de 1/(1-x)+1/(1-y);
Let tab0(0,0)=2;
for all i such that i>0 Let tab0(i,0)=1;
for all j such that j>0 Let tab0(0,j)=1;
for all i,j such that i*j>0 Let tab0(i,j)=0;
le debut du developpement est:
```

$$x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + y^7 + y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 2$$

[2/2]=(- x - y + 2)/(x*y - x - y + 1)

[3/2]=(- x - y + 2)/(x*y - x - y + 1)

[4/2]=(- x - y + 2)/(x*y - x - y + 1)

[5/2]=(- x - y + 2)/(x*y - x - y + 1)

la fraction rationnelle ayant un dénominateur de degré 2, on obtient la fraction dans la colonne d'indice 4 : $\mathcal{E}_4^{(n)}$

$$[1/1]=(x^2 - 2*x*y - 2*x + y^2 - 2*y)/(x^2 - x + y^2 - y)$$

$$[2/1]=(x^3*y + x^3 - 2*x^2*y^2 - x^2*y - 2*x^2 + x*y^3 - x*y^2 + y^3 - 2*y^2)/(x^3 - x^2 + y^3 - y^2)$$

$$[3/1]=(x^4*y^2 + x^4*y + x^4 - 2*x^3*y^3 - x^3*y^2 - x^3*y - 2*x^3 + x^2*y^4 - x^2*y^3 + x*y^4 - x*y^3 + y^4 - 2*y^3)/(x^4 - x^3 + y^4 - y^3)$$

Le degré 1 au dénominateur ne suffit pas pour retrouver la fraction

Exemple : fonction d'une seule variable Log (1+x).

On retrouve les approximants de Padé usuels de cette fonction, où la singularité - 1 apparait avec les pôles des [L/1] : $-(L+1)/L$

```
operator tablog;
%developpement de Log(1+x);
Let tablog(0,0)=0;
for all i such that i>0 Let tablog(i,0)=(-1)**(i+1)/i;
for all i,j such that j>0 Let tablog(i,j)=0;

le debut du developpement est:

                 7         6         5         4         3         2
(x*( - 105*x  + 120*x  - 140*x  + 168*x  - 210*x  + 280*x  - 420*x + 840))/
840)

[1/1]=(2*x)/(x + 2)

[2/1]=(x*(x + 6))/(2*(2*x + 3))

                2
[3/1]=(x*( - x  + 6*x + 24))/(6*(3*x + 4))

              3       2
[4/1]=(x*(x  - 4*x  + 18*x + 60))/(12*(4*x + 5))

                  4         3         2
[5/1]=(x*( - 3*x  + 10*x  - 30*x  + 120*x + 360))/(60*(5*x + 6))

               5         4         3         2
[6/1]=(x*(2*x  - 6*x  + 15*x  - 40*x  + 150*x + 420))/(60*(6*x + 7))

                 6         5         4         3         2
[7/1]=(x*( - 10*x  + 28*x  - 63*x  + 140*x  - 360*x  + 1260*x + 3360))/(420
          *(7*x + 8))
```

Exemple : fonction e^{x+y} du type $f(x+y)$

```
operator tab3;
%developpement de e**(x+y);
for all i,j let tab3(i,j)=1/(fac(i)*fac(j));
```

Le Δ^2 d'Aitken appliqué à e^{x+y} $\hookrightarrow$ tab 3 donne :

```
delta(tab3,0)=( - 1)/(x + y - 1)

delta(tab3,1)=( - x - y - 2)/(x + y - 2)

delta(tab3,2)=( - x^2 - 2*x*y - 4*x - y^2 - 4*y - 6)/(2*(x + y - 3))

delta(tab3,3)=( - x^3 - 3*x^2*y - 6*x^2 - 3*x*y^2 - 12*x*y - 15*x - y^3 - 6*y^2
 - 15*y - 24)/(6*(x + y - 4))

delta(tab3,4)=( - x^4 - 4*x^3*y - 8*x^3 - 6*x^2*y^2 - 24*x^2*y - 35*x^2 - 4*x*y^3
 - 24*x*y^2 - 72*x*y - 96*x - y^4 - 8*y^3 - 35*y^2 - 95*y - 120)
 /(24*(x + y - 5))

delta(tab3,5)=( - x^5 - 5*x^4*y - 10*x^4 - 10*x^3*y^2 - 40*x^3*y - 60*x^3 - 10*x^2*
 y^3 - 60*x^2*y^2 - 180*x^2*y - 240*x^2 - 5*x*y^4 - 40*x*y^3 - 180*x
 *y^2 - 480*x*y - 600*x - y^5 - 10*y^4 - 60*y^3 - 240*y^2 - 600*y
 - 720)/(120*(x + y - 6))

delta(tab3,6)=( - x^6 - 6*x^5*y - 12*x^5 - 15*x^4*y^2 - 60*x^4*y - 90*x^4 - 20*x^3*
 y^3 - 120*x^3*y^2 - 360*x^3*y - 480*x^3 - 15*x^2*y^4 - 120*x^2*y^3 -
 540*x^2*y^2 - 1440*x^2*y - 1800*x^2 - 6*x*y^5 - 60*x*y^4 - 360*x*
 y^3 - 1440*x*y^2 - 3600*x*y - 4320*x - y^6 - 12*y^5 - 90*y^4 -
 480*y^3 - 1800*y^2 - 4320*y - 5040)/(720*(x + y - 7))
```

· Les fractions obtenues sont exactement celles de f par Padé 1 variable où on remplace cette variable par x+y.

```
[2/2]=(x^2 + 2*x*y + 6*x + y^2 + 6*y + 12)/(x^2 + 2*x*y - 6*x + y^2 - 6*y + 12)

[3/2]=(x^3 + 3*x^2*y + 9*x^2 + 3*x*y^2 + 18*x*y + 36*x + y^3 + 9*y^2 + 36*y + 60)
      /(3*(x^2 + 2*x*y - 3*x + y^2 - 3*y + 20))

[4/2]=(x^4 + 4*x^3*y + 12*x^3 + 6*x^2*y^2 + 36*x^2*y + 72*x^2 + 4*x*y^3 + 36*x*y^2
      + 144*x*y + 240*x + y^4 + 12*y^3 + 72*y^2 + 240*y + 360)/(12*(x^2 + 2*x
      *y - 10*x + y^2 - 10*y + 30))

[3/3]=( - x^3 - 3*x^2*y - 12*x^2 - 3*x*y^2 - 24*x*y - 60*x - y^3 - 12*y^2 - 60*y
      - 120)/(x^3 + 3*x^2*y - 12*x^2 + 3*x*y^2 - 24*x*y + 60*x + y^3 - 12*y^2
      + 60*y - 120)

[4/4]=(x^4 + 4*x^3*y + 20*x^3 + 6*x^2*y^2 + 60*x^2*y + 180*x^2 + 4*x*y^3 + 60*x*y^2
      + 360*x*y + 340*x + y^4 + 20*y^3 + 180*y^2 + 340*y + 1680)/(x^4 + 4*x^3*
      y - 20*x^3 + 6*x^2*y^2 - 60*x^2*y + 180*x^2 + 4*x*y^3 - 60*x*y^2 + 360*x*
      y - 340*x + y^4 - 20*y^3 + 180*y^2 - 340*y + 1680)
```

(comparaison avec les approximants de Padé de e^x (2).)
La substitution est possible, car x+y est un polynôme homogène de d° 1.

De la même manière pour :

Exemple Log (1+x-y) du type f(x-y)

```
operator tab4;
%developpement de Log(1+x-y);
Let tab4(0,0)=0;
for all i,j such that i+j>0 Let tab4(i,j)
        =((-1)**(i+1))*fac(i+j-1)/(fac(i)*fac(j));
```

Dans les approximants de Padé de $\mathrm{Log}(1+x)$, il suffit de substituer $x.y$ à x.
En effet :

Le Δ^2 d'Aitken appliqué à $\mathrm{Log}(1+x-y) \longleftrightarrow$ tab 4 donne :

```
delta(tab4,0)=0

delta(tab4,1)=(2*(x - y))/(x - y + 2)

                                  2                    2
delta(tab4,2)=(x  - 2*x*y + 6*x + y  - 6*y)/(2*(2*x - 2*y + 5))

                                  3     2      2                3      2
delta(tab4,3)=( - x  + 3*x *y + 6*x  - 3*x*y  - 12*x*y + 24*x + y  + 6*y
                                                                        2
                - 24*y)/(6*(3*x - 3*y + 4))

                                  4     3      3     2  2      2      3      4
delta(tab4,4)=(x  - 4*x *y - 4*x  + 6*x *y  + 12*x *y + 12*x  - 4*x*y  -
                                                                        3
                 2  2      2      3      4      3      2      4      5
                *x*y  - 36*x*y + 60*x + y  + 4*y  + 12*y  - 60*y)/(12*(4*x
                                                                        2
                  - 4*y + 5))

                                  5     4      4     3  2      3      2  3
delta(tab4,5)=( - 3*x  + 15*x *y + 10*x  - 30*x *y  - 40*x *y - 30*x  + 3
                 2  3      2  2      2      3      4      4      5
                x *y  + 60*x *y  + 90*x *y + 120*x  - 15*x*y  - 45*x*y  -
                 2
                *x*y  - 240*x*y + 360*x + 3*y  + 15*y  + 60*y  + 120*y  -
                                                                        2
                360*y)/(60*(5*x - 5*y + 6))

                                  6     5      5     4  2      4      3  3
delta(tab4,6)=(2*x  - 12*x *y - 6*x  + 30*x *y  + 30*x *y + 15*x  - 40*x *
                 3      3  3      3  2      4      3  3      2  4      5
                y  - 60*x *y  - 60*x *y  - 45*x  + 30*x *y  + 60*x *y  + 90*
                 2  2      2      3      5      4      3      2
                x *y  + 120*x *y + 150*x  - 12*x*y  - 30*x*y  - 60*x*y  -
                 2      6      5      4      3      2
                120*x*y  - 300*x*y + 420*x + 2*y  + 6*y  + 15*y  + 40*y  +
                 2
```

En utilisant le développement :

$$(- 105*x^{8} + 840*x^{7}*y + 120*x^{7} - 2940*x^{6}*y^{2} - 840*x^{6}*y - 140*x^{6} + 5880*x^{5}*$$

$$y^{3} + 2520*x^{5}*y^{2} + 840*x^{5}*y + 168*x^{5} - 7350*x^{4}*y^{4} - 4200*x^{4}*y^{3} - 2100*x^{4}*y^{2}$$

$$- 840*x^{4}*y - 210*x^{4} + 5880*x^{3}*y^{5} + 4200*x^{3}*y^{4} + 2800*x^{3}*y^{3} + 1680*x^{3}*y^{2}$$

$$+ 840*x^{3}*y + 280*x^{3} - 2940*x^{2}*y^{6} - 2520*x^{2}*y^{5} - 2100*x^{2}*y^{4} - 1680*x^{2}*y^{3}$$

$$- 1260*x^{2}*y^{2} - 840*x^{2}*y - 420*x^{2} + 840*x*y^{7} + 840*x*y^{6} + 840*x*y^{5} + 840*x$$

$$*y^{4} + 840*x*y^{3} + 840*x*y^{2} + 840*x*y + 840*x - 105*y^{8} - 120*y^{7} - 140*y^{6} -$$

$$168*y^{5} - 210*y^{4} - 280*y^{3} - 420*y^{2} - 840*y)/840$$

on calcule :

$$[2/2]=(3*(x^{2} - 2*x*y + 2*x + y^{2} - 2*y))/(x^{2} - 2*x*y + 6*x + y^{2} - 6*y + 6)$$

$$[3/2]=(x^{3} - 3*x^{2}*y + 21*x^{2} + 3*x*y^{2} - 42*x*y + 30*x - y^{3} + 21*y^{2} - 30*y)/(3$$

$$*(3*x^{2} - 6*x*y + 12*x + 3*y^{2} - 12*y + 10))$$

$$[4/2]=(- x^{4} + 4*x^{3}*y + 12*x^{3} - 6*x^{2}*y^{2} - 36*x^{2}*y + 150*x^{2} + 4*x*y^{3} + 36*x$$

$$y^{2} - 300*x*y + 180*x - y^{4} - 12*y^{3} + 150*y^{2} - 180*y)/(12*(6*x^{2} - 12*$$

$$*y + 20*x + 6*y^{2} - 20*y + 15))$$

$$[3/3]=(11*x^{3} - 33*x^{2}*y + 60*x^{2} + 33*x*y^{2} - 120*x*y + 60*x - 11*y^{3} + 60*y^{2}$$

$$- 60*y)/(3*(x^{3} - 3*x^{2}*y + 12*x^{2} + 3*x*y^{2} - 24*x*y + 30*x - y^{3} + 12$$

$$y^{2} - 30*y + 20))$$

$$[4/4]=(5*(5*x^{4} - 20*x^{3}*y + 52*x^{3} + 30*x^{2}*y^{2} - 156*x^{2}*y + 126*x^{2} - 20*x*y^{3}$$

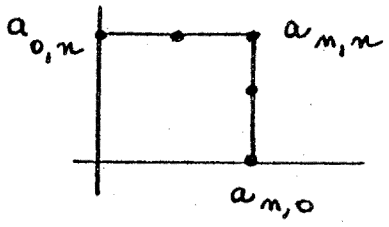
$$+ 156*x*y^{2} - 252*x*y + 84*x + 5*y^{4} - 52*y^{3} + 126*y^{2} - 84*y))/(6$$

$$(x^{4} - 4*x^{3}*y + 20*x^{3} + 6*x^{2}*y^{2} - 60*x^{2}*y + 90*x^{2} - 4*x*y^{3} + 60*x*$$

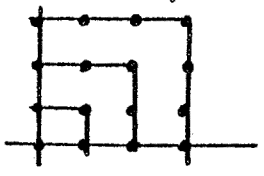
$$^{2} \qquad ^{4} \qquad ^{3} \qquad ^{2}$$

4) E-algorithme et approximants de Padé "carrés".

Dans le segment "epsilon", il suffit simplement de remplacer homogène (a,n) par parcar (a,n)



et tritronqué (a,n) par cartronqué (a,n) :



epsilonca r

```
operator abs;
for all a,n Let abs(a,n)=(for j=0:n sum a(n,j)*(x**n)*(y**j));

operator ord;
for all a,n such that n>0 Let ord(a,n)=(for i=0:n-1 sum a(i,n)*(x**i)*(y**n)

operator parcar;
for all a Let parcar(a,0)=abs(a,0);
for all a,n such that n>0 Let parcar(a,n)=abs(a,n)+ord(a,n);

operator cartronque;
for all a Let cartronque(a,0)=parcar(a,0);
for all a,n such that n>0 Let cartronque(a,n)=cartronque(a,n-1)+parcar(a,n);


operator epscar;
%seules les colonnes paires servent;
%schema triangulaire,m est l'indice de diagonale,k l'indice de
colonne;
%si aucun denominateur ne s'est annule, epscar(a,m,2*k)=[m+k/k] de a;

%initialisation;
for all a,m Let epscar(a,m,-1)=0;
for all a,m Let epscar(a,m,0)=cartronque(a,m);

%regle;
for all a,m,k such that k>0 Let epscar(a,m,k)=epscar(a,m+1,k-2)
-1/(epscar(a,m+1,k-1)-epscar(a,m,k-1));
```

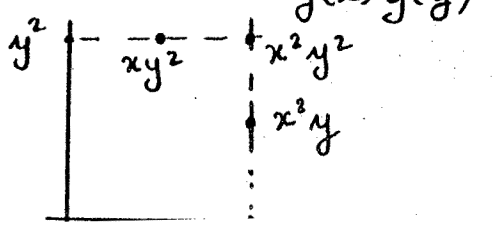
: avec ces changements, on rebaptise eps en epscar

```
parcar(tab3,0);
1

parcar(tab3,1);
x*y + x + y

parcar(tab3,2);
   2  2      2       2       2      2
(x *y  + 2*x *y + 2*x  + 2*x*y  + 2*y  )/4
```

tab 3 $\longleftrightarrow e^{x+y}$ du type $f(x)\,g(y)$



Les premiers <u>approximants "carrés"</u> obtenus pour e^{x+y} :

le debut du developpement est:

$$(x^3*y^3 + 3*x^3*y^2 + 6*x^3*y + 6*x^3 + 3*x^2*y^3 + 9*x^2*y^2 + 18*x^2*y + 18*x^2 + 6*x*y^3 + 18*x*y^2 + 36*x*y + 36*x + 6*y^3 + 18*y^2 + 36*y + 36)/36$$

$$[0/0]=1$$

$$[1/1]=(-3*x^2*y^2 - 6*x^2*y - 2*x^2 - 6*x*y^2 - 12*x*y - 4*x - 2*y^2 - 4*y)/(x^2*y^2 + 2*x^2*y + 2*x^2 + 2*x*y^2 - 4*x*y - 4*x + 2*y^2 - 4*y)$$

$$[2/1]=(-5*x^4*y^4 - 20*x^4*y^3 - 36*x^4*y^2 - 24*x^4*y - 12*x^4 - 20*x^3*y^4 - 80*x^3*y^3 - 144*x^3*y^2 - 96*x^3*y - 48*x^3 - 36*x^2*y^4 - 144*x^2*y^3 - 252*x^2*y^2 - 144*x^2*y - 72*x^2 - 24*x*y^4 - 96*x*y^3 - 144*x*y^2 - 12*y^4 - 48*y^3 - 72*y^2)/(4*(x^3*y^3 + 3*x^3*y^2 + 6*x^3*y + 6*x^3 + 3*x^2*y^3 - 9*x^2*y^2 - 18*x^2*y - 18*x^2 + 6*x*y^3 - 18*x*y^2 + 6*y^3 - 18*y^2))$$

5) <u>qd. algorithme et approximants de Padé "homogènes"</u>.

a) <u>Algorithme descendant</u> : il donne un moyen récursif d'<u>évaluer successivement les convergents de la fraction continue</u> $K\left(\frac{c_n}{d_n}\right)$, grâce à la relation de récurrence à deux termes entre numérateurs et dénominateurs des réduites de ces fractions :

$$\begin{pmatrix} num(c,d,i) \\ dén(c,d,i) \end{pmatrix} = c(i)\begin{pmatrix} num(c,d,i-2) \\ den(c,d,i-2) \end{pmatrix} + d(i)\begin{pmatrix} num(c,d,i- \\ den(c,d,i- \end{pmatrix}$$

```
operator Num;
% retourne le Numerateur du ieme convergent de la fraction continue
  K(c(n)/d(n)), ou c et d sont deux suites ;

% initialisation ;
for all c,d Let Num(c,d,0)=c(0);
for all c,d Let Num(c,d,1)=c(0)*d(1);
% regle ;
for all c,d,i such that i>1 Let Num(c,d,i)=
                              c(i)*Num(c,d,i-2) + d(i)*Num(c,d,i-1);

operator Den;
% retourne le Denominateur du ieme convergent de la fraction continue
  K(c(n)/d(n)) ;

% initialisation ;
for all c,d Let Den(c,d,0)=d(0);
for all c,d Let Den(c,d,1)=c(1)*d(0)*d(1);
% regle ;
for all c,d,i such that i>1 Let Den(c,d,i)=
                              c(i)*Den(c,d,i-2) + d(i)*Den(c,d,i-1);

operator fraction;
% retourne le ieme convergent de la fraction continue K(c(n)/d(n)) ;

for all c,d,i such that i>=0 Let fraction(c,d,i)= Num(c,d,i)/Den(c,d,i

procedure desres(c,d,n);
begin
for i=0:n do write fraction(c,d,i);
end;
end;
```

b) Tables qd de certaines suites entières

qd.algorithme

```
operator parite;
% fonction qui vaut 1 si m est pair, 0 sinon;
for all m such that fixp(m/2) Let parite(m)=1;
for all m such that fixp((m-1)/2) Let parite(m)=0;

operator imparite;
% fonction qui vaut 1 si m est impair, 0 sinon;
for all m such that fixp(m/2) Let imparite(m)=0;
for all m such that fixp((m-1)/2) Let imparite(m)=1;

operator qd;
% quantites obtenues par le qd-algorithme quand on l'applique a une
  suite c(n), qui ne s'annule pas;
% m est l'indice de colonne, n est l'indice de diagonale;

% initialisation;

for all c,n such that n>0 Let qd(c,0,n)=0;
  % la premiere colonne est formee de zeros;
for all c,n such that n>=0 Let qd(c,1,n)=c(n+1)/c(n);

% regles du losange;
for all c,m,n such that m>1 and n>=0 Let qd(c,m,n)
= (qd(c,m-2,n+1) + qd(c,m-1,n+1) - qd(c,m-1,n))*parite(m)
+ (qd(c,m-2,n+1) * qd(c,m-1,n+1) / qd(c,m-1,n))*imparite(m);

% presentation des resultats sous la forme habituelle;

operator q;
```

```
operator e;
  % termes des colonnes d'indice pair;
for all c,p,n such that p>0 and n>=0 Let e(c,p,n)=qd(c,2*p,n);

procedure colqd(c,m,k);
% sortie du tableau colonne par colonne;
% m est l'indice de colonne,l'indice de diagonale varie
  de 0 a k;

begin
for n=0:k do write qd(c,m,n);
end;

procedure diaqd(c,k,n);
% sortie de la diagonale numero n;
% l'indice de colonne varie de 1 a k;

begin
for m=1:k do write qd(c,m,n);
end;
```

fractioncontinue . série ⟶ escalier dans la table de Padé de $\sum_{n\in\mathbb{N}} c(n)\,x^n$

```
% pour utiliser ce fichier, il faut charger au prealable les
fichiers qdalgorithme et algorithmedes ;

% c est la liste des coefficients d'une serie entiere, les
exemples sont choisis dans le fichier coeff_series ;

% dans un premier temps,on donne les coefficients des fractions
continues baties sur la table qd de la serie ;
%n est l'indice de diagonale ;

operator alphaqdserie;
for all c,n such that n>=0 Let alphaqdserie(c,0,n)=c(n)*(x**n);
for all c,i,n such that i>0 and n>=0 Let alphaqdserie(c,i,n)
                                    = -qd(c,i,n)*x;

operator betaqdserie;
for all c,i,n such that i>=0 and n>=0 Let betaqdserie(c,i,n)=1;

operator beta;
for all i such that i>=0 Let beta(i)=1;


procedure fractionserie(c,n,k);
% on utilise la diagonale numero n de la table qd de la
serie, ce qui permet de construire dans sa table de Pade l'escalie
[n/0],[n/1],[n+1/1],[n+1/2],[n+2/2],...  ;

begin
if n=0 then s:=0 else
            s:=(for i=0:n-1 sum c(i)*(x**i));

operator alpha;
for all i such that i>=0 Let alpha(i)=alphaqdserie(c,i,n);

r:=s+ fraction(alpha,beta,k);

if fixp(k/2) then
   write "[",n+k/2,"/",k/2,"]=",r
   else
```

Exemple : 1/(1-x)

```
operator cofrac1;
for all n such that n>=0 Let cofrac1(n)=1;
```

De même que pour les différences divisées d'un polynôme, la table qd d'une fraction est formée de "0" à partir d'un certain ordre :

```
colqd(cofrac1,1,10);  colqd(cofrac1,2,9);
```

1	
	0
1	
	0
1	
	0
1	
	0
1	
	0
1	
	0
1	
	0
1	
	0
1	

```
for i=0:5 do write fractionserie(cofrac1,0,i);
[0/0]=1
```

on retrouve exactement la fraction

```
[0/1]=( - 1)/(x - 1)
[1/1]=( - 1)/(x - 1)    ***** zero denominator
```

l'algorithme s'arrête car la table qd s'arrête à la colonne de "0".

```
for i=0:5 do write fractionserie(cofrac1,1,i);
[1/0]=x + 1
        [1/1]=( - 1)/(x - 1)
        [2/1]=( - 1)/(x - 1)    ***** zero denominator
```

Exemple : e^x

La fonction est donnée par les coefficients de son développement de Mac-Laurin

```
operator coex;
for all n such that n>=0 Let coex(n)=1/fac(n);
```

```
0   1
        ( - 1)/2
0   1/2         1/6
        ( - 1)/6    ( - 1)/6
0   1/3 1/6         1/10
        ( - 1)/12   ( - 1)/10   ( - 1)/10
0   1/4 3/20        1/10
        ( - 1)/20   ( - 1)/15
0   1/5 4/30
        ( - 1)/30
0   1/6
```

$$e^x = \frac{1}{1} - \frac{x}{1} + \frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{2} - \cdots + \frac{x}{2} - \frac{x}{2n+1}$$

ou encore $1 + \frac{x}{1} - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{2} + \cdots$

```
diagd(coex,8,0);
```

1ère diagonale ci-dessus

```
1
( - 1)/2
1/6
( - 1)/6
1/10
( - 1)/10
1/14
( - 1)/14
```

On a:

$$\begin{cases} q_k^{(n)} = \dfrac{n+k-1}{(n+2k-2)(n+2k-1)} \\ e_k^{(n)} = -\dfrac{k}{(n+2k-1)(n+2k)} \end{cases}$$

Exemple : e^{-x}

```
operator conex;
for all n such that n>=0 Let conex(n)=((-1)**n)/fac(n);
```

$$\begin{cases} q_k^{(n)} = -\dfrac{n+k-1}{(n+2k-2)(n+2k-1)} \\ e_k^{(n)} = \dfrac{k}{(n+2k-1)(n+2k)} \end{cases}$$

```
1)
        1/2
- 1)/2          ( - 1)/6
        1/6             1/6
- 1)/3          ( - 1)/6        ( - 1)/10
        1/12            1/10            1/10
- 1)/4          ( - 3)/20       ( - 1)/10       ( - 1)/14
        1/20            1/15            1/14            1/14
- 1)/5          ( - 4)/30       ( - 4)/42       ( - 9)/126      ( - 1)/18
        1/30            1/21            9/168           1/18            1/18
- 1)/6          ( - 5)/42       ( - 5)/56       ( - 5)/72       ( - 16)/288
        1/42            1/28            1/24            16/360
- 1)/7          ( - 6)/56       ( - 1)/12       ( - 2)/30
        1/56            1/36            1/30
- 1)/8          ( - 7)/72       ( - 7)/90
        1/72            1/45
- 1)/9          ( - 8)/90
        1/90
- 1)/10
```

Exemple $1/(1-x) + 1/(1-2x)$ fraction rationnelle

```
operator cofrac2;
for all n such that n>=0 Let cofrac2(n)=1+2**n;
```

```
3/2
            1/6
5/3                     4/3
            2/15                    0
9/5                     6/5
            4/45                    0
17/9                    10/9
            8/153                   0
33/17                   18/17
            16/561                  0
65/33                   34/33
            32/2145                 0
129/65                  66/65
            64/8385                 0
257/129                 130/129
            128/33153               0
513/257                 258/257
            256/131841              0
1025/513                514/513
            512/525825
2049/1025
```

← colonne de "0" dans la table qd.

```
for i=0:5 do write fractionserie(cofrac2,0,i);
```

```
[0/0]=2   [0/1]=( - 4)/(3*x - 2)

          [1/1]=(x - 6)/(5*x - 3)   [1/2]=( - 3*x + 2)/(2*x^2 - 3*x + 1)

                                    [2/2]=( - 3*x + 2)/(2*x^2 - 3*x + 1)
```

on retrouve exactement la fraction

***** zero denominator

```
for i=0:5 do write fractionserie(cofrac2,1,i);
```

```
[1/0]=3*x + 2   [1/1]=(x - 6)/(5*x - 3)

          [2/1]=(3*(2*x^2 + 3*x - 10))/(3*(9*x - 5))

                                    [2/2]=(3*( - 3*x + 2))/(3*(2*x^2 - 3*x + 1))
```

fraction initiale →

```
                                    [3/2]=(3*( - 3*x + 2))/(3*(2*x^2 - 3*x + 1))
```

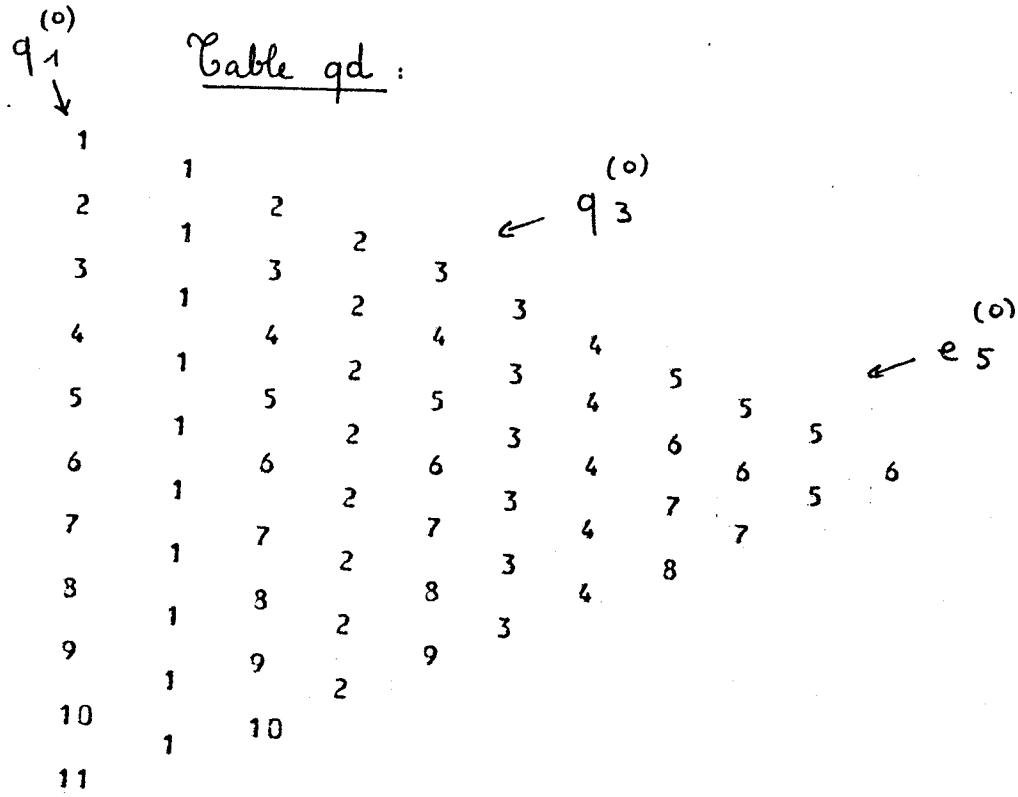
***** zero denominator

Exemple : $n \geq 0$ $n!\, x^n$ série de Stieljes

```
operator costiel;
for all n such that n>=0 Let costiel(n)=fac(n);
```

$$n! = \int_0^\infty \tau^n e^{-\tau} d\tau$$

Table qd :



Deux escaliers obtenus dans la table de Padé :

```
for i=0:5 do write fractionserie(costiel,0,i);
```

[0/0]=1 [0/1]=(- 1)/(x - 1)

[1/1]=(x - 1)/(2*x - 1) [1/2]=(- 3*x + 1)/(2*x^2 - 4*x + 1)

[2/2]=(2*x^2 - 5*x + 1)/(6*x^2 - 6*x + 1)

[2/3]=(- 11*x^2 + 8*x - 1)/(6*x^3 - 18*x^2 + 9*x -

```
for i=0:5 do write fractionserie(costiel,1,i);
```

[1/0]=x + 1 [1/1]=(x - 1)/(2*x - 1)

[2/1]=(x^2 + 2*x - 1)/(3*x - 1)

[2/2]=(2*x^2 - 5*x + 1)/(6*x^2 - 6*x + 1)

[3/2]=(2*x^3 + 6*x^2 - 7*x + 1)/(12*x^2 - 8*x + 1)

[3/3]=(6*x^3 - 26*x^2 + 11*x - 1)/(24*x^3 - 36*x^2 + 12*x -

Exemple $\sum_{n\geq 0} x^n/(n+1)$

```
operator coserie1;
for all n such that n>=0 Let coserie1(n)=1/(n+1);
```

$$q_k^{(n)} = \frac{(n+k)^2}{(n+2k-1)(n+2k)}$$

$$e_k^{(n)} = \frac{k^2}{(n+2k)(n+2k+1)}$$

Table qd.

1/2									
	1/6								
2/3		1/3							
	1/12		1/5						
3/4		9/20		3/10					
	1/20		2/15		3/14				
4/5		16/30		16/42		180/630			
	1/30		20/210		540/3360		2/9		
5/6		25/42		1500/3360		1500/4320		4032000/14515200	
	1/42		12/168		210/1680		5376/30240		3600/15840
6/7		36/56		3/6		28/70		3919104/11975040	
	1/56		1/13		8/30		9072/62370		
7/8		49/72		784/1440		127008/285120			
	1/72		16/360		1296/15340				
8/9		64/90		9216/15840					
	1/90		36/990						
9/10		81/110							
	1/110								
10/11									

Quelques escaliers dans la table de Padé

```
)/0]=1  [0/1]=( - 2)/(x - 2)

[1/1]=(x - 6)/(2*(2*x - 3))   [1/2]=(3*( - x + 2))/(x^2 - 6*x + 6)

[2/2]=(x^2 - 21*x + 30)/(3*(3*x^2 - 12*x + 10))  [2/3]=( - 11*x^2 + 60*x - 60)/(3*(x^3 - 12*x^2 + 30*x - 20))

1/0]=(x + 2)/2  [1/1]=(x - 6)/(2*(2*x - 3))

[2/1]=(x^2 + 6*x - 24)/(6*(3*x - 4))  [2/2]=(4*(x^2 - 21*x + 30))/(12*(3*x^2 - 12*x + 10))

[3/2]=(2*(x^3 + 12*x^2 - 150*x + 180))/(24*(6*x^2 - 20*x + 15))

[3/3]=(12*(3*x^3 - 140*x^2 + 510*x - 420))/(144*(4*x^3 - 30*x^2 + 60*x - 35))
```

Exemple $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} x^n$

développement de

$1+\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}$ $(|x|<1)$;

→ fraction continue:

$$1+\frac{x}{1}+\frac{\frac{1}{3}x}{1}+\frac{\frac{2^2}{3\times5}x}{1}+\frac{\frac{3^2}{5\times7}x}{1}+\frac{\frac{4^2}{7\times9}}{1}+\dots$$

```
operator coserie2;
Let coserie2(0)=1;
for all n such that n>0 Let coserie2(n)=((-1)**(n+1))/(2*n-1);
```

```
1
          ( - 4)/3
( - 1)/3            ( - 1)/15
          ( - 4)/15            ( - 16)/35
( - 3)/5            ( - 9)/35            ( - 1)/7
          ( - 4)/35            ( - 80)/315
( - 5)/7            ( - 25)/63
          ( - 4)/63
( - 7)/9
```

```
[0/0]=1   [0/1]=( - 1)/(x - 1)
```

$[1/1]=(4*x + 3)/(x + 3)$ $[1/2]=(3*(- 7*x - 5))/(x^2 - 6*x - 15)$

$[2/2]=(64*x^2 + 195*x + 105)/(3*(3*x^2 + 30*x + 35))$

$[2/3]=(5*(- 17*x^2 - 42*x - 21))/(x^3 - 15*x^2 - 105*x - 105)$

```
[1/0]=x + 1   [1/1]=(4*x + 3)/(x + 3)
```

$[2/1]=(4*x^2 + 24*x + 15)/(3*(3*x + 5))$ $[2/2]=(7*(64*x^2 + 195*x + 105))/(21*(3*x^2 + 30*x + 35))$

$[3/2]=(5*(64*x^3 + 960*x^2 + 1995*x + 945))/(75*(15*x^2 + 70*x + 63))$

$[3/3]=(5040*(256*x^3 + 1715*x^2 + 2730*x + 1155))/(25200*(5*x^3 + 105*x^2 + 315*x + 231))$

c) Suites en escalier d'approximants "homogènes".

qdalgorithme.hom obtenu à partir de qdalgorithme en modifiant les conditions initiales :

```
procedure hom(c,n);
for i:=0:n sum c(i,n-i)*(**i)*(**(n-i));

operator qdhom;
% quantites obtenues par le qdhom-algorithme quand on l'applique
  a une serie double;
% m est l'indice de colonne, n est l'indice de diagonale ;

% initialisation ;
for all c,n such that n>0 Let qdhom(c,0,n)=0;
  % la premiere colonne est formee de zeros ;
for all c,n such that n>=0 Let qdhom(c,1,n)=hom(c,n+1)/hom(c,n);

% regles du losange ;
for all c,m,n such that m>1 and n>=0 Let qdhom(c,m,n)
= (qdhom(c,m-2,n+1) + qdhom(c,m-1,n+1) - qdhom(c,m-1,n))*parite(m)
+ (qdhom(c,m-2,n+1) * qdhom(c,m-1,n+1) / qdhom(c,m-1,n))*imparite(m);
```

De la même manière pour fractioncontinue.hom au lieu de fractioncontinue.série

fractioncontinue.hom

```
% pour utiliser ce fichier, il faut charger au prealable les
fichiers qdalgorithme.hom et algorithmedes ;

% c est la liste des coefficients d'une serie double, les
exemples sont choisis dans le fichier tableaux.donnees ;

% dans un premier temps, on donne les coefficients des fractions
continues baties sur la table qd de la serie ;
%n est l'indice de diagonale ;

operator alphaqdhom;
for all c,n such that n>=0 Let alphaqdhom(c,0,n)=hom(c,n);
for all c,i,n such that i>0 and n>=0 Let alphaqdhom(c,i,n)
                              = -qdhom(c,i,n);

operator betaqdhom;
for all c,i,n such that i>=0 and n>=0 Let betaqdhom(c,i,n)=1;

operator beta;
for all i such that i>=0 Let beta(i)=1;


procedure fractionhom(c,n,k);
% on utilise la diagonale numero n de la table qd de la
serie, ce qui permet de construire dans sa table de Pade l'escalier
[n/0],[n/1],[n+1/1],[n+1/2],[n+2/2],... ;

begin
if n=0 then s:=0 else
            s:=(for i:=0:n-1 sum hom(c,i));
```

```
for all i such that i>=0 Let alpha(i)=alphaqdhom(c,i,n);

r:=s+ fraction(alpha,beta,k);

if fixp(k/2) then
   write "[",n+k/2,"/",k/2,"]=",r
   else
   write "[",n+(k-1)/2,"/",(k+1)/2,"]=",r;
end;

end;
```

Exemples d'escaliers dans la table des Padé "homogènes"

```
on gcd;
for i=0:5 do write fractionhom(tab5,0,i);
```

tab5 ⟷ 1/(1-x-2y)

```
[0/1]=( - 1)/(x + 2*y - 1)  [1/1]=( - 1)/(x + 2*y - 1)

                    ***** zero denominator
```

tab0 ⟷ 1/(1-x) + 1/(1-y)

```
for i=0:6 do write fractionhom(tab0,1,i);

[1/0]=x + y + 2   [1/1]=(x^2 - 2*x*y - 2*x + y^2 - 2*y)/(x^2 - x + y^2 - y)

[2/1]=(x^3*y + x^3 - 2*x^2*y^2 - x^2*y - 2*x^2 + x*y^3 - x*y^2 + y^3 - 2*y^2 )/(x^3 -
   x^2 + y^3 - y^2)

[2/2]=( - x - y + 2)/(x*y - x - y + 1)

[3/2]=( - x - y + 2)/(x*y - x - y + 1)

                    ***** zero denominator

[0/1]=( - 4)/(x + y - 2)
[1/1]=(x - 2*x*y - 2*x + y - 2*y)/(x - x + y - y)

[1/2]=( - x - y + 2)/(x*y - x - y + 1)

[2/2]=( - x - y + 2)/(x*y - x - y + 1)

                    ***** zero denominator
```

3. **Formule d'erreur dans l'interpolation rationnelle multipoints d'une fonction de la variable complexe**

I Rappels sur l'interpolation d'Hermite d'une fonction holomorphe.

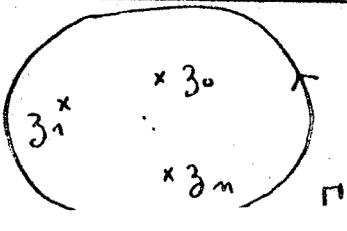
1) Notations

Les différences divisées de f relatives à des points d'interpolation z_i tous distincts sont définies par récurrence par:

$$\begin{cases} f[z_0] = f(z_0) \\ f[z_0, z_1] = \dfrac{f[z_0] - f[z_1]}{z_0 - z_1} \\ \vdots \\ f[z_0, \dots, z_n, z_{n+1}] = \dfrac{f[z_0, \dots, z_{n-1}, z_n] - f[z_0, \dots, z_{n-1}, z_{n+1}]}{z_n - z_{n+1}} \end{cases}$$

Dans le cas d'une fonction f holomorphe de la variable complexe dans un domaine D contenant tous les points z_i, la formule d'Hermite donne l'expression intégrale suivante de ces différences divisées:

$$f[z_0, z_1, \dots, z_n] = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(v)}{\prod_{i=0}^{n} (v - z_i)} \, dv$$



Γ contour fermé simple rectifiable entourant tous les points z_i, Γ à distance finie, contenu dans D.

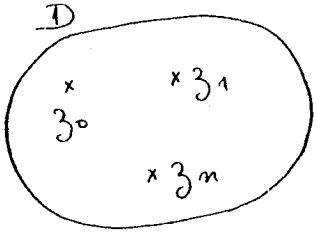
C'est bien sûr la formule de Cauchy qui permet d'établir ce résultat.

On constate que $f[z_0, z_1, \dots, z_n]$ admet une limite quand les points z_i convergent tous vers un même point z dans D, qui est $\frac{f^{(n)}(z)}{n!}$; ce qui permet de définir $f[z_0, \dots, z_n]$ même quand certains des points z_i sont confondus.

De plus, $f[z_0, \dots, z_n]$ est une fonction symétrique des z_i.

2) Polynôme de Newton et expression intégrale du reste.

Etant donnée une fonction f holomorphe dans un domaine D contenant tous les points z_i, il existe un unique polynôme P_n de degré $\leq n$ tel que f coïncide avec P_n aux points $z_0, z_1, \dots, z_n$.



Si un point z apparaît m fois dans $(z_0, z_1, \dots, z_n)$, on impose que f coïncide avec P_n ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$ au point z.

Ce polynôme écrit sous la forme :

$$P_n(z) = f[z_0] + f[z_0, z_1](z - z_0) + f[z_0, z_1, z_2](z - z_0)(z - z_1) + \dots + f[z_0, \dots, z_n] \prod_{i=0}^{n-1} (z - z_i)$$

s'appelle le polynôme de Newton de f.

Remarque : Dans le cas où tous les points d'interpolation sont distincts, c'est aussi le polynôme de Lagrange de f.

On développe P_n dans la base des polynômes :

$$\omega_{k+1}(z) = \prod_{i=0}^{k} (z - z_i) \quad , \quad k \geq -1$$

(avec la convention $\omega_0(z) = \prod_{i=0}^{-1} (z - z_i) = 1$),
car pour passer du polynôme de Newton de degré n à celui de degré $n+1$, lorsqu'on ajoute un nouveau point d'interpolation z_{n+1}, il suffit de calculer un seul nouveau coefficient, à savoir celui de $\omega_{n+1}(z)$:

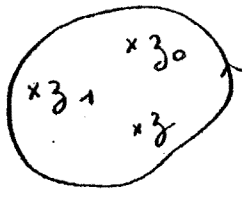
$$P_{n+1}(z) = P_n(z) + f[z_0, z_1, \dots, z_n, z_{n+1}] \prod_{i=0}^{n} (z - z_i) .$$

Le reste $R_n(z) = f(z) - P_n(z)$ s'écrit :

$$R_n(z) = f[z_0, z_1, \dots, z_n, z] \prod_{i=0}^{n} (z - z_i)$$

En appliquant la formule d'Hermite :

$$R_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\prod_{i=0}^{n} (z - z_i)}{\prod_{i=0}^{n} (v - z_i)} \frac{f(v)}{(v - z)} \, dv$$



Γ contient les points $z_0, z_1, \dots, z_n$ et z et vérifie toujours les hypothèses de régularité du début.

Remarques :

a) Toujours grâce à la formule de Cauchy :

$$P_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \left(1 - \frac{\prod_{i=0}^{n} (z - z_i)}{\prod_{i=0}^{n} (v - z_i)} \right) \frac{f(v)}{(v - z)} \, dv$$

b) Dans le cas particulier où tous les points z_i sont confondus à l'origine, on retrouve la formule de Mac-Laurin :

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + z^{n+1} \frac{1}{2i\pi} \int_{|v|=R} \frac{f(v)}{v^{n+1}(v-z)} dv$$

pour $|z| < R$ et f holomorphe dans un disque centré en 0 de rayon plus grand que R.

Le terme $\left(\frac{z}{v}\right)^{n+1}$ dans l'expression du reste permet de montrer qu'une fonction holomorphe dans un disque centré en 0 est développable en série entière au voisinage de 0 dans tout le disque.

C'est le même principe qui montrera la convergence dans le dernier paragraphe.

II Interpolation rationnelle

1) Problème initial

On cherche cette fois une fraction rationnelle qui coïncide avec f en un certain nombre de points.

Plus précisément, soient :

$(L, M) \in \mathbb{N}^2$

$z_0, z_1, \cdots, z_{L+M}$ dans $\mathbb{D}$,

on a à résoudre :

(1)

Trouver (u, v) deux polynômes : $d^\circ u \leq L$, $d^\circ v \leq M$ tels que : $\forall i \in [0, L+M]$ $\frac{u}{v}(z_i) = f(z_i)$

Si (u,v) est solution de (1), pour $\lambda \neq 0$, $(\lambda u, \lambda v)$ l'est aussi, mais ces couples définissent la même fraction rationnelle.

Si l'ensemble des couples solutions de (1) définissent une seule fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ avec $d^\circ Q \leq M$, $d^\circ P \leq L$ et $P \wedge Q = 1$, cette fraction sera dite multipoints Padé approximant de f d'ordre (L,M).

Si certains des points z_i sont confondus, on impose les mêmes conditions que précédemment : coïncidence de f et $\frac{u}{v}$ en z_i, ainsi que leurs dérivées successives en nombre suffisant. Remarquons que si $v(z_i) \neq 0$, toutes les dérivées successives de $\frac{u}{v}$ en z_i seront bien définies.

Avec cette convention, ce problème contient celui de l'approximation de Padé en 0 ; dans ce cas, on peut mener les calculs de manière tout à fait formelle avec une série de Taylor formelle :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \quad ; \quad (f(0) \equiv c_0 \text{ existe toujours})$$

Ici, il faudrait considérer une série de Newton formelle pour une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points d'interpolation :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \, \omega_n(z) \qquad \text{voir [2,5]}$$

$$\left(f(z_m) = \sum_{n=0}^{m} c_n \omega_n(z_m) \text{ a un sens} \right)$$

2) Problème linéaire

Le problème (1) a le désavantage de ne pas être linéaire en les coefficients de u et v. Qu'on les écrive dans n'importe quelle base, u et v dépendront toujours de

$(L+1)+(M+1)$ coefficients, c'est pourquoi en imposant à priori $L+M+1$ conditions à $\frac{u}{v}$, on espère trouver en général une unique solution pour la fraction $\frac{u}{v}$.

Intéressons-nous au problème suivant :

(2) **trouver (u,v) deux polynômes : $d^\circ u \leq L$, $d^\circ v \leq M$ tels que $\forall i \in [0, L+M]$ $(vf-u)(z_i)=0$**

qui, lui, est <u>linéaire homogène</u> en les coefficients de u et v : $L+M+1$ équations pour $L+M+2$ inconnues. L'espace vectoriel des solutions est toujours de <u>dimension ≥ 1</u>.

De même que précédemment, si $z_{i-1} \neq z_i = z_{i+1} = \cdots = z_{i+k}$ les équations correspondantes sont remplacées par :

$$\begin{cases} (vf-u)(z_i) = 0 \\ (vf-u)'(z_i) = 0 \\ \vdots \\ (vf-u)^{(k)}(z_i) = 0 \end{cases}$$

Toutes les solutions (u,v) non nulles de (2) vérifient <u>$v \neq 0$</u> et définissent une <u>même fraction rationnelle réduite</u>.

Si (u,v) est solution de (1), alors (u,v) est solution de (2) ; mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Cependant, si $\forall i$ $v(z_i) \neq 0$, alors (u,v) est aussi solution de (1).

Remarquons que si, pour (2), $v(z_i)=0$, alors $u(z_i)=0$ et u et v sont tous deux divisibles par $z-z_i$, ce qui fait descendre l'ordre de la fraction réduite $\frac{u}{v}$ si elle est définie.

Une CNS pour que (2) admette une unique solution, à un coefficient de proportionnalité près, est que son rang

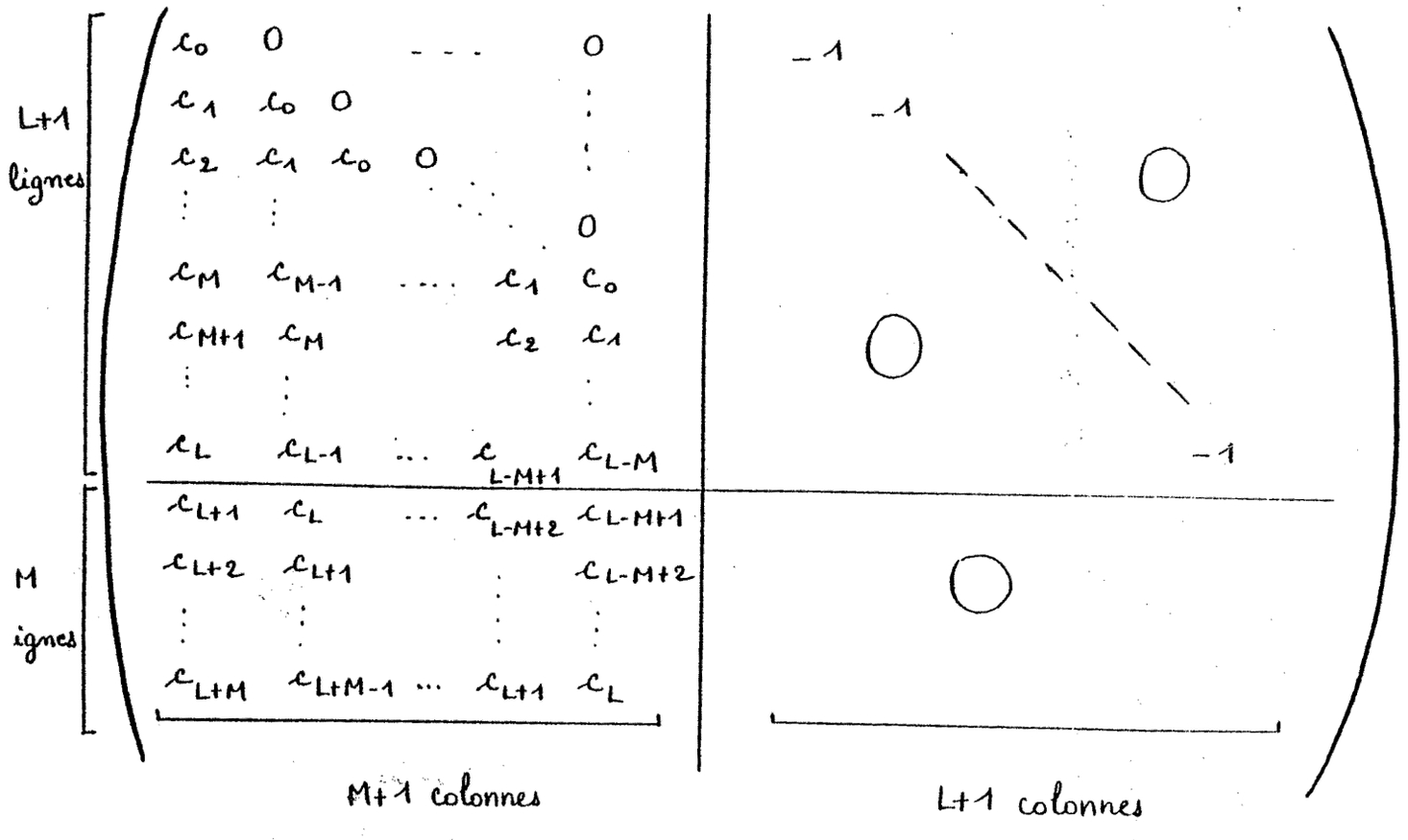
soit exactement $L+M+1$, c'est-à-dire qu'il existe un déterminant non nul d'ordre $L+M+1$ extrait du système. Cependant, même dans ce cas, "la" solution de (2) ne donne pas forcément de solution de (1).

Exemple : $L = M = 1$ $\quad f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(-1) = -1$.
L'espace des solutions de (2) est la droite engendrée par $(0, 1+z)$, mais 0 n'est pas solution de (1).

3) Cas de l'approximation de Padé en 0.

$z_0 = z_1 = \dots = z_{L+M} = 0$

Ici, il suffit qu'une solution de (2) : (u, v) vérifie $v(0) \neq 0$ pour que (u, v) soit solution de (1) :
La matrice du système linéaire de (2) est :



où $f(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i z^i$, (cas $L \geq M$)

Les inconnues sont $(v_0, v_1, \dots, v_M, u_0, u_1, \dots, u_L)$
Les $L+1$ 1ères lignes viennent des coefficients de z^k dans $vf - u$ pour $k = 0, 1, \dots, L$.
Les M dernières lignes viennent des coefficients de z^k dans $vf - u$ pour $k = L+1, L+2, \dots, L+M$

Le déterminant d'ordre M :

(convention : $c_i = 0$ si $i < 0$)

$$\begin{vmatrix} c_L & c_{L-1} & \cdots & c_{L-M+1} \\ c_{L+1} & c_L & \cdots & c_{L-M+2} \\ \vdots & & & \\ c_{L+M-1} & \cdots & & c_L \end{vmatrix}$$

est, à permutation près, le <u>déterminant de Hankel</u> (L,M) de f.

Si ce déterminant est non nul, alors le déterminant d'ordre $L+M+1$ obtenu en supprimant la première colonne de la matrice est aussi non nul : le système est exactement de rang $L+M+1$ et de plus, on peut prendre v_0 comme inconnue auxiliaire. Il existe un générateur (u,v) de l'espace vectoriel des solutions de (2) tel que <u>$v(0) \neq 0$</u> ; $\frac{u}{v}$ est solution de (1).

On considère ceci comme le <u>cas normal</u> de Padé en 0, et on donne un générateur des solutions sous forme de <u>déterminants d'ordre $M+1$</u> :

$$u^{[L/M]}(z) = \begin{vmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \cdots & c_L & \sum_{i=0}^{L-M} c_i z^{M+i} \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \cdots & c_{L+1} & \sum_{i=0}^{L-M+1} c_i z^{M+i-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{L+1} & c_{L+2} & \cdots & c_{L+M} & \sum_{i=0}^{L} c_i z^i \end{vmatrix}$$

$$v^{[L/M]}(z) = \begin{vmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \cdots & c_L & z^M \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \cdots & c_{L+1} & z^{M-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{L+1} & c_{L+2} & \cdots & c_{L+M} & 1 \end{vmatrix}$$

Exemples :

$$f(z) = 1 + z + z^2$$

a) $L = M = 1$: unique solution pour (2) : $\lambda(1, 1-z)$ et $[1/1] = \frac{1}{1-z}$

b) $L=2$, $M=1$: " " pour (2) : $\lambda(1+z+z^2, 1)$
ce qui donne en fait $[2/0]$.

4) N. points Padé

4.1. Si, par exemple, on développe u et v dans la base des z^k, pour un ensemble de points tous distincts, la matrice du système (2)

$M_1 {}^t(v_0, v_1, \ldots, v_M, -u_0, -u_1, \ldots, -u_L) = 0$ s'écrit :

$$M_1 = \begin{pmatrix} f(z_0) & f(z_0)z_0 & \cdots & f(z_0)z_0^M & 1 & z_0 & \cdots & z_0^L \\ f(z_1) & f(z_1)z_1 & & f(z_1)z_1^M & 1 & z_1 & & z_1^L \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(z_{L+M}) & f(z_{L+M})z_{L+M} & \cdots & f(z_{L+M})z_{L+M}^M & 1 & z_{L+M} & \cdots & z_{L+M}^L \end{pmatrix}$$

La matrice ne se scinde pas en blocs, toutes les lignes sont analogues [7].

Il semble donc plus astucieux de chercher u et v dans la base des ω_i : $0 \leq i \leq L+M$; car il apparaît plus de zéros dans la matrice correspondante.

Notations : $j \geq i$ $\quad f_{i,j} = f[z_i, z_{i+1}, \dots, z_j]$

Conventions : $j < i$ $\quad f_{i,j} = 0$

$$\sum_{k=i}^{j} (\ )_k = 0 \quad ; \quad \prod_{k=i}^{j} (\ )_k = 1$$

4.2. Théorème.

(2) admet comme solution le couple $(u^{[L/M]}, v^{[L/M]})$ où $u^{[L/M]}$ et $v^{[L/M]}$ sont définis par les déterminants d'ordre M+1 suivants :

Soit A la matrice d'ordre (M+1) x M :

$$A = \begin{pmatrix} f_{M,L+1} & f_{M,L+2} & \cdots & f_{M,L+M} \\ f_{M-1,L+1} & f_{M-1,L+2} & \cdots & f_{M-1,L+M} \\ \vdots & & & \\ f_{0,L+1} & f_{0,L+2} & \cdots & f_{0,L+M} \end{pmatrix}$$

$$u^{[L/M]}(z) = \begin{vmatrix} A & \begin{matrix} \sum_{j=M}^{L} f_{M,j} \prod_{k=0}^{j-1} (z - z_k) \\ \sum_{j=M-1}^{L} f_{M-1,j} \prod_{k=0}^{j-1} (z - z_k) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{L} f_{0,j} \prod_{k=0}^{j-1} (z - z_k) \end{matrix} \end{vmatrix}$$

$$v^{[L/M]}(z) = \begin{vmatrix} A & \begin{matrix} \prod_{k=0}^{M-1} (z - z_k) \\ \prod_{k=0}^{M-2} (z - z_k) \\ \vdots \\ z - z_0 \\ 1 \end{matrix} \end{vmatrix}$$

$$u = \sum_{i=0}^{L} u_i \omega_i \quad ; \quad v = \sum_{j=0}^{M} v_j \omega_j \, .$$

$$M_2 \, {}^t(v_0, v_1, \ldots, v_M, -u_0, \ldots, -u_L) = 0$$

Notons $f_k = f(z_k)$:

Pour $L \geqslant M$, M_2 s'écrit :

$$\begin{array}{cccccccccc}
f_0 & 0 & & & 1 & 0 & & & & \\
f_1 & f_1(z_1-z_0) & 0 & & 1 & (z_1-z_0) & 0 & & & \\
f_2 & f_2(z_2-z_0) & f_2 \prod_{i=0}^{1}(z_2-z_i) & 0 & 1 & (z_2-z_0) & \prod_{i=0}^{1}(z_2-z_i) & 0 & & \\
\cdots & & & & \cdots & & & & \ddots & \\
f_M & f_M(z_M-z_0) & \cdots & f_M \prod_{i=0}^{M-1}(z_M-z_i) & 1 & (z_M-z_0) & \cdots & \prod_{i=0}^{M-1}(z_M-z_i) & 0 & \cdots \\
\cdots & & & & \cdots & & & & & \\
f_{M+L} & f_{M+L}(z_{M+L}-z_0) & \cdots & f_{M+L} \prod_{i=0}^{M-1}(z_{M+L}-z_i) & 1 & (z_{M+L}-z_0) & \cdots & & & \prod_{i=0}^{L-1}(z_{M+L}-z_i)
\end{array}$$

De plus, le reste s'écrit :

$$\left(v^{[L/M]} f - u^{[L/M]}\right)(z) = \prod_{k=0}^{L+M} (z - z_k) \left| A \right|$$

$$\begin{matrix} f[z_M, \dots, z_{L+M}, z] \\ f[z_{M-1}, \dots, z_{L+M}, z] \\ \vdots \\ f[z_0, \dots, z_{L+M}, z] \end{matrix}$$

Si, pour chacun des points distincts parmi $z_0, z_1, \dots, z_{L+M}$, $v^{[L/M]}$ ne s'annule pas, $(u^{[L/M]}, v^{[L/M]})$ est solution de (1).

Pour une solution (u,v) de (2), vf et u ont les mêmes différences divisées de l'ordre 0 à l'ordre L+M entre les points $z_0, z_1, \dots, z_{L+M}$. D'où la solution précédente de (2) quand $\det A \neq 0$. Mais en appliquant plusieurs fois la formule de Newton, on montre que $(u^{[L/M]}, v^{[L/M]})$ est bien une solution de (2) dans tous les cas.

4.3. Remarques :

a) Ces formules généralisent celles de l'approximation de Padé en 0 :

Dans ce cas, $f_{i,j} = \dfrac{f^{(j-i)}(0)}{(j-i)!} = c_{j-i}$ si $j \geq i$

. Par un changement d'indexation, on obtient les formules du 3) pour $u^{[L/M]}$ et $v^{[L/M]}$.

. Pour retrouver l'expression classique du reste, il suffit de remarquer que :

$$f[\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{p \text{ fois}}, z] = \sum_{k=p}^{+\infty} c_k z^{k-p}$$

ce qui donne :

$$\left(v^{[L/M]} f - u^{[L/M]}\right)(z) = z^{L+M+1} \begin{vmatrix} c_{L-M+1} & \cdots & c_L & \sum_{k=L+1}^{+\infty} c_k z^{k-L-1} \\ c_{L-M+2} & \cdots & & \sum_{k=L+2}^{+\infty} c_k z^{k-L-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{L+1} & \cdots & c_{L+M} & \sum_{k=L+M+1}^{+\infty} c_k z^{k-L-M-1} \end{vmatrix}$$

et finalement :

$$\left(v^{[L/M]} f - u^{[L/M]}\right)(z) = \sum_{i=1}^{+\infty} z^{L+M+i} \begin{vmatrix} c_{L-M+1} & \cdots & c_L & c_{L+i} \\ c_{L-M+2} & \cdots & c_{L+1} & c_{L+i+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{L+1} & \cdots & c_{L+M} & c_{L+i+M} \end{vmatrix}$$

b) Ces expressions ne sont d'aucune utilité pratique, mais elles peuvent servir à établir des relations de récurrence entre les $(u^{[L/M]}, v^{[L/M]})$ et donc des algorithmes de calcul. Quant à l'expression du reste, nous allons la transformer de manière à montrer des résultats de convergence.

4.4. Exemples.

$L = M = 1$

a) $\boxed{f(0) = 0, \quad f(-1) = -1, \quad f(+1) = +1}$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{de rang } 3$$

Solutions de (2) = $\mathbb{C}(z, 1)$; (1) admet z pour unique solution.

b) $\boxed{f(0) = 1 = f(1), \quad f(-1) = 0}$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{de rang 3,}$$

$$u^{[1/1]}(z) = \begin{vmatrix} 1/2 & z \\ -1/2 & 1 \end{vmatrix} = z/2 \; ; \; v^{[1/1]}(z) = \begin{vmatrix} 1/2 & z \\ -1/2 & 1 \end{vmatrix} = z/2$$

Solutions de (2) $= \mathbb{C}(z/2, z/2)$.
mais $v^{[1/1]}(0) = 0$: cependant $\exists \lim_{z \to 0} \dfrac{u^{[1/1]}(z)}{v^{[1/1]}(z)} = f(0) =$

pourtant $\dfrac{u^{[1/1]}}{v^{[1/1]}} \equiv 1$ n'est pas solution de (1) : il n'y en a pas.

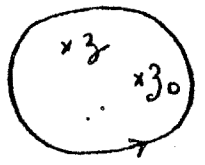
c) $\boxed{f(0) = 0 = f(1), \quad f(-1) = -1}$

Solutions de (2) $= \mathbb{C}(0, 1+z)$
$\exists \lim_{z \to -1} \dfrac{u^{[1/1]}(z)}{v^{[1/1]}(z)} = 0$, mais $\dfrac{u^{[1/1]}}{v^{[1/1]}} \equiv 0$ n'est pas solution de (1).

III Forme intégrale du reste relatif au couple $(u^{[L/M]}, v^{[L/M]})$

1) L'idée est d'utiliser le même principe que pour l'interpolation polynômiale, à savoir l'expression intégrale des différences divisées. Dans le déterminant qui donne le reste, seule la dernière colonne est fonction non constante de z.

Soit Γ une courbe fermée simple, rectifiable, orientée positivement, contenant $z_0, z_1, \dots, z_{L+M}$ et z à son intérieur. La formule d'Hermite s'applique à chacune des différences divisées de la dernière colonne, avec ce même contour Γ.



$$\left(v^{[L/M]} f - u^{[L/M]}\right)(z) = \prod_{k=0}^{L+M} (z - z_k)$$

$$A \begin{vmatrix} \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)\prod_{k=M}^{L+M}(\zeta - z_k)}\,d\zeta \\ \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)\prod_{k=M-1}^{L+M}(\zeta - z_k)}\,d\zeta \\ \vdots \\ \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)\prod_{k=0}^{L+M}(\zeta - z_k)}\,d\zeta \end{vmatrix}$$

Notons :

$$P_{i,j}(z) = \prod_{k=i}^{j} (z - z_k) \quad \text{si } i \le j, \text{ et } P_{i,j}(z) = 1 \text{ si } i > j$$

Lemme

$$\begin{vmatrix} A \begin{vmatrix} \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)P_{M,L+M}(\zeta)}\,d\zeta \\ \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)P_{M-1,L+M}(\zeta)}\,d\zeta \\ \vdots \\ \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)P_{0,L+M}(\zeta)}\,d\zeta \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \begin{vmatrix} A \begin{vmatrix} \frac{1}{P_{M,L+M}(\zeta)} \\ \frac{1}{P_{M-1,L+M}}(\zeta) \\ \vdots \\ \frac{1}{P_{0,L+M}(\zeta)} \end{vmatrix} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \end{vmatrix}$$

En effet, développons le premier déterminant par rapport à la dernière colonne.

Pour $0 \leq j \leq M$,

soit $\Delta_j = (-1)^j \times$ mineur d'ordre M obtenu en supprimant la $(M+1-j)^e$ ligne de A.

On obtient :

$$\sum_{j=0}^{M} \Delta_j \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)\, P_{j,L+M}(\zeta)}\, d\zeta$$

qui vaut $\displaystyle\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \sum_{j=0}^{M} \frac{\Delta_j}{P_{j,L+M}(\zeta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$

intégrale qui a bien un sens. Or $\displaystyle\sum_{j=0}^{M} \frac{\Delta_j}{P_{j,L+M}(\zeta)}$ est aussi le développement par rapport à la dernière colonne du déterminant

$$\begin{vmatrix} A & \dfrac{1}{P_{M,L+M}(\zeta)} \\ & \dfrac{1}{P_{M-1,L+M}(\zeta)} \\ & \vdots \\ & \dfrac{1}{P_{0,L+M}(\zeta)} \end{vmatrix}$$

Conséquence du lemme :

$$(v^{[L/M]} f - u^{[L/M]})(z) = \frac{P_{0,L+M}(z)}{2i\pi} \int_\Gamma \begin{vmatrix} A & P_{0,M-1}(\zeta) \\ & P_{0,M-2}(\zeta) \\ & \vdots \\ & P_{0,0}(\zeta) \\ & P_{0,-1}(\zeta) \end{vmatrix} \frac{f(\zeta)}{P_{0,L+M}(\zeta)(\zeta - z)}\, d\zeta$$

par réduction au même dénominateur et mise en facteur. Comme : $\forall i \in [0, M]$ $P_{0,i} = \omega_{i+1}$, le dernier déterminant est en fait $v^{[L/M]}(\zeta)$.

D'où :

$$(v^{[L/M]} f - u^{[L/M]})(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{(v^{[L/M]} f)(\zeta)}{(\zeta - z)} \frac{\prod_{j=0}^{L+M} (z - z_j)}{\prod_{j=0}^{L+M} (\zeta - z_j)} d\zeta$$

2) Dans le cas de Padé en 0, on retrouve bien :

$$(v^{[L/M]} f - u^{[L/M]})(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\substack{\Gamma \\ \text{contour entourant} \\ 0 \text{ et } z}} \frac{(v^{[L/M]} f)(\zeta)}{(\zeta - z)} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{L+M+1} d\zeta$$

• Si $(u^{[L/M]}, v^{[L/M]})$ est solution de (1), pour les points z à l'intérieur de Γ qui n'annulent pas $v^{[L/M]}$, on a :

$$\left(f - \frac{u^{[L/M]}}{v^{[L/M]}}\right)(z) = \frac{1}{2i\pi\, v^{[L/M]}(z)} \int_{\Gamma} \frac{\omega_{L+M+1}(z)}{\omega_{L+M+1}(\zeta)} \frac{(v^{[L/M]} f)(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Pour $M = 0$, on retrouve le reste de l'interpolation polynômiale de I. En ce qui concerne la convergence éventuelle d'une suite de fractions $\frac{u^{[L_R/M_R]}}{v^{[L_R/M_R]}}$ vers f, les pôles de ces fractions créent une difficulté qui n'existe pas dans le cadre de l'approximation polynômiale, mais qui peut aussi être intéressante.

Un cas sympathique se présente quand on sait minorer uniformément sur un compact et indépendamment des $(L_k, M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tous les modules des dénominateurs. Il suffit par exemple qu'on puisse enfermer les pôles de ces fractions dans un compact du domaine borné où f est définie. Plus ce compact est petit, plus il y a de points de convergence.

Remarque :

$u^{[L/M]}$ est en fait le polynôme de Newton de $v^{[L/M]}$ f relatif aux points $z_0, z_1, \dots, z_{L+M}$.

L'expression intégrale établie précédemment résulte donc aussi de l'expression intégrale du reste dans la formule de Newton.

Notons au passage que : $\dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\Gamma \frac{u^{[L/M]}(\zeta)}{(\zeta - z) \prod_{k=0}^{L+M} (\zeta - z_k)} d\zeta = 0$

(c'est aussi une conséquence du théorème des résidus)

IV Extension du théorème de Montessus à l'approximation rationnelle multipoints.

Montessus de Ballore a démontré la convergence uniforme de certaines colonnes de la table de Padé pour une fonction méromorphe (1904), en sachant localiser les pôles de ces fractions.

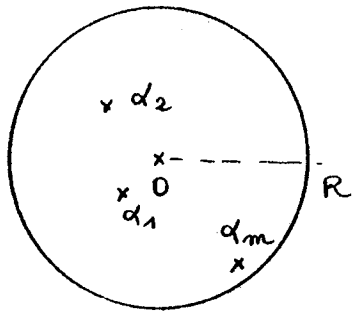
1) Rappel : théorème de Montessus

Soit f une fonction méromorphe dans le disque $|z| \leq R$, ayant m pôles en des points distincts $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ tels que : $0 < |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots \leq |\alpha_m| < R$, le pôle α_k

ayant la multiplicité μ_k.

Soit $M = \sum_{k=1}^{m} \mu_k$. Alors, sur tout compact de :

$\{ z / |z| \leq R , z \neq \alpha_k , k = 1, .., m \}$, f est limite uniforme des approximants de Padé en 0 : $[L/M]$ quand $L \to +\infty$.



2) Cas des multipoints.

Une configuration peu différente de la précédente est celle où tous les points d'interpolation sont "proches" de 0 et "loin" des pôles de f.

Extension :

Soit f une fonction méromorphe dans le disque $|z| \leq R$, ayant M pôles simples (pour l'instant) en des points $\alpha_1, \ldots, \alpha_M$.

Soit un système triangulaire de points d'interpolation, tous contenus dans le disque $|z| < s$:

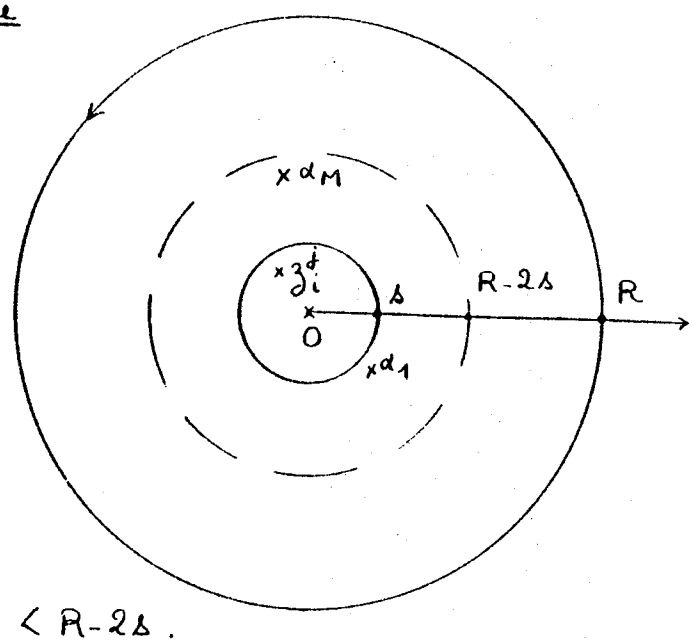
z_0^0

$z_0^1 \quad z_1^1$

$z_0^2 \quad z_1^2 \quad z_2^2$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \ddots$

$z_0^{L+M} \quad z_1^{L+M} \quad z_2^{L+M} \quad \cdots \quad z_{L+M}^{L+M}$



Supposons :

$$s < \inf_{1 \leq k \leq M} |\alpha_k| \leq \sup_{1 \leq k \leq M} |\alpha_k| < R - 2s .$$

En particulier, les points d'interpolation ne s'accumulent sur aucun pôle de f.
Alors, sur tout compact de $\{ z / |z| < R-2s, z \neq a_1, \dots, a_M \}$ f est limite uniforme des fractions $[L/M]$ quand $L \to +\infty$, où $[L/M]$ est l'unique fraction dont le dénominateur est de degré M et le numérateur de degré $\leq L$, qui coïncide avec f aux points $z_0^{L+M}, z_1^{L+M}, \dots, z_{L+M}^{L+M}$. (elle existe pour L assez grand).

3) Remarques

3.1. Quand $\forall i,j \; z_i \neq z_j$, s peut être choisi aussi proche de 0 que l'on veut, et l'on retrouve le théorème de Montessus de Ballore.

3.2. Configuration

$s < \inf \left(\inf |a_i|, \dfrac{R - \sup |a_i|}{2} \right)$. Plus chacun de ces deux nombres est petit, plus les points d'interpolation sont concentrés vers 0. Le problème est centré en 0 pour des commodités d'écriture. En pratique, on le centre "au milieu" des points d'interpolation, qui sont supposés former un "nuage" compact assez éloigné de tous les pôles :
$d(\{\text{pôles}\}, \{\text{points d'interpolation}\}) > 0$ suffit pour appliquer la même méthode. Il reste à choisir le contour d'intégration en fonction des points où l'on désire évaluer f.

3.3. Idées principales de la démonstration

— Se ramener à l'interpolation rationnelle d'une fonction holomorphe, au lieu de celle d'une fonction méromorphe :

ici $\underline{f R_M}$ où $R_M(z) = \prod_{k=1}^{M} (z - \alpha_k)$.

- Interpoler $f R_M$ par une fraction du type $\frac{\pi_{L+M}}{T^{(L,M)}}$ où

- π_{L+M} est un polynôme de $d^\circ \leq L+M$ et divisible par R_M.
- $T^{(L,M)}$ est un polynôme de d° exactement M et :
$\underline{T^{(L,M)} \longrightarrow R_M}$ uniformément sur $\{|z| \leq R\}$
(c'est de là que vient la condition : $\sup_{1 \leq k \leq M} |\alpha_k| < R - 2s$)

Ceci permet de minorer uniformément en L, et en z décrivant un compact du disque privé des pôles, les dénominateurs $|T^{(L,M)}(z)|$, et assure la convergence uniforme des $\frac{\pi_{L+M}/R_M}{T^{(L,M)}}$ vers f aux points z du compact qui vérifient : $|z| + s < R - s$.

4) Preuve détaillée.

$f R_M$ est holomorphe dans $\{|z| \leq R\}$, bornée par S sur $\{|z| = R\}$. Dans l'interpolation rationnelle d'ordre $(L+M, M)$ de $f R_M$ aux points $z_0^{L+M}, z_1^{L+M}, \dots, z_{L+M}^{L+M}$ ($L+M+1$ conditions + M conditions sur le numérateur : divisibilité par R_M), cherchons à priori un dénominateur unitaire de degré exactement M :

$$\boxed{T^{(L,M)} = \sum_{k=0}^{M} a_k^{(L,M)} R_k} \quad \text{où} \quad \begin{cases} R_k(z) = \prod_{i=1}^{k} (z - \alpha_i) \\ R_0 \equiv 1 \end{cases}$$

Soit π_{L+M} le polynôme d'interpolation de Newton de $f R_M T^{(L,M)}$ aux points $z_0^{L+M}, z_1^{L+M}, \dots, z_{L+M}^{L+M}$:

$$\pi_{L+M}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \left(1 - \frac{(z-z_0^{L+M}) \cdots (z-z_{L+M}^{L+M})}{(\zeta-z_0^{L+M}) \cdots (\zeta-z_{L+M}^{L+M})}\right) \frac{(f R_M T^{(L,M)})(\zeta)}{(\zeta-z)} d\zeta$$

Montrons que pour L assez grand, il existe un unique polynôme $T^{(L,M)}$ unitaire de degré M, tel que π_{L+M} s'annule aux pôles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M$, et qu'alors $\frac{\pi_{L+M}}{T^{(L,M)}}$ interpole $f R_M$ aux points $z_0^{L+M}, \ldots, z_{L+M}^{L+M}$.

Notons $\omega_{L+M+1}(z) = \prod_{i=0}^{L+M} (z - z_i^{L+M})$

$\forall i \in [1, M]$

$$\pi_{L+M}(\alpha_i) = 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \left(1 - \frac{\omega_{L+M+1}(\alpha_i)}{\omega_{L+M+1}(\zeta)}\right) \frac{(f R_M^2)(\zeta)}{\zeta - \alpha_i} d\zeta \\ = \sum_{k=0}^{M-1} a_k^{(L,M)} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \left(1 - \frac{\omega_{L+M+1}(\alpha_i)}{\omega_{L+M+1}(\zeta)}\right) \frac{(f R_M R_k)(\zeta)}{\zeta - \alpha_i} d\zeta \right. \end{cases}$$

Posons :

$$c_{k,i}^{(L,M)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \left(1 - \frac{\omega_{L+M+1}(\alpha_i)}{\omega_{L+M+1}(\zeta)}\right) \frac{(f R_M R_k)(\zeta)}{\zeta - \alpha_i} d\zeta \quad ; \quad \begin{matrix} k \in [0, M-1] \\ i \in [1, M] \end{matrix}$$

et $$d_i^{(L,M)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \left(1 - \frac{\omega_{L+M+1}(\alpha_i)}{\omega_{L+M+1}(\zeta)}\right) \frac{(f R_M^2)(\zeta)}{\zeta - \alpha_i} d\zeta .$$

Soit $\mathcal{C}_L$ le système linéaire :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{M-1} a_k^{(L,M)} \, c_{k,i}^{(L,M)} = d_i^{(L,M)} \quad ; \quad 1 \le i \le M}$$

de M équations à M inconnues.

Avec les conditions que vérifient les points d'interpolation par rapport aux pôles, le système $\mathcal{E}_L$ "converge" vers le système $\mathcal{E}$ linéaire homogène de M équations à M inconnues, de Cramer.

$$\boxed{\mathcal{E} : \sum_{k=0}^{M-1} a_k \, c_{k,i} = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq M}$$

où $$c_{k,i} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{(f R_M R_k)(\zeta)}{\zeta - \alpha_i} \, d\zeta \; ,$$

au sens où le vecteur des M^2+M coefficients de $\mathcal{E}_L$ converge vers celui des M^2+M coefficients de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{C}^{M^2+M}$.

En effet, $\forall i \in [1,M], \forall \zeta \; |\zeta|=R$, $\left| \frac{\omega_{L+M+1}(\alpha_i)}{\omega_{L+M+1}(\zeta)} \right| \leq \left(\frac{\sup_{1 \leq k \leq M} |\alpha_k| + \Delta}{R - \Delta} \right)^{L+M}$

comme $\lambda = \frac{\sup_{1 \leq k \leq M} |\alpha_k| + \Delta}{R - \Delta} < 1$, $\lambda^{L+M+1} \longrightarrow 0$ $\quad L \longrightarrow +\infty$

Toute autre répartition des points d'interpolation qui assure la convergence normale sur $|\zeta|=R$ des $\frac{\omega_{L+M+1}(\alpha_i)}{\omega_{L+M+1}(\zeta)}$ $\quad 1 \leq i \leq M$ vers 0 convient.

Soit $\boxed{\Lambda = \sup_{\substack{|\zeta|=R \\ 0 \leq k \leq M}} |R_k(\zeta)|}$; pour $1 \leq i \leq M$, on a :

$$\left| d_i^{(L,M)} - \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{(f R_M^2)(\zeta)}{\zeta - \alpha_i} \, d\zeta \right| \leq R \, \frac{\delta \Lambda \lambda^{L+M+1}}{R - \sup_{1 \leq k \leq M} |\alpha_k|} \; .$$

Donc $d_i \xrightarrow[L\to+\infty]{(L,M)} \frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=R} \frac{(fR_M^2)(\zeta)}{\zeta-\alpha_i}\,d\zeta = fR_M^2(\alpha_i) = 0$

De la même manière,

$$c_{k,i} \xrightarrow[L\to+\infty]{(L,M)} \frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=R} \frac{(fR_M R_k)(\zeta)}{\zeta-\alpha_i}\,d\zeta = c_{k,i}$$

- pour $i \leq k \leq M-1$, $c_{k,i} = 0$
- $c_{i-1,i} = (fR_M R_{i-1})(\alpha_i) \neq 0$ car $fR_M(\alpha_i) \neq 0$, α_i étant pôle simple de f.
- Les autres coefficients s'expriment en fonction des résidus de f aux pôles.

La matrice du système $\mathcal{E}$ est <u>triangulaire inversible</u> :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} c_{0,1} & 0 & & \\ c_{0,2} & c_{1,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{0,M} & c_{1,M} & \cdots & c_{M-1,M} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{E}$ admet donc une unique solution $\mathcal{S}$, qui est la solution nulle (ie : le polynôme R_M est solution de $\mathcal{E}$).

Si $\mathcal{M}_L$ est la matrice du système $\mathcal{E}_L$, on a montré : $\mathcal{M}_L \xrightarrow[L\to+\infty]{} \mathcal{M}$. Par continuité de l'application déterminant, <u>$\exists\, L_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall L \geq L_0 \quad \det \mathcal{M}_L \neq 0$</u>.

$\mathcal{E}_L$ admet une unique solution $\mathcal{S}_L$ qui s'exprime sous forme de Cramer, $\mathcal{S}_L$ est une fonction continue des coefficients de $\mathcal{E}_L$, donc $\mathcal{S}_L \xrightarrow[L\to+\infty]{} \mathcal{S}$.

Résumons :

$\exists L_0 \in \mathbb{N}$, $\forall L \geq L_0$, $\exists ! \, T^{(L,M)}$ unitaire de $d^\circ M$, $R_M \mid \pi_{L+M}$.

De plus, $T^{(L,M)} \underset{L \to +\infty}{\longrightarrow} R_M$: les polynômes $T^{(L,M)}$ étant tous de degré $\leq M$, la convergence de leurs $M+1$ coefficients dans la base $R_0, R_1, \ldots, R_M$ équivaut à leur convergence uniforme sur $\{|z| \leq R\}$.

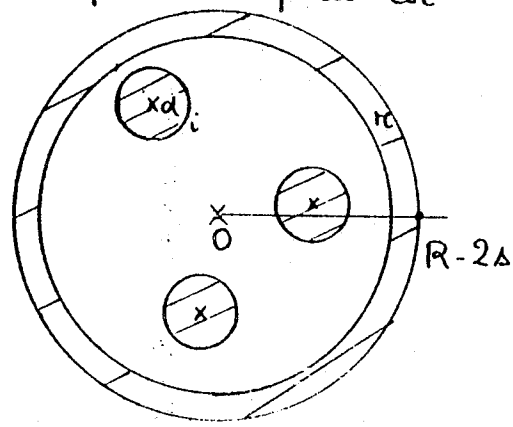
Utilisons :

$$\left(\int R_M T^{(L,M)} - \pi_{L+M}\right)(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{\omega_{L+M+1}(z)}{\omega_{L+M+1}(\zeta)} \frac{\left(\int R_M T^{(L,M)}\right)(\zeta)}{(\zeta - z)} \, d\zeta$$

pour $z \in \mathcal{D}(0,R) \setminus \{\text{pôles}\}$.

Tout compact du disque $|z| < R-2\delta$ privé des pôles est contenu dans un compact du type :

$$K_\kappa = \{ z \mid |z| \leq R - 2\delta - \kappa, \ |z - a_k| \geq \kappa, \ k = 1, \ldots, M \}$$
où $\kappa > 0$



Soit $K > \|R_M\| = \sup_{|z| \leq R} |R_M(z)|$

Comme $T^{(L,M)} \underset{L \to +\infty}{\overset{\| \ \|}{\longrightarrow}} R_M$, $\exists L_1 \in \mathbb{N}$ $\forall L \geq L_1$ $\|T^{(L,M)}\| \leq K$

Soit $m_\kappa = \inf_{z \in K_\kappa} |R_M(z)| > 0$ car atteint.

$\exists L_2 \in \mathbb{N}$, $\forall L \geq L_2$ $\|T^{(L,M)} - R_M\| \leq \frac{m_\kappa}{2}$ d'où :

$$\forall z \in K_r \qquad |T^{(L,M)}(z)| \geq m_r - \frac{m_r}{2} = \frac{m_r}{2}$$

Notons $P^{(L,M)} = \pi_{L+M} R_M$

$\forall L \geq \sup(L_0, L_1, L_2) \qquad \forall z \in K_r$

$$(f - \frac{P^{(L,M)}}{T^{(L,M)}})(z) = \frac{1}{2i\pi (R_M T^{(L,M)})(z)} \int_\Gamma \frac{\omega_{L+M+1}(z)}{\omega_{L+M+1}(\zeta)} \frac{(f R_M T^{(L,M)})(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta .$$

$$|(f - \frac{P^{(L,M)}}{T^{(L,M)}})(z)| \leq \frac{R}{m_r \times \frac{m_r}{2}} \underbrace{\left(\frac{R-\Delta-r}{R-\Delta}\right)^{L+M+1}}_{<1} \frac{\delta K}{R - 2\Delta - r}$$

ce qui prouve :

$$\boxed{\frac{P^{(L,M)}}{T^{(L,M)}} \xrightarrow[L \to +\infty]{} f \quad \text{uniformément dans } K_r .}$$

($\frac{P^{(L,M)}}{T^{(L,M)}} = [L/M]$ unique fraction du problème (2) .)

5) Pôles multiples

Si f admet cette fois des pôles multiples en des points distincts $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, où α_ℓ est de multiplicité μ_ℓ avec $\sum_{\ell=1}^{m} \mu_\ell = M$, on impose que π_{L+M} soit divisible par $\prod_{\ell=1}^{m} (z - \alpha_\ell)^{\mu_\ell}$, c'est-à-dire :

pour $1 \leq \ell \leq m$, $0 \leq j \leq \mu_\ell - 1 \qquad \pi_{L+M}^{(j)}(\alpha_\ell) = 0$

Par dérivation sous le signe $\int$, on obtient un système linéaire $\mathcal{E}_L$ qui converge de nouveau vers un système triangulaire homogène, à diagonale inversible, quand $L \to +\infty$, d'où la convergence des approximants rationnels sur les mêmes compacts.

Conclusion

Selon qu'on s'intéresse à une fonction de la variable réelle ou de la variable complexe, on exprime sous des formes intégrales appropriées les différences divisées qui interviennent dans les formules d'interpolation polynômiale ou rationnelle.

Dans le cas complexe, la formule de Cauchy est fondamentale, qui permet de scinder le rôle de f et celui des points d'interpolation. En effet, pour exprimer le reste, on peut choisir un même contour d'intégration (où le comportement de f est connu) pour tout un ensemble de points, d'où des conditions suffisantes de convergence uniforme.

Notre ambition est de généraliser ces résultats aux fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes.

Références

[1] BAKER. GRAVES-MORRIS (1981) Padé approximants
Part I : Basic theory
Part II : Extensions and applications
Encyclopedia of Mathematics and its applications. vol 13.

[2] G. CLAESSENS (1978) On the Newton-Padé approximation problem. J. of Approx. Theory 22 p 150.160

[3] G. CLAESSENS (1978) On the structure of the Newton-Padé table, J. of Approx. Theory 22 p. 304.319

[4] P.J. DAVIS (1963) Interpolation and approximation
Blaisdell Publishing Company.

[5] M.A. GALLUCI and W.B. JONES (1976) Rational approximation corresponding to Newton series. J. of Approx. Theory 17 p 366.392

[6] D.C. HANDSCOMB (1965) Methods of numerical approximation.
Pergamon Press.

[7] J. MEINGUET (1970) On the solubility of the Cauchy-Riemann problem, in "Approximation theory" Talbot p 137-163

[8] E.B. SAFF (1972) An extension of de Montemus de Ballore's theorem on the convergence of interpolating rational functions, J. of Approx. Theory 6 p 63.67

[9] J.L. WALSH (1960) Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. XX

Quelques références sur les algorithmes de calculs d'approximants de Padé-Newton

[1] G. CLAESSENS (1976) : A new algorithm for osculatory rational interpolation. Num. Math. 27 p 77-83

[2] G. CLAESSENS (1978) : A useful identity for the rational Hermite interpolation table. Num. Math. 29 p 227-231

[3] F.M. LARKIN (1967) : Some techniques for rational interpolation. Comp. J. 10 p 178-187

[4] J. STOER (1961) : Über zwei Algorithmen zur Interpolation mit rationalen Funktionen. Num. Math. 3 p 285-304

[5]. L. WUYTACK (1973) : An algorithm for rational interpolation similar to the qd. algorithm. Num. Math. 20 p 418-424.

[6] L. WUYTACK (1974) : On some aspects of the rational interpolation problem. SIAM J. Num. Anal. vol 11 n°1 mars

[7] L. WUYTACK (1975) : On the rational osculatory problem. Math. Comp. 29 p 837-843

4. Interpolation polynômiale d'une fonction de plusieurs variables complexes

Introduction

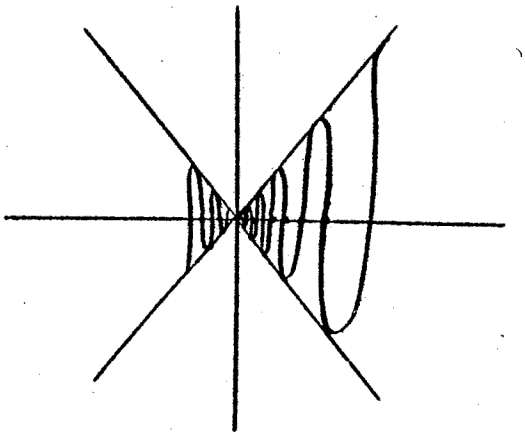
Si le passage d'une à deux variables nécessite des moyens nouveaux, par contre la méthode tensorielle présentée ici dans le cadre de deux variables pour des raisons de simplicité, convient aussi à un nombre fini quelconque de variables.

Habituellement, on interpole une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par des polynômes des sous-espaces $\mathbb{C}_n[x]$: polynômes de degré $\leq n$ en x, qui forment une suite croissante. Etant donnés $n+1$ points distincts $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{C}$, il existe un unique polynôme P de $\mathbb{C}_n[x]$ qui coïncide avec f en ces points : le système linéaire obtenu en développant P dans la base canonique $1, x, .., x^n$ dépend d'un Vandermonde non nul. Mais cette suite de polynômes ne converge pas nécessairement vers la fonction [2,7] :

par exemple :

$$\begin{cases} f(x) = x \sin \dfrac{\pi}{x} \quad , f(0)=0 \\ \quad x \neq 0 \\ x_n = \dfrac{1}{n+1} \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n \equiv 0 \not\longrightarrow f$$
$$n \to +\infty$$



La base $1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1), \ldots, (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$ présente l'avantage par rapport à la base de Lagrange :

$$\prod_{j\neq i}(x-x_j) \Big/ \prod_{j\neq i}(x_i-x_j) \quad \text{pour } i = 0, 1, \ldots, n,$$

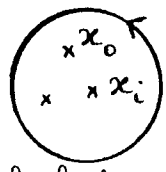
de conduire à un système triangulaire inversible, tel que l'ajout d'un nouveau point d'interpolation ne nécessite le calcul que d'un seul coefficient supplémentaire. Les coefficients de P dans cette base sont des différences divisées, qui se calculent récursivement.

Le polynôme de Newton de f s'écrit :

$$(*) \qquad P(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + \cdots + f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

D'autre part, la formule d'Hermite :

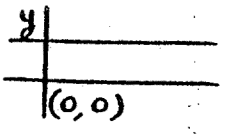
$$f[x_0,x_1,\ldots,x_k] = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(x)}{\prod_{i=0}^{k}(x-x_i)}\,dx$$



pour une fonction f holomorphe dans un ouvert contenant les x_i, permet de définir les différences divisées quand certains des points sont confondus, et si l'on remplace les conditions d'interpolation par des conditions sur les dérivées successives de la fonction (conditions d'Hermite), le polynôme solution est encore de la forme (*) (grâce à une convergence uniforme sous le signe $\int$).

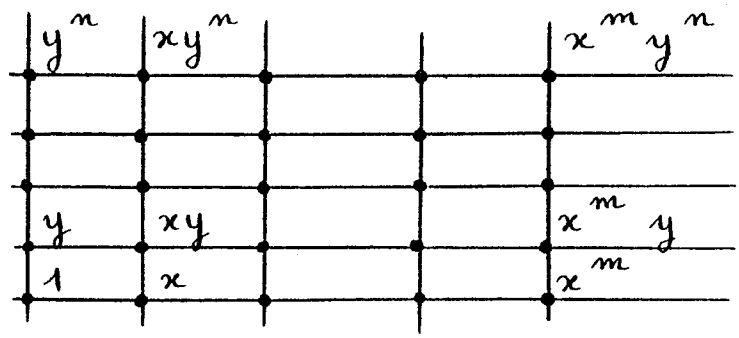
Pour des points d'interpolation tous confondus à l'origine, on retrouve le polynôme de Taylor de f. Ce cas limite permet parfois d'intuiter des résultats concernant l'interpolation de Lagrange.

Dans $\mathbb{C}[x,y]$ se présentent plusieurs types de sous-espaces vectoriels. Mais remarquons par exemple qu'il n'existe pas de polynôme P dans l'espace vectoriel engendré par $1, x, y$ qui prenne les valeurs $\begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$ aux points $\begin{cases} (0,0) \\ (1,0) \\ (-1,0) \end{cases}$ respectivement.
Il est plus astucieux de chercher à priori P dans l'espace vectoriel engendré par 1, x, $x(x-1)$.

En considérant $f(x,y)$ comme fonction de x, puis de y (paramétrisation de $\mathbb{C}^2$ par des droites parallèles à l'axe des x : 

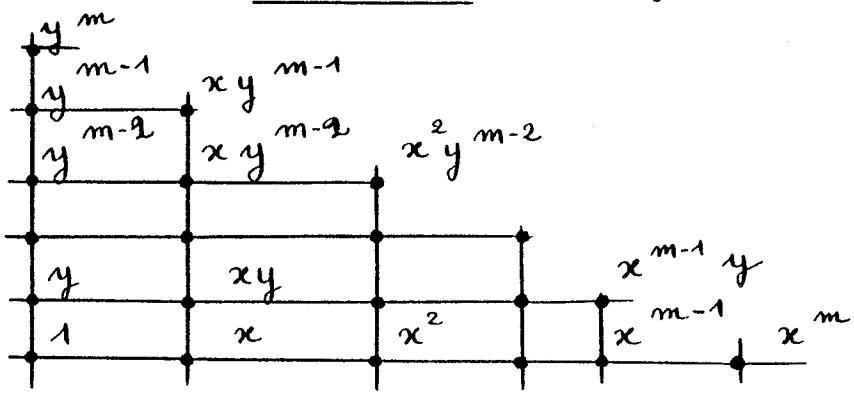
)
ou inversement,
et en appliquant les formules de Newton à une variable, nous résolvons le problème de l'interpolation pour des configurations " rectangulaires " de points.
Nous choisissons des bases de polynômes en fonction de cette " géométrie ", et il apparaît alors naturellement des différences divisées à deux variables, qui admettent aussi une représentation intégrale.
Nous utilisons en particulier les sous-espaces vectoriels :

(§ A) $\mathbb{C}_{m,n}[x,y]$: polynômes de degré $\leq m$ en x, $\leq n$ en y.



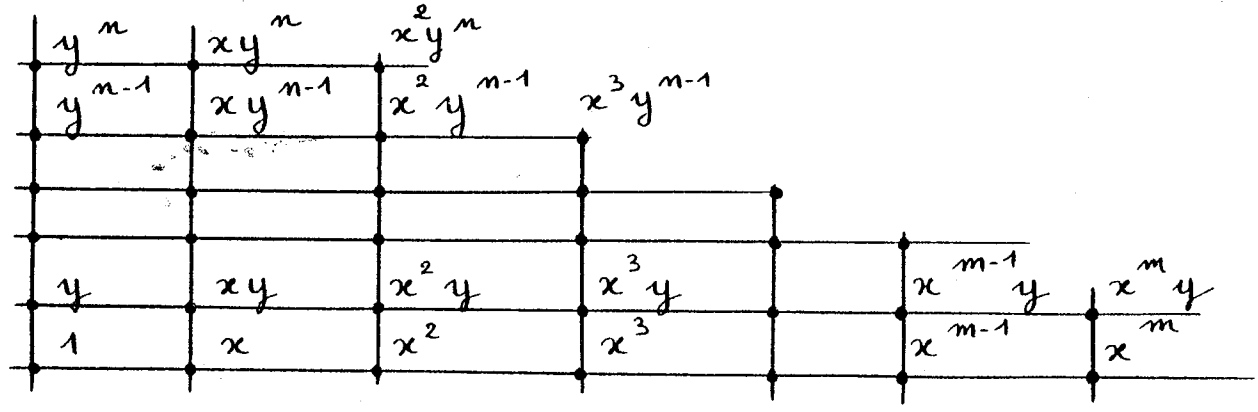
spécialement adaptés aux fonctions du type $g(x)\,h(y)$

(§ B) $\mathbb{C}_m[x,y]$: polynômes de degré total $\leq m$



(§ C) ou, plus généralement, les sous-espaces de $\mathbb{C}[x,y]$ engendrés par des $(x^k y^l)_{(k,l)\in I}$, où $I \text{ fini} \subset \mathbb{N}^2$ vérifie la règle du rectangle :

$$\left.\begin{array}{l}(k,l)\in I\\ i\leq k\\ j\leq l\end{array}\right\} \Rightarrow (i,j)\in I$$



Soit f une fonction holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^2$: elle est développable en série double dans un voisinage ouvert Ω de $(0,0)$: $f(x,y) = \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}^2} a_{k,l}\, x^k\, y^l$.

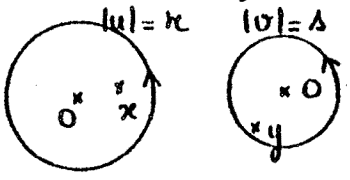
Ce développement est normalement convergent dans tout polydisque $D(0,r) \times D(0,s)$, $\begin{matrix} r>0 \\ s>0 \end{matrix}$, contenu dans Ω.

En fait, f est C^∞ dans Ω et les $a_{k,l}$ valent $\frac{1}{k!\,l!} \left(\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f\right)(0,0)$, ou encore :

$$\frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{|u|=r} \int_{|v|=s} \frac{f(u,v)}{u^{k+1}\, v^{l+1}}\, du\, dv,$$ chaque contour d'intégration étant orienté positivement dans $\mathbb{C}$.

Pour $(x,y) \in D(0,r) \times D(0,s)$, la formule intégrale de Cauchy donne :

$$f(x,y) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{|u|=r} \int_{|v|=s} \frac{f(u,v)}{(u-x)(v-y)}\, du\, dv$$



A) Formules de Taylor et Newton "rectangle".

I) Taylor.

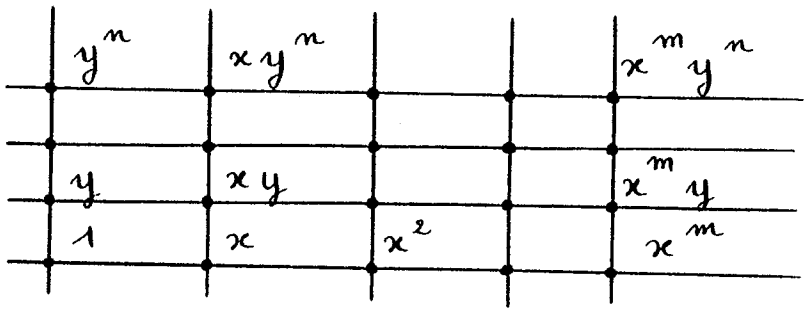
1) Polynôme d'interpolation.

Un polynôme P de $\mathbb{C}_{m,n}[x,y]$ vérifiant les conditions :

$\forall (k,l) \in [0,m] \times [0,n]$ $\left(\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} P\right)(0,0) = \left(\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f\right)(0,0)$

s'écrit nécessairement :

$$\boxed{P(x,y) = \sum_{(k,l) \in [0,m] \times [0,n]} a_{k,l}\, x^k\, y^l}$$



Base de $\mathbb{C}_{m,n}[x,y]$

2) Reste

Soit $R(x,y) = f(x,y) - P(x,y)$

Pour $|x| < r$, $|y| < s$:

$$R(x,y) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{(u-x)(v-y)}\,du\,dv - \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} x^k y^l \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{u^{k+1} v^{l+1}}\,du\,dv$$

$$R(x,y) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \left(\frac{1}{(u-x)(v-y)} - \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} \frac{x^k}{u^{k+1}} \frac{y^l}{v^{l+1}} \right) f(u,v)\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \left(\frac{1}{(u-x)(v-y)} - \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{u^{k+1}} \right)\left(\sum_{l=0}^{n} \frac{y^l}{v^{l+1}} \right)}_{\text{à cause de la structure "rectangle"}} \right) f(u,v)\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \left(\frac{1}{(u-x)(v-y)} - \frac{\left(1-\left(\frac{x}{u}\right)^{m+1}\right)}{\left(1-\frac{x}{u}\right)u} \frac{\left(1-\left(\frac{y}{v}\right)^{n+1}\right)}{\left(1-\frac{y}{v}\right)v} \right) f(u,v)\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^{m+1} + \left(\frac{y}{v}\right)^{n+1} - \left(\frac{x}{u}\right)^{m+1}\left(\frac{y}{v}\right)^{n+1}}{(u-x)(v-y)} f(u,v)\,du\,dv$$

et ainsi, le reste se scinde en trois termes, dont les deux premiers sont "symétriques en x, y" :

$$R(x,y) = \frac{x^{m+1}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{u^{m+1}(u-x)(v-y)}\,du\,dv$$

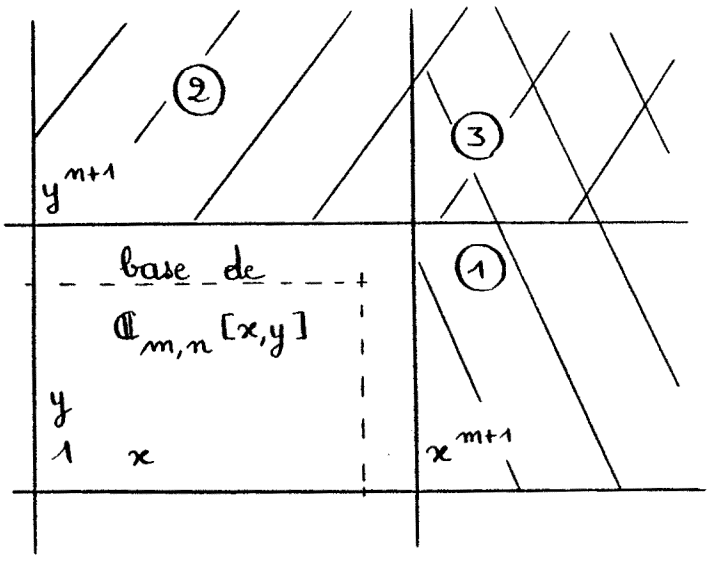
$$+ \frac{y^{n+1}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{v^{n+1}(v-y)(u-x)}\,du\,dv$$

$$- \frac{x^{m+1}y^{n+1}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{u^{m+1}v^{n+1}(u-x)(v-y)}\,du\,dv$$

chacun des cercles $|u|=r$, $|v|=s$ étant orienté positivement dans $\mathbb{C}$.

Remarquons que ce reste converge bien vers 0 lorsque m et n tendent vers $+\infty$, et qu'il y a convergence uniforme sur les polydisques contenus dans $D(0,r)\times D(0,s)$.

3) Interprétation des termes du reste.



Soit $(x,y) \in D(0,r) \times D(0,s)$
A cause de l'absolue convergence du développement de $f(x,y)$, les trois séries :

$$I_1 = \sum_{\substack{k \geqslant m+1 \\ l \geqslant 0}} a_{k,l}\, x^k y^l$$

$$I_2 = \sum_{\substack{k \geqslant 0 \\ l \geqslant n+1}} a_{k,l}\, x^k y^l$$

$$I_3 = \sum_{\substack{k \geqslant m+1 \\ l \geqslant n+1}} a_{k,l}\, x^k y^l$$

convergent.

Or

$$I_1 = \sum_{\substack{k \geqslant m+1 \\ l \geqslant 0}} \frac{x^k y^l}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{u^{k+1}\, v^{l+1}}\, du\, dv$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \sum_{\substack{k \geqslant m+1 \\ l \geqslant 0}} \left(\frac{x}{u}\right)^k \left(\frac{y}{v}\right)^l \frac{f(u,v)}{u\, v}\, du\, dv$$

en raison de la convergence normale de la série $\displaystyle\sum_{\substack{k \geqslant m+1 \\ l \geqslant 0}} \left(\frac{x}{u}\right)^k \left(\frac{y}{v}\right)^l$

vers $\left(\frac{x}{u}\right)^{m+1} \dfrac{1}{\left(1-\frac{x}{u}\right)\left(1-\frac{y}{v}\right)}$ sur $|u|=r$, $|v|=s$

$$I_1 = \frac{x^{m+1}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{u^{m+1}(u-x)(v-y)}\,du\,dv$$: premier terme du reste

De manière symétrique,

$$I_2 = \frac{y^{n+1}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{v^{n+1}(v-y)(u-x)}\,du\,dv$$: second terme du reste

$$I_3 = \sum_{\substack{k \geqslant m+1 \\ l \geqslant n+1}} \frac{x^k y^l}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{u^{k+1} v^{l+1}}\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \underbrace{\sum_{\substack{k \geqslant m+1 \\ l \geqslant n+1}} \left(\frac{x}{u}\right)^k \left(\frac{y}{v}\right)^l}_{\text{car converge normalement vers } \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^{m+1}\left(\frac{y}{v}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{x}{u}\right)\left(1-\frac{y}{v}\right)} \text{ sur } |u|=r,\ |v|=s} \frac{f(u,v)}{uv}\,du\,dv$$

$$I_3 = \frac{x^{m+1} y^{n+1}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{u^{m+1} v^{n+1}(u-x)(v-y)}\,du\,dv$$: dernier terme du reste

4) Remarque

Ces polynômes "rectangles" sont particulièrement adaptés aux fonctions du type $f(x,y) = g(x)\,h(y)$ où g et h sont holomorphes en 0 :

Si $g(x) = \sum_{k\geqslant 0} g_k x^k$ au voisinage de 0 et

$h(y) = \sum_{\ell\geqslant 0} h_\ell y^\ell$ au voisinage de 0,

le polynôme de Taylor de f dans $\mathbb{C}_{m,n}[x,y]$ est :

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{n} g_k h_\ell x^k y^\ell = \Big(\sum_{k=0}^{m} g_k x^k\Big)\Big(\sum_{\ell=0}^{n} h_\ell y^\ell\Big).$$

Par exemple, pour $r>0$, $s>0$, $|x|<r$, $|y|<s$,

$$e^{x+y} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\frac{y^\ell}{\ell!} + \frac{x^{m+1}}{(2i\pi)^2}\iint_{\substack{|u|=r\\|v|=s}} \frac{e^{u+v}}{u^{m+1}(u-x)(v-y)}\,du\,dv$$

$$+\frac{y^{n+1}}{(2i\pi)^2}\iint_{\substack{|u|=r\\|v|=s}} \frac{e^{u+v}}{v^{n+1}(u-x)(v-y)}\,du\,dv - \frac{x^{m+1}y^{n+1}}{(2i\pi)^2}\iint_{\substack{|u|=r\\|v|=s}} \frac{e^{u+v}}{u^{m+1}v^{n+1}(u-x)(v-y)}\,du\,dv$$

II) Newton

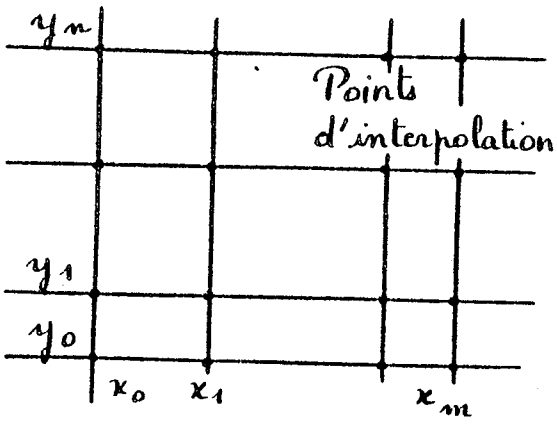
1) Construction

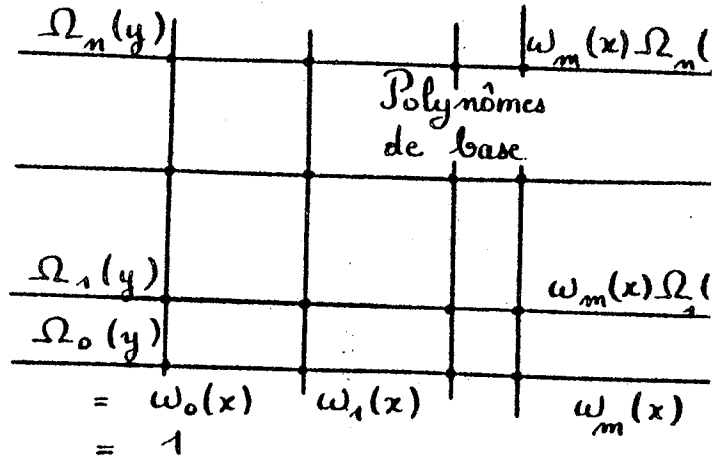
Etudions maintenant le cas de points tous distincts, obtenu à partir du précédent, en "éclatant" le point $(0,0)$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{J} = \left\{ (x_k, y_\ell) \;/\; \begin{matrix} 0 \leq k \leq m \\ 0 \leq \ell \leq n \end{matrix} \right\} ;$$

f est supposée holomorphe dans $O_1 \times O_2$, où O_1 (resp. O_2) sont des ouverts de $\mathbb{C}$ contenant les x_k (resp. y_ℓ). Γ_1 (resp. Γ_2) sont des courbes fermées simples orientées positivement tracées dans O_1 (resp. O_2) contenant les x_k (resp. y_ℓ) à leur intérieur supposé simplement connexe.

Aucun ordre n'est choisi à priori sur les points x_k ou y_ℓ qui sont des complexes, mais les polynômes de base de $\mathbb{C}_{m,n}[x,y]$ choisis dépendent explicitement du numérotage des points du rectangle : ils sont calqués sur les points de la manière suivante :





où
$$\begin{cases} \omega_0(x) = \Omega_0(y) = 1 \\ \omega_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) & 1 \leq k \leq m+1 \\ \Omega_\ell(y) = \prod_{j=0}^{\ell-1} (y - y_j) & 1 \leq \ell \leq n+1 \end{cases}$$

Les $(m+1)(n+1)$ polynômes $\underline{\omega_k(x)\,\Omega_\ell(y)}$ $\begin{matrix} 0 \leq k \leq m \\ 0 \leq \ell \leq n \end{matrix}$

de $\mathbb{C}_{m,n}[x,y]$ en forment une base car :

les $(m+1)(n+1)$ équations (i,j) : $\begin{matrix} 0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n \end{matrix}$

écrites dans le même ordre que les couples (k,ℓ) dans :

$$\mathcal{E}_{i,j} : \quad \sum_{k=0}^{m} \sum_{\ell=0}^{n} \lambda_{k,\ell} \; \omega_k(x_i) \, \Omega_\ell(y_j) = 0$$

forment un système linéaire homogène <u>triangulaire</u> inversible. Pour la même raison, il existe un unique polynôme P dans $\mathbb{K}_{m,n}[x,y]$ vérifiant :
$\forall (i,j) \in [0,m] \times [0,n] \quad P(x_i, y_j) = f(x_i, y_j)$.
(cf. exemple de l'introduction)

Utilisons une démarche <u>tensorielle</u> pour exprimer polynôme et reste dans ce cas.

Considérant $f(x,y)$ comme fonction de la seule variable x, (y fixé), appliquons la formule de Newton relative aux points $x_0, x_1, \ldots, x_m$:

$$f(x,y) = \underbrace{\sum_{k=0}^{m} [x_0, .., x_k ; f(x,y)]_x \, \omega_k(x)}_{\text{polynôme de Newton}} + \underbrace{[x_0, .., x_m, x ; f(x,y)]_x \, \omega_{m+1}(x)}_{\text{reste}}$$

où $[x_0, \ldots, x_k ; f(x,y)]_x$ désignent les différences divisées habituelles de $x \longrightarrow f(x,y)$ prises entre les points $x_0, .., x_k$.

Considérant maintenant chaque terme $[x_0, .., x_k ; f(x,y)]_x$ comme fonction de y, appliquons-lui la formule de Newton relative aux points $y_0, .., y_n$; ceci est possible, puisque tous les points (x_i, y_j) $\begin{matrix} 0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq n \end{matrix}$ sont des points d'interpolation.

$$[x_0,..,x_k;f(x,y)]_x$$

$$= \sum_{l=0}^{n} [y_0,..,y_l;[x_0,..,x_k;f(x,y)]_x]_y \Omega_l(y) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{polynôme} \\ \text{de} \\ \text{Newton} \end{array} \right.$$

$$+ [y_0,..,y_n,y;[x_0,..,x_k;f(x,y)]_x]_y \Omega_{n+1}(y) \quad \text{reste}$$

Finalement,

$$f(x,y) = \underbrace{\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} [y_0,..,y_l;[x_0,..,x_k;f(x,y)]_x]_y \omega_k(x)\Omega_l(y)}_{P(x,y) \text{ polynôme de } \mathbb{C}_{m,n}[x,y]}$$

$$+ \underbrace{[x_0,..,x_m,x;f(x,y)]_x \omega_{m+1}(x) + \sum_{k=0}^{m}[y_0,..,y_n,y;[x_0,..,x_k;f(x,y)]_x]_y \omega_k(x)\Omega_{n+1}(y)}_{R(x,y)}$$

Comme $R(x,y)$ s'annule aux points d'interpolation, $P(x,y)$ est le polynôme d'interpolation de f relatif aux points $(x_k,y_l)_{\substack{0\le k\le m \\ 0\le l\le n}}$: appelé <u>polynôme de Newton "rectangle"</u>.

2) <u>Reste</u>

Exprimons $R(x,y)$ sous forme de <u>trois termes, comme au I</u>

$$\sum_{k=0}^{m} [y_0,..,y_n,y;[x_0,..,x_k;f(x,y)]_x]_y \omega_k(x)$$

par linéarité des différences divisées par rapport à la fonction

$$= [y_0,..,y_n,y; \underbrace{\sum_{k=0}^{m}[x_0,..,x_k;f(x,y)]_x \omega_k(x)}_{\text{polynôme de Newton en } x}]_y$$

$$= [y_0,..,y_n,y; f(x,y) - [x_0,..,x_m,x;f(x,y)]_x \omega_{m+1}(x)]_y$$

$$= [y_0,..,y_n,y;f(x,y)]_y - [y_0,..,y_n,y;[x_0,..,x_m,x;f(x,y)]_x]_y \omega_{m+1}(x)$$

Et ainsi,

$$R(x,y) = [x_0,..,x_m,x;f(x,y)]_x\,\omega_{m+1}(x) + [y_0,..,y_n,y;f(x,y)]_y\,\Omega_{n+1}(y) - [y_0,..,y_n,y;[x_0,..,x_m,x;f(x,y)]_x]_y\,\omega_{m+1}(x)\,\Omega_{n+1}(y)$$

Nous avons donc été amenés à définir des différences divisées pour une fonction de deux variables x et y, qui semblent à priori dépendre de l'ordre choisi entre x et y.

3) <u>Différences divisées à deux variables, formules intégrales</u>.

Si l'on raisonne en commençant par la variable y au lieu de la variable x, en identifiant les coefficients des $\omega_k(x)\,\Omega_\ell(y)$ dans les deux polynômes obtenus (unicité du polynôme d'interpolation), on montre :

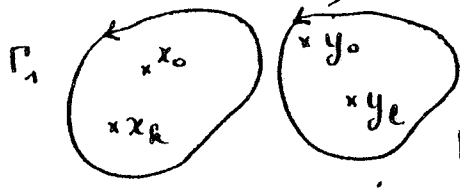
$$[y_0,..,y_\ell;[x_0,..,x_k;f(x,y)]_x]_y = [x_0,..,x_k;[y_0,..,y_\ell;f(x,y)]_y]_x$$

qu'on peut donc noter : $\boxed{[x_0,..,x_k;y_0,..,y_\ell;f(x,y)]}$

Toujours en raison de l'unicité du polynôme d'interpolation, ces différences divisées ont un caractère "<u>associatif</u>" : calcul alternatif de différences selon x ou selon y ; ceci permet de les <u>calculer récurrivement</u> de plusieurs manières, qui correspondent par exemple à l'ordre de donnée des points. Cependant, à chaque étape, l'ensemble des points doit vérifier la <u>règle du rectangle</u>, car le calcul de $[x_0,..,x_k;y_0,..,y_\ell;f(x,y)]$ nécessite toutes les valeurs $f(x_i,y_j)$ $\begin{matrix}0\le i\le k\\0\le j\le \ell\end{matrix}$.

D'autre part, la formule d'Hermite appliquée successivement en x et en y donne :

$$[x_0,..,x_k;y_0,..,y_\ell;f(x,y)] = \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\frac{f(u,v)}{\omega_{k+1}(u)\,\Omega_{\ell+1}(v)}\,du\,dv$$



contours convenables contenus dans O_1 (O_2)

Conséquence : cette différence divisée est indépendante de l'ordre des intégrations (par Fubini) : c'est la propriété établie plus haut.

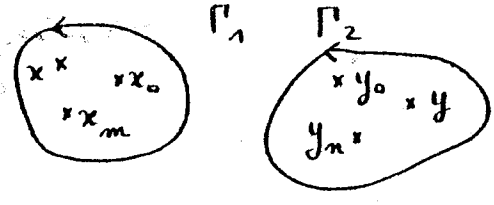
D'autre part, elle ne dépend pas non plus d'une permutation sur les x_i, (resp. les y_j) : " commutativité ".

Formule de Cauchy et formules d'Hermite appliquées aux différences divisées qui apparaissent dans le reste donnent :

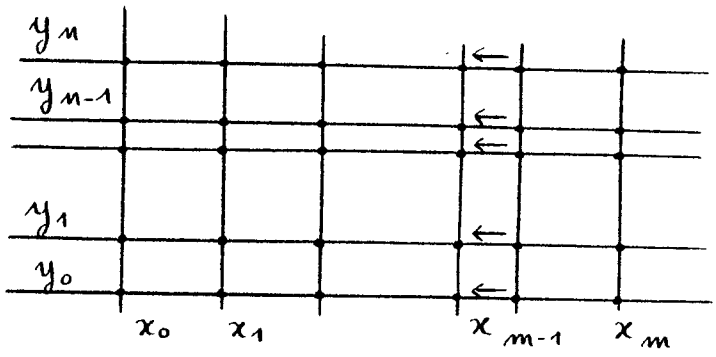
$$R(x,y) = \frac{\omega_{m+1}(x)}{(2i\pi)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\frac{f(u,v)}{(u-x)(v-y)\,\omega_{m+1}(u)}\,du\,dv$$

$$+\frac{\Omega_{n+1}(y)}{(2i\pi)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\frac{f(u,v)}{(u-x)(v-y)\,\Omega_{n+1}(v)}\,du\,dv$$

$$-\frac{\omega_{m+1}(x)\,\Omega_{n+1}(y)}{(2i\pi)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\frac{f(u,v)}{(u-x)(v-y)\,\omega_{m+1}(u)\,\Omega_{n+1}(v)}\,du\,dv$$



Remarquons que l'écriture intégrale des différences divisées a l'avantage d'avoir un sens quand certaines des abscisses x_i (ordonnées y_j) sont confondues : la formule de Cauchy montre qu'elles s'expriment en fonction des <u>dérivées particlles par rapport à x et y</u> de f en des points qui apparaissent plusieurs fois. Comme les conditions d'interpolation sont aussi remplacées par des conditions sur les dérivées partielles, les formules précédentes sont valables dans tous les cas. (noter qu'interviennent des dérivés dans les directions x et y parce que les points sont sur des axes parallèles aux axes de coordonnées).



En particulier, si $\forall i \in [0,m]\ x_i = 0$ et $\forall j \in [0,n]\ y_j = 0$, on retrouve comme polynôme et reste les expressions du I ; (limite uniforme sous $\iint$ pour deux suites :

d'abscisses distinctes $(x_0^\kappa, x_1^\kappa, .., x_m^\kappa) \underset{\kappa \to +\infty}{\longrightarrow} (0,0,..,0)$

d'ordonnées distinctes $(y_0^\kappa, y_1^\kappa, .., y_n^\kappa) \underset{\kappa \to +\infty}{\longrightarrow} (0,0,..,0)$).

4) Convergence

x (resp. y) est à l'intérieur de Γ_1 (resp Γ_2), donc $d(x,\Gamma_1) > 0$ (resp. $d(y,\Gamma_2) > 0$).

Comme f est une fonction holomorphe dans $O_1 \times O_2$, donc bornée sur $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ [3], la forme du reste montre

que la convergence dépend essentiellement de la convergence uniforme des termes :

$\dfrac{\omega_{m+1}(x)}{\omega_{m+1}(u)}$ et $\dfrac{\Omega_{n+1}(y)}{\Omega_{n+1}(v)}$ vers 0 quand (u,v) décrit $\Gamma_1 \times \Gamma_2$.

Une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi est que pour chaque (x,y) à l'intérieur de $\Gamma_1 \times \Gamma_2$,

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \forall u \in \Gamma_1 \qquad \left| \frac{x-x_i}{u-x_i} \right| \leqslant \alpha < 1$$

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \forall v \in \Gamma_2 \qquad \left| \frac{y-y_j}{v-y_j} \right| \leqslant \beta < 1$$

Dans le cas simple où : $O_i = \mathcal{D}(0, R_i)$, $R_i > 0$, $i = 1, 2$, et où les abscisses x_i (resp. ordonnées y_j) sont de module $\leqslant s_1$ (resp. s_2), les polynômes d'interpolation "rectangles" convergent vers la fonction en tout point de $\mathcal{D}(0, R_1 - 2s_1) \times \mathcal{D}(0, R_2 - 2s_2)$; ce qui restreint évidemment le diamètre des points d'interpolation ; mais on a utilisé ici une majoration grossière.

Cependant, si f est holomorphe dans $\mathbb{C}^2$, la convergence est assurée partout car les rayons R_i, $i = 1, 2$, peuvent prendre des valeurs aussi grandes que possible [ch 3].

Cette étude rapide montre aussi l'intérêt de conditions d'Hermite en un nombre fini de points, ce qui simplifie les majorations et fait jouer un rôle privilégié aux lemniscates.

5) Forme de Lagrange des polynômes d'interpolation "rectangles".

Soient

$$\begin{cases} l_{i,x}(x) = \prod_{\substack{k \neq i \\ k=0,..,m}} (x - x_k) \Big/ \prod_{\substack{k \neq i \\ k=0,..,m}} (x_i - x_k) \\ l_{j,y}(y) = \prod_{\substack{\ell \neq j \\ \ell=0,..,n}} (y - y_j) \Big/ \prod_{\substack{\ell \neq j \\ \ell=0,..,n}} (y_j - y_\ell) \end{cases}$$

quand les abscisses x_i sont distinctes,

Soit $L_{i,j}(x,y) = l_{i,x}(x)\, l_{j,y}(y)$

$L_{i,j} \in \mathbb{C}_{m,n}[x,y]$, et comme :

$$L_{ij}(x_k, y_\ell) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = (k,\ell) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

le polynôme $\boxed{\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} f(x_i, y_j)\, L_{i,j}}$ interpole f aux points $(x_i, y_j)_{\substack{0 \le i \le m \\ 0 \le j \le n}}$. A cause de l'unicité de ce polynôme, c'est aussi le polynôme écrit sous forme d'Hermite :

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} [x_0, .., x_i ; y_0, .., y_j ; f(x,y)]\, \omega_i(x)\, \Omega_j(y)$$

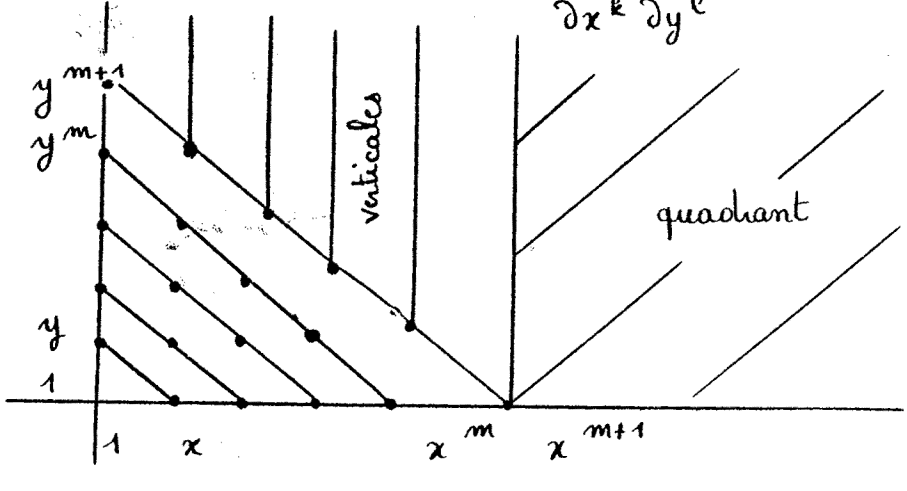
B) Formules de Taylor et Newton "triangle".

I) Taylor.

1) Polynôme d'interpolation.

Avec les mêmes hypothèses qu'au A), $\boxed{\sum_{k+\ell \le m} a_{k,\ell}\, x^k y^\ell}$ est l'unique polynôme de $\mathbb{C}_m[x,y]$ qui vérifie les conditions de Taylor à l'origine :

$\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ et $k+\ell \le m$ $\left(\dfrac{\partial^{k+\ell}}{\partial x^k \partial y^\ell} P\right)(0,0) = \left(\dfrac{\partial^{k+\ell}}{\partial x^k \partial y^\ell} f\right)(0,0)$.



2) Reste

Écrivons-le directement grâce à l'interprétation suivante :

$$R(x,y) = \sum_{k+\ell \geqslant m+1} a_{k,\ell}\, x^k y^\ell$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \sum_{\ell \geqslant m+1-k} a_{k,\ell}\, x^k y^\ell}_{\text{somme sur les verticales}} + \underbrace{\sum_{\substack{k \geqslant m+1 \\ \ell \geqslant 0}} a_{k,\ell}\, x^k y^\ell}_{\text{somme sur le quadrant restant}}$$

Chacune de ces séries converge pour $|x| < r$, $|y| < s$, à cause de la convergence absolue de la série initiale.

- $$\sum_{\ell \geqslant m+1-k} a_{k,\ell}\, x^k y^\ell = \sum_{\ell \geqslant m+1-k} \frac{x^k y^\ell}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{u^{k+1} v^{\ell+1}}\, du\, dv$$

pour $0 \leqslant k \leqslant m$

$$= \text{convergence normale de la série sous } \iint \quad \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \sum_{\ell \geqslant m+1-k} \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^k \left(\frac{y}{v}\right)^\ell f(u,v)}{u\,v}\, du\, dv$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^k \left(\frac{y}{v}\right)^{m+1-k} f(u,v)}{uv\left(1-\frac{y}{v}\right)}\, du\, dv$$

$$\boxed{\sum_{\ell \geqslant m+1-k} a_{k,\ell}\, x^k y^\ell = \frac{x^k\, y^{m+1-k}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{(v-y)\, u^{k+1} v^{m+1-k}}\, du\, dv}$$

- Un calcul analogue conduit à :

$$\sum_{\substack{\ell \geqslant 0 \\ k \geqslant m+1}} a_{k,\ell}\, x^k y^\ell = \frac{x^{m+1}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{(u-x)(v-y)\,u^{m+1}}\, du\,dv$$

• Le reste se scinde donc en $m+2$ termes :

$$R(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k y^{m+1-k}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{(v-y)\,u^{k+1}\,v^{m+1-k}}\, du\,dv$$

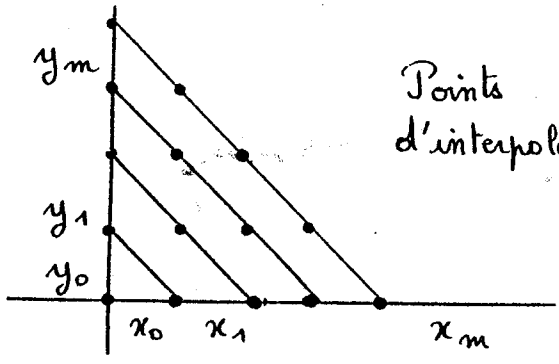
$$+ \frac{x^{m+1}}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|u|=r \\ |v|=s}} \frac{f(u,v)}{(v-y)(u-x)\,u^{m+1}}\, du\,dv$$

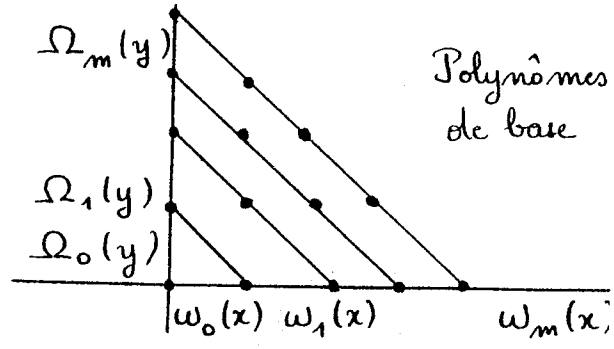
Un découpage utilisant des horizontales à la place des verticales échangerait les rôles de x et y.
Cette fois, le nombre de termes du reste augmente avec le nombre de données. Une autre démarche, comme on l'a vue au chapitre 1, remédie à ce défaut, mais elle s'adapte moins bien au cas de points distincts.

II Newton.

1) Construction.

$\mathcal{I} = \{ (x_k, y_\ell) \;/\; k+\ell \leqslant m \}$; les polynômes de base de $\mathbb{C}_m[x,y]$ choisis sont les $(\omega_k(x)\,\Omega_\ell(y))_{k+\ell \leqslant m}$.





Par le même principe que pour la configuration rectangulaire il existe un unique polynôme d'interpolation de f dans $\mathbb{C}_m[x,$

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{m} [x_0,..,x_k ; f(x,y)]_x \, \omega_k(x) + [x_0,..,x_m,x ; f(x,y)]_x \, \omega_{m+1}($$

En exprimant $[x_0,..,x_k ; f(x,y)]_x$ à l'aide de la formule de Newton relative aux seuls points $y_0, .., y_{m-k}$:

$$[x_0,..,x_k ; f(x,y)]_x = \sum_{\ell=0}^{m-k} [y_0,..,y_\ell ; [x_0,..,x_k ; f(x,y)]_x]_y \, \Omega_\ell(y) + [y_0,..,y_{m-k},y ; [x_0,..,x_k ; f(x,y)]_x]_y \, \Omega_{m-k+1}(y$$

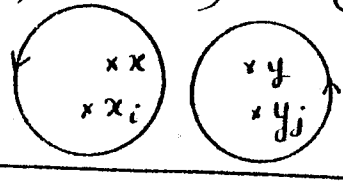
on obtient :

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{m} \sum_{\ell=0}^{m-k} [y_0,..,y_\ell ; [x_0,..,x_k ; f(x,y)]_x]_y \, \omega_k(x) \Omega_\ell(y) \\ + \sum_{k=0}^{m} [y_0,..,y_{m-k},y ; [x_0,..,x_k ; f(x,y)]_x]_y \, \omega_k(x) \Omega_{m-k+1}(y) \\ + [x_0,..,x_m,x ; f(x,y)]_x \, \omega_{m+1}(x) \end{array} \right. \begin{array}{l} \} \text{ polynôme de } \mathbb{C}_m[x,y] \\ \} \text{ reste} \end{array}$$

2) Forme intégrale du reste.

$$R(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\omega_k(x) \, \Omega_{m-k+1}(y)}{(2i\pi)^2} \iint \frac{f(u,v)}{(v-y) \, \omega_{k+1}(u) \, \Omega_{m-k+1}(v)} \, du\,dv$$

$$+ \frac{\omega_{m+1}(x)}{(2i\pi)^2} \iint \frac{f(u,v)}{(v-y)(u-x) \, \omega_{m+1}(u)} \, du\,dv$$



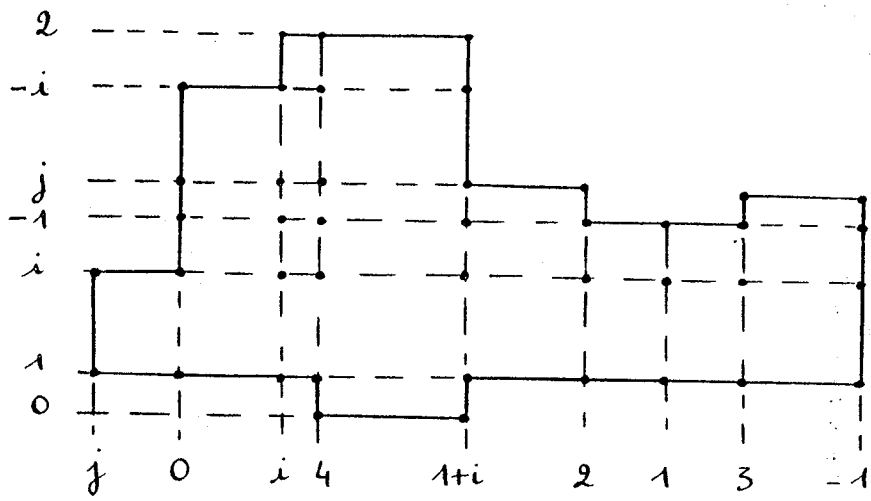
Par un passage à la limite comme au A), on retrouve la formule de Taylor du BI).

C) Généralisation

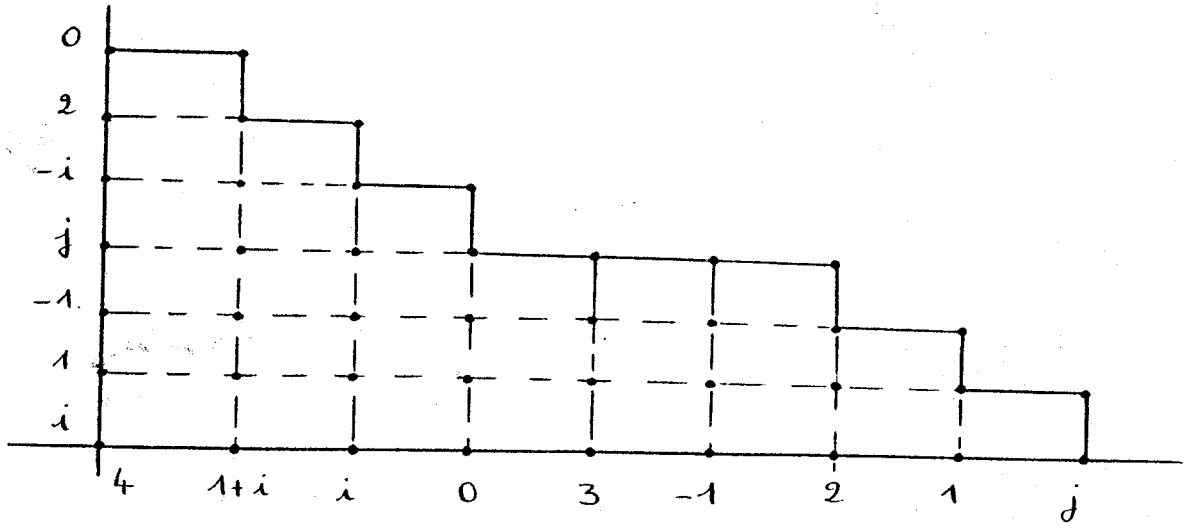
Comme on l'a constaté dans le cas d'une configuration triangulaire, la méthode tensorielle s'applique tant que l'ensemble $\mathcal{J}$ des points d'interpolation vérifie la règle du rectangle :

$$\left.\begin{array}{l}(x_k, y_\ell) \in \mathcal{J} \\ i \leqslant k \\ j \leqslant \ell\end{array}\right\} \Rightarrow (x_i, y_j) \in \mathcal{J}$$

Un algorithme très simple permet de déterminer si un ensemble fini de points de $\mathbb{C}^2$ peut être numéroté de manière à vérifier ces conditions. Par exemple, l'ensemble :



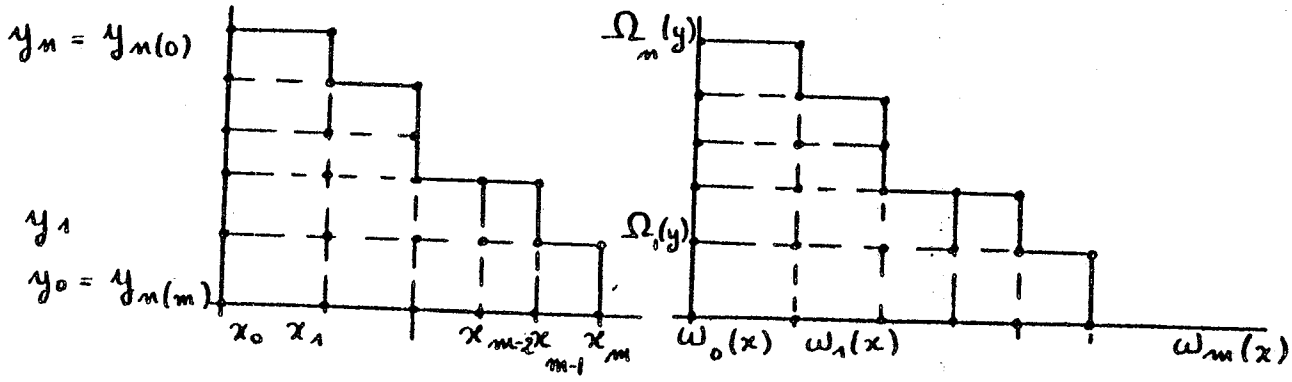
peut être réordonné en :



Si $\mathcal{Y}$, formé de points distincts, vérifie la règle du rectangle, on a :

$\underline{\exists\, m \in \mathbb{N}\ \exists\, n : [0,m] \longrightarrow \mathbb{N}}$ décroissante tels que :

$$\mathcal{Y} = \{ (x_i, y_j) \,/\, 0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n(i) \}$$



Alors, <u>on choisit le polynôme d'interpolation dans l'espace vectoriel engendré par</u> les $(\omega_k(x)\,\Omega_\ell(y))_{\substack{0 \leq k \leq m \\ 0 \leq \ell \leq n(k)}}$.

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{m} [x_0,..,x_k ; f(x,y)]_x\, \omega_k(x) + [x_0,..,x_m,x ; f(x,y)]_x\, \omega_{m+1}(x)$$

$$f(x,y) = \left.\sum_{k=0}^{m} \sum_{\ell=0}^{n(k)} [y_0,..,y_\ell ; [x_0,..,x_k ; f(x,y)]_x]_y\, \omega_k(x)\,\Omega_\ell(y)\right\} \text{polynôme}$$

$$\left.\begin{aligned} &+ \sum_{k=0}^{m} [y_0,..,y_{n(k)} ; [x_0,..,x_k ; f(x,y)]_x]_y\, \omega_k(x)\,\Omega_{n(k)+1}(y) \\ &+ [x_0,..,x_m,x ; f(x,y)]_x\, \omega_{m+1}(x) \end{aligned}\right\} \text{reste}$$

D'où une forme intégrale du reste comme au BII).

Conclusion

L'intérêt des polynômes $\omega_k(x)\,\Omega_\ell(y)$ tient à la propriété :

$\omega_k(x_i)\,\Omega_\ell(y_j) = 0$ dès que $k > i$ ou $\ell > j$

et $\omega_k(x_k)\,\Omega_\ell(y_\ell) \neq 0$ (polynômes dérivés pour des conditions d'Hermite), ce qui conduit à un système triangulaire.

Remarquons d'autre part que :

$$\{\omega_k(x)=0\} \cap \{\Omega_\ell(y)=0\} = \{(x_i, y_j) \,/\, i<k,\ j<\ell\}$$

et aussi :

$[x_0,..,x_k ; y_0,..,y_\ell ; f(x,y)]$ qui vaut $\dfrac{1}{(2i\pi)^2}\displaystyle\int\int_{\substack{\times x_0 \\ \times x_k}}^{\times y_0 \\ \times y_\ell} \dfrac{f(u,v)}{\omega_{k+1}(u)\,\Omega_{\ell+1}(v)}\,du\,dv$

s'écrit encore :

$$\sum_{P \in \{\omega_{k+1}(x)=0\} \cap \{\Omega_{\ell+1}(y)=0\}} \operatorname*{Res}_{\{P\}} \left[\frac{f(u,v)\,du \wedge dv}{\omega_{k+1}(u)\,.\,\Omega_{\ell+1}(v)} \right]$$

(avec les notations de Grothendieck : chapitre suivant)

D'où l'importance du rôle joué par les courbes algébriques :

$\{\omega_k(x)=0\}$ et $\{\Omega_\ell(y)=0\}$

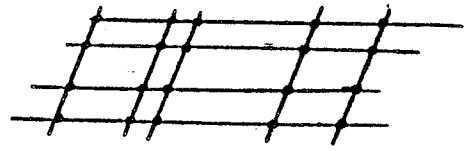
Nous avons traité ici (A) le cas particulier où $\{\omega_k(x)=0\}$ (resp. $\{\Omega_\ell(y)=0\}$) sont formées de droites parallèles à l'axe des y (resp. des x).

Existe-t-il des résultats analogues :

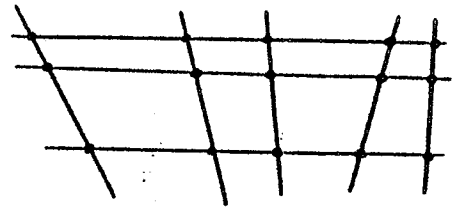
- polynômes d'Hermite,
- coefficients sous forme de différences divisées,
- relations de récurrence sur les différences divisées,

- forme intégrale (double) des coefficients et du reste, si les points d'interpolation sont les points d'intersection de deux ensembles de:

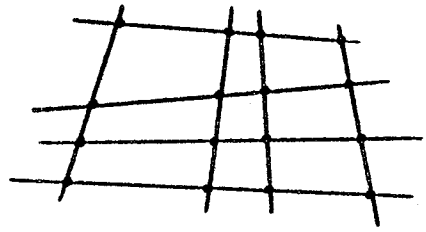
- droites parallèles,



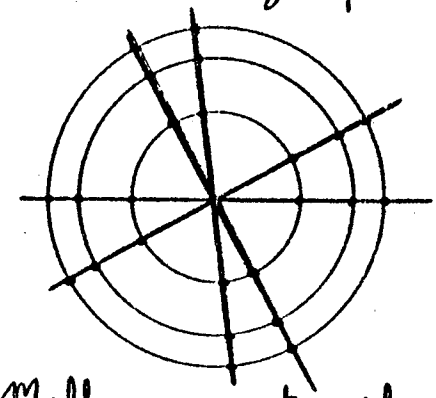
- droites, l'un des deux systèmes étant formé de droites parallèles,



- droites,



- courbes algébriques?



Dans ce cas par exemple (cercles de centre (0,0) et droites passant par l'origine), les valeurs de la fonction en deux points diamétralement opposés sont liées.

Malheureusement, plus les hypothèses sur les courbes sont larges, moins il subsiste de résultats.

Quant à l'interpolation rationnelle, elle consiste en la recherche d'une fraction P/Q qui coïncide avec f aux points d'interpolation, problème qui conduit à la recherche de deux polynômes P et Q dans des espaces vectoriels de dimensions convenables, tels que $Qf - P$ s'annule aux points donnés; cette fois encore, il s'agit de développer $Qf - P$ dans la base des $\omega_k(x)\,\Omega_\ell(y)$, la principale difficulté étant le développement de Qf.

References

[1] C. de BOOR (1981) Topics in multivariate approximation theory, in "Topics in numerical analysis" Lecture Notes in Mathematics (Springer-Verlag). 965

[2] P.J. DAVIS (1963) Interpolation and approximation. Blaisdell Publishing Company.

[3] B.A. FUKS (1965) Introduction to the theory of analytic functions of several complex variables, Translations of Mathematical Monographs.

[4] J.I. MAEZTU (1982) Divided differences associated with reversible systems in $\mathbb{R}^2$, J. SIAM. Num. Anal. vol 1 n°5 p 1032. 1040.

[5] G. MÜHLBACH (1979) A recurrence formula for generalized divided differences and some applications, Num. Math. 31 p 97-110

[6] D.D. STANCU (1964) The remainder of certain linear approximation formulas in two variables, J. SIAM Num. Anal. ser B vol 1 p 137-163

[7] J.L. WALSH (1960) Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain, Amer. Math. Soc. vol 20.

Quelques polynômes de Newton à deux variables calculés en REDUCE

Fichier qui permet d'effectuer les calculs :

Newton

```
operator d;
%difference divisee a deux variables batie sur les points du rectangle
 {a(i),...,a(j)} * {b(k),...,b(l)} ;

for all a,b,f,i,k Let d(a,b,f,i,i,k,k)=f(a(i),b(k));
for all a,b,f,i,j,k such that j>i  Let d(a,b,f,i,j,k,k)=
        (d(a,b,f,i+1,j,k,k)-d(a,b,f,i,j-1,k,k))/(a(j)-a(i));
for all a,b,f,i,j,k,l such that  l>k
        Let d(a,b,f,i,j,k,l)=
        (d(a,b,f,i,j,k+1,l)-d(a,b,f,i,j,k,l-1))/(b(l)-b(k));

operator herm;
%polynome d'Hermite a une variable associe aux points d'interpolation
 a(0),a(1),... ;

off exp;

for all z,a Let herm(z,a,0)=1;
for all z,a,i such that i>0 Let herm(z,a,i)=herm(z,a,i-1)*(z-a(i-1));

operator ligne;
for all x,a,b,f,m,n Let ligne(x,a,b,f,m,n)=(for i=0:m sum d(a,b,f,0,i,0,n)*
                        herm(x,a,i));

operator newt;
%polynome de Newton associe a la fonction f de deux variables
construit sur les points du rectangle {a(0),...,a(m)} * {b(0),...,b(n)};

for all x,y,a,b,f Let newt(x,y,a,b,f,0,0)=f(a(0),b(0));
for all x,y,a,b,f,m such that m>0 Let newt(x,y,a,b,f,m,0)=newt(x,y,a,b,f,m-1,(
                        +d(a,b,f,0,m,0,0)*herm(x,a,m);
for all x,y,a,b,f,m,n such that n>0 Let newt(x,y,a,b,f,m,n)=
                        newt(x,y,a,b,f,m,n-1)+ligne(x,a,b,f,m,n)*herm(y,b,n);

procedure tableaudiff(a,b,f,k);
% tableau des differences divisees a deux variables relatives
  au polynome de Newton de f associe aux points du rectangle
  {a(0),a(1),a(2)}*{b(0),...,b(k)} ;

begin
for j=0:k do write
{a,b,f,0,0,0,j)," "d(a,b,f,0,1,0,j)," "d(a,b,f,0,2,0,j);
end;

procedure coldiff(a,b,f,i,n);
% retourne la colonne i des differences divisees pour les points
  d'ordonnees b(0),...,b(n) ;

begin
for j=0:n do write d(a,b,f,0,i,0,j);
end;

end;
```

Abscisses et ordonnées sont choisies parmi les suites de :

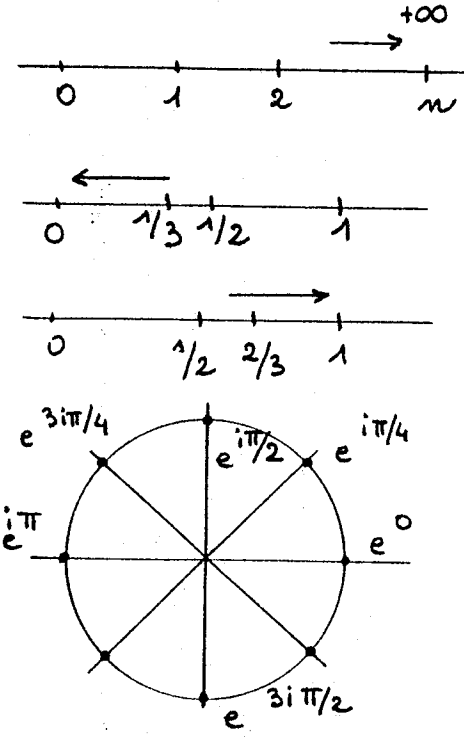
tableaux.registre

```
operator crois;
% suite de points tendant vers +infini ;
for all n such that n>=0 Let crois(n)=n;

operator conv;
% suite convergeant vers 0 ;
for all n such that n>=0 Let conv(n)=1/(n+1);

operator conv1;
% suite convergeant vers 1 ;
for all n such that n>=0 Let conv1(n)=1-1/(n+1);

operator cercle;
% points sur le cercle trigonometrique ;
Let cercle(0)=0;
Let cercle(1)=pi;
Let cercle(2)=pi/2;
Let cercle(3)=3*pi/2;
Let cercle(4)=pi/4;
Let cercle(5)=3*pi/4;
Let cercle(6)=5*pi/4;
Let cercle(7)=7*pi/4;
end;
```



regles

```
Let e**(i*pi/2)=i;
Let e**(3*i*pi/2)=-i;
Let e**(i*pi/4)=(1+i)/(2**(1/2));
end;
```

on doit charger ce segment, pour simplifier certaines expressions trigonométriques.

Exemple d'un polynôme à deux variables : $1+(x(x-1)+y)(x-2)$

```
operator pol;
% fonction test ;
for all x,y Let pol(x,y)=1+(x*(x-1) + y)*(x-2);
```

Les différences divisées d'ordre suffisamment grand sont toutes nulles, comme on le constate sur le tableau suivant (écrit à l'aide de la procédure coldiff), de même que le polynôme de Newton utilisant un nombre suffisant de points d'interpolation donne exactement le polynôme.

Tableau des différences divisées : $[x_0,..,x_i;y_0,...,y_j, pol(x,y)]$

y \ x	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	1	0	0	0
1	-2	1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0

$[0,1,2,3,4,5,6; 0,1,2,3,4; pol(x,y)]$

Les polynômes d'Hermite sont les polynômes que privilégie la construction de Newton : $\prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i)$

```
herm(x,crois,1);
x
```

```
herm(x,crois,2);
(x - 1)*x
```

l'option "off exp" permet de ne pas développer cette expression.

```
newt(x,y,crois,crois,pol,2,2);
(x - 2)*y + 1
```

```
res:=newt(x,y,crois,crois,pol,3,1);
res := (x - 1)*(x - 2)*x + (x - 2)*y + 1
```

```
on exp;
res;
 3      2
x  - 3*x  + x*y + 2*x - 2*y + 1
```

le polynôme de Newton utilisant les abscisses 0,1,2,3 et les ordonnées 0,1 est bien le polynôme initial ;

```
newt(x,y,crois,crois,pol,3,2);
(x - 1)*(x - 2)*x + (x - 2)*y + 1
```

de même, si l'on ajoute l'ordonnée 2.

```
herm(x,conv,1);
x - 1
```

```
res:=newt(x,y,conv,conv,pol,3,1);
                3      2
res := x - 3*x  + x*y + 2*x - 2*y + 1
```

l'option "on exp" écrit l'expression sous forme développée

c'est aussi le polynôme de Newton qui utilise les abscisses 1, 1/2, 1/3, 1/4 et les ordonnées 1, 1/2.

Exemple de la fonction symétrique : $expo(x,y) = e^{x+y}$

```
operator expo;
% fonction exponentielle ;
for all x,y Let expo(x,y)=e**(x+y);
% le procede tensoriel lui est bien adapte, car elle est du type
  f(x)*g(y) ;
```

Tableau des différences divisées

$y \backslash x$	0	1	2	3	4
0	1	$e-1$	$\frac{(e-1)^2}{2}$	$\frac{(e-1)^3}{6}$	$\frac{(e-1)^4}{24}$
1	$e-1$	$(e-1)^2$	$\frac{(e-1)^3}{2}$	$\frac{(e-1)^4}{6}$	$\frac{(e-1)^5}{24}$
2	$\frac{(e-1)^2}{2}$	$\frac{(e-1)^3}{2}$	$\frac{(e-1)^4}{4}$	$\frac{(e-1)^5}{12}$	$\frac{(e-1)^6}{48}$
3	$\frac{(e-1)^3}{6}$	$\frac{(e-1)^4}{6}$	$\frac{(e-1)^5}{12}$	$\frac{(e-1)^6}{36}$	$\frac{(e-1)^7}{144}$
4	$\frac{(e-1)^4}{24}$	$\frac{(e-1)^5}{24}$	$\frac{(e-1)^6}{48}$	$\frac{(e-1)^7}{144}$	$\frac{(e-1)^8}{576}$

Abscisses et ordonnées étant prises parmi la même suite 0, 1, 2, ..., ce tableau est symétrique, ainsi que le polynôme d'interpolation de Newton pour le même nombre d'abscisses que d'ordonnées :

```
newt(x,/,crois,crois,expo,2,2);
```

$$(((e^4 - 4*e^3 + 6*e^2 - 4*e + 1)*(x - 1)*x + 2*(e^3 - 3*e^2 + 3*e - 1)*x + 2*(e^2 - 2*e + 1))*(y - 1)*y + 2*((e^3 - 3*e^2 + 3*e - 1)*(x - 1)*x + 2*(e^2 - 2*e + 1)*x + 2*(e - 1))*y + 2*(e^2 - 2*e + 1)*(x - 1)*x + 4*(e - 1)*x + 4)/4$$

(ce polynôme utilise les abscisses 0, 1, 2 ordonnées 0, 1, 2)

C'est en fait le produit du polynôme de Newton de e^x par celui de e^y.

```
newt(x,y,crois,crois,expop,2,2);
```

$$(e^4*x^2*y^2 - e^4*x^2*y - e^4*x*y^2 + e^4*x*y - 4*e^3*x^2*y^2 + 6*e^3*x^2*y + 6*e^3*x*y$$
$$- 8*e^3*x*y + 6*e^2*x^2*y^2 - 12*e^2*x^2*y + 2*e^2*x^2 - 12*e^2*x*y^2 + 22*e^2*x*y$$
$$- 2*e^2*x + 2*e^2*y^2 - 2*e^2*y - 4*e*x^2*y^2 + 10*e*x^2*y - 4*e*x^2 + 10*e*x*y^2$$
$$- 24*e*x*y + 8*e*x - 4*e*y^2 + 8*e*y + x^2*y^2 - 3*x^2*y + 2*x^2 - 3*x*y^2 + 9*$$
$$x*y - 6*x + 2*y^2 - 6*y + 4)/4$$

c'est le même polynôme que le précédent, mais écrit sous forme développée. (au nombre e n'est pas affectée de valeur)

$\boxed{\text{Exemple de la fonction} \quad \text{expop}(xy) = e^{xy}}$

```
operator expop;
% fonction symetrique par rapport a x et y ;
for all x,y Let expop(x,y)=e**(x*y);
```

Tableau des différences divisées utilisant les $\begin{cases} \text{abscisses} & 0, 1, 2, \ldots \text{de crois} \\ \text{ordonnées} & 1, 1/2, 1/3 \ldots \text{de conv} \end{cases}$

$y \backslash x$	0	1	2
1	1	$e-1$	$\frac{e^2-2e+1}{2}$
1/2	0	$2(-\sqrt{e}+e)$	$2\sqrt{e}+e^2-3e$
1/3	0	$3(3e^{1/3}-4\sqrt{e}+e)$	$\frac{3}{2}(3e^{2/3}-6e^{1/3}+8\sqrt{e}+e^2-6e)$

REDUCE calcule les expressions littéralement en fonction de e.

```
newt(x,y,croix,conv,expoim,2,2);
```

```
                (2/3)  2  2          (2/3)  2          (2/3)  2          (2/3)  2
(13*e     *x *y  - 27*e     *x *y + 9*e     *x  - 13*e     *x*y  + 27*
 
  (2/3)          (2/3)          (1/3)  2  2          (1/3)  2
e     *x*y - 9*e     *x  - 36*e     *x *y  + 54*e     *x *y  - 13*
 
  (1/3)  2       (1/3)  2       (1/3)                (1/3)                2
e     *x  + 72*e     *x*y  - 108*e     *x*y + 36*e     *x + 48*sqrt(e)*x *
 
 2                2                2                2
y  - 54*sqrt(e)*x *y + 16*sqrt(e)*x  - 96*sqrt(e)*x*y  + 128*sqrt(e)*x*y
 
                 2  2  2          2  2          2  2          2  2          2
 - 32*sqrt(e)*x + 6*e *x *y  - 5*e *x *y + e *x  - 6*e *x*y  + 5*e *x*y -
 
 2          2  2          2          2
e *x - 36*e*x *y  + 42*e*x *y - 10*e*x  + 48*e*x*y  - 52*e*x*y + 12*e*x +
 
   2
2*x  - 6*x + 4)/4
```

polynôme d'interpolation de Newton calculé à l'aide des différences divisées précédentes : il est écrit ici sous forme développée.

Exemple de la fonction expoim(x,y) = e^{x+iy}

```
operator expoim;
% fonction a valeurs complexes;
for all x,y Let expoim(x,y)=e**(x+i*y);
```

Le tableau des différences divisées utilisant les abscisses 0, 1, 2 et les ordonnées 0, π, π/2 permet de calculer le polynôme de Newton correspondant, écrit sous forme développée ou non.

```
coldiff(croix,cercle,expoim,0,4);
```

retourne les différences divisées :
$[0;0;e^{x+iy}]$, $[0;0,\pi;e^{x+iy}]$, $[0;0,\pi,\frac{\pi}{2};e^{x+iy}]$, $[0;0,\pi,\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2};e^{x+iy}]$ et $[0;0,\pi,\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{4};e^{x+iy}]$

```
1

( - 2)/pi

                ((i*pi)/2)     2
( - 4*e                   )/pi

                ((3*i*pi)/2)          ((i*pi)/2)          3
(4*(e                      + 3*e                  + 2))/(3*pi )

                ((i*pi)/4)     ((3*i*pi)/2)          ((i*pi)/2)          4
(16*( - 16*e              + e                  + 15*e                  + 1))/(15*pi )
```

mais ces expressions se simplifient si on utilise "résoudre" :

In "regles":

```
coldiff(crois,cercle,expoim,0,4);
```

même liste que la précédente mais simplifiée.

1

$(-2)/pi$

$(-4*i)/pi^2$

$(3*(i+1))/(3*pi^3)$

$(32*(7*sqrt(2)*i+5*sqrt(2)-3*i-3))/(15*sqrt(2)*pi^4)$

y \ x	0	1	2
0	1	$e-1$	$(e^2-2*e+1)/2$
π	$(-2)/pi$	$(-2*(e-1))/pi$	$(-(e^2-2*e+1))/pi$
$\pi/2$	$(-4*i)/pi^2$	$(-4*(e-1)*i)/pi^2$	$(-2*(e^2-2*e+1)*i)/pi^2$

qui engendre le polynôme :

```
newt(x,y,crois,cercle,expoim,2,2);
```

$(((e^2-2*e+1)*(x-1)*x+2*(e-1)*x+2)*(4*(pi-y)*i*y+(pi-2*y)*pi))/(2*pi^2)$

```
on exp;
newt(x,y,crois,cercle,expoim,1,1);
```

forme développée

$(e*pi*x-2*e*x*y-pi*x+pi+2*x*y-2*y)/pi$

```
newt(x,y,crois,cercle,expoim,2,2);
```

forme développée

$(4*e^2*i*pi*x^2*y-4*e^2*i*pi*x*y-4*e^2*i*x^2*y^2+4*e^2*i*x*y^2+e^2*pi^2*x^2-e^2*pi^2*x-2*e^2*pi*x^2*y+2*e^2*pi*x*y-8*e*i*pi*x^2*y+16*e*i*pi*x*y+8*e*i*x^2*y^2-16*e*i*x*y^2-2*e*pi^2*x^2+4*e*pi^2*x+4*e*pi*x^2*y-8*e*pi*x*y+4*i*pi*x^2*y-12*i*pi*x*y+3*i*pi*y-4*i*x^2*y^2+12*i*x*y^2-8*i*y^2+pi^2*x^2-3*pi^2*x+2*pi^2-2*pi*x^2*y+6*pi*x*y-4*pi*y)/(2*pi^2)$

5. Formules d'Hermite et différences divisées généralisées

I Introduction

1) Motivation: forme intégrale de l'erreur dans l'interpolation polynômiale.

Dans le cadre de l'interpolation polynômiale, puis de l'interpolation rationnelle, l'étude théorique de la convergence repose souvent sur une forme intégrale du reste, établie à partir de celle des différences divisées de la fonction à interpoler; il est fondamental en analyse numérique de trouver une évaluation correcte du reste dans les formules d'approximation.

Classiquement, pour une fonction de la variable réelle $f \in \mathcal{C}[a,b]$, telle qu'il existe $f^{(n+1)}$ sur (a,b), et pour des points d'interpolation x_i : $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, et $x \in [a,b]$, on utilise :

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)$$

où $\min(x_0, \dots, x_n, x) < t < \max(x_0, \dots, x_n, x)$

(Davis - Stancu)

Plus en rapport avec les fonctions splines, se situe **la formule d'Hermite - Gennochi** :

$$f[x_0, \dots, x_n] = \int_{S^n} f^{(n)}(t_0 x_0 + \dots + t_n x_n)\, dt_1 \dots dt_n$$

$x_i \in \mathbb{R}$

où $f^{(n)}$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$

et S^n simplexe $= \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,/\, \sum_{i=0}^{n} t_j = 1,\ t_j \geq 0,\ j = 0,1,\dots,n \right\}$

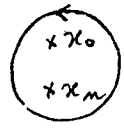
Une formule analogue permet de définir des différences divisées pour une fonction de plusieurs variables réelles

(Hakopian - Micchelli), ainsi que des approximants de type Padé à plusieurs variables réelles (Sablonnière)

• Pour les fonctions holomorphes d'une seule variable complexe, la formule intégrale de Cauchy conduit immédiatement à la **formule d'Hermite** :

$$f[x_0, .., x_m] = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{f(t)}{\prod_{i=0}^{m} (t-x_i)} dt$$

f holomorphe dans $\mathbb{D}$.



C contour fermé simple entourant les x_i, orienté positivement, contenu dans $\mathbb{D}$

qui, à l'ordre 0, n'est autre que :

$$f(x_0) = \operatorname{Res}_{\{x_0\}} \left[\frac{f(t)}{t-x_0} \right]$$ (voir II.)

Le procédé tensoriel nous a permis de généraliser cette formule à certaines configurations de points d'interpolation dans $\mathbb{C}^k$, $k \geq 2$: les configurations "hyper-rectangulaires".

e) Polynômes d'Hermite.

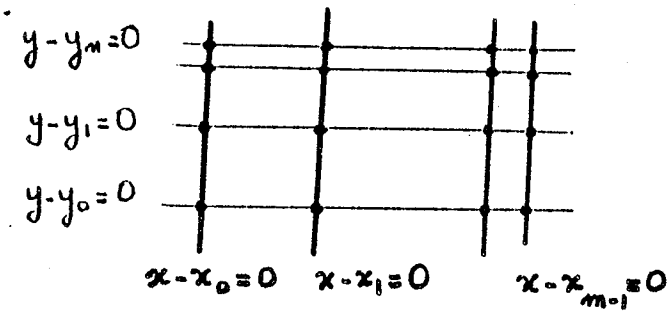
L'étude de ces cas particuliers semble montrer que certains polynômes jouent un rôle privilégié, en l'occurence,

- dans le cas d'une variable, les $\omega_m(x) = \prod_{i=0}^{m-1} (x-x_i)$, qui admettent exactement pour zéros les points $x_0, x_1, .., x_{m-1}$.
- dans le cas de deux variables, les $\omega_m(x)$ et $\Omega_n(y)$, où $\Omega_n(y) = \prod_{j=0}^{n-1} (y-y_j)$ qui vérifient :

$$\{\omega_m(x)=0\} \wedge \{\Omega_n(y)=0\} \Leftrightarrow (x,y) \in \left\{ (x_i, y_j) / \begin{matrix} 0 \leq i \leq m-1 \\ 0 \leq j \leq n-1 \end{matrix} \right\}$$

dans $\mathbb{C}^2$, chacune de ces courbes est la réunion de droites parallèles à

ensemble des points d'interpolation.



- Plus généralement, Chudnovsky affirme que l'interpolation dans $\mathbb{C}^n$ suivant un ensemble fini de points S privilégiera des polynômes $P_1, P_2, .., P_n$ tels que :

S soit l'intersection des n courbes algébriques : $(P_i = 0)$ $i=1,$ (n pour des raisons de codimension).

$S = (P_1 = 0) \cap (P_2 = 0) \cap \dots \cap (P_n = 0)$.

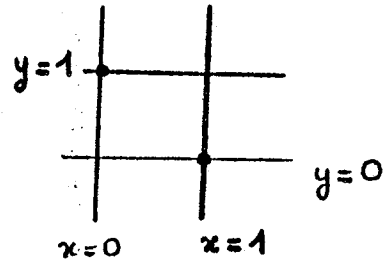
Mais, dès que $n > 1$, des difficultés nouvelles apparaissent par exemple,

pour $n=2$ et deux courbes qui n'ont pas de composante commune : $|(P_1=0) \cap (P_2=0)| \leq d^\circ P_1 \times d^\circ P_2$

(égalité dans $\mathbb{P}^2$, mais les points d'intersection ne sont pas forcément tous dans $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{cases} P_1(x,y) = xy \\ P_2(x,y) = (x-1)(y-1) \end{cases}$$

il y a seulement deux points d'intersection dans $\mathbb{C}^2$: $(0,1)$ et $(1,0)$



Même si $|S| = m \times n$, il n'existe pas toujours de courbes de degrés m et n respectivement, qui se coupent exactement, avec les bonnes multiplicités, aux points de S.

Cependant, par une démonstration existentielle, on établit que : (J.P. Serre)

Etant donné un ensemble fini S de $\mathbb{C}^n$, il existe n hypersurfaces de degré $\leq |S|$: $P_1=0, \dots, P_n=0$, $P_i \in \mathbb{C}[x_1,..,x_n]$ telle que S soit l'intersection (ensembliste) de ces hypersurfaces.

L'expression du reste dans l'interpolation d'Hermite, en un point x de $\mathbb{C}^n$ fait intervenir des polynômes formés à partir des $P_1^{i_1} \dots P_n^{i_n}$, les P_i correspondants à $S \cup \{x\}$, où S est l'ensemble des points d'interpolation.

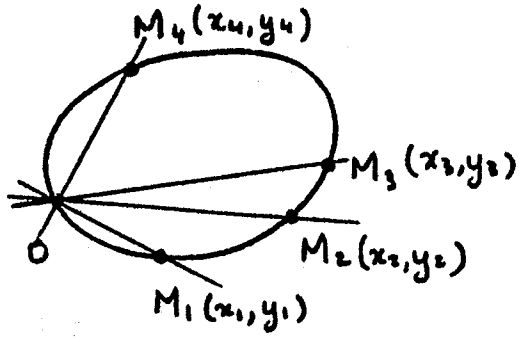
Nous tentons ci-dessous de donner un procédé constructif des P_i, tout d'abord dans le cas où $n=2$, puis par récurrence, de $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{C}^{n+1}$. La méthode exclut certains cas particuliers.

Problème 1 : Etant donné un ensemble S de N points distincts de $\mathbb{C}^2$, trouver deux courbes algébriques de degré $\leq N$, dont l'intersection soit S ; ie, deux polynômes P et Q de degré $\leq N$ tels que :
$P^{-1}(0) \cap Q^{-1}(0) = S$.

Remarque préliminaire :

Par un changement d'origine dans $\mathbb{C}^2$, on peut supposer que l'un des points d'interpolation est l'origine $(0,0)$.

Soit donc $S = \{0, M_1, \dots, M_{N-1}\}$. $N \geq 2$ ($S=\{0\}$, $P=x$, $Q=y$)



Notons (P) (resp. (Q)) la courbe d'équation $P(x,y)=0$ (resp. $Q(x,y)=0$).

Soit $q = d^\circ Q \leq N$ à priori

M_i de coordonnées (x_i, y_i).

Choisissons pour P le produit des équations des droites OM_i, $i=1,\dots,N-1$. (défini à un facteur multiplicatif près)

$d^\circ P = N-1 \leq N$ et l'origine est un point de (P) de multiplicité $N-1$.

Si (P) et (Q) ont une intersection de dim 0 (ce qui équivaut à : (Q) ne contient aucune des droites OM_i), on a :

Σ = somme des multiplicités de $(P)\cap(Q)$ $\leqslant d^\circ P \times d^\circ Q = (N-1)q$.

D'autre part, si M est un point de (P) de multiplicité m_1 et un point de (Q) de multiplicité m_2, sa multiplicité sur $(P)\cap(Q)$ est $\geqslant m_1 m_2$ (égalité si les deux courbes se coupent transversalement en M).

Choisissons donc <u>Q sous la forme d'une somme de polynômes homogènes de degré q et q-1</u>, de sorte que l'origine soit un point de (Q) de multiplicité $\geqslant q-1 \geqslant 1$; alors sa multiplicité sur $(P)\cap(Q)$ sera $\geqslant (N-1)(q-1)$.

Si on impose de plus que (Q) passe par tous les points M_i, $i=1,..,N-1$, ces $N-1$ points seront de multiplicité $\geqslant 1$ sur $(P)\cap(Q)$.

D'où
$$\Sigma \geqslant \underbrace{(N-1)(q-1)}_{\substack{\text{multiplicité}\\ \text{de } O}} + \underbrace{1+\cdots+1}_{\substack{N-1 \text{ fois}\\ \text{multiplicités}\\ \text{des } M_i}} = (N-1)q \geqslant \Sigma$$

et ainsi, $(P)\cap(Q)$ ne comportera pas d'autres points que ceux de S (sous réserve que cette intersection soit finie).

<u>Discussion</u>: Soit V l'espace vectoriel des polynômes du type:

$\varphi_q + \varphi_{q-1}$ / φ_q homogènes de d° q
φ_{q-1} $q-1$.

$\dim V = (q+1) + q = 2q+1$.

On a à résoudre dans V le système linéaire homogène des $N-1$ équations : $\varphi_q(M_i) + \varphi_{q-1}(M_i) = 0$, $i=1,..,N-1$, qui admet des solutions non triviales dès que : $\underline{2q+1 > N-1}$

Par exemple, $q = \left[\frac{N}{2}\right]$ est le plus petit entier possible <u>quand $N \geqslant 4$</u> (car $q-1 \geqslant 1$)

Etudions maintenant l'intersection de (Q) avec les droites OM_i, dont les points sont de la forme $M(tx_i, ty_i)$, $t \in \mathbb{C}$.

$$\varphi_q(M) + \varphi_{q-1}(M) = 0 \iff t^{q-1}\left(t\,\varphi_q(M_i) + \varphi_{q-1}(M_i)\right) = 0$$
$$\iff \underline{t^{q-1}(t-1)\,\varphi_q(M_i) = 0}$$

$t = 0$ est solution ($\to$ origine)

$t = 1$ est solution ($\to M_i$)

Soit $\varphi_q(M_i) \neq 0$, et il n'y a pas d'autre point dans $(Q) \cap (OM_i)$. (en particulier, aucun M_j pour $j \neq i$)

Soit $\varphi_q(M_i) = 0$, et tous les points de la droite OM_i sont dans (Q) : ce qu'on exclut à priori. (R_q : $\varphi_q(M_i)=0 \iff \varphi_{q-1}(M_i)=0$

On est donc amené à supposer que **les droites OM_i sont distinctes** ; on cherche ensuite un polynôme $\varphi_{[\frac{N}{2}]} + \varphi_{[\frac{N}{2}]-1}$ qui s'annule aux points M_i, sans que $\varphi_{[\frac{N}{2}]-1}$ s'y annule.

(on peut tenter de prendre pour $\varphi_{[\frac{N}{2}]-1}$ le produit d'équations de droites passant par l'origine, mais pas par les M_i).

Si toutefois, ce problème n'admet pas de solution, on adopte la démarche suivante :

Recherche de Q sous la forme $\varphi_N + \varphi_{N-1}$

$$\begin{cases} \varphi_N(x,y) = a_0 x^N + a_1 x^{N-1} y + \dots + a_N y^N \\ \varphi_{N-1}(x,y) = b_0 x^{N-1} + b_1 x^{N-2} y + \dots + b_{N-1} y^{N-1} \end{cases}$$

Le système $(\varphi_N + \varphi_{N-1})(M_i) = 0$, $i = 1, \dots, N-1$ s'écrit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^N & x_1^{N-1} y_1 & \dots & y_1^N \\ x_2^N & x_2^{N-1} y_2 & \dots & y_2^N \\ \vdots & & & \\ x_{N-1}^N & x_{N-1}^{N-1} y_{N-1} & \dots & y_{N-1}^N \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi_{N-1}(M_1) \\ -\varphi_{N-1}(M_2) \\ \vdots \\ -\varphi_{N-1}(M_{N-1}) \end{pmatrix}$$

donnée par les points M_i.

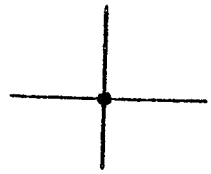
associée (bases canoniques) à une application linéaire $f : \mathbb{C}^{N+1} \to \mathbb{C}^{N-1}$ de rang r : $1 \leq r \leq N-1$

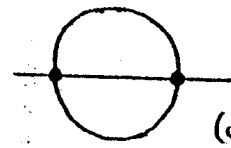
* si $r = N-1$, pour un second membre quelconque, le système admet une solution : on prend donc pour φ_{N-1} le produit de $N-1$ droites ne passant pas par les M_i, mais par l'origine.

* si $r < N-1$, pour que le système admette une solution, il faut et il suffit que les $N-1-r$ bordants d'un déterminant caractéristique formés sur $\begin{pmatrix} -\varphi_{N-1}(M_1) \\ \vdots \\ -\varphi_{N-1}(M_{N-1}) \end{pmatrix}$ soient nuls, ce qui conduit à un système linéaire de $N-1-r$ équations homogènes en les N coefficients de φ_{N-1} : l'espace vectoriel des solutions est de dimension $\geqslant N-(N-1-r) \geqslant 1$.

Soit, dans cet espace vectoriel, il existe une solution φ_{N-1} qui ne s'annule en aucun des M_i, et on cherche ensuite φ_N (qui existe).

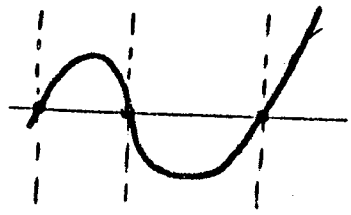
Soit, chacune des solutions s'annule en au moins un des M_i - ce qui ne dépend que de la configuration des M_i - et dans ce cas particulier, la méthode ne donne pas de résultat.

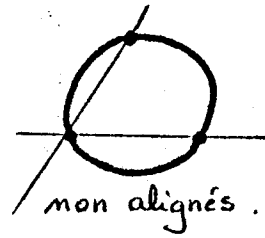
$N=1$ 

$N=2$ 

(Q) conique
φ_2

$N=3$

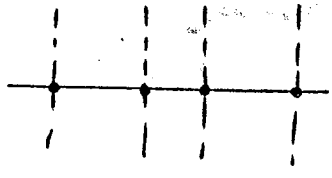
alignés 

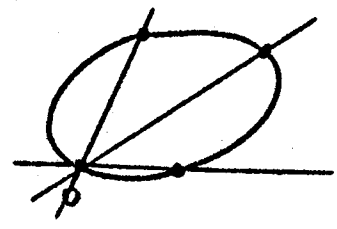


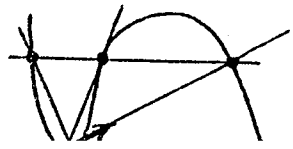
(Q) conique
φ_2

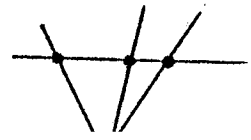
non alignés.

$N=4$ $\left[\frac{N}{2}\right]=2$ (Q) conique $\varphi_2+\varphi_1$

sauf : 





plus simple 

Problème 2

Idées pour le **panage de $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{C}^{n+1}$**.

Hypothèse de récurrence :

On suppose que **pour un nombre fini quelconque N de points de $\mathbb{C}^n$, on connaisse n polynômes $P_1, \dots, P_n$ de $d^\circ \leq N$ dans $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ tels que** $\bigcap_{i=1}^{n} P_i^{-1}(0) = \{\text{ces N points}\}$

(avec de plus, Σ multiplicités des points de l'intersection $= d_1 \dots d_n$)

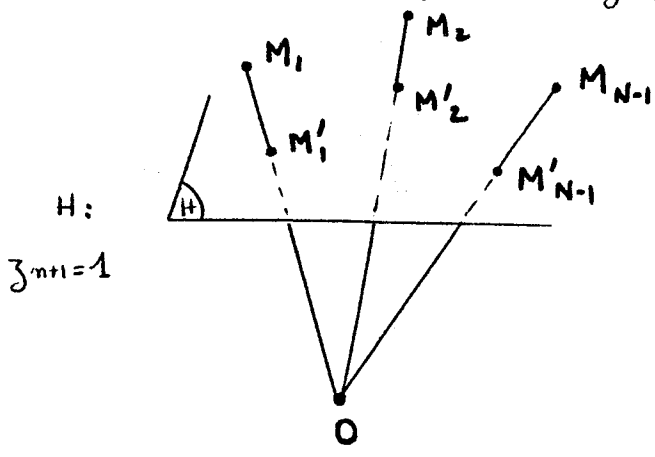
où $d_i = d^\circ P_i$

Soient N points de $\mathbb{C}^{n+1}$, dont l'un d'eux est O :

$S = \{ 0, M_1, \dots, M_{N-1} \}$

En faisant éventuellement subir au repère une "rotation" de centre O, au cas où certaines des droites OM_i seraient parallèles à l'hyperplan $z_{n+1} = 0$, on peut supposer que les $(n+1)^{\text{ème}}$ coordonnées de tous les points M_i sont non nulles.

$M_i (z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_{n+1}})$



Soit H l'hyperplan $z_{n+1} = 1$.

Chaque droite OM_i coupe H en un seul point :

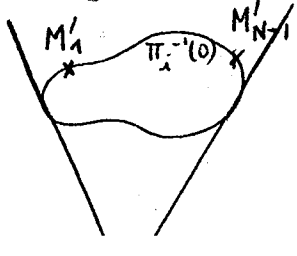
$M'_i \left(\frac{z_{i_1}}{z_{i_{n+1}}}, \frac{z_{i_2}}{z_{i_{n+1}}}, \dots, \frac{z_{i_n}}{z_{i_{n+1}}} \right)$

Un point de H est déterminé par ses coordonnées $z_1, \dots, z_n$.

H étant de dimension n, il existe n polynômes $\pi_1, \dots, \pi_n$ ($d^\circ \pi_i = d_i \leq N-1$) tels que $\pi_i \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$

$\bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(0) = \{ M'_1, \dots, M'_{N-1} \}$

Soit alors C_i le cône de $\mathbb{C}^{n+1}$ de sommet O, de directrice $\pi_i^{-1}(0)$ dans H.



$M(z_1, \dots, z_{n+1}) \in C_i$

$\iff M = 0$ ou $\exists t \in \mathbb{C}$ $\pi_i(tz_1, \dots, tz_n) = 0$

$\iff M = 0$ ou $\left(z_{n+1} \neq 0 \text{ et } \pi_i\left(\frac{z_1}{z_{n+1}}, \dots, \frac{z_n}{z_{n+1}} \right) = 0 \right.$

Soit P_i le polynôme de $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, z_{n+1}]$ défini par :

$$P_i(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) = z_{n+1}^{d_i} \, \Pi_i\left(\frac{z_1}{z_{n+1}}, \dots, \frac{z_n}{z_{n+1}}\right) :$$

il est homogène de d° $d_i \leq N-1$.

$\bigcap_{i=1}^{n} P_i^{-1}(0)$ contient les droites OM_j $(j = 1, \dots, N-1)$, mais peut éventuellement contenir d'autres droites dans le plan $(z_{n+1} = 0)$

Cherchons à priori pour P_{n+1} un polynôme de d° $q \leq N$, de la forme : $\varphi_q + \varphi_{q-1}$

(φ_q, φ_{q-1} homogènes de d° q et $q-1$)

Comme le nombre de coefficients d'un polynôme homogène de d° p en m indéterminées est C^p_{m+p-1}, P_{n+1} dépend de $C^q_{n+q} + C^{q-1}_{n+q-1}$ coefficients.

Il doit vérifier les $N-1$ équations homogènes : $P_{n+1}(M_i) = 0$ $\quad i = 1, \dots, N-1$

En choisissant $C^q_{n+q} + C^{q-1}_{n+q-1} > N-1$,

(et pour cela, pour $q \geq 2$, il suffit que : $(n+q)+(n+q-1) > N-1$ c'est-à-dire : $q > \frac{N-2n}{2}$; plus n est grand, plus q peut être choisi petit)

le système admet des solutions non triviales.

Sauf dans certains cas particuliers, il en existe parmi celles-ci, qui vérifient : $P_{n+1}^{-1}(0) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i^{-1}(0)\right)$ finie pas de droite OM_j commune à tous les $P_i^{-1}(0)$ et exclusion des éventuelles droites de $(z_{n+1} = 0)$ apparues en plus dans $\bigcap_{i=1}^{n} P_i^{-1}(0)$.

Comme la multiplicité de 0 sur $P_i^{-1}(0)$ est d_i,

sa multiplicité sur $P_{n+1}^{-1}(0)$ est $\geq q-1$

celle de M_j sur $\bigcap_{i=1}^{n} P_i^{-1}(0)$ est $\geq$ celle de M'_j sur $\bigcap_{i=1}^{n} \Pi_i^{-1}(0)$

——— sur $P_{n+1}^{-1}(0)$ est ≥ 1 ,

$\sum_i$ multiplicités M_i sur $\bigcap P_i^{-1}(0)$ $\geq$ $\sum$ multiplicités M'_j sur

dans l'intersection, on a déjà des points dont la somme des multiplicités est $\geqslant \underbrace{d_1 \dots d_n (q-1)}_{\text{multiplicité de } 0} + \underbrace{d_1 \dots d_n}_{\text{des } M_j}$

$= d_1 \dots d_n q$

Si l'intersection $\bigcap_{i=1}^{m+1} P_i^{-1}(0)$ est finie, il ne peut donc y avoir d'autres points que les points de S dans cette intersection.

(et produit des degrés des P_i = somme des multiplicités).

II Formalisme de Grothendieck

Nous utilisons le même outil que pour les fonctions holomorphes d'une seule variable complexe, à savoir la **formule intégrale de Cauchy** à plusieurs variables :

$$f(z_1^\circ,\dots,z_n^\circ)=\frac{1}{(2i\pi)^n}\int\int\cdots\int_{|z_1-z_1^\circ|=r_1\ |z_2-z_2^\circ|=r_2\ \dots\ |z_n-z_n^\circ|=r_n}\frac{f(z_1,\dots,z_n)}{(z_1-z_1^\circ)\cdots(z_n-z_n^\circ)}\,dz_1\dots dz_n$$

orientés positivement pour f holomorphe dans $\overline{\prod_{i=1}^{n} D(z_i^\circ, r_i)}$.

Par analogie avec (*) (voir plus loin), on écrit cette formule :

$$f(z_1^\circ,\dots,z_n^\circ)=\operatorname{Res}_{\{f(z_1^\circ,\dots,z_n^\circ)\}}\left[\frac{f(z_1,\dots,z_n)\,dz_1\wedge\dots\wedge dz_n}{(z_1-z_1^\circ)\cdot(z_2-z_2^\circ)\cdot\dots\cdot(z_n-z_n^\circ)}\right]$$

avec la définition suivante (analytique) :

1) Résidus dans $\mathbb{C}^n$

Il s'agit d'une notion <u>locale</u> : résidu à l'origine associé à une n-forme méromorphe $\omega=\dfrac{f(z)\,dz_1\wedge\dots\wedge dz_n}{f_1(z)\cdots f_n(z)}$

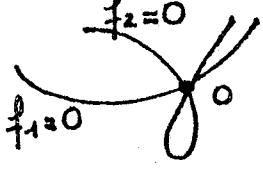
où $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$;

$f, f_1,\dots,f_n$ sont des fonctions holomorphes de z dans un voisinage $\overline{V}$ d'une boule V de $\mathbb{C}^n$ centrée à l'origine ;

$\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(0)$ est réduite à $\{0\}$ dans $\overline{V}$

$0=(0,\dots,0)$ dans $\mathbb{C}^n$.

(l'origine est un <u>zéro commun isolé des f_i</u>)



dans $\mathbb{C}^2$.

(le cas d'une branche commune passant par l'origine

Soit alors $C = \{ z \in U \ / \ |f_i(z)| = \varepsilon_i \ , \ i = 1, \dots, n \}$

avec $\varepsilon_i > 0$

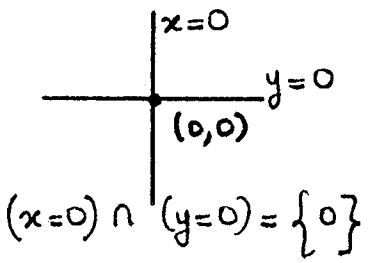
(on choisit U et les ε_i suffisamment petits pour que C soit bien défini)

C est orienté par :
$d(\arg f_1) \wedge \dots \wedge d(\arg f_n) \geq 0$; on définit :

$$\operatorname{Res}_{\{0\}} \omega = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_C \omega$$

et on le note $\operatorname{Res}_{\{0\}} \begin{bmatrix} f(z)\, dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \\ f_1(z) \cdot \dots \cdot f_n(z) \end{bmatrix}$

Exemple (*)



$(x=0) \cap (y=0) = \{0\}$

f holomorphe au voisinage de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$

$$\operatorname{Res}_{\{0\}} \begin{bmatrix} f(x,y)\, dx \wedge dy \\ x \cdot y \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\substack{|x|=\varepsilon_1 \\ |y|=\varepsilon_2}} \frac{f(x,y)\ dx \wedge dy}{xy}$$

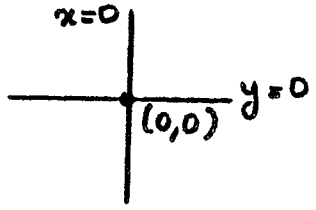
$d(\arg x) \wedge d(\arg y) \geq 0$:

on peut par exemple parcourir chacun des deux cercles $|x| = \varepsilon_1$, $|y| = \varepsilon_2$ dans le sens positif et on obtient :

$$\frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{|x|=\varepsilon_1} \int_{|y|=\varepsilon_2} \frac{f(x,y)}{xy}\, dx\, dy = f(0,0)$$

Rq : Par un changement de coordonnées, on se ramène toujours à des résidus à l'origine.

Exemple fondamental :



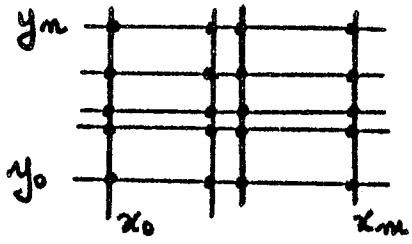
$$\operatorname{Res}_{\{0\}}\left[\frac{f(x,y)\,dx\wedge dy}{x^{k+1}\cdot y^{l+1}}\right] = \frac{1}{k!\,l!}\left(\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}\right)(0$$

$(k,l)\in\mathbb{N}^2$

Le théorème des résidus admet une généralisation à ce cadre ($\sum_P \operatorname{Res}_P \omega = \int_{\partial M} \eta\omega$. p 656 Griffiths)

Ainsi, les deux polynômes $\prod_{i=0}^{m}(x-x_i)$ et $\prod_{j=0}^{n}(y-y_j)$

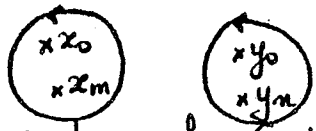
admettant pour seuls points d'intersection les (x_i,y_j) $\begin{matrix}0\le i\le m\\ 0\le j\le n\end{matrix}$



où ils se coupent transversalement, on a :

$$\sum_{(i,j)\in[0,m]\times[0,n]} \operatorname{Res}_{\{(x_i,y_j)\}}\left[\frac{f(x,y)\,dx\wedge dy}{\prod_{i=0}^{m}(x-x_i)\cdot\prod_{j=0}^{n}(y-y_j)}\right]$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2}\int\int \frac{f(x,y)}{\prod_{i=0}^{m}(x-x_i)\cdot\prod_{j=0}^{n}(y-y_j)}\,dx\,dy$$



contours fermés simples orientés positivement contenant les $\begin{matrix}x_i\\ y_j\end{matrix}$ à leur intérieur (en restant là où f est holomorphe)

qui est aussi la différence divisée (chap 4)

$[x_0,\dots,x_m;\ y_0,\dots,y_n;\ f(x,y)]$ formule d'Hermite

De la même manière, pour des configurations plus générales de points, nous aimerions exprimer l'erreur dans

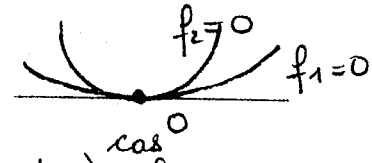
l'interpolation polynômiale à l'aide de différences divisées généralisées, auxquelles on appliquerait ensuite le théorème des résidus pour en obtenir une forme intégrale (sur une surface contenant tous les points à son intérieur)

2) Propriétés.

2.1 Calcul de résidus.

* **Cas non dégénéré :**

avec les hypothèses précédentes, on suppose que de plus :
$\mathrm{Jac}_{\{0\}}(f_1,\dots,f_n) \neq 0$ où ce jacobien est le déterminant de $\left[\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(z_1,\dots,z_n)}\right](0)$.



cas exclu

(On dit que les courbes se coupent transversalement en 0)

Alors, $\mathrm{Res}_{\{0\}}\,\omega = \dfrac{f(0)}{\mathrm{Jac}_{\{0\}}(f_1,\dots,f_n)}$

(c'est la généralisation de :
$\frac{1}{2i\pi}\int_{|x|=\varepsilon} \frac{f(x)}{f_1(x)}\,dx = \frac{f(0)}{f_1'(0)}$ quand $f_1(0)=0$, $f_1'(0)\neq 0$)

La démonstration est fondée sur le théorème de l'inverse :
$F : z=(z_1,\dots,z_n) \longrightarrow (f_1(z),\dots,f_n(z))$ est biholomorphe au $v(0)$ dans $\mathbb{C}^n$.

* $\mathrm{Res}_{\{0\}}\,\omega$ est **linéaire en f, alterné en les f_i**, à cause de la façon dont on oriente C.

Quand f appartient à **l'idéal engendré par les f_i**, parmi les fonctions holomorphes au voisinage de l'origine, $\mathrm{Res}_{\{0\}}\,\omega = 0$.

* Pour calculer un résidu dans le cas général, on se ramène à l'exemple fondamental, et on utilise la <u>règle de transformation</u> suivante :

Etant données $F=(f_1,\dots,f_n)$, $G=(g_1,\dots,g_n)$: $\bar{U}\longrightarrow\mathbb{C}^n$ holomorphes tq : $\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(0) = \{0\} = \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}(0)$

et tq l'idéal $(g_1,\dots,g_n)=I(G)$ engendré par les g_i soit contenu dans l'idéal $(f_1,\dots,f_n)=I(F)$ engendré par les f_i (dans l'anneau des fonctions holomorphes sur $\bar{U}$)

ce qui s'écrit encore :

$\exists$ $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ fonctions holomorphes : $\bar{U}\longrightarrow\mathbb{C}$ telles que :

$\forall i\in[1,n]$ $\quad g_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j$

alors, pour toute fonction h : $\bar{U}\longrightarrow\mathbb{C}$ holomorphe

$$\operatorname{Res}_{\{0\}}\left[\frac{h(z)\,dz_1\wedge\dots\wedge dz_n}{f_1(z)\cdot\dots\cdot f_n(z)}\right] = \operatorname{Res}_{\{0\}}\left[\frac{h(z)\det A(z)\,dz_1\wedge\dots\wedge dz_n}{g_1(z)\cdot\dots\cdot g_n(z)}\right]$$

($A(z)$ est la matrice des a_{ij})

En pratique, on cherche à remplacer les f_i par des g_i de la forme $z_i^{k_i}$ (k_i entier), pour lesquels on sait calculer les résidus.

On dispose en effet du <u>théorème d'existence</u> :

$\forall i\in[1,n]$ $\exists k_i>0$ $\quad z_i^{k_i}\in(f_1,\dots,f_n)$ idéal engendré par les f_i.

Par exemple, lorsque une fonction f holomorphe d'une seule variable admet l'origine pour zéro isolé, il existe

un entier $k>0$ tel que : $f(x) = x^k\, b(x)$ avec b holomorphe au voisinage de 0 et $b(0) \neq 0$.
Alors $x^k = \dfrac{f(x)}{b(x)}$ et $\dfrac{1}{b(x)}$ est holomorphe au $\mathcal{V}(0)$.

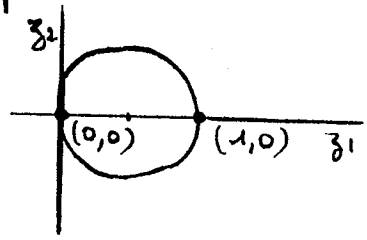
$$\operatorname{Res}_{\{0\}}\left[\begin{matrix} h(x)dx \\ f(x) \end{matrix}\right] = \operatorname{Res}_{\{0\}}\left[\begin{matrix} h(x) \times \frac{1}{b(x)} \quad dx \\ x^k \end{matrix}\right].$$

* **Lorsque f_1 et f_2 sont des polynômes en z_1, z_2, nous donnons un procédé constructif de k_1 et k_2 et de la matrice A holomorphe correspondante.**

Commençons par un exemple :

Exemple 1 : $\begin{cases} f_1(z_1,z_2) = z_1^2 - z_1 + z_2^2 \\ f_2(z_1,z_2) = z_2^3 \end{cases}$

qui admettent comme seuls points d'intersection $(0,0)$ et $(1,0)$.



l'origine est un zéro commun isolé de f_1 et f_2.

Recherche de k_1.

Considérons f_1 et f_2 comme polynômes en z_2 à coefficients dans $\mathbb{C}[z_1]$. On conserve le polynôme de degré le moins élevé en z_2, et on remplace l'autre par une combinaison à coefficients polynômiaux de f_1 et f_2 de degré plus petit :

$$\begin{cases} f_1(z_1,z_2) = z_2^2 + z_1^2 - z_1 \\ f_2(z_1,z_2) - z_2 f_1(z_1,z_2) = z_2(z_1 - z_1^2) \end{cases}$$ de degré 1 en z_2 au lieu de 3

Puis, on applique le même procédé à ces deux nouveaux polynômes :

$$\begin{cases} f_2(z_1,z_2) - z_2 f_1(z_1,z_2) = z_2(z_1 - z_1^2) \\ (z_1^2 - z_1) f_1(z_1,z_2) + z_2\left(f_2(z_1,z_2) - z_2 f_1(z_1,z_2)\right) = (z_1^2 - z_1)^2 \end{cases}$$

On s'arrête là, car le dernier polynôme est un polynôme

constant en z_2 :

et $(z_1^2 - z_1 - z_2^2) f_1(z_1,z_2) + z_2 f_2(z_1,z_2) = z_1^2 \underbrace{(1-z_1)^2}_{\text{holomorphe au } v(0) \text{ et non nulle}}$

d'où :

$$z_1^2 = \left(\frac{z_1}{1-z_1} - \frac{z_2^2}{(1-z_1)^2} \right) f_1(z_1,z_2) + \frac{z_2}{(1-z_1)^2} f_2(z_1,z_2)$$

les coefficients de f_1 et f_2 étant des fonctions holomorphes au $v(0)$.

De manière analogue, on a immédiatement : $z_2^3 = f_2(z_1,z_2)$ car f_2 est un polynôme de degré 0 en z_1.

Plus généralement, f_1 et f_2 étant deux polynômes de $\mathbb{C}[z_1,z_2]$ sans composante commune, admettant (0,0) comme zéro commun isolé, pour trouver k_1, a_{11} et a_{12}, on les considère comme éléments de l'anneau factoriel $(\mathbb{C}[z_1])[z_2]$; "leur pgcd" est un polynôme constant en z_2, soit $d_{k_1} z_1^{k_1} + d_{k_1+1} z_1^{k_1+1} + \cdots + d_{k_1+n_1} z_1^{k_1+n_1}$

$d_{k_1} \neq 0$ (k_1 est la valuation du pgcd)

il s'écrit : $A_{11}(z) f_1(z) + A_{12}(z) f_2(z)$

où $A_{11}, A_{12} \in \mathbb{C}[z_1,z_2]$

Comme $d_{k_1} + d_{k_1+1} z_1 + \cdots + d_{k_1+n_1} z_1^{n_1}$ est holomorphe au $v(0)$, non nulle en 0, elle admet une fonction inverse φ, qui est holomorphe au $v(0)$.

$$z_1^{k_1} = \underbrace{A_{11} \varphi(z)}_{a_{11}(z)} f_1(z) + \underbrace{A_{12} \varphi(z)}_{a_{12}(z)} f_2(z)$$

toutes deux holomorphes au $v(0)$.

L'algorithme suivant détermine k_1, A_{11}, A_{12}. La différence essentielle avec l'algorithme d'Euclide étendu, qui fournit une relation de Bezout pour les entiers ou les polynômes à coefficients dans un corps est qu'ici, l'anneau n'est pas euclidien, ce qui impose des multiplications intermédiaires.

f_1 et f_2 dans $(\mathbb{C}[z_1])[z_2]$

1) si $d^\circ f_1 > d^\circ f_2$, échanger f_1 et f_2
2) tant que $d^\circ f_1 > 0$, faire :
3) $f_2 := \alpha_n f_2 - \beta_m z_2^{n-m} f_1$

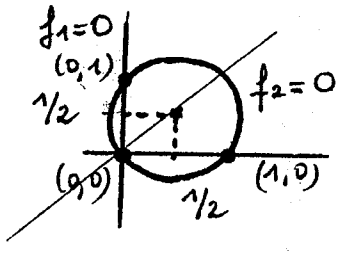
où α_n est le coefficient dominant de f_1, $n = d^\circ f_1$
β_m est le coefficient dominant de f_2, $m = d^\circ f_2$

(commentaire : on garde le polynôme de degré le plus petit, et on fait descendre le degré de l'autre par combinaison polynômiale des deux)

4) si $f_2 = 0$ retourner f_1
5) si $d^\circ f_2 = 0$ retourner f_2
6) si $d^\circ f_1 > d^\circ f_2$ échanger f_1 et f_2.

Exemple 2

$$\begin{cases} f_1(z_1,z_2) = z_1 z_2 \\ f_2(z_1,z_2) = z_1^2 + z_2^2 - z_1 - z_2 \end{cases}$$



$(f_1=0)$: réunion des 2 axes de coordonnées

$(f_2=0)$: "cercle" dans $\mathbb{C}^2$ de centre $(1/2, 1/2)$ de rayon $1/\sqrt{2}$, qui passe par $(1,0)$ et $(0,1)$

Ces deux courbes algébriques se coupent en 4 points : $(1,0)$, $(0,1)$ et $(0,0)$ qui est de "multiplicité" 2. (voir plus loin)

f_1 et f_2 étant symétriques en z_1 et z_2, $k_1 = k_2$ quand on se place au $v(0)$.

Recherche de k_1 :

$d^\circ_{z_2} f_1 = 1$, $d^\circ_{z_2} f_2 = 2$: on conserve f_1

$$\begin{cases} f_1 = z_1 z_2 \\ z_1 f_2 - z_2 f_1 = z_1^3 - z_1^2 - z_1 z_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1 = z_1 z_2 \\ (z_1 f_2 - z_2 f_1) + f_1 = z_1^3 - z_1^2 \end{cases}$$ polynôme constant en z_2.

d'où $z_1^2 (z_1 - 1) = (1 - z_2) f_1 + z_1 f_2$

$$\boxed{z_1^2 = \frac{z_2 - 1}{1 - z_1} f_1 - \frac{z_1}{1 - z_1} f_2}$$

et par symétrie :

$$\boxed{z_2^2 = \frac{z_1 - 1}{1 - z_2} f_1 - \frac{z_2}{1 - z_2} f_2}$$

Exemple 3 : $\begin{cases} f_1(z_1, z_2) = z_1^2 z_2^2 \\ f_2(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2 - z_1 - z_2 \end{cases}$

Même configuration que précédemment, mais multiplicités différentes. Etude au $v(0)$.

f_1 et f_2 ont le même degré en z_2 : on conserve celui qui a le moins de termes.

$$\begin{cases} {}_2 f_1 = z_1^2 z_2^2 \\ z_1 f_2 - f_1 = z_1^4 - z_1^3 - z_2 z_1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1^2 f_2 - f_1 = z_1^4 - z_1^3 - z_2 \\ f_1 + z_2 (z_1^2 f_2 - f_1) = z_2 (z_1^4 - z_1^3) = (1 - z_2) f_1 + z_1^2 z_2 f_2 \end{cases}$$

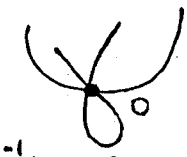
$$\begin{cases} z_1^2 f_2 - f_1 = z_1^3 (z_1 - 1) - z_1^2 z_2 \\ [f_1 + z_2 (z_1^2 f_2 - f_1)] + z_1 (z_1 - 1) [z_1^2 f_2 - f_1] = z_1^4 (z_1 - 1)^2 \end{cases}$$

finalement,

$$z_1^4 = \frac{1-z_2-z_1(z_1-1)}{(1-z_1)^2} f_1 + \frac{z_1^2\left(z_2+z_1(z_1-1)\right)}{(1-z_1)^2} f_2$$

et symétriquement pour z_2^4.

2.2 Résidus particuliers, interprétations.



$f : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$

$z=(z_1,..,z_n) \to (f_1(z),..,f_n(z))$ holomorphe tq $f^{-1}(0)=\{0\}$

$I(f)$ est l'idéal engendré par les f_i dans l'anneau des fonctions holomorphes sur $\overline{U}$.

On diminue suffisamment U pour que $\|f(z)\| \geq c>0$ sur ∂U

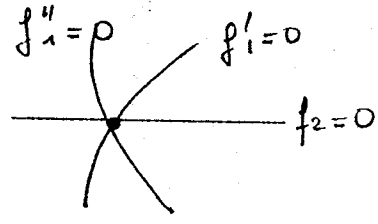
Soit $\omega(f_1,-,f_n) = \frac{df_1}{f_1} \wedge \ldots \wedge \frac{df_n}{f_n}$

(cas particulier : $\frac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_n}{z_n}$ noyau de Cauchy)

On appelle <u>nombre d'intersections</u> de f à l'origine la quantité

$m_{\{0\}} = \operatorname{Res}_{\{0\}} \omega(f_1,..,f_n)$,

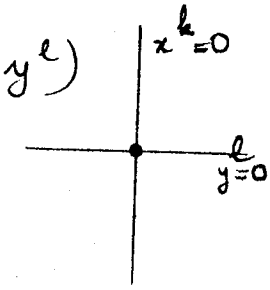
- qui est un entier
- et qui ne dépend que de l'idéal $I(f)$ (et pas du choix des générateurs f_i)



<u>Propriété</u> : si $f_1 = f_1' f_1''$,

$\omega(f_1,..,f_n) = \omega(f_1',..,f_n) + \omega(f_1'',..,f_n)$

d'où, par exemple : $m_{\{0\}}$ de $f:(x,y)\to(x^k,y^l)$ vaut $k\times l$

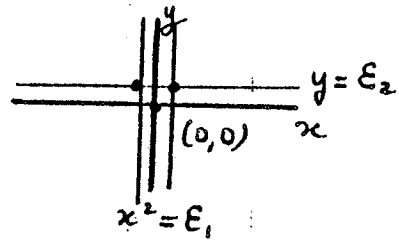


Propriété topologique :

On appelle **degré topologique** de f à l'origine la multiplicité de f à l'origine :

si $f(z)=0$ admet l'origine pour solution de multiplicité d, pour $\|w\| < \varepsilon$ assez petit, l'équation $f(z)=w$ admet exactement d solutions (comptées avec leur multiplicité) au voisinage de l'origine :

exemple : $f : (x,y) \to (x^2, y)$ multiplicité 2.



Le nombre d'intersections de f à l'origine est égal au degré topologique de f à l'origine.

Propriété algébrique :

Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des fonctions holomorphes au $\mathcal{V}(0)$ et $I(f)$ l'idéal engendré par les f_i. L'espace vectoriel quotient $\mathcal{O}/I$ est de dimension finie et $\operatorname{Res}_{\{0\}}\left(\frac{df_1}{f_1}\wedge\dots\wedge\frac{df_n}{f_n}\right) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}/I$

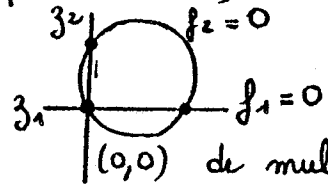
Application à la géométrie projective : théorème de Bezout

Si les variétés $(f_i=0)$ sont des hypersurfaces de $\mathbb{P}^n$ de degrés d_i, qui se rencontrent en des points isolés P_ν :

$$d_1 \dots d_n = \sum_\nu m_{P_\nu} \quad (= \text{nombre d'intersections total})$$

Exemple : (lié à l'exemple 2 du 2.1)

$$\begin{cases} f_1 = z_1 z_2 \\ f_2 = z_1^2 + z_2^2 - z_1 - z_2 \end{cases}$$



Calculons $m_{\{0\}} = \operatorname{Res}_{\{0\}}\left(\frac{d(z_1z_2)}{z_1z_2} \wedge \frac{d(z_1^2-z_1+z_2^2-z_2)}{z_1^2-z_1+z_2^2-z_2}\right)$

$$\begin{pmatrix} z_1^2 \\ z_2^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{z_2-1}{1-z_1} & \frac{-z_1}{1-z_1} \\ \frac{z_1-1}{1-z_2} & \frac{-z_2}{1-z_2} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \; ; \; \det A = \frac{z_1(z_1-1)-z_2(z_2-1)}{(1-z_1)(1-z_2)}$$

$$\cdot\, d(z_1 z_2) \wedge d\left(z_1(z_1-1)+z_2(z_2-1)\right)$$
$$= z_1\, dz_2 \wedge d(z_1(z_1-1)) + z_2\, dz_1 \wedge d(z_2(z_2-1))$$

Par linéarité,

$$m_{\{0\}} = \operatorname{Res}_{\{0\}}\left[\frac{-z_1^2\, dz_1\wedge dz_2}{f_1\cdot f_2}\right] + \operatorname{Res}_{\{0\}}\left[\frac{-z_1(z_1-1)\, dz_1\wedge dz_2}{f_1\cdot f_2}\right]$$
$$+ \operatorname{Res}_{\{0\}}\left[\frac{z_2^2\, dz_1\wedge dz_2}{f_1\cdot f_2}\right] + \operatorname{Res}_{\{0\}}\left[\frac{z_2(z_2-1)\, dz_1\wedge dz_2}{f_1\cdot f_2}\right]$$

Par la règle de transformation,

$$\operatorname{Res}_{\{0\}}\left[\frac{z_2^2\, dz_1\wedge dz_2}{f_1\cdot f_2}\right] = \operatorname{Res}_{\{0\}}\left[\frac{z_2^2\left(z_1(z_1-1)-z_2(z_2-1)\right) dz_1\wedge dz_2}{z_1^2 z_2^2 (1-z_1)(1-z_2)}\right]$$

= coefficient de $\frac{1}{z_1 z_2}$ dans le développement en série de Laurent de la fonction, qui est nul (pas de z_2 au dénominateur) ; on pouvait prévoir ce résultat car ce terme provient de $dz_1 \wedge d(z_2-1)$ qui est pratiquement constant au $V(0)$.

Par symétrie, $\operatorname{Res}_{\{0\}}\left[\frac{-z_1^2\, dz_1\wedge dz_2}{f_1\cdot f_2}\right] = 0$

$$\operatorname{Res}_{\{0\}}\left[\frac{z_2(z_2-1)\, dz_1\wedge dz_2}{f_1\cdot f_2}\right] = \operatorname{Res}_{\{0\}}\left[\frac{z_2(z_2-1)\left(z_1(z_1-1)-z_2(z_2-1)\right) dz_1\wedge dz_2}{z_1^2 z_2^2 (1-z_1)(1-z_2)}\right]$$

= coefficient de $\frac{1}{z_1 z_2} = +1$

$$= \operatorname{Res}_{\{0\}}\left[\frac{-z_1(z_1-1)\, dz_1\wedge dz_2}{f_1\cdot f_2}\right]$$ par symétrie.

d'où : $\boxed{m_{\{0\}} = 2.}$

Avec un changement de coordonnées préalable, on pourrait montrer que :

$$m_{\{(0,1)\}} = 1 = m_{\{(1,0)\}}$$

et $d^0 f_1 \cdot d^0 f_2 = 2 \times 2 = 4 = m_{\{(0,0)\}} + m_{\{(0,1)\}} + m_{\{(1,0)\}}$

3) Théorème de Jacobi-Kronecker, application à la formule de Lagrange.

Dans $\mathbb{P}^n$, soit $\omega = \dfrac{g(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}{f_1(x) \dots f_n(x)}$, où

g est un polynôme ainsi que les f_i, et $d^\circ g < (d^\circ f_1 + \dots + d^\circ f_n) - (n+1)$ (+ hypothèses habituelles sur les f_i) $\qquad d^\circ f_i = d_i$

Le théorème global des résidus entraîne:

$$\sum_\gamma \operatorname{Res}_{P_\gamma} \left\{ \frac{g(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}{f_1(x) \dots f_n(x)} \right\} = 0$$

Si les hypersurfaces $(f_i = 0)$ se coupent transversalement en $d_1 \dots d_n$ points distincts, on obtient la **relation de Jacobi**:

$$\sum_\gamma \frac{g(P_\gamma)}{\left(\dfrac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right)(P_\gamma)} = 0 \qquad \text{pour } d^\circ g \leq \sum d^\circ f_i - (n+1)$$

(1834)

C'est une généralisation de la formule d'interpolation de Lagrange : $n = 1$

$$\sum_\gamma \frac{g(P_\gamma)}{f'(P_\gamma)} = 0 \qquad \text{pour } d^\circ g \leq d^\circ f - 2$$

(Conséquence : $n = 2$, théorème de Cayley-Bacharach).

Si C et D sont deux courbes de $\mathbb{P}^2$ de degrés m_1 et m_2, qui se rencontrent en $m_1 m_2$ points distincts, alors toute courbe E de $d^\circ\ m_1 + m_2 - 3$ qui passe par tous les points sauf un de $C \cap D$ passe aussi par le dernier.

Remarque : dans $\mathbb{P}$, pour $d^\circ g \leq d^\circ f - 2$, dire que $\sum_{P_\gamma \text{ zéros de } f} \operatorname{Res}_{P_\gamma} \left\{ \dfrac{g(x)\, dx}{f(x)} \right\} = 0$, c'est simplement appliquer le théorème habituel des résidus

$$\sum \operatorname{Res}_{P_\gamma} \left\{ \frac{g(x)\, dx}{f(x)} \right\} = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{g(x)}{f(x)}\, dx \qquad (\times P_\gamma)$$

$$= - \operatorname{Res}_{\{\infty\}} \left\{ \frac{g(x)\, dx}{f(x)} \right\}$$

$= 0$

car, par le changement de coordonnées $x = \frac{1}{x'}$, ce résidu vaut :

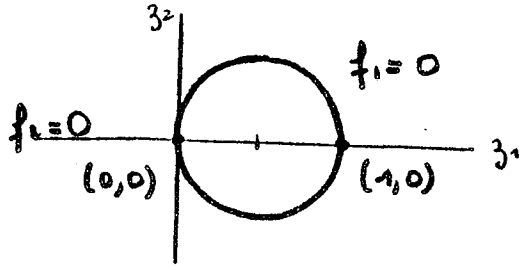
$$\text{Res}_{\{0\}} \left\{ \frac{g\left(\frac{1}{x'}\right)\left(-\frac{1}{x'^2}\right) dx'}{f\left(\frac{1}{x'}\right)} \right\}$$

$d^\circ g = p$
$d^\circ f = q$

$$\frac{g\left(\frac{1}{x'}\right)}{x'^2 f\left(\frac{1}{x'}\right)} \text{ est } x'^{q-p+2}$$

et $q - p - 2 \geq 0$ par hypothèse, d'où la nullité du résidu.

4) Utilisation de ce formalisme dans un cas particulier.



$$\begin{cases} f_1 = z_1^2 + z_2^2 - z_1 \\ f_2 = z_2 \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(z_1, z_2)} \right| = 2z_1 - 1 \; ;$$ les deux courbes se coupent transversalement en (0,0) et (1,0) et :

$$\boxed{\text{Res}_{\{(0,0)\}} \left\{ \frac{g(z)\, dz_1 \wedge dz_2}{f_1 \cdot f_2} \right\} + \text{Res}_{\{(1,0)\}} \left\{ \frac{g(z)\, dz_1 \wedge dz_2}{f_1 \cdot f_2} \right\} = g(1,0) - g(0,}$$

Par contre, le jacobien de f_1 et f_2^2 est nul en (0,0) et (1,0). Appliquons l'algorithme pour calculer les résidus correspondants, ce qui donne pour le point (0,0) :

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-1}{1-z_1} f_1 + \frac{1}{1-z_1} f_2 \\ z_2^2 = f_2 \end{cases}$$

$$\text{Res}_{\{(0,0)\}} \left[\frac{g(z)\, dz_1 \wedge dz_2}{f_1 \cdot f_2^2} \right] = \text{Res}_{\{(0,0)\}} \left[g(z) \times \frac{-1}{1-z_1} \frac{dz_1 \wedge dz_2}{z_1 \cdot z_2^2} \right]$$

= coefficient de $\frac{1}{z_1 z_2}$ dans le développement en (0,0) de $\frac{-g(z)}{(1-z_1) \cdot z_1 z_2^2}$

Par

Pour le point $(1,0)$, faisons d'abord le changement de variables $z_1 = 1+u_1$, $z_2 = u_2$. $u = (u_1, u_2)$

$$\operatorname{Res}_{\{(1,0)\}} \begin{bmatrix} g(z)\ dz_1 \wedge dz_2 \\ f_1(z),\ f_2^2(z) \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\{(0,0)\}} \begin{bmatrix} g(1+u_1, u_2)\ du_1 \wedge du \\ u_1^2 + u_2^2 + u_1 \cdot u_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{1+u_1} f_1(1+u_1, u_2) - \dfrac{1}{1+u_1} f_2(1+u_1, u_2) \\ u_2^2 = f_2(1+u_1, u_2) \end{cases}$$

Le résidu vaut donc :

$$\operatorname{Res}_{\{(0,0)\}} \begin{bmatrix} g(1+u_1, u_2) \times \dfrac{1}{1+u_1}\ du_1 \wedge du_2 \\ u_1 \cdot u_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{g(1+u_1, u_2)}{1+u_1} \right)(0,0) = \left[\frac{\partial}{\partial u_2} g(1+u_1, u_2) \times \frac{1}{1+u_1} \right](0,0$$

$$= \frac{\partial g}{\partial z_2}(1,0)$$

(g est supposée holomorphe au voisinage de $(0,0)$ et $(1,0)$)

finalement :

$$\operatorname{Res}_{\{(0,0)\}} \begin{bmatrix} g(z)\, dz_1 \wedge dz_2 \\ f_1 \cdot f_2^2 \end{bmatrix} + \operatorname{Res}_{\{(1,0)\}} \begin{bmatrix} g(z)\, dz_1 \wedge dz_2 \\ f_1 \cdot f_2^2 \end{bmatrix} = \frac{\partial g}{\partial z_2}(1,0) - \frac{\partial g}{\partial z_2}(0,$$

- De manière analogue pour les résidus relatifs à f_1^2 et f_2.

En $(0,0)$:

$$\begin{cases} z_1^2 = \dfrac{1}{1-2z_1+z_1^2} f_1^2 - \dfrac{z_2(z_2^2+2z_1^2-2z_1)}{1-2z_1+z_1^2} f_2 \\ z_2 = f_2 \end{cases}$$

$$\operatorname{Res}_{\{(0,0)\}}\left[\frac{g(z)\,dz_1\wedge dz_2}{f_1^2\cdot f_2}\right] = \operatorname{Res}_{\{(0,0)\}}\left[\frac{g(z)\times\frac{1}{(1-z_1)^2}\,dz_1\wedge dz_2}{z_1^2\cdot z_2}\right]$$

$$= \frac{\partial g}{\partial z_1}(0,0) + 2\,g(0,0)$$

En $(1,0)$, avec le même changement de variables préliminaire :

$$\begin{cases} u_1^2 = \dfrac{1}{(1+u_1)^2}\,f_1^2(1+u_1,u_2) - \dfrac{u_2(u_2+2u_1^2+2u_1)}{(1+u_1)^2}\,f_2(1+u_1,u_2) \\ u_2 = f_2(1+u_1,u_2) \end{cases}$$

$$\operatorname{Res}_{\{(1,0)\}}\left[\frac{g(z)\,dz_1\wedge dz_2}{f_1^2\cdot f_2}\right] = \operatorname{Res}_{\{(0,0)\}}\left[\frac{g(1+u_1,u_2)\times\frac{1}{(1+u_1)^2}\,du_1\wedge du_2}{u_1^2\cdot u_2}\right]$$

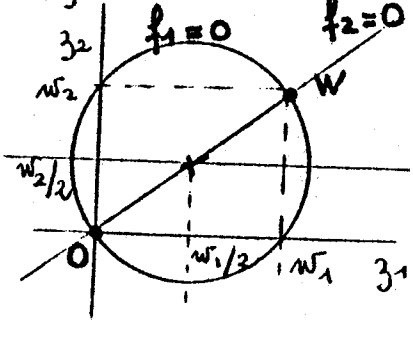
$$= \frac{\partial g}{\partial z_1}(1,0) - 2\,g(1,0)$$

$$\boxed{\operatorname{Res}_{\{(0,0)\}}\left[\frac{g(z)\,dz_1\wedge dz_2}{f_1^2\cdot f_2}\right] + \operatorname{Res}_{\{(1,0)\}}\left[\frac{g(z)\,dz_1\wedge dz_2}{f_1^2\cdot f_2}\right] = \frac{\partial g}{\partial z_1}(1,0) + \frac{\partial g}{\partial z_1}(0,0) - 2\big(g(1,0) - g(0,0)\big)}$$

Remarque : Dans le cas des deux points 0 et $W=(w_1,w_2)$ tel que $w_1^2+w_2^2\neq 0$, pour :

$$\begin{cases} f_1(z) = \left(z_1-\frac{w_1}{2}\right)^2 + \left(z_2-\frac{w_2}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{w_1}{2}\right)^2+\left(\frac{w_2}{2}\right)^2\right] \\ \quad = (z_1^2+z_2^2) - (z_1w_1+z_2w_2) \\ \text{et } f_2(z) = z_2w_1 - z_1w_2 \end{cases}$$

- qui se coupent alors uniquement en 0 et W :



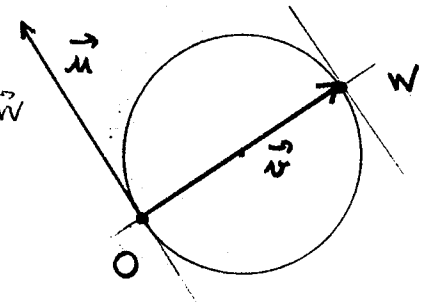
la transformation linéaire

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \frac{1}{w_1^2 + w_2^2} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ -w_2 & w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

ramène la figure au cas précédent, ce qui permet d'établir :

$$\sum_{P \in \{0,w\}} \operatorname{Res}_{\{P\}} \left[\frac{g(z)\, dz_1 \wedge dz_2}{f_1 \cdot f_2} \right] = g(w) - g(0)$$

En notant $\vec{u} = (-w_2, w_1)$
et $\vec{v} = (w_1, w_2) = \overrightarrow{Ow}$



on obtient :

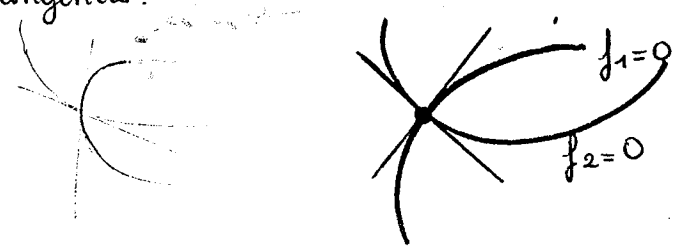
$$\sum_{P \in \{0,w\}} \operatorname{Res}_{\{P\}} \left[\frac{g(z)\, dz_1 \wedge dz_2}{f_1 \cdot f_2^2} \right] = \frac{\partial g}{\partial \vec{u}}(w) - \frac{\partial g}{\partial \vec{u}}(0)$$

et

$$\sum_{P \in \{0,w\}} \operatorname{Res}_{\{P\}} \left[\frac{g(z)\, dz_1 \wedge dz_2}{f_1^2 \cdot f_2} \right] = \left(\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(w) + \frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0) \right) - 2\left(g(w) - g(0) \right)$$

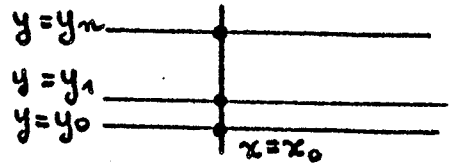
ici, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires au sens où $-w_2 w_1 + w_1 w_2 =$ et ils sont portés par les deux tangentes aux courbes $(f_1 = 0)$ et $(f_2 = 0)$ en 0 et W.

On peut donc imaginer que pour deux courbes se coupant transversalement, les résidus relatifs aux puissances de f_1 et f_2 seront liés aux dérivées dans les directions des deux tangentes.



III Exemple : points à l'intersection d'une courbe algébrique et d'un ensemble fini de droites.

Essayons d'utiliser le formalisme précédent dans $\mathbb{C}^2$, dans le cas le plus simple qui généralise la situation du chapitre 4 : points à l'intersection d'une droite et d'un ensemble fini de droites parallèles.



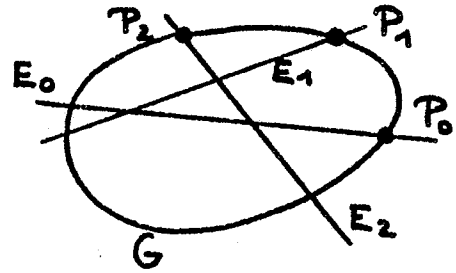
Soient

$g \in \mathbb{C}[x,y]$ et G la courbe algébrique $G(x,y)=0$

$e_i \in \mathbb{C}[x,y]$, $d^\circ e_i \leq 1$ et E_i la droite d'équation $e_i(x,y)=0$

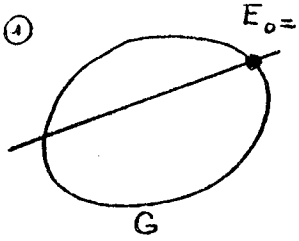
$0 \leq i \leq n$ $\quad P_i \in G \cap E_i$, P_i à distance finie.

On suppose les droites E_i distinctes pour l'instant, et f holomorphe dans un ouvert suffisamment grand de $\mathbb{C}^2$, connue aux points P_i.

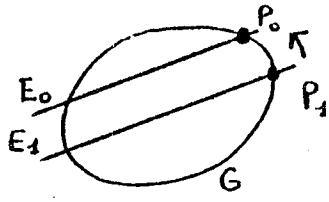


Cas exclus :

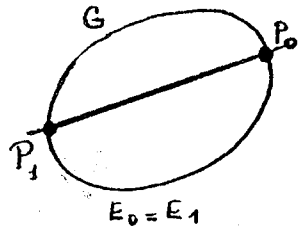
① $E_0 = E_1$, $P_0 = P_1$



sera ensuite considéré comme cas limite de :

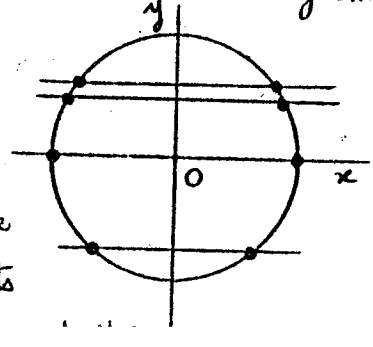


$P_1 \to P_0$ sur G

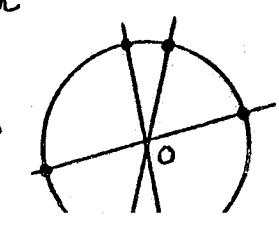
② 

utiliser la courbe G quand elle est de degré >1 ne présente d'intérêt que si la fonction f à interpoler possède des propriétés relatives à cette géométrie. Par exemple,

f symétrique par rapport à l'axe des y, (prend la même valeur en deux points



fantisymétrique par rapport à l'origine (prend des valeurs opposées en deux



Par analogie avec le cas ordinaire, cherchons s'il existe un polynôme d'interpolation correspondant aux valeurs de f aux points $P_0, P_1, \dots, P_n$ dans l'espace vectoriel engendré par les polynômes $1, e_0, \dots, e_0 e_1 \dots e_{n-1}$ (convention : $e_{-1} \equiv 0$)

1) Système triangulaire et "différences divisées"

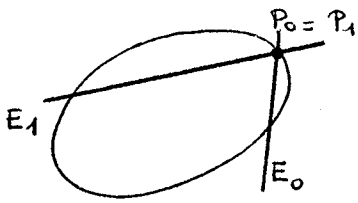
$$p = \sum_{i=0}^{n} a_i \, e_0 e_1 \dots e_{i-1}$$

$$\forall i \in [0, n] \quad p(P_i) = f(P_i)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ 1 & e_0(P_1) & & & \\ 1 & e_0(P_2) & e_0e_1(P_2) & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & e_0(P_n) & e_0e_1(P_n) & \dots & e_0e_1\dots e_{n-1}(P_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(P_0) \\ f(P_1) \\ f(P_2) \\ \vdots \\ f(P_n) \end{pmatrix}$$

Système triangulaire, dont la matrice est inversible ssi :
$\forall i < j \quad e_i(P_j) \neq 0$, ce qui équivaut à $P_j \notin E_i$
(en particulier, ces points sont distincts)

③ cas exclu



Notations

Définissons par récurrence

$[g ; e_0, e_1, \dots, e_i ; f]$ ou plus simplement $[g ; e_0, e_1, \dots, e_i]$ quand le contexte sous-entend qu'il s'agit de f, par :

$$\begin{cases} [g ; e_0] = f(P_0) \\ [g ; e_0, e_1] = \dfrac{[g ; e_1] - [g ; e_0]}{e_0(P_1)} \\ [g ; e_0, e_1, e_2] = \dfrac{[g ; e_0, e_2] - [g ; e_0, e_1]}{e_1(P_2)} \\ \vdots \\ [g ; e_0, e_1, \dots, e_m] = \dfrac{[g ; e_0, \dots, e_{n-2}, e_n] - [g ; e_0, \dots, e_{n-2}, e_{n-1}]}{} \end{cases}$$

qu'on nomme **différences divisées** (en raison de leur constructio

d'ordre n pour $[g; e_0, \dots, e_n$

Dans le cas inversible, on a :

$$P = \sum_{i=0}^{\infty} [g; e_0, e_1, \dots, e_i]\, e_0 e_1 \dots e_{i-1}$$

Lorsqu'on ajoute des points sur la courbe G, <u>les premiers coefficient du développement sont inchangés</u>.

Pour un point $\mathbb{P}$ appartenant à G, on a la formule exacte :

$f(\mathbb{P}) - p(\mathbb{P}) = [g; e_0, e_1, \dots, e_n, e]\, e_0 e_1 \dots e_n$

où e est l'équation d'une droite passant par $\mathbb{P}$, et pas les P_i.

Pour étudier plus précisément l'erreur, on aimerait donc relier ces différences divisées à des intégrales (doubles ici).

2) Existence de "formules d'Hermite"

Nous entendons par là des formules qui généralisent celles du chapitre 4, dont le point de départ est :

$$f(x_0, y_0) = \operatorname{Res}_{\{(x_0,y_0)\}} \begin{bmatrix} f(x,y)\, dx \wedge dy \\ (x-x_0) \cdot (y-y_0) \end{bmatrix}$$

(ici, $g(x,y) = x - x_0$ et $e_0(x,y) = y - y_0$)

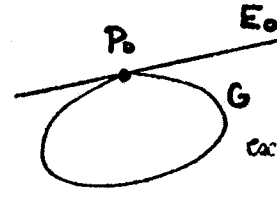
Les différences divisées étant définies par récurrence, il faut établir un lien avec les résidus :

- pour celles d'ordre 0
- le transporter de l'ordre n à $n+1$, pour tout entier n.

2.1 Recherche de CNS

① Ordre 0.

Dans le cas où $\operatorname{Jac}_{\{P_0\}}(g, e_0) \neq 0$, (



$$\operatorname{Res}_{\{P_0\}} \begin{bmatrix} f(x,y)\, dx \wedge dy \\ g \cdot e_0 \end{bmatrix} = \frac{f(P_0)}{\operatorname{Jac}_{\{P_0\}}(g, e_0)}$$

Il suffit donc d'utiliser l'équation

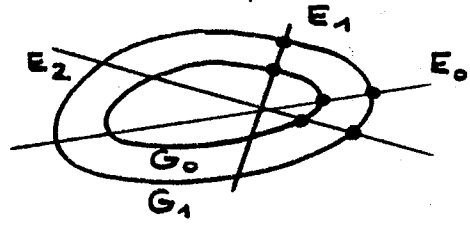
$$e'_0 = \frac{e_0}{\mathrm{Jac}_{\{P_0\}}(g, e_0)} \quad \text{(proportionnelle à } e_0\text{)}$$

pour obtenir exactement

$$\boxed{\mathrm{Res}_{\{P_0\}} \left[\begin{matrix} f(x,y)\, dx \wedge dy \\ g \cdot e'_0 \end{matrix} \right] = f(P_0)}$$

Cette **normalisation** de l'équation de E_i ne dépend pas de la fonction à interpoler, mais uniquement de la géométrie des points d'interpolation, et en particulier de g.

Attention : si l'on change de courbe G, en gardant les mêmes droites E_i, on n'aura plus forcément la même normalisation.

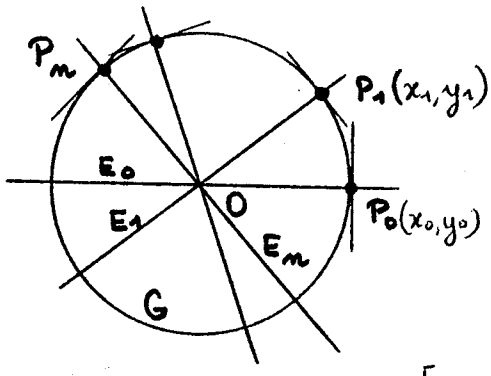


Exemple :

$r \in \mathbb{C}^*$ $\quad g(x,y) = x^2 + y^2 - r^2$

$P_i \in G$, $\quad E_i$ = droite OP_i dont une équation est :

$P_i(x_i, y_i)$ $\quad e_i(x,y) = x_i y - y_i x$



$$\mathrm{Jac}_{\{P_i\}}(g, e_i) = \begin{vmatrix} 2x_i & 2y_i \\ -y_i & x_i \end{vmatrix}$$

$$= 2r^2 \neq 0$$

L'équation normalisée est :

$$e'_i(x,y) = \frac{x_i y - y_i x}{2r^2}$$

Alors $\mathrm{Res}_{\{P_i\}} \left[\begin{matrix} f(x,y)\, dx \wedge dy \\ g \cdot e'_i \end{matrix} \right] = f(P_i)$

(Remarquons que dans ce cas particulier, les différents jacobiens utilisés prennent la même valeur : le cercle et les droites sont "orthogonales" aux points P_i).

② Ordre 1

Supposant chacune des équations e_i normalisées, quelles conditions supplémentaires impose :

$$[g\,;e_0,e_1] = \sum_{i=0,1} \operatorname{Res}_{\{P_i\}} \left[\begin{matrix} f(x,y)\,dx\wedge dy \\ g\cdot e_0e_1 \end{matrix}\right] ?$$

relation analogue à :

$$[x_0\,;y_0,y_1\,;f(x,y)] = \sum_{i=0,1} \operatorname{Res}_{\{(x_0,y_i)\}} \left[\begin{matrix} f(x,y)\,dx\wedge dy \\ (x-x_0)\cdot(y-y_0)(y-y_1) \end{matrix}\right]$$

(avec les notations du ch. 4).

Calculons :

$$[g\,;e_0,e_1] = \frac{[g\,;e_1]-[g\,;e_0]}{e_0(P_1)} \quad \text{par définition}$$

$$= \frac{1}{e_0(P_1)} \operatorname{Res}_{\{P_1\}} \left[\begin{matrix} f(x,y)\,dx\wedge dy \\ g\cdot e_1 \end{matrix}\right] - \frac{1}{e_0(P_1)} \operatorname{Res}_{\{P_0\}} \left[\begin{matrix} f(x,y)\,dx\wedge \\ g\cdot e_0 \end{matrix}\right.$$

car la propriété est vraie à l'ordre 0.

$(x,y) \to \dfrac{f(x,y)}{e_0(x,y)}$ étant holomorphe au voisinage de P_1,

le calcul des résidus (à l'aide d'une intégrale double) donne :

$$\operatorname{Res}_{\{P_1\}} \left[\begin{matrix} f(x,y)\,dx\wedge dy \\ g\cdot e_0e_1 \end{matrix}\right] = \frac{1}{e_0(P_1)} \operatorname{Res}_{\{P_1\}} \left[\begin{matrix} f(x,y)\,dx\wedge dy \\ g\cdot e_1 \end{matrix}\right]$$

de même,

$$\operatorname{Res}_{\{P_0\}} \left[\begin{matrix} f(x,y)\,dx\wedge dy \\ g\cdot e_0e_1 \end{matrix}\right] = \frac{1}{e_1(P_0)} \operatorname{Res}_{\{P_0\}} \left|\begin{matrix} f(x,y)\,dx\wedge dy \\ g\cdot e_0 \end{matrix}\right|$$

Donc :

$$[g\,;e_0,e_1] = \operatorname{Res}_{\{P_1\}} \left[\begin{matrix} f(x,y)\,dx\wedge dy \\ g\cdot e_0e_1 \end{matrix}\right] - \frac{e_1(P_0)}{e_0(P_1)} \operatorname{Res}_{\{P_0\}} \left[\begin{matrix} f(x,y)\,dx\wedge dy \\ g\cdot e_0e_1 \end{matrix}\right]$$

Une CNS pour que la relation soit vraie à l'ordre 1 pour toute fonction f holomorphe au voisinage de P_0 et P_1 est que :

$$\left(1 + \frac{e_1(P_0)}{e_0(P_1)}\right) \operatorname{Res}_{\{P_0\}} \left[\begin{matrix} f(x,y)\, dx\wedge dy \\ g \cdot e_0 e_1 \end{matrix}\right] = 0$$

or pour $f(x,y) = e_1(x,y)$ par exemple, ce résidu vaut 1. Une condition nécessaire est donc $e_1(P_0) = -e_0(P_1)$, et alors la relation est vraie pour toute f.

Conséquence :

Ayant normalisé les e_i de sorte que :

$$[g ; e_i] = \operatorname{Res}_{\{P_i\}} \left[\begin{matrix} f(x,y)\, dx\wedge dy \\ g \cdot e_i \end{matrix}\right],$$

la "formule d'Hermite" :

$$[g ; e_0, e_1] = \sum_{i=0,1} \operatorname{Res}_{\{P_i\}} \left[\begin{matrix} f(x,y)\, dx\wedge dy \\ g \cdot e_0 e_1 \end{matrix}\right]$$

est vérifiée pour toute f ssi : $\boxed{e_0(P_1) + e_1(P_0) = 0}$

Remarque : il en résulte alors la "commutativité" de la définition des différences divisées à l'ordre 1, à savoir :

$$[g ; e_0, e_1] = \frac{f(P_1) - f(P_0)}{e_0(P_1)} \text{ ainsi } = \frac{f(P_0) - f(P_1)}{e_1(P_0)}$$

③ Plus généralement, traitons le transport des "formules d'Hermite" de l'ordre n à l'ordre $n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que toutes les différences divisées d'ordre $k \leq n$ vérifient une formule d'Hermite correspondant à leur ordre. (quels que soient les $k+1$ points considérés).

Calculons

$$[g ; e_0, e_1, \dots, e_{n+1}] = \frac{[g ; e_0, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}] - [g ; e_0, \dots, e_{n-1}, e_n]}{e_n(P_{n+1})}$$

différences divisées d'ordre n

$$= \frac{1}{e_n(P_{n+1})} \sum_{i\in\{0,..,n-1,n+1\}} \operatorname{Res}_{\{P_i\}} \begin{bmatrix} f(x,y)\,dx\wedge dy \\ g\cdot e_0\cdots e_{n-1}\,e_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$- \frac{1}{e_n(P_{n+1})} \sum_{i\in\{0,..,n-1,n\}} \operatorname{Res}_{\{P_i\}} \begin{bmatrix} f(x,y)\,dx\wedge dy \\ g\cdot e_0\cdots e_{n-1}\,e_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i\in\{0,..n-1\}} \frac{e_n(P_i)-e_{n+1}(P_i)}{e_n(P_{n+1})} \operatorname{Res}_{\{P_i\}} \begin{bmatrix} f(x,y)\,dx\wedge dy \\ g\cdot e_0\cdots e_{n-1}\,e_n\,e_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$- \frac{e_{n+1}(P_n)}{e_n(P_{n+1})} \operatorname{Res}_{\{P_n\}} \begin{bmatrix} f(x,y)dx\wedge dy \\ g\cdot e_0\cdots e_n\,e_{n+1} \end{bmatrix} + \operatorname{Res}_{\{P_{n+1}\}} \begin{bmatrix} f(x,y)dx\wedge dy \\ g\cdot e_0\cdots e_n\,e_{n+1} \end{bmatrix}$$

par un argument analogue à celui de l'ordre 1.

La formule d'Hermite à l'ordre $n+1$ entre les points $P_0,..,P_{n+1}$

$$[g; e_0, e_1, .., e_{n+1}] = \sum_{i=0}^{n+1} \operatorname{Res}_{\{P_i\}} \begin{bmatrix} f(x,y)\,dx\wedge dy \\ g\cdot e_0\cdots e_{n+1} \end{bmatrix}$$

équivaut donc à :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{e_n(P_i)-e_{n+1}(P_i)}{e_n(P_{n+1})}\right) \operatorname{Res}_{\{P_i\}} \begin{bmatrix} f \\ g\cdot e_0\cdots e_{n+1} \end{bmatrix} + \left(1+\frac{e_{n+1}(P_n)}{e_n(P_{n+1})}\right) \operatorname{Res}_{\{P_n\}} \begin{bmatrix} f \\ g\cdot e_0 \end{bmatrix}$$

Pour $f = \prod_{j\neq i} e_j$, $\operatorname{Res}_{\{P_i\}} \begin{bmatrix} f \\ g\cdot e_0\cdots e_{n+1} \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\{P_i\}} \begin{bmatrix} 1 \\ g\cdot e_i \end{bmatrix} = 1 \neq 0$

et $\operatorname{Res}_{\{P_j\}} \begin{bmatrix} f \\ g\cdot e_0\cdots e_{n+1} \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{\{P_j\}} \begin{bmatrix} e_j/e_i \\ g\cdot e_j \end{bmatrix} = 0$ $\quad j\neq i$

Une condition nécessaire est :

$\forall i \in [0, n-1] \quad e_n(P_i) - e_{n+1}(P_i) = e_n(P_{n+1})$

et $e_{n+1}(P_n) + e_n(P_{n+1}) = 0$ qui suffit alors pour toute f holomorphe.

(pour $n=0$, la 1ère condition est vide)

Remarque 1 : pour $e_i(x,y) = y - y_i$, ces relations sont vérifiées.

Remarque 2 : quant à l'exemple : $g(x,y) = x^2 + y^2 - r^2$

$$e_i(x,y) = \frac{x_i y - y_i x}{2r^2}$$

les relations sont vérifiées à l'ordre 1 :

$$e_1(P_0) + e_0(P_1) = \frac{1}{2r^2}\left(x_1 y_0 - y_1 x_0 + x_0 y_1 - y_0 x_1 \right) = 0$$

mais pas forcément à un ordre supérieur : il faudrait pour $i < n$:

$$e_n(P_i) - e_{n+1}(P_i) - e_n(P_{n+1}) = 0 ,$$

c'est-à-dire :

$$(x_n - x_{n+1}) y_i - (y_n - y_{n+1}) x_i = x_n y_{n+1} - y_n x_{n+1} .$$

Conclusion :

Ayant normalisé les équations e_i , une CNS pour que les formules d'Hermite soient vérifiées pour toute fonction f holomorphe à tous ordres est que :

pour tout entier k et toute combinaison de $k+2$ points, notés $P_{i_0}, P_{i_1}, \dots, P_{i_k}, P_{i_{k+1}}$, on ait :

$$\forall i \in \{i_0, \dots, i_{k-1}\} \quad e_{i_k}(P_i) - e_{i_{k+1}}(P_i) = e_{i_k}(P_{i_{k+1}})$$

$$\text{et} \quad e_{i_{k+1}}(P_{i_k}) + e_{i_k}(P_{i_{k+1}}) = 0$$

La formule d'Hermite correspondante s'écrit :

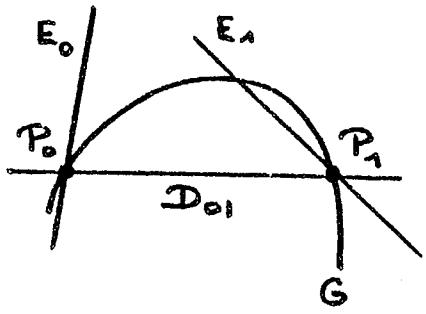
$$[g; e_{i_0}, e_{i_1}, \dots, e_{i_{k+1}}] = \sum_{i \in \{i_0, \dots, i_{k+1}\}} \operatorname{Res}_{\{P_i\}} \left[\frac{f}{g \cdot e_{i_0} \dots e_{i_{k+1}}} \right]$$

Remarque : parmi ces conditions, certaines sont surabondantes sont-elles souvent réalisées ? C'est ce qu'on étudie dans le paragraphe suivant.

2.2 Interprétation des CNS

① Exemple : conditions sur les différences divisées d'ordre 1,2

$e_0(P_1) + e_1(P_0) = 0$ (*)



Soient $P_0(x_0, y_0)$ et $P_1(x_1, y_1)$.
$\exists (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{C}^4$
$e_0(x,y) = \alpha_0(x-x_0) + \beta_0(y-y_0)$
$e_1(x,y) = \alpha_1(x-x_1) + \beta_1(y-y_1)$

$$(*) \iff (\alpha_0-\alpha_1)(x_1-x_0) + (\beta_0-\beta_1)(y_1-y_0) = 0$$

En résolvant cette dernière équation en fonction de e_0, c'est-à-dire de (α_0, β_0), on obtient comme solutions :

$(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_0, \beta_0) + \lambda\,((y_1-y_0), -(x_1-x_0))$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si on définit $d_{01}(x,y) = (y_1-y_0)(x-x_0) - (x_1-x_0)(y-y_0)$
équation de la droite P_0P_1,

$$(*) \iff \exists \lambda \in \mathbb{C},\ e_1 = e_0 - e_0(P_1) + \lambda\, d_{01}$$

Cette condition restreint-elle le choix de E_1, une fois E_0 fixée ? Non :

Toute droite passant par P_1 et distincte de la droite P_0P_1 admet une équation e_1 de ce type.

En effet, soit $\alpha(x-x_1) + \beta(y-y_1)$ l'équation d'une droite passant par P_1 : $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.
quand existe-t-il une équation proportionnelle à celle-ci qui vérifie (*) ?

$\exists\, c \in \mathbb{C}^*\ \exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ $\quad (c\alpha, c\beta) = (\alpha_0, \beta_0) + \lambda(y_1-y_0, x_0-x_1)$

$\iff \exists\, c \in \mathbb{C}^*\ \exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ $\quad \begin{cases} \lambda(y_0-y_1) + c\alpha = \alpha_0 \\ \lambda(x_1-x_0) + c\beta = \beta_0 \end{cases}$

1er cas : $\begin{vmatrix} y_0-y_1 & \alpha \\ x_1-x_0 & \beta \end{vmatrix} \neq 0$ c'est-à-dire : droite distincte

alors le système admet une unique solution (c, λ)

2ème cas : $\begin{vmatrix} y_0 - y_1 & \alpha \\ x_1 - x_0 & \beta \end{vmatrix} = 0$ c'est-à-dire : droite parallèle à P_0P_1, et passant par P_1 donc droite P_0P_1 :

le système n'admet de solution que si (α_0, β_0) est colinéaire à $(y_0 - y_1, x_1 - x_0)$: dans ce cas, E_0 = droite P_0P_1, mais alors $e_0(P_1) = 0$, hypothèse exclue dès le départ.

Conséquence : la condition (*) sur les différences d'ordre 1 conduit à une **normalisation** de l'équation de la droite E_1 en fonction de celle de E_0, sauf dans le cas particulier où E_1 est la droite P_0P_1.

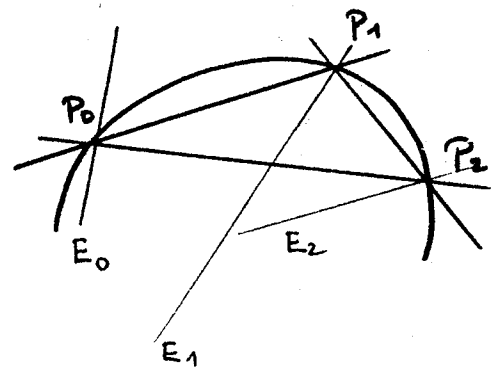
Remarque : il s'agit ici d'une nouvelle normalisation de e_1 qui n'est pas forcément compatible avec celle imposée au 2.1 ① : $\text{Jac}_{\{P_1\}}(g, e_1) = 1$

② conditions sur les différences divisées d'ordre 1 et 2, 3 points

Nous nous intéressons aux différences divisées d'ordre petit, car les hypothèses sur la géométrie de la figure deviennent très vite restrictives.

Pour 3 points P_0, P_1, P_2, les conditions sont :

ordre 1 $\begin{cases} e_0(P_1) + e_1(P_0) = 0 \\ e_0(P_2) + e_2(P_0) = 0 \\ e_1(P_2) + e_2(P_1) = 0 \end{cases}$



du type précédent.

On suppose donc $E_1 \neq P_0P_1$, $E_2 \neq \begin{matrix} P_0P_2 \\ P_1P_2 \end{matrix}$.

Le système équivaut alors à :

$$\exists (\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{C}^3 \quad \begin{cases} e_1 = e_0 - e_0(P_1) + \lambda\, d_{01} \\ e_2 = e_0 - e_0(P_2) + \mu\, d_{02} \\ e_2 = e_1 - e_1(P_2) + \nu\, d_{12} \end{cases} \quad (*)$$

où les équations d_{02} et d_{12} sont définies de manière analogue à d_{01}.

Les deux dernières équations impliquent :

$$e_1 - e_0 + e_0(P_2) - e_1(P_2) + \nu\, d_{12} - \mu\, d_{02} = 0$$

Avec la première,

$$e_0(P_2) - e_1(P_2) - e_0(P_1) + \lambda\, d_{01} - \mu\, d_{02} + \nu\, d_{12} = 0$$

Comme $d_{12} = d_{0,2} - d_{0,1} + d_{12}(P_0)$, on obtient :

et $e_1(P_2) = e_0(P_2) - e_0(P_1) + \lambda\, d_{01}(P_2)$

$$\exists (\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{C}^3$$

$$(\lambda-\nu)\, d_{0,1} + (\nu-\mu)\, d_{0,2} + \nu\, d_{12}(P_0) - \lambda\, d_{01}(P_2) = 0$$

Cette expression est un polynôme de degré ≤ 1 dans $\mathbb{C}[x,y]$; en l'exprimant dans la base $1, x-x_0, y-y_0$ sa nullité équivaut à :

$$\begin{cases} (\lambda-\nu)(y_1-y_0) + (\nu-\mu)(y_2-y_0) = 0 & \text{coefficient de } x-x_0 \\ (\lambda-\nu)(x_1-x_0) + (\nu-\mu)(x_2-x_0) = 0 & \text{—— de } y-y_0 \\ (\nu-\lambda)\ \underbrace{d_{01}(P_2)}_{\| \; d_{12}(P_0)} = 0 & \text{—— de } 1 \end{cases}$$

(plus généralement, par permutation circulaire,

$$d_{ij}(P_k) = d_{ki}(P_j)\ )$$

Discussion :

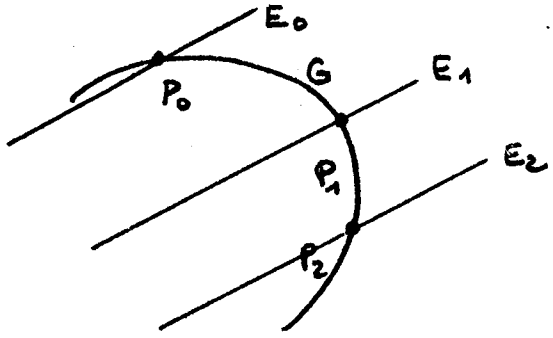
Nécessairement, λ, μ et ν doivent vérifier les trois conditions précédentes.

- Or, si les vecteurs $\vec{P_0P_1}$ et $\vec{P_0P_2}$ forment un système libre, les deux premières équations n'admettent que la solution triviale : $\lambda = \mu = \nu$, qui est aussi solution de la dernière équation.

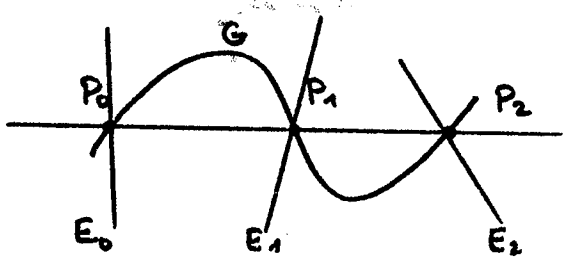
Autrement dit, <u>lorsque P_0, P_1 et P_2 ne sont pas alignés</u>, si l'équation de E_1 est $e_0 - e_0(P_1) + \lambda d_{01}$, celle de E_2 est nécessairement : $e_0 - e_0(P_2) + \lambda d_{02}$
(et aussi $e_1 - e_1(P_2) + \lambda d_{12}$)

Mais alors, pour les différences divisées d'ordre 2, on doit avoir :
$e_1(P_0) - e_2(P_0) = e_1(P_2)$
c'est-à-dire :
$$\big(e_0(P_2) + \lambda d_{01}(P_2) - e_0(P_1)\big) - \big(-e_0(P_1)\big) + \big(-e_0(P_2)\big) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\lambda\, d_{01}(P_2) = 0}$$

Comme $d_{01}(P_2) \neq 0$, nécessairement $\lambda = 0$
et <u>les droites E_1 et E_2 sont en fait les droites parallèles à E_0 qui passent par P_1 et P_2 respectivement</u>.



- Si les vecteurs <u>$\vec{P_0P_1}$ et $\vec{P_0P_2}$ forment un système lié</u>, le système (*) équivaut aux deux premières équations : ν est déterminé en fonction de λ et μ indépendants.



Pour trois points alignés P_0, P_1, P_2, pas d'autre condition imposée sur les E_i par les différences d'ordre 1 et 2 que d'être distincts de P_0P_1

③ **Conclusion.**

Les conditions imposées sur les droites E_i diffèrent donc suivant que les points P_i sont alignés ou non. Supposons ces points d'interpolation numérotés dans un ordre $\underbrace{P_0, P_1, \dots, P_{k-1}}_{\text{alignés}}, P_k, \dots, P_n$ tel que :

pour $\ell \geq k$ $P_\ell \notin$ droite P_0P_1.

En considérant les différences d'ordre 1 et 2 relatives à $P_0, P_1, \dots, P_{k-1}$, pas de condition sur les E_i $(0 \leq i \leq k-1)$ que : $E_i \neq P_0P_1$, dont on écrit l'équation sous la forme :

$e_i = e_0 - e_0(P_i) + \lambda_i d_{0i}$ $(\lambda_i \in \mathbb{C})$, $i \geq 1$

Par contre, pour $i \geq k$, P_0, P_1, P_i n'étant pas alignés, les différences d'ordre 1 sur ces 3 points imposent $e_i = e_0 - e_0(P_i) + \lambda_i d_{0i}$ avec $\lambda_i = \lambda_1 = 0$, c'est-à-dire E_i parallèle à E_0 ainsi que E_1.

Conséquence :

Si le système $P_0, P_1, \dots, P_n$ des points d'interpolation comporte au moins 3 points non alignés, nécessairement toutes les droites E_i doivent être parallèles à la première E_0, leurs équations étant mises sous la forme : $e_i = e_0 - e_0(P_i)$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$i \leq n-1$ $\quad e_n(P_i) - e_{n+1}(P_i) - e_n(P_{n+1})$

$= e_0(P_i) - e_0(P_n) - e_0(P_i) + e_0(P_{n+1}) - e_0(P_{n+1}) + e_0(P_n) = 0$

et $\quad e_{n+1}(P_n) + e_n(P_{n+1}) = 0$

Les conditions sur les toutes les différences **d'ordre ≥ 1** sont vérifiées. Mais l'écriture des e_i doit être compatible avec la normalisation imposée par celles d'ordre 0, à savoir :

$\mathrm{Jac}_{\{P_i\}}(g, e_i) = 1$

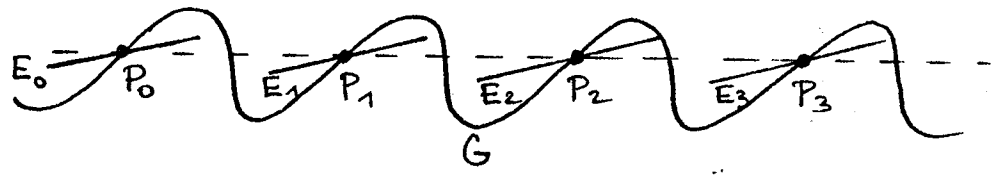
et $e_i(x,y) = \alpha_0 (x - x_i) + \beta_0 (y - y_i)$

Les points P_i doivent vérifier :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(P_i) & \frac{\partial g}{\partial y}(P_i) \\ \alpha_0 & \beta_0 \end{vmatrix} = 1$$

Même en imposant aux droites E_i d'être toutes parallèles, les points d'interpolation ne peuvent être choisis arbitrairement sur la courbe G.

Exemple :



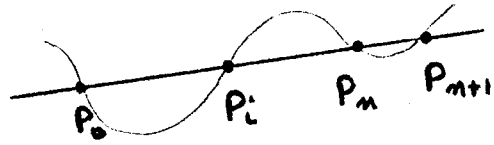
Reste le cas où tous les points d'interpolation $P_0, P_1, \ldots, P_m$ sont alignés.

Alors, toutes les conditions sur les différences d'ordre $n \geq 1$ sont vérifiées, car :

avec $e_i = e_0 - e_0(P_i) + \lambda_i d_{oi}$,

$$e_n(P_i) - e_{n+1}(P_i) - e_n(P_{n+1}) = \lambda_n d_{on}(P_i) - \lambda_{n+1} d_{on+1}(P_i) - \lambda_n d_{on}(P_{n+1}) = 0$$

(comme les P_i sont alignés, $\forall j \neq 0 \quad d_{oj}(P_i) = 0$)



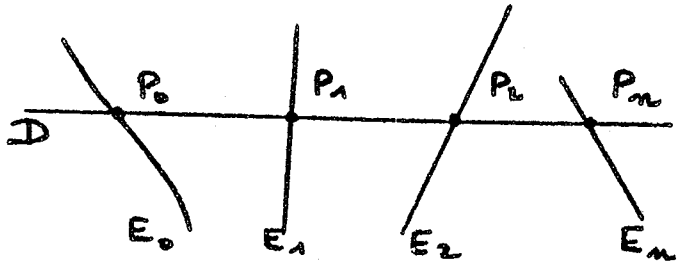
et $e_{n+1}(P_n) + e_n(P_{n+1}) = \lambda_n d_{on}(P_{n+1}) + \lambda_{n+1} d_{on+1}(P_n) = 0$

Par contre, on n'a pas forcément :

$\mathrm{Jac}_{\{P_i\}}(g, e_i) = 1$

De nouveau, les points d'interpolation ne sont pas des points alignés arbitraires sur la courbe G.

Pour cette raison, il n'est pas utile de se servir de g ; il vaut mieux remplacer cette équation par une équation de la droite $\mathcal{D}$ portant les P_i : soit $d = 0$



$E_i \neq \mathcal{D}$

Montrons que dans ce cas, les différentes normalisations des e_i en fonction de d sont compatibles.

$$\forall i \qquad \mathrm{Jac}_{\{P_i\}}(d, e_i) \underset{\text{notation}}{=} \mathrm{Jac}(d, e_i) = \begin{vmatrix} \frac{\partial d}{\partial x} & \frac{\partial d}{\partial y} \\ \frac{\partial e_i}{\partial x} & \frac{\partial e_i}{\partial y} \end{vmatrix}$$

ces quatre termes étant constants
(d et e_i sont des polynômes de $d^\circ \leq 1$).

Supposons d fixée.

$\mathrm{Jac}_{\{P_0\}}(d, e_0) = 1$ impose une **normalisation de e_0 en fonction de d**.

Les relations sur les différences d'ordre ≥ 1 imposent d'écrire les équations e_i sous la forme : $\boxed{e_i = e_0 - e_0(P_i) + \lambda_i\, d_{oi}}$ $\lambda_i \in \mathbb{C}$

Mais alors, $\mathrm{Jac}(d, e_i) = \mathrm{Jac}(d, e_0) + \lambda_i \underbrace{\mathrm{Jac}(d, d_{oi})}$

(propriétés des déterminants)

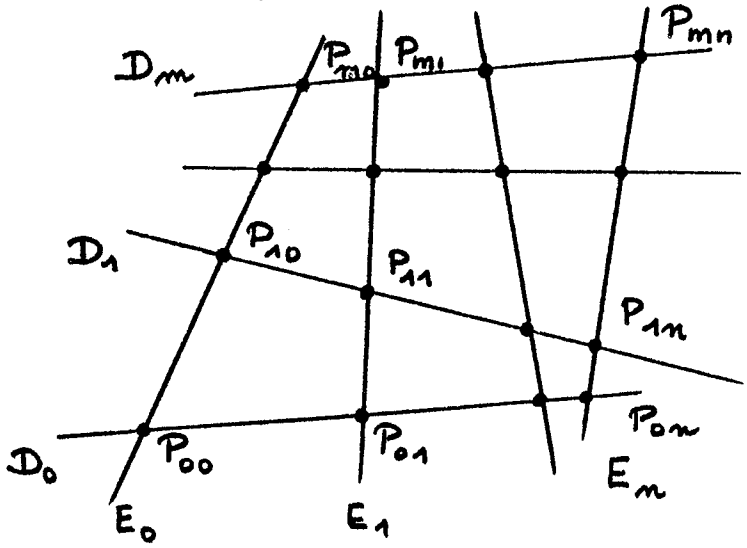
comme d et d_{oi} sont deux équations de la même droite $\mathcal{D}$, ce jacobien est nul

et la condition $\mathrm{Jac}_{\{P_i\}}(d, e_i) = 1$ est automatiquement vérifiée.

En écrivant les équations des droites E_i sous cette forme, les "formules d'Hermite" sont vraies à tous ordres.

IV Etude d'un réseau : deux systèmes de droites D_i et E_j $\quad 0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$

D'après le paragraphe précédent, pour des points d'interpolation à l'intersection d'une droite D et de droites E_j distinctes de D, les "formules d'Hermite" sont valables. Essayons donc de généraliser cette situation en ajoutant des points d'interpolation à l'intersection des mêmes droites E_j avec d'autres droites D_i, de sorte que tous les points soient distincts.



$\begin{cases} D_i \text{ d'équation } d_i \\ E_j \text{ d'équation } e_j \end{cases}$

$P_{ij} = D_i \cap E_j$ supposé à distance finie, et les $f(P_{ij})$ connues pour $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$

1) Interpolation de Newton

Cherchons à priori le **polynôme p d'interpolation** dans l'espace vectoriel engendré par :

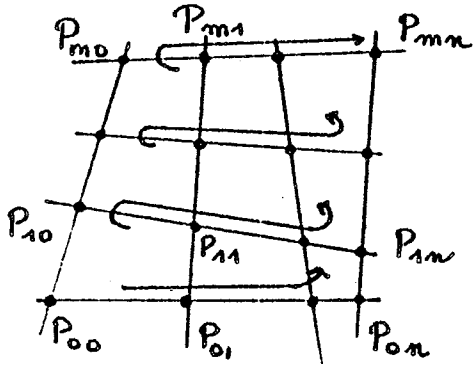
$$\begin{cases} 1 , & e_0 , & e_0 e_1 , & \dots , & e_0 e_1 \dots e_{n-1} \\ d_0 , & d_0 e_0 , & d_0 e_0 e_1 , & , & d_0 e_0 e_1 \dots e_{n-1} \\ d_0 d_1 , & d_0 d_1 e_0 , & d_0 d_1 e_0 e_1 , & , & d_0 d_1 e_0 \dots e_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ d_0 d_1 \dots d_{m-1} , & d_0 d_1 \dots d_{m-1} e_0 , & d_0 d_1 \dots d_{m-1} e_0 e_1 , & \dots , & d_0 \dots d_{m-1} e_0 \dots e_n \end{cases}$$

ou de manière plus concise, l'espace vectoriel engendré par les $\boxed{(\omega_i \Omega_j)_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}}}$, avec $\omega_i = \prod_{k=0}^{i} d_{k-1}$, $\Omega_j = \prod_{\ell=0}^{j} e_{\ell-1}$

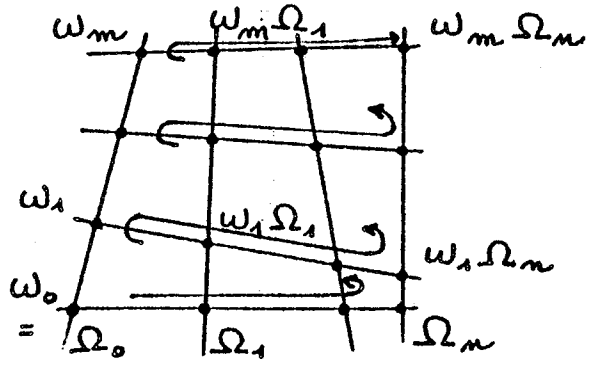
Soit $p = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij}\ \omega_i\ \Omega_j$.

On choisit un ordre de parcours des points P_{ij} vérifiant la règle du rectangle : utilisation de l'équation : $p(P_{ij}) = f(P_{ij})$ après toutes les équations $p(P_{kl}) = f(P_{kl})$ et $0 \leq k \leq i$, $0 \leq l \leq j$, par exemple :

ordre lexicographique sur les couples (i,j) :
$P_{00}, P_{01}, \dots, P_{0n}$; $P_{10}, P_{11}, \dots, P_{1n}$; $\dots$, $P_{m0}, P_{m1}, \dots, P_{mn}$



points d'interpolation



polynômes de "base"

Soit A la matrice unicolonne des a_{ij}, écrits dans le même ordre que les P_{ij}, par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ \vdots \\ a_{0n} \\ a_{10} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m0} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A_i = \begin{pmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$$

Soit F la matrice unicolonne des $f(P_{ij})$, toujours écrits dans le même ordre :

$$F = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad F_i = \begin{pmatrix} f(P_{i0}) \\ f(P_{i1}) \\ \vdots \\ f(P_{in}) \end{pmatrix}$$

Alors les équations $p(P_{ij}) = f(P_{ij})$ $\quad 0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$ équivalent au système triangulaire :

$$T\,A = F$$

où :

$$T = \begin{pmatrix} T_{00} & & & & \\ T_{10} & T_{11} & & 0 & \\ \boxed{T_{20} \quad T_{21} \quad T_{22}} & & & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ T_{m0} & T_{m1} & T_{m2} & \dots & T_{mm} \end{pmatrix}$$

carrée d'ordre $(m+1)(n+1)$

où les matrices $\underline{T_{ij}}$ sont carrées d'ordre $n+1$ et **triangulaires**

Le bloc n° i :

$$\boxed{(T_{i0} \; T_{i1} \dots T_{ii} \; \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{T_{ii+1}} \dots \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{T_{im}})\, A_i = F_i}$$ correspond

aux $n+1$ équations : $\quad p(P_{ij}) = f(P_{ij})$ pour $0 \leq j \leq n$

de sorte que :

$$T_{00} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 1 & e_0(P_{01}) & 0 & & 0 & \\ 1 & e_0(P_{02}) & e_0e_1(P_{02}) & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & e_0(P_{0n}) & e_0e_1(P_{0n}) & \dots & e_0e_1\dots e_{n-1}(P_{0n}) & \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{points} \\ P_{00} \\ P_{01} \\ P_{02} \\ \vdots \\ P_{0n} \end{array}$$

- pour $i>0$ $\quad T_{0i} = 0$, car $\forall \ell \quad \omega_i(P_{0\ell}) = 0$
  et les termes $\underset{i>0}{a_{ij}}$ n'interviennent pas dans $p(P_{0\ell})$
- T_{00} est triangulaire, car pour $j > \ell$ $\quad \Omega_j(P_{0\ell}) = 0$

Points $P_{10}, P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1n}$:

$$T_{10} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & \Omega_1(P_{11}) & & & \\ 1 & \Omega_1(P_{12}) & \Omega_2(P_{22}) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & \Omega_1(P_{1n}) & \Omega_2(P_{1n}) & \dots & \Omega_n(P_{1n}) \end{pmatrix}$$

$$T_{11} = \begin{pmatrix} \omega_1(P_{10}) & & & & \\ \omega_1(P_{11}) & \omega_1\Omega_1(P_{11}) & & & \\ \omega_1(P_{12}) & \omega_1\Omega_1(P_{12}) & \omega_1\Omega_2(P_{12}) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \omega_1(P_{1n}) & \omega_1\Omega_1(P_{1n}) & \omega_1\Omega_2(P_{12}) & \dots & \omega_1\Omega_n(P_{1n}) \end{pmatrix}$$

- T_{10} et T_{11} sont triangulaires, car pour $j > l$ $\Omega_j(P_{1l}) = 0$
- pour $i > 1$ $T_{1i} = 0$ car $\forall l$ $\omega_i(P_{1l}) = 0$

Plus généralement, la forme de T est due à :

pour $\boxed{i > k \text{ ou } j > l \qquad \omega_i\Omega_j(P_{kl}) = 0}$

ainsi : quand $i < k$, $T_{ik} = 0$

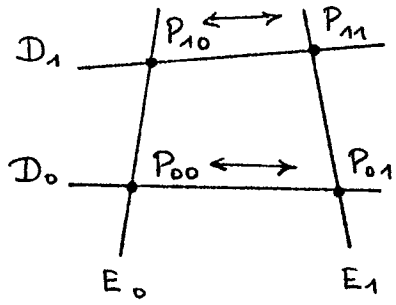
et quand $i \geq k$:

$$\boxed{T_{ik} = \begin{pmatrix} \omega_k\Omega_0(P_{i0}) & & & & \\ \omega_k\Omega_0(P_{i1}) & \omega_k\Omega_1(P_{i1}) & & & \\ \omega_k\Omega_0(P_{i2}) & \omega_k\Omega_1(P_{i2}) & \omega_k\Omega_2(P_{i2}) & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \omega_k\Omega_0(P_{in}) & \omega_k\Omega_1(P_{in}) & \omega_k\Omega_2(P_{in}) & \dots & \omega_k\Omega_n(P_{in}) \end{pmatrix}}$$

De plus, T est inversible, car les termes diagonaux $\omega_i\Omega_l(P_{il})$ sont non nuls

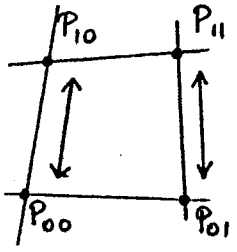
(en particulier, les $\omega_i\Omega_j$ forment un système libre)

Calculons par exemple le coefficient a_{11} :



Ce terme peut s'exprimer sous les deux formes symétriques en d et e :

$$a_{11} = \underbrace{\frac{\frac{f(P_{11})-f(P_{10})}{e_0(P_{11})} - \frac{f(P_{01})-f(P_{00})}{e_0(P_{01})}}{d_0(P_{11})}}_{\text{baptisée "différence divisée" à cause de sa forme (en e, puis d)}} + \underbrace{\frac{f(P_{10})-f(P_{00})}{e_0(P_{11})}\left(\frac{1}{d_0(P_{11})} - \frac{1}{d_0(}\right.}_{\text{terme complémentaire}}$$



ou bien :

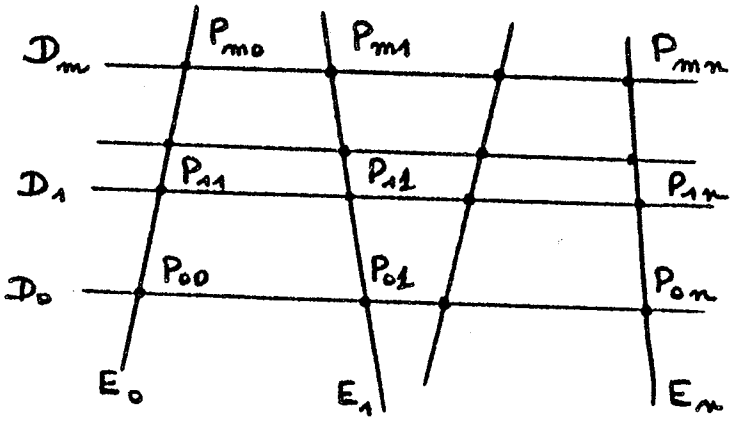
$$a_{11} = \underbrace{\frac{\frac{f(P_{11})-f(P_{01})}{d_0(P_{11})} - \frac{f(P_{11})-f(P_{00})}{d_0(P_{10})}}{e_0(P_{11})}}_{\text{"différence divisée" en d, puis e}} + \underbrace{\frac{f(P_{01})-f(P_{00})}{d_0(P_{11})}\left(\frac{1}{e_0(P_{11})} - \frac{1}{e_0(P_{01})}\right.}_{\text{terme complémentaire}}$$

Dans la première écriture le terme complémentaire est nul (pour toute f) si et seulement si : $d_0(P_{11}) = d_0(P_{10})$ c'est-à-dire : la droite $P_{10}P_{11}$ est parallèle à D_0. Alors, le dénominateur dans la différence divisée est $d_0(P_{11})$ aussi bien que $d_0(P_{10})$.

Dans la seconde écriture, cette fois le terme complémentaire est nul si et seulement si E_1 est parallèle à E_0.

Cette remarque nous conduit à supposer que l'un des

deux systèmes de droites est formé de droites toutes parallèl
par exemple, les D_i.



2) Résolution du système triangulaire $TA = F$ quand les droites D_i sont parallèles.

Avec cette hypothèse, l'équation d_i de la droite D_i est constante sur chaque droite D_k, de même que tous les polynômes ω_i.

Les matrices T_{ik} s'écrivent donc plus simplement:

$$T_{ik} = \omega_k(P_{i0}) \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & \Omega_1(P_{i1}) & & & \\ 1 & \Omega_1(P_{i2}) & \Omega_2(P_{i2}) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & \Omega_1(P_{in}) & \Omega_2(P_{in}) & \dots & \Omega_n(P_{in}) \end{pmatrix}$$

Les mêmes opérations entre les lignes de chacune des matrices $T_{i0}, T_{i1}, \dots, T_{ii}$ du bloc T_i vont servir à diagonaliser chacune de ces matrices.

Ces opérations sur les lignes utilisent des multiplications à gauche par des matrices élémentaires (inversibles): le système $TA = F$ équivaut au système final $IA = G$ où les éléments du vecteur colonne G seront par définition des **différences divisées**.

On procède en deux étapes :

- tout d'abord, des transformations **à l'intérieur de chaque bloc T_i** font apparaître à la place de A_i les différences divisées définies au paragraphe précédent, relatives à une seule droite D_i et des droites E_j, déjà notées $[d_i ; e_0, e_1, .., e_j]$
- puis, des opérations **entre les blocs** eux-mêmes introduisent les différences divisées $[d_0, d_1, .., d_i ; e_0, e_1, .., e_j]$.

C'est en fait un procédé tensoriel appliqué d'abord par rapport aux e_j, puis par rapport aux d_i.

① <u>Transformations à l'intérieur du bloc T_i :</u>

* La première opération amène un "1" et des "0" sur la première colonne de chaque T_{ik} :

$$T_{ik} \text{ devient } \omega_k(P_{i0}) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & \Omega_1(P_{i1}) & & 0 \\ 0 & \Omega_1(P_{i2}) & \Omega_2(P_{i2}) & \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & \Omega_1(P_{in}) & \cdots & \Omega_n(P_{in}) \end{pmatrix}$$

(en retranchant la ligne 0 à toutes les suivantes)

$$F_i \text{ devient } \begin{pmatrix} f(P_{i0}) \\ f(P_{i1}) - f(P_{i0}) \\ f(P_{i2}) - f(P_{i0}) \\ \vdots \\ f(P_{in}) - f(P_{i0}) \end{pmatrix}$$

On divise ensuite chaque ligne l par $e_0(P_{il}) \neq 0$ $\quad l \geqslant 1$

$$T_{ik} \longrightarrow \omega_k(P_{i0}) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & e_1(P_{i2}) & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ 0 & 1 & e_1(P_{in}) & \cdots e_1 \ldots e_{n-1}(P_{in}) \end{array}\right)$$

← matrice du même type que T_{ik}, mais d'ordre inférieur

$$\text{et} \quad F_i \longrightarrow \begin{pmatrix} f(P_{i0}) \\ \dfrac{f(P_{i1}) - f(P_{i0})}{e_0(P_{i1})} \\ \dfrac{f(P_{i2}) - f(P_{i0})}{e_0(P_{i2})} \\ \vdots \\ \dfrac{f(P_{in}) - f(P_{i0})}{e_0(P_{in})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [d_i ; e_0] \\ [d_i ; e_0, e_1] \\ [d_i ; e_0, e_2] \\ \\ [d_i ; e_0, e_n] \end{pmatrix}$$

* La seconde opération est analogue à la précédente, mais elle ne touche plus à la première ligne du bloc T_i
En retranchant la ligne 1 à toutes les suivantes :

$$T_{ik} \longrightarrow \omega_k(P_{i0}) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & e_1(P_{i2}) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & e_1(P_{in}) & \dots \quad e_1 \dots e_{n-1}(P_{in}) \end{pmatrix}$$

$$F_i \longrightarrow \begin{pmatrix} [d_i ; e_0] \\ [d_i ; e_0, e_1] \\ [d_i ; e_0, e_2] - [d_i ; e_0, e_1] \\ \vdots \\ [d_i ; e_0, e_n] - [d_i ; e_0, e_1] \end{pmatrix}$$

En divisant chaque ligne l $(l \geq 2)$ par $e_1(P_{il}) \neq 0$

$$T_{ik} \longrightarrow \omega_k(P_{i0}) \left(\begin{array}{cc|l} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad e_2(P_{i3}) \\ 0 & 0 & 1 \quad e_2(P_{in}) \quad \dots e_2 \dots e_{n-1}(P_{in}) \end{array}\right)$$

$$\text{et} \quad F_i \longrightarrow \begin{pmatrix} [d_i ; e_0] \\ [d_i ; e_0, e_1] \\ \dfrac{[d_i ; e_0, e_2] - [d_i, e_0, e_1]}{e_1(P_{i2})} \\ \vdots \\ \dfrac{[d_i ; e_0, e_n] - [d_i ; e_0, e_1]}{} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [d_i ; e_0] \\ [d_i ; e_0, e_1] \\ [d_i ; e_0, e_1, e_2] \\ \vdots \\ [d_i ; e_0, e_1, e_n] \end{pmatrix}$$

* En itérant le procédé (analogue à la méthode de Gauss), on obtient :

$$T_{ik} \longrightarrow \omega_k(P_{io}) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots\ 1 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{matrice identité d'ordre } n+1 : \mathbf{I}$$

$$\text{et } F_i \longrightarrow \begin{pmatrix} [d_i ; e_0] \\ [d_i ; e_0, e_1] \\ [d_i ; e_0, e_1, e_2] \\ \vdots \\ [d_i ; e_0, e_1, \dots, e_n] \end{pmatrix}$$

A la fin de ces transformations, le système initial équivaut donc à :

$$\begin{array}{l} \text{bloc 0} \\ (\mathcal{D}_0) \\ \\ \text{bloc 1} \\ (\mathcal{D}_1) \\ \\ \text{bloc 2} \\ (\mathcal{D}_2) \\ \\ \vdots \\ \\ \text{bloc m} \\ (\mathcal{D}_m) \end{array} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{I} & & & & \\ \hline \mathbf{I} & \omega_1(P_{10})\mathbf{I} & & & \\ \hline \mathbf{I} & \omega_1(P_{20})\mathbf{I} & \omega_2(P_{20})\mathbf{I} & & \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \hline \mathbf{I} & \omega_1(P_{m0})\mathbf{I} & \omega_2(P_{m0})\mathbf{I} & \dots & \omega_m(P_{m0})\mathbf{I} \end{array}\right] \left\| \begin{array}{c} A_0 \\ \hline A_1 \\ \hline A_2 \\ \hline \vdots \\ \hline A_m \end{array} \right\| = \left[\begin{array}{l} [d_0 ; e_0] \\ [d_0 ; e_0, e_1] \\ \vdots \\ [d_0 ; e_0, e_1, \dots, e_n] \\ \hline [d_1 ; e_0] \\ [d_1 ; e_0, e_1] \\ \vdots \\ [d_1 ; e_0, e_1, \dots, e_n] \\ \hline [d_2 ; e_0] \\ [d_2 ; e_0, e_1] \\ \vdots \\ [d_2 ; e_0, e_1, \dots, e_n] \\ \hline \vdots \\ \hline [d_m ; e_0] \\ [d_m ; e_0, e_1] \\ \vdots \\ [d_m ; e_0, e_1, \dots, e_n] \end{array}\right]$$

Cette matrice est en fait du même type que les matrices T_{ik} précédentes, si on considère que ses éléments sont des matrices d'ordre $n+1$.

② Opérations entre les blocs

Par exemple, la première étape consiste à retrancher chaque ligne $l \geqslant 1$ du bloc 0 à chaque ligne l des blocs suivants :

$$T \longrightarrow \begin{pmatrix} I & & & \\ 0 & \omega_1(P_{10})I & & \\ 0 & \omega_1(P_{20})I & \omega_2(P_{20})I & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & \omega_1(P_{m0})I & \omega_2(P_{m0})I & \dots \omega_m(P_{m0})I \end{pmatrix}$$

$$F \rightarrow \left(\begin{array}{l} [d_0;e_0] \\ \vdots \\ [d_0;e_0,..,e_n] \\ \hline [d_1;e_0]-[d_0;e_0] \\ \vdots \\ [d_1;e_0,..,e_n]-[d_0;e_0,..e_n] \\ \hline \vdots \\ \hline [d_m;e_0]-[d_0;e_0] \\ \vdots \\ [d_m;e_0,..,e_n]-[d_0;e_0,..e_n] \end{array}\right)$$

En divisant ensuite chaque bloc $l \geqslant 1$ par $d_0(P_{l0}) \neq 0$:

$$T \longrightarrow \left[\begin{array}{l|l} I & \\ \hline 0 & \begin{array}{ll} I & 0 \\ & \end{array} \\ & \\ 0 & \begin{array}{lll} I & d_1(P_{20})I & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & I & d_1(P_{m0})I \dots d_{1}\dots d_{m-1}(P_{m0})I \end{array} \end{array}\right] \quad F \rightarrow \left[\begin{array}{l} [d_0;e_0] \\ \vdots \\ [d_0;e_0,..,e_n] \\ \hline \dfrac{[d_1;e_0]-[d_0;e_0]}{d_0(P_{10})} \\ \vdots \\ \dfrac{[d_1;e_0,..,e_n]-[d_0;e_0,..,e_n]}{d_0(P_{10})} \\ \hline \vdots \\ \hline \dfrac{[d_m;e_0]-[d_0;e_0]}{d_0(P_{m0})} \\ \vdots \end{array}\right]$$

Les étapes suivantes sont tout à fait analogues à celle-ci, les opérations se faisant bloc à bloc (c'est-à-dire entre les lignes de même indice à l'intérieur de chacun des blocs).

Le résultat de ces transformations appliquées à F nous amène à définir les différences divisées de la manière suivante :

Définition du § III

$$\begin{cases} \forall\, i,j \qquad [d_i ; e_j] = f(P_{ij}) \\ \forall\, i,n \qquad [d_i ; e_0, \dots, e_{n+1}] = \dfrac{[d_i ; e_0, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}] - [d_i ; e_0, \dots, e_{n-1}, e_n]}{e_n(P_{i\,n+1})} \\ \forall\, m,n \qquad [d_0, \dots, d_{m+1} ; e_0, \dots, e_n] = \dfrac{[d_0, \dots, d_{m-1}, d_{m+1} ; e_0, \dots, e_n] - [d_0, \dots, d_{m-1}, d_m ; e_0, \dots, e_n]}{d_m(P_{m+1,0})} \end{cases}$$

Remarque : Du fait que les droites D_i sont parallèles, le dénominateur : $d_m(P_{m+1,0}) = d_m(P_{m+1,k})\ \forall k$. (dans la définition, il n'y a pas de raison de privilégier un de ces points par rapport aux autres).
Attention : cette définition n'est pas commutative à priori, au moins quand les droites E_j ne sont pas parallèles.

Théorème : Le système final est :

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ \hline A_1 \\ \hline \vdots \\ \hline A_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [d_0 ; e_0] \\ \vdots \\ [d_0 ; e_0, \dots, e_n] \\ \hline [d_0, d_1 ; e_0] \\ \vdots \\ [d_0, d_1 ; e_0, \dots, e_n] \\ \hline \vdots \\ \hline [d_0, d_1, \dots, d_m ; e_0] \\ \vdots \\ [d_0, d_1, \dots, d_m ; e_0, \dots e_n] \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :
pour $0 \leq i \leq m$
$0 \leq j \leq n$

$$a_{ij} = [d_0, \dots, d_i ; e_0, \dots, e_j]$$

et le polynôme d'interpolation de f (qui existe et est unique) dans l'espace considéré est :

$$P = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} [d_0, .., d_i ; e_0, .., e_j] \, d_0 \dots d_{i-1} \, e_0 \dots e_{j-1}$$

Remarque : Il est défini d'une manière identique à celle du chapitre 4.

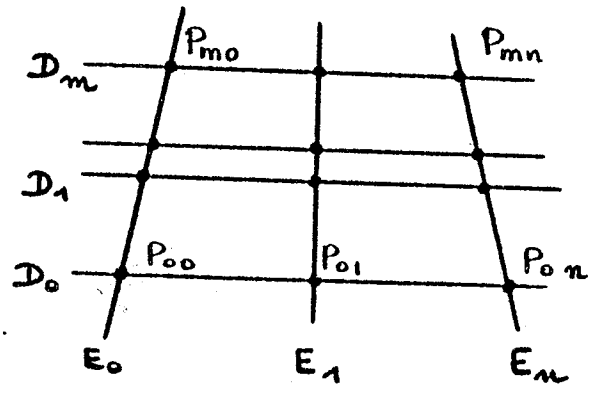
Si l'on s'affranchit de l'hypothèse de parallélisme sur les D_i, Maeztu [ ] montre que les coefficients peuvent aussi se calculer par récurrence, mais les relations sont beaucoup plus compliquées.

Cependant, nous étions intéressés par une forme intégrale de ces coefficients.

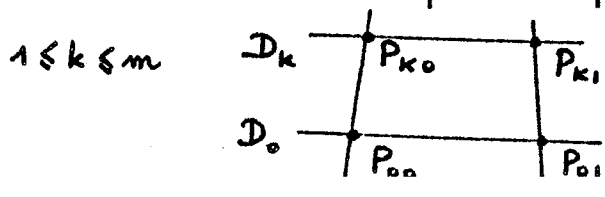
3) Différences divisées (doubles) et résidus.

Les "formules d'Hermite" établies au § III se généralisent elles à ce cadre :

$$(H) \qquad [d_0, .., d_i ; e_0, .., e_j] \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j} \operatorname{Res}_{\{P_{ij}\}} \left[\frac{f(x,y)\, dx \wedge dy}{d_0 \dots d_i \cdot e_0 \dots e_j} \right]$$



Cherchons une condition nécessaire, et pour cela, considérons les quatre points :



Le choix de d_0 équation de D_0 impose celui de e_0 équation de E_0 (normalisation issue de $[d_0; e_0]$), puis celui de e_1 équation de E_1 (normalisation issue de $[d_0; e_0, e_1]$) : $e_1 = e_0 - e_0(P_{01}) + \lambda_0 d_{P_{00}P_{01}}$

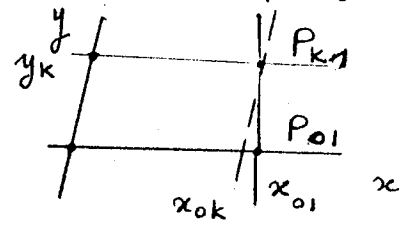
L'équation d_k de D_k est aussi fixée par $[d_0, d_k; e_0]$: $d_k = d_0 - d_0(P_{k0})$ parallèles.

Mais si l'on considère les différences divisées sur la droite D_k, en particulier $[d_k; e_0, e_1]$, e_1 doit vérifier $e_1 = e_0 - e_0(P_{k1}) + \lambda_k d_{P_{k0}P_{k1}}$.

Pour simplifier les calculs, supposons que D_0 soit l'axe des x, E_0 l'axe des y (cas auquel on peut toujours se ramener par un changement de repère)

$$\begin{cases} d_0(x,y) = -y \\ e_0(x,y) = x \end{cases} \qquad P_{00} = O$$

$$\mathrm{Jac}(d_0, e_0) = 1$$



dans ce cadre,

$$e_0(P_{k1}) - e_0(P_{01}) + \lambda_0 d_{P_{00}P_{01}} - \lambda_k d_{P_{k0}P_{k1}} \equiv 0$$

s'écrit : $$x_{k1} - x_{01} + \lambda_0(-x_{01}y) - \lambda_k(-x_{0k}y) \equiv 0$$

$$(x_{k1} - x_{01}) + y(\lambda_k x_{0k} - \lambda_0 x_{01}) \equiv 0$$

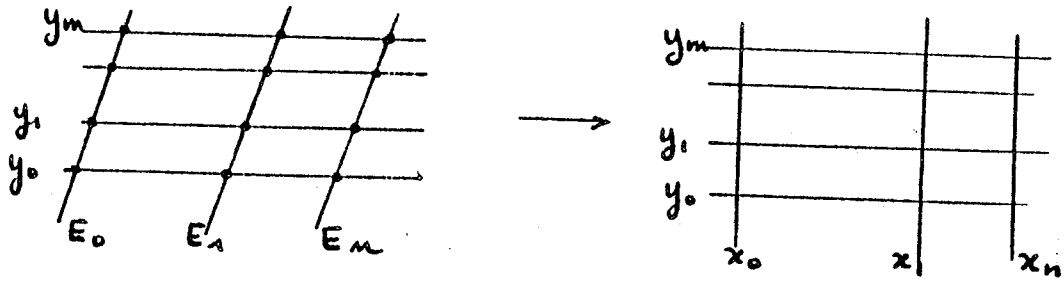
d'où :

$x_{k1} - x_{01} = 0$ c'est-à-dire $\underline{E_1 \parallel E_0}$

<u>Conséquence</u> : Pour que les formules d'Hermite (H) soient vérifiées, il est nécessaire que les droites E_j soient parallèles.

Mais alors, moyennant un changement de repère affine dans $\mathbb{C}^2$, c'est une configuration déjà étudiée au chapitre 4, pour laquelle ces formules sont vraies. On pourrait aussi les vérifier directement

par récurrence.



Pour deux systèmes de droites, le lien avec les résidus de la manière dont nous l'avons cherché, n'est possible que si chacun de ces systèmes est formé de droites parallèles ; ce qui ne généralise guère la situation du chapitre précédent.

Cependant, nous avons remarqué que le parallélisme des courbes qui forment l'un des deux systèmes suffit à définir des différences divisées : nous traitons ci-dessous un cas où ces courbes algébriques sont de degré 2.

V Interpolation polynômiale "circulaire" d'une fonction de deux variables complexes.

1) Différences divisées

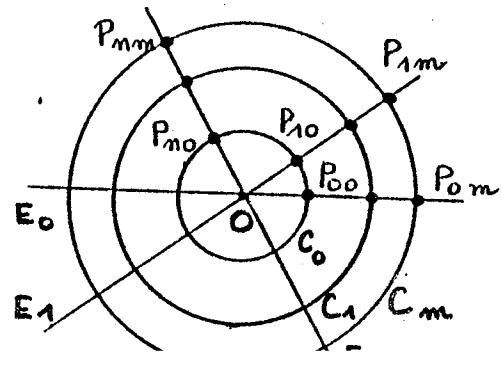
Soit C_i le "cercle" d'équation :

$0 \leq i \leq m$ $\quad c_i(x,y) = x^2 + y^2 - \kappa_i^2$, qui passe par les points P_{ij} : $(\kappa_i \alpha_j, \kappa_i \beta_j)$

$\kappa_i \in \mathbb{R}^{+*}$ $\qquad \alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1$

Soit E_j la droite d'équation :

$0 \leq j \leq n$ $\quad e_j(x,y) = \alpha_j y - \beta_j x$



Supposant connues les valeurs de f aux points P_{ij} $\begin{matrix}0\le i\le m\\ 0\le j\le n\end{matrix}$, le système

$p(P_{ij}) = f(P_{ij})$ pour $\begin{matrix}0\le i\le m\\ 0\le j\le n\end{matrix}$, où p est un

polynôme de l'espace vectoriel engendré par:

$$\begin{cases} 1 , & e_0 , & e_0e_1 , & \dots & e_0e_1\dots e_{n-1} \\ c_0 , & c_0e_0 , & c_0e_0e_1 , & & c_0e_0e_1\dots e_{n-1} \\ c_0c_1 , & c_0c_1e_0 , & c_0c_1e_0e_1 , & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ c_0c_1\dots c_{m-1} , & c_0\dots c_{m-1}e_0 , & \dots & & c_0\dots c_{m-1}e_0\dots e_{n-1} \end{cases}$$

est **triangulaire inversible**,

car $c_0c_1\dots c_k e_0\dots e_\ell\ (P_{ij}) = 0$ dès que $k \geqslant i$ ou $\ell \geqslant j$

et $c_0c_1\dots c_{i-1}e_0\dots e_{j-1}\ (P_{ij}) \neq 0$

(convention: $c_{-1} = e_{-1} = 0$)

En appliquant la même méthode que pour deux systèmes de droites, le coefficient de $c_0c_1\dots c_{i-1}e_0\dots e_{j-1}$ du développement de p dans le système libre ci-dessus est:

$[c_0,\dots,c_i\,;e_0,\dots,e_j]$ différence divisée de f définie par récurrence (double) par:

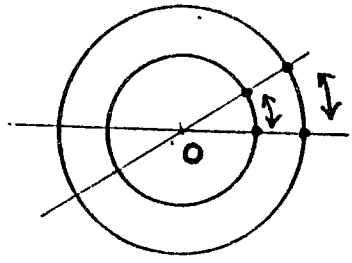
$\forall i$
$$\begin{cases} [c_i;e_0] = f(P_{i0}) \\ [c_i;e_0,e_1] = \dfrac{[c_i;e_1]-[c_i,e_0]}{e_0(P_{i1})} \\ \vdots \\ [c_i;e_0,e_1,\dots,e_{\ell+1}] = \dfrac{[c_i;e_0,\dots,e_{\ell-1},e_{\ell+1}]-[c_i;e_0,\dots,e_{\ell-1},e_\ell]}{e_\ell(P_{i,\ell+1})} \end{cases}$$

puis

$\forall \ell$
$$\begin{cases} [c_0,c_1;e_0,\dots,e_\ell] = \dfrac{[c_1;e_0,\dots,e_\ell]-[c_0;e_0,\dots,e_\ell]}{c_0(P_{10})} \\ \vdots \\ [c_0,c_1,\dots,c_{k+1};e_0,\dots,e_\ell] = \dfrac{[c_0,\dots,c_{k-1},c_{k+1};e_0,\dots,e_\ell]-[c_0,\dots,c_{k-1},c_k;e_0,\dots,e}{c_k(P_{k+1,0})} \end{cases}$$

Le fait que les cercles C_i soient **parallèles** ($C_j = C_i +$ constante) intervient de manière fondamentale à ce dernier niveau, car ainsi c_k est constant sur C_{k+1} et le dénominateur $c_k(P_{k+1,0})$ vaut aussi $c_k(P_{k+1,j})$ $\forall j$.

C'est aussi ce qui justifie l'ordre de définition : différences prises d'abord par rapport aux droites, puis par rapport aux cercles, car les droites ne sont pas parallèles.



Références

[1] G.V. CHUDNOVSKY (1979) Padé approximation and the Riemann problem. Lectures Cargese school on mathematical physics.

[2] P. GRIFFITHS - J. HARRIS (1978) Principles of algebraic geometry. Wiley - Interscience - John Wiley and Sons.

[3] H.A. HAKOPIAN (1982) Multivariate divided differences and multivariate interpolation of Lagrange and Hermite type. J. of Approx. Theory 34 p 286-305

[4] J.I. MAEZTU (1982) Divided differences associated with reversible systems in $\mathbb{R}^2$. J. SIAM. Numer. Anal. vol 1 n° 5 p 1032-1040.

[5] C.A. MICCHELLI (1979) On a numerically efficient method for computing multivariate B-splines, in "Multivariate approximation theory", ISNM 51. Schempp - Zeller ed. p 211-248.

[6] P. SABLONNIERE (1982) A new family of Padé-type approximants in $\mathbb{R}^k$. publication ANO 85. nov. 82. université de Lille 1.

6. Approximants de Padé multipoints d'une fonction de deux variables complexes

Introduction

Après l'interpolation rationnelle d'une fonction de deux variables complexes, quand toutes les données sont concentrées à l'origine, se pose naturellement le problème analogue quand les données concernent plusieurs points, et non plus un seul.

D'après l'étude qui précède (chapitres 4-5), l'interpolation polynômiale dans $\mathbb{C}^2$ possède des propriétés agréables, tant du point de vue algorithmique (polynôme de Newton) que théorique (erreur), quand l'ensemble des points d'interpolation est de type rectangulaire $\{ (x_k, y_\ell) \;/\; \begin{matrix} 0 \leq k \leq m \\ 0 \leq \ell \leq n \end{matrix} \}$, ou vérifie au moins la règle du rectangle.

C'est pourquoi nous nous limitons ici à ce type de points.

Nous avons le choix entre deux démarches :

- une approche théorique qui consiste à choisir habilement la nature du numérateur P, du dénominateur Q et les conditions de coïncidence de Qf avec P pour que les équations correspondantes admettent des solutions. C'est ainsi qu'apparaissent les déterminants de Hankel dans le cas d'une variable.
- une approche constructive, qui fournit directement des "fractions continues à deux variables" prenant les mêmes valeurs que f aux points d'un rectangle et dont les coefficients se calculent récursivement. C'est l'analogue

des fractions continues de Thiele concernant les fonctions d'une seule variable.

Notre préférence va bien sûr à la seconde méthode.

A) Approche théorique : équations

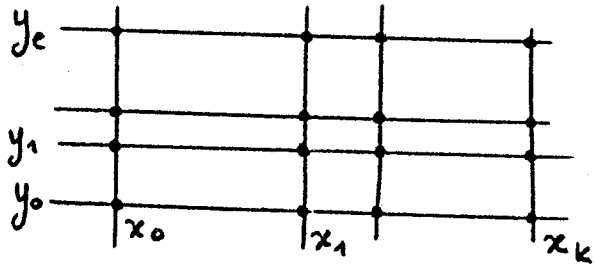
Pour un ensemble de points d'interpolation $\{(x_k, y_\ell) \;/\; (k,\ell) \in \mathbb{N}^2\}$ dans $\mathbb{C}^2$, l'analogue du développement de Mac-Laurin de f holomorphe en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} a_{k,\ell}\, x^k y^\ell$$

est le **développement de Newton** de f :

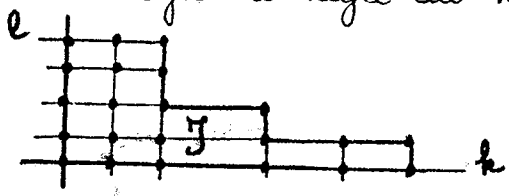
$$f(x,y) = \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} [x_0,..,x_k ; y_0,..,y_\ell ; f]\, \omega_k(x)\, \Omega_\ell(y)$$

(avec les notations du ch. 4)



I Ecriture des équations.

Dire que Qf coïncide avec P en les points (x_k, y_ℓ) où J vérifie la règle du rectangle : $(k,\ell)\in$



c'est dire que les termes correspondants du développement de Newton de $Qf - P$ sont nuls :

$$\forall (k,\ell) \in J \qquad [x_0,..,x_k ; y_0,..,y_\ell ; Qf - P] = 0$$

P, Q, f sont développés sous forme de Newton et comme
$[x_0,..,x_k; y_0,..,y_e; Qf - P] = [x_0,..,x_k; y_0,..,y_e; Qf]$
$- [x_0,..,x_k; y_0,..,y_e; P]$,
il est nécessaire de connaître le <u>développement de Newton d'un produit</u> en fonction de celui de chacun des facteurs.

1) <u>Formule de Leibniz établie par le procédé tensoriel.</u>

Calculons $[x_0,..,x_m; y_0,..,y_e; gh]$.

La formule de Leibniz pour une fonction gh d'une seule variable est:

$$[x_0,..,x_m; gh] = \sum_{k=0}^{m} [x_0,..,x_k; g][x_k,..,x_m; h]$$

(qui n'est autre que:
$(gh)^{(m)}(x_0) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \, g^{(k)}(x_0) \, h^{(m-k)}(x_0)$
quand $\forall i,\ x_i = x_0$)

Revenons à notre définition tensorielle des différences divisées doubles:

$$[x_0,..,x_m; y_0,..,y_n; (gh)(x,y)] = \Big[x_0,..,x_m ; \underbrace{[y_0,..,y_n; (gh)(x,y)]_y}_{\text{différences divisées en } y \text{ de la fonction d'une seule variable } y \to (gh)(x,y) \text{ à } x \text{ fixé}} \Big]_x$$

Or, $[y_0,..,y_n; (gh)(x,y)]_y$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} [y_0,..,y_\ell; g(x,y)]_y \, [y_\ell,..,y_n; h(x,y)]_y$$

Utilisons maintenant la linéarité des différences divisées en x par rapport à la fonction pour écrire:

$$[x_0,..,x_m;\ \sum_{\ell=0}^{n}\ [y_0,..,y_\ell;\ g(x,y)]_y\ [y_\ell,..,y_n;\ h(x,y)]_y\ ]_x$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n}\ [x_0,..,x_m\ ;\ \underbrace{[y_0,..,y_\ell;\ g(x,y)]_y\ [y_\ell,..,y_n;\ h(x,y)]_y}\ ]$$

produit de deux fonctions de x

Appliquons cette fois la formule de Leibniz en x à chaque terme de cette somme :

$$[x_0,..,x_m\ ;\ [y_0,..,y_\ell;g(x,y)]_y\ [y_\ell,..,y_n;h(x,y)]_y\ ]_x$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\ [x_0,..,x_k;[y_0,..,y_\ell;g(x,y)]_y\ ]_x\ [x_k,..,x_m;[y_\ell,..,y_n;h(x,y)]_y$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\ [x_0,..,x_k;\ y_0,..,y_\ell;\ g\ ]\ [x_k,..,x_m;\ y_\ell,..,y_n;\ h\ ]$$

par définition des différences divisées doubles.

Et ainsi, on a montré :

$$\boxed{[x_0,..,x_m;\ y_0,..,y_n;\ gh\ ] = \sum_{k=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{n}\ [x_0,..,x_k;\ y_0,..;\ y_\ell;\ g\ ][x_k,..,x_m;y_\ell,..y_n;}$$

Remarque 1 : On a tout aussi bien :

$$[x_0,..,x_m;\ y_0,..,y_n;gh\ ] = \sum_{k=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{n}\ [x_0,..,x_k;y_\ell,..,y_n;g\ ][x_k,..,x_m;y_0,..,y_\ell;h$$

Remarque 2 : lorsque $\begin{cases}\forall k & x_k = x_0\\ \forall \ell & y_\ell = y_0\end{cases}$, on obtient pour g et f holomorphes :

$$\frac{1}{m!\,n!}\ \frac{\partial^{m+n}(gh)}{\partial x^m\,\partial y^n}\ (x_0,y_0) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{n}\ \frac{1}{k!\,\ell!}\ \frac{\partial^{k+\ell}}{\partial x^k \partial y^\ell}\ g\ (x_0,y_0)\ \frac{1}{(m-k)!\,(n-\ell)!}\ \frac{\partial^{m-k+}}{\partial x^{m-}}$$

2) Considérations sur la nature de P, Q, et des conditions d'interpolation.

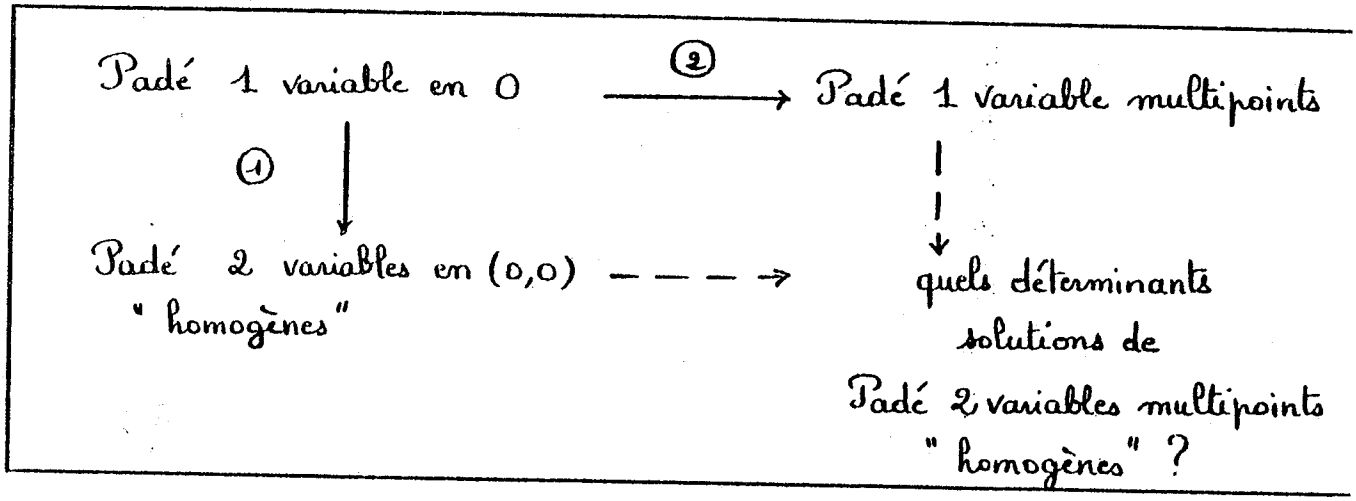
Une définition correcte d'approximants de Padé multipoints doit permettre de retrouver les approximants de Padé en un seul point par le passage à la limite : $\forall k \; x_k \to 0$, $\forall l \; y_l \to 0$

Or, même dans ce cas, il n'y a pas unicité de la définition (Brezinski, Chisholm, Cuyt, Karlsson-Wallin, Levin, Lutterodt). On pourra donc chercher à définir au moins autant de types d'approximants multipoints qu'il existe déjà d'approximants à l'origine.

II Exemples

1) Tentative de prolongement des approximants "homogènes"

Essayons de généraliser les approximants "homogènes" au cadre multipoints, en transformant les formules qui donnent les solutions sous forme de déterminants :



Passage ① :

En faisant apparaître explicitement les termes $f_k x^k$ du développement de $f(x)$ à l'origine dans le déterminant, d'ordre M+1 :

$$Q^{[L/M]}(x) = \begin{vmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \cdots & c_L & x^M \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \cdots & c_{L+1} & x^{M-1} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ c_{L+1} & c_{L+2} & \cdots & c_{L+M} & 1 \end{vmatrix}$$

et en leur substituant les polynômes homogènes $P_k(x,y) = \sum_{i=0}^{k} c_{i,k-i}\, x^i y^{k-i}$ du développement de $f(x,y)$ en $(0,0)$

on obtient le dénominateur des approximants "homogènes" (à un facteur multiplicatif près qui est le même pour le numérateur) :

$$Q^{[L/M]}(x,y) = \begin{vmatrix} P_{L-M+1} & P_{L-M+2} & \cdots & P_L & 1 \\ P_{L-M+2} & P_{L-M+3} & \cdots & P_{L+1} & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ P_{L+1} & P_{L+2} & \cdots & P_{L+M} & 1 \end{vmatrix}$$

Passage ② :

- Cette fois, le déterminant $Q^{[L/M]}(x)$ est remplacé par :

$$\begin{vmatrix} f_{M,L+1} & f_{M,L+2} & \cdots & f_{M,L+M} & \omega_M(x) \\ f_{M-1,L+1} & f_{M-1,L+2} & \cdots & f_{M-1,L+M} & \omega_{M-1}(x) \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ f_{0,L+1} & f_{0,L+2} & \cdots & f_{0,L+M} & \omega_0(x) \end{vmatrix}$$

où $f_{i,j}$ désigne la différence divisée d'ordre $j-i$ de f prise entre les points $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$, encore notée $[x_i, \ldots, x_j ; f]$, et où $\omega_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$.

Introduisons les notations suivantes :

$\omega_{k,\ell}(x) = \prod_{i=k}^{\ell-1} (x - x_i)$ (si $k > \ell$ $\omega_{k,\ell} = 1$)

de sorte que, pour $k \leq \ell \leq m$: $\omega_{k,\ell} \times \omega_{\ell,m} = \omega_{k,m}$

$\boxed{f_{k,k+\ell} \quad \omega_{k,k+\ell} = P_\ell^k}$ polynôme de degré $\leq \ell$, qui intervient dans le développement de Newton de f utilisant les points $x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots$:

$$f(x) = \sum_{\ell \geq 0} P_\ell^k(x) \qquad \text{(formellement)}$$

En mettant ω_M en facteur dans la dernière colonne, le dénominateur devient :

$$Q^{[L/M]} = \begin{vmatrix} f_{M,L+1} & f_{M,L+2} & \cdots & f_{M,L+M} & 1 \\ f_{M-1,L+1} & f_{M-1,L+2} & \cdots & f_{M-1,L+M} & \dfrac{1}{\omega_{M-1,M}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ f_{0,L+1} & f_{0,L+2} & \cdots & f_{0,L+M} & \dfrac{1}{\omega_{0,M}} \end{vmatrix} \omega_M$$

et en multipliant la

1ère colonne par $\omega_{M,L+1}$

2ème colonne par $\omega_{M,L+2}$

$\vdots$

Mième colonne par $\omega_{M,L+M}$, on obtient :

$$Q^{[L/M]} \times \omega_{M,L+1} \times \omega_{M,L+2} \times \omega_{M,L+3} \times \cdots \times \omega_{M,L+M}$$

$$= \begin{vmatrix} P^M_{L-M+1} & P^M_{L-M+2} & \cdots & P^M_{L-} & 1 \\ \dfrac{P^{M-1}_{L-M+2}}{\omega_{M-1,M}} & \dfrac{P^{M-1}_{L-M+3}}{\omega_{M-1,M}} & \cdots & \dfrac{P^{M-1}_{L+1}}{\omega_{M-1,M}} & \dfrac{1}{\omega_{M-1,M}} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{P^0_{L+1}}{\omega_{0,M}} & \dfrac{P^0_{L+2}}{\omega_{0,M}} & \cdots & \dfrac{P^0_{L+M}}{\omega_{0,M}} & \dfrac{1}{\omega_{0,M}} \end{vmatrix} \omega_M$$

qui se simplifie en :

$$\begin{vmatrix} P^{M}_{L-M+1} & P^{M}_{L-M+2} & \cdots & P^{M}_{L} & 1 \\ P^{M-1}_{L-M+2} & P^{M-1}_{L-M+3} & \cdots & P^{M-1}_{L+1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P^{0}_{L+1} & P^{0}_{L+2} & \cdots & P^{0}_{L+M} & 1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{matrix} \omega_M \\ \hline \omega_{M-1,M} \cdots \omega_{0,M} \end{matrix}$$

- De la même manière, le numérateur :

$$\begin{vmatrix} f_{M,L+1} & f_{M,L+2} & \cdots & f_{M,L+M} & \sum_{j=M}^{L} f_{M,j}\ \omega_j \\ f_{M-1,L+1} & f_{M-1,L+2} & \cdots & f_{M-1,L+M} & \sum_{j=M-1}^{L} f_{M-1,j}\ \omega_j \\ \vdots & & & & \vdots \\ f_{0,L+1} & f_{0,L+2} & \cdots & f_{0,L+M} & \sum_{j=0}^{L} f_{0,j}\ \omega_j \end{vmatrix}$$

s'écrit :

$$\begin{vmatrix} f_{M,L+1} & f_{M,L+2} & \cdots & f_{M,L+M} & \sum_{j=M}^{L} f_{M,j}\ \omega_{M,j} \\ f_{M-1,L+1} & f_{M-1,L+2} & \cdots & f_{M-1,L+M} & \sum_{j=M-1}^{L} f_{M-1,j}\ \dfrac{\omega_{M-1,j}}{\omega_{M-1,M}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ f_{0,L+1} & f_{0,L+2} & \cdots & f_{0,L+M} & \sum_{j=0}^{L} f_{0,j}\ \dfrac{\omega_{0,j}}{\omega_{0,M}} \end{vmatrix} \omega_M$$

car $\omega_j = \omega_M\ \omega_{M,j}$.

En multipliant chacune des M premières colonnes par les mêmes polynômes que précédemment, et en factorisant les M dernières lignes, on obtient :

$$\begin{vmatrix} P^{M}_{L-M+1} & P^{M}_{L-M+2} & \cdots & P^{M}_{L} & \sum_{j=M}^{L} P^{M}_{j-M} \\ P^{M-1}_{L-M+2} & P^{M-1}_{L-M+3} & \cdots & P^{M-1}_{L+1} & \sum_{j=M-1}^{L} P^{M-1}_{j-M+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ P^{0}_{L+1} & P^{0}_{L+2} & \cdots & P^{0}_{L+M} & \sum_{j=0}^{L} P^{0}_{j} \end{vmatrix} \Big/ \begin{matrix} \omega_M \\ \hline \omega_{M-1,M} \cdots \omega_{0,M} \end{matrix}$$

Comme $\omega_{M,L+1} \times \omega_{M,L+2} \times \cdots \times \omega_{M,L+M}$

$\times \omega_{0,M} \times \omega_{1,M} \times \cdots \times \omega_{M-1,M}$

$= \omega_{0,L+1} \times \omega_{1,L+2} \times \cdots \times \omega_{M-1,L+M}$ produit de M polynômes de degré $L+1$,

$$\frac{P^{[L/M]}}{Q^{[L/M]}} = \frac{P^{[L/M]} \times \dfrac{\omega_{0,L+1}\ \omega_{1,L+2} \cdots \omega_{M-1,L+M}}{\omega_M}}{Q^{[L/M]} \times \dfrac{\omega_{0,L+1}\ \omega_{1,L+2} \cdots \omega_{M-1,L+M}}{\omega_M}}$$

$$= (*) \quad \begin{vmatrix} P^M_{L-M+1} & \cdots & P^M_L & \sum_{i=0}^{L-M} P^M_i \\ P^{M-1}_{L-M+2} & \cdots & P^{M-1}_{L+1} & \sum_{i=0}^{L-M+1} P^{M-1}_i \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ P^0_{L+1} & \cdots & P^0_{L+M} & \sum_{i=0}^{L} P^0_i \end{vmatrix} \Big/ \Big| \begin{matrix} P^M_{L-M+1} & P^M_{L-M+2} & \cdots & P^M_L & 1 \\ P^{M-1}_{L-M+2} & P^{M-1}_{L-M+3} & \cdots & P^{M-1}_{L+1} & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ P^0_{L+1} & P^0_{L+2} & \cdots & P^0_{L+M} & 1 \end{matrix} \Big|$$

quotient de deux déterminants qui ont une forme tout à fait analogue à celle des approximants " homogènes ".

Essayons de définir les $P^k_\ell(x,y)$ associés à une fonction $f(x,y)$ de deux variables connue aux points d'un rectangle.

- Quand tous les points sont confondus, $P^k_\ell = P_\ell$ polynôme homogène de degré ℓ, c'est-à-dire combinaison des $\ell+1$ polynômes $x^i y^{\ell-i}$ $\quad 0 \le i \le \ell$
- Quand $y = y_R$, on est ramené à une fonction de la seule variable x et P^k_ℓ doit vérifier :

$$P^k_\ell(x, y_R) = [x_k, \ldots, x_{k+\ell}\ ; y_R; f]\,(x-x_k)\ldots(x-x_{k+\ell-1})$$

- De même,

$$P^k_\ell(x_R, y) = [x_R; y_k, \ldots, y_{k+\ell}; f]\,(y-y_k)\ldots(y-y_{k+\ell-1})$$

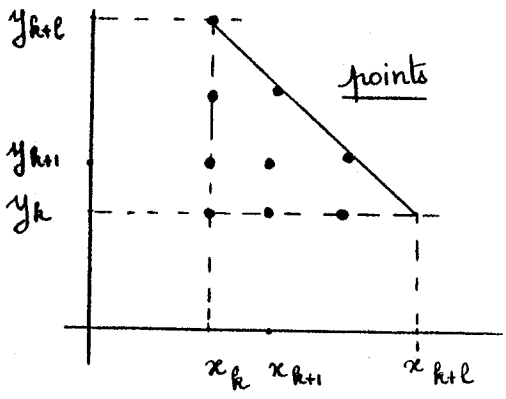
Notons $\Omega_{k,k+\ell}(y) = \prod_{j=k}^{k+\ell-1} (y-y_j)$, des raisons de symétrie nous conduisent à définir :

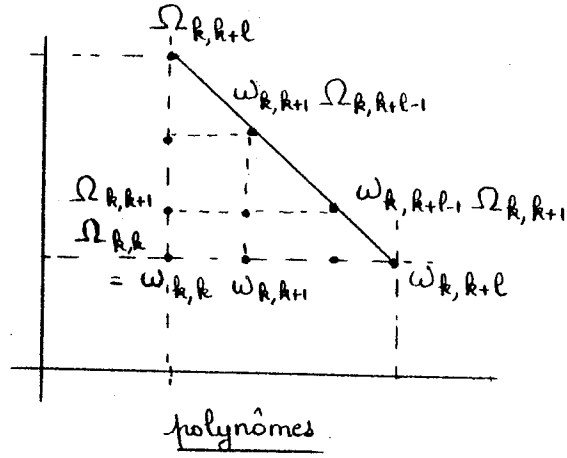
$$P_\ell^k(x,y) = [x_k,\dots,x_{k+\ell};y_k]\,\omega_{k,k+\ell}(x)\,\Omega_{k,k}(y)$$
$$+ [x_k,\dots,x_{k+\ell-1};y_k,y_{k+1}]\,\omega_{k,k+\ell-1}(x)\,\Omega_{k,k+1}(y)$$
$$+ \vdots$$
$$+ [x_k,x_{k+1};y_k,\dots,y_{k+\ell-1}]\,\omega_{k,k+1}(x)\,\Omega_{k,k+\ell-1}(y)$$
$$+ [x_k;y_k,\dots,y_{k+\ell}]\,\omega_{k,k}(x)\,\Omega_{k,k+\ell}(y)$$

ou de manière plus synthétique :

$$\boxed{P_\ell^k = \sum_{i=0}^{\ell} [x_k,\dots,x_{k+i};y_k,\dots,y_{k+\ell-i};f]\,\omega_{k,k+i}\,\Omega_{k,k+\ell-i}}$$

représenté schématiquement par :





Expertise :

En définissant $V^{[L/M]}$ et $V^{[L/M]}$ comme dans ⊛ pour une fonction $f(x,y)$, le reste :

$V^{[L/M]}f - U^{[L/M]}$ vaut :

$$\begin{vmatrix} P_{L-M+1}^M & \cdots & P_L^M & \sum_{i\geq L-M+1} P_i^M \\ P_{L-M+2}^{M-1} & \cdots & P_{L+1}^{M-1} & \sum_{i\geq L-M+2} P_i^{M-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{L+1}^0 & \cdots & P_{L+M}^0 & \sum_{i\geq L+1} P_i^0 \end{vmatrix}$$

Il devrait s'annuler pour tous les points (x_k,y_ℓ) du triangle : $k+\ell < (L+1)(M+1)$

Pour $M=0$, on retrouve bien le polynôme de Newton "triangulaire" de f.

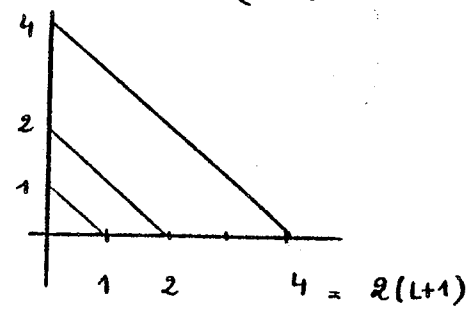
En particulier, pour $M = 1$:

$$U^{[L/1]} = \begin{vmatrix} P^1_L & \sum_{i=0}^{L-1} P^1_i \\ P^0_{L+1} & \sum_{i=0}^{L} P^0_i \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad V^{[L/1]} = \begin{vmatrix} P^1_L & 1 \\ P^0_{L+1} & 1 \end{vmatrix}$$

et le reste $V^{[L/1]} f - U^{[L/1]} = \begin{vmatrix} P^1_L & \sum_{i \geq L} P^1_i \\ P^0_{L+1} & \sum_{i \geq L+1} P^0_i \end{vmatrix}$

$$= \sum_{i \geq 0} \left(P^1_L \, P^0_{L+2+i} - P^0_{L+1} \, P^1_{L+1+i} \right)$$ ne s'annule pas forcément

pour tous les (x_k, y_ℓ) : $k + \ell < 2(L+1)$
(essai avec $L = 1$)

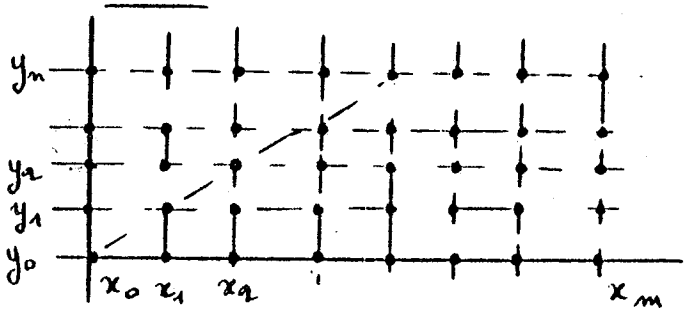


2) Exemple de résolution des équations.

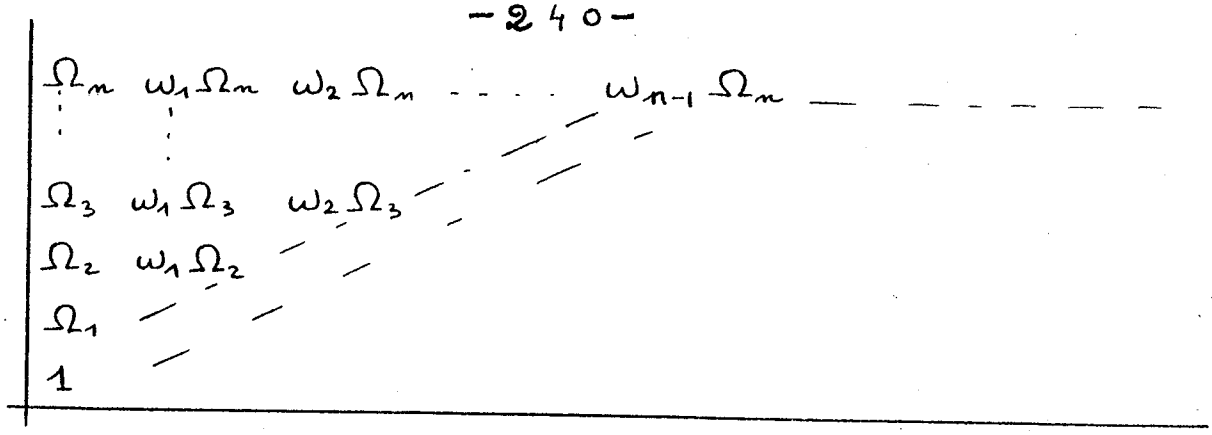
Considérons le cas particulier suivant :

Ensemble de points d'interpolation $\mathcal{Y} = \left\{ (x_k, y_\ell) \,/\, \begin{matrix} 0 \leq k \leq m \\ 0 \leq \ell \leq n \end{matrix} \right\}$

où $n \leq m$.

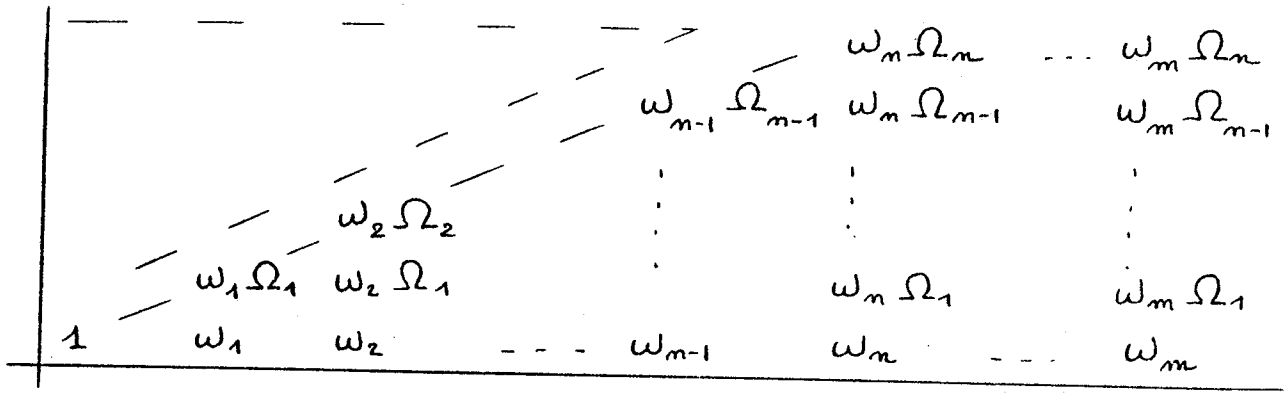


Recherche du dénominateur dans l'espace vectoriel engendré par :



sous la forme $$Q(x,y) = \sum_{\substack{l=0 \\ k<l}}^{n} q_{k,l}\, \omega_k(x)\, \Omega_l(y),$$

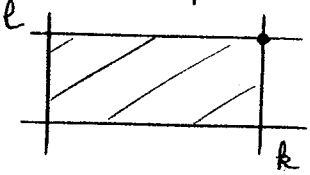
tandis que le numérateur appartient à l'espace vectoriel engendré par :



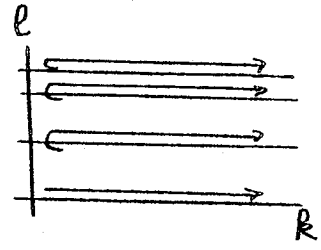
$$P(x,y) = \sum_{\substack{k=0 \\ l \leq \inf(k,n)}}^{m} p_{k,l}\, \omega_k(x)\, \Omega_l(y)$$

Le système linéaire $(Qf - P)(x_k, y_l)$ $\quad 0 \leq k \leq m$, $0 \leq l \leq n$
est formé de $(m+1)(n+1)$ équations
à $(m+1)(n+1) + 1$ inconnues.

A cause de la nature des polynômes $\omega_k(x)\,\Omega_l(y)$, seuls les coefficients de P et Q d'indices (i,j) avec $0 \leq i \leq k$ et $0 \leq j \leq l$ interviennent dans l'équation $E_{k,l} : (Qf - P)(x_k, y_l) = 0$



Écrivons les équations $E_{k,\ell}$ dans l'ordre:



$\left\{\begin{array}{l}\ell \text{ croissant de } 0 \text{ à } n,\\ \text{pour un même } \ell,\ k \text{ croissant de } 0 \text{ à } m\end{array}\right.$
compatible avec la règle du rectangle.

Alors, quand on passe d'une équation à la suivante, un seul coefficient supplémentaire apparaît, car les deux espaces vectoriels précédents ont une intersection réduite aux constantes; pour $E_{k,\ell}$, c'est:
$p_{k,\ell}$ si $k \geqslant \ell$, $q_{k,\ell}$ si $k < \ell$.
Le système est triangulaire.

Des manipulations analogues à celles du chapitre 5 IV 1) (interpolation de Newton) entre les blocs de la matrice correspondante (un bloc étant associé aux équations d'une même ligne de points : $E_{k,\ell}$: $0 \leqslant k \leqslant n$) et aussi à l'intérieur de chaque bloc, le ramènent aux $(m+1)(n+1)$ équations :

$0 \leqslant k \leqslant m$

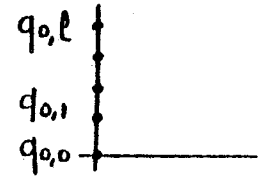
$0 \leqslant \ell \leqslant n$:

$$\sum_{j=0}^{\ell} [x_0, .., x_k; y_j, .., y_\ell]\, q_{0,j} + \sum_{i=1}^{\inf(k,\ell-1)} \left(\sum_{j=i+1}^{\ell} [x_i, .., x_k; y_j, .., y_\ell]\, q_{i,j} \right) = 1 \quad P_{k,\ell}$$

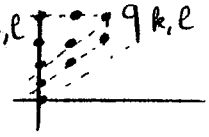
De manière plus explicite,

- le coefficient $q_{0,\ell}$ $(0 < \ell \leqslant n)$ du dénominateur est déterminé en fonction des $q_{0,j}$ $(j < \ell)$ par:

$$\sum_{j=0}^{\ell} [x_0; y_j, .., y_\ell]\, q_{0,j} = 0$$



• Plus généralement, pour $k<\ell$, le terme $q_{k,\ell}$ est déterminé en fonction des $q_{i,j}$ $(i<j,\ i\leq k,\ j\leq \ell)$ par :

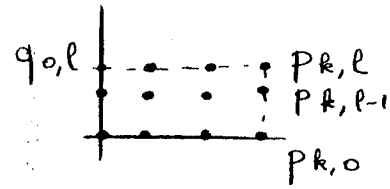


$$\sum_{j=0}^{\ell} [x_0,..,x_k;y_j,..,y_\ell]\, q_{0,j} + \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=i+1}^{\ell} [x_i,..,x_k;y_j,..,y_\ell]\, q_{i,j}\right)=0$$

où n'interviennent que les valeurs de f aux points (x_i,y_j) $\begin{matrix} i\leq k \\ j\leq \ell \end{matrix}$.

• De même pour les coefficients $p_{k,\ell}$ $(k\geq \ell)$ du numérateur, qui sont liés aux $q_{i,j}$ $(i\leq k, j\leq \ell)$ par :

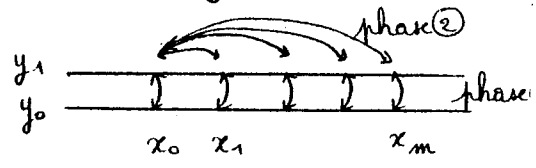
$$\sum_{j=0}^{\ell} [x_0,..,x_k;y_j,..,y_\ell]\, q_{0,j} + \sum_{i=1}^{\ell-1}\left(\sum_{j=i+1}^{\ell} [x_i,..,x_k;y_j,..,y_\ell]\, q_{i,j}\right)= p_{k,\ell}$$



En particulier,

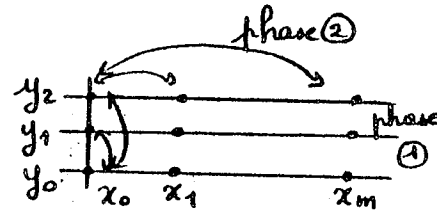
* $p_{k,0} = [x_0,..,x_k;y_0]\, q_{0,0}$
et $\sum_{k=0}^{m} p_{k,0}\,\omega_k(x)\,\Omega_0(y)$ est le polynôme de Newton de $q_{0,0}f$ relatif aux points (x_k,y_0) de la 1ère ligne.

* Les équations transformées de la seconde ligne donnent :



$$\begin{cases} [x_0; y_0, y_1]\ q_{0,0} + [x_0; y_1]\ \boxed{q_{0,1}} = 0 \\ [x_0, x_1; y_0, y_1]\ q_{0,0} + [x_0, x_1; y_1]\ q_{0,1} = \boxed{P_{1,1}} \\ [x_0, x_1, x_2; y_0, y_1]\ q_{0,0} + [x_0, x_1, x_2; y_1]\ q_{0,1} = \boxed{P_{2,1}} \\ \vdots \\ [x_0, x_1, \dots, x_m; y_0, y_1]\ q_{0,0} + [x_0, x_1, \dots, x_m; y_1]\ q_{0,1} = \boxed{P_{m,1}} \end{cases}$$

* Pour la troisième ligne, on obtient :

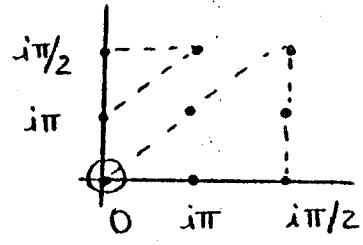


$$\begin{cases} [x_0; y_0, y_1, y_2]\ q_{0,0} + [x_0; y_1, y_2]\ q_{0,1} + [x_0; y_2]\ \boxed{q_{0,2}} = 0 \\ [x_0, x_1; y_0, y_1, y_2]\ q_{0,0} + [x_0, x_1; y_1, y_2]\ q_{0,1} + [x_0, x_1; y_2]\ q_{0,2} + [x_1; y_2]\ \boxed{q_{1,2}} = 0 \\ [x_0, x_1, x_2; y_0, y_1, y_2]\ q_{0,0} + [x_0, x_1, x_2; y_1, y_2]\ q_{0,1} + [x_0, x_1, x_2; y_2]\ q_{0,2} + [x_1, x_2; y_2]\ q_{1,2} = \boxed{P_{\cdot}} \\ \vdots \\ [x_0, \dots, x_m; y_0, y_1, y_2]\ q_{0,0} + [x_0, \dots, x_m; y_1, y_2]\ q_{0,1} + [x_0, \dots, x_m; y_2]\ q_{0,2} + [x_1, \dots, x_m; y_2]\ q_{1,2} = \boxed{P_{\cdot}} \end{cases}$$

et ainsi de suite.

Remarque : suivant les valeurs que prend f, le système peut ne pas être inversible.

Exemple : $\boxed{f(x,y) = e^{x+y}}$



$x_0 = 0$, $x_1 = i\pi$, $x_2 = i\pi/2$
$\quad\|\quad\quad\|\quad\quad\|$
$y_0 \quad\quad y_1 \quad\quad y_2$

Pour $kl \neq 0$ $P_{kl} = 0$ et $q_{kl} = 0$

Finalement, on obtient comme fraction d'interpolation pour ce carré :

$$\frac{1 + \frac{2i}{\pi} x + \frac{4i}{\pi^2} x(x - i\pi)}{1 + \frac{2i}{\pi} y - \frac{4i}{\pi^2} y(y - i\pi)}$$ qui n'est autre que le

quotient : $\dfrac{\text{polynôme de Newton de } e^{x} \text{ relatif à } 0, i\pi, i\pi/2}{\text{polynôme de Newton de } e^{-y} \text{ relatif à } 0, i\pi, i\pi/2}$

Plus généralement, pour une fonction

$f(x,y)$ du type $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(y)}$

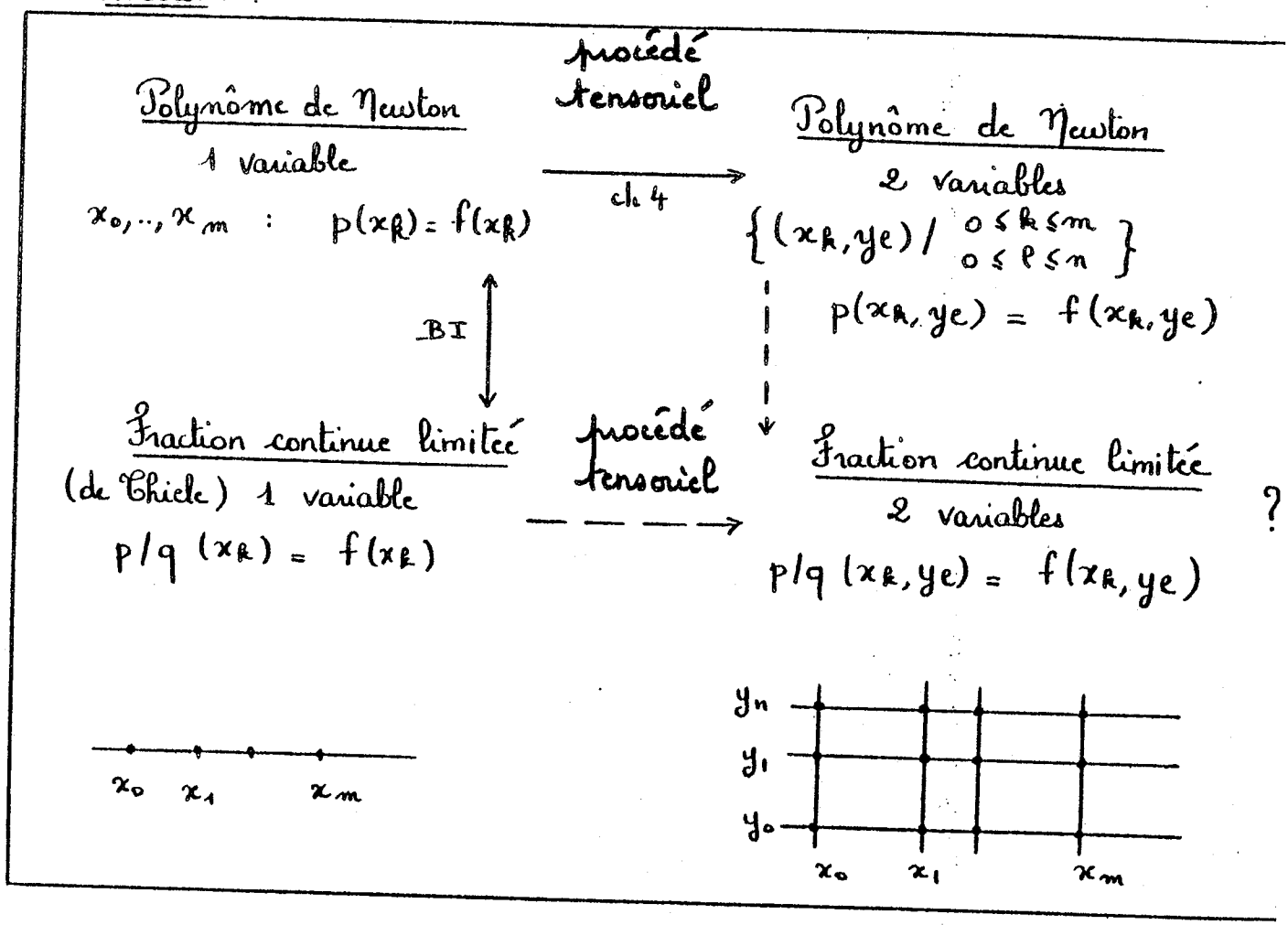
où ψ ne s'annule pas aux points $y_0, y_1, \ldots, y_n$, soient $P(x)$ le polynôme de Newton de φ relatif aux points $x_0, x_1, \ldots, x_m$ et $Q(y)$ le polynôme de Newton relatif aux points $y_0, y_1, \ldots, y_n$.
Ces polynômes appartiennent aux espaces vectoriels de l'exemple et comme $\forall j \quad Q(y_j) \neq 0$,

$$\frac{P}{Q}(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) \qquad \text{pour } \begin{matrix} 0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n \end{matrix}.$$

Cette fraction est donc solution du problème.

B) Approche constructive : fractions continues d'interpolation à deux variables.

Le procédé tensoriel nous ayant permis de passer de l'interpolation de Newton à une variable à un certain type d'interpolation polynômiale à deux (ou plusieurs) variables, examinons de plus près la similitude entre interpolation polynômiale et interpolation rationnelle afin de compléter le diagramme suivant :



I Parallèle entre l'interpolation polynômiale et l'interpolation rationnelle.

1) Développements de Newton et de Thiele.

Notations : $$\cfrac{a_0}{b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots + \cfrac{a_m}{b_m}}}} = \frac{a_0}{|b_0} + \frac{a_1}{|b_1} + \cdots + \frac{a_m}{|b_m} = \overset{m}{\underset{i=0}{K}}\left(\frac{a_i}{b_i}\right)$$

ou bien

$$= \frac{d_0}{} \quad \frac{a_1}{} \quad \cdots \quad \frac{a_m}{}$$

Polynôme (de Newton)

$p(x_k) = f(x_k) \qquad 0 \le k \le m$

Fraction (de Thiele)

$r(x_k) = f(x_k)$

Expression

$$[x_0;f] + [x_0,x_1;f]\,\omega_1 + [x_0,x_1,x_2;f]\,\omega_2 + \cdots + [x_0,x_1,..,x_m;f]\,\omega_m$$

$$\omega_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

$$r = \Delta[x_0] + \cfrac{x-x_0}{\Delta[x_0,x_1]} + \cfrac{x-x_1}{\Delta[x_0,x_1,x_2]} + \cdots + \cfrac{x-x_{m-1}}{\Delta[x_0,x_1,..,x_m]}$$

Coefficients

Différences divisées de f

$[x_0,..,x_k;f]$ encore notée $f[x_0,..,x_k]$
comme coefficient de ω_k

Différences inverses divisées de f

$\Delta[x_0,\ldots,x_k]$
comme dénominateur de $x-x_k$

définis récurrivement par :

$$\begin{cases} [x_0;f] = f(x_0) \\ [x_0,x_1;f] = \dfrac{[x_1;f] - [x_0;f]}{x_1 - x_0} \\ \vdots \\ [x_0,x_1,\ldots,x_{k+1};f] = \dfrac{[x_0,..,x_{k-1},x_{k+1};f] - [x_0,..,x_{k-1},x_k;f]}{x_{k+1} - x_k} \end{cases}$$

(définies dès que $x_k \neq x_{k+1}$)

$$\begin{cases} \Delta[x_0] = f(x_0) \\ \Delta[x_0,x_1] = \dfrac{x_1 - x_0}{\Delta[x_1] - \Delta[x_0]} \\ \vdots \\ \Delta[x_0,..,x_{k+1}] = \dfrac{x_{k+1} - x_k}{\Delta[x_0,..,x_{k-1},x_{k+1}] - \Delta[x_0,..,x_{k-1},x_k]} \end{cases}$$

(pas toujours définies)

Calcul des coefficients

La définition des différences divisées les rend commutatives : $[x_0,..,x_k;f] = [x_{\sigma(0)},..,x_{\sigma(k)};f]$
pour toute σ permutation de $[0,k]$
tq $x_{\sigma(i)} \neq x_{\sigma(i+1)}$.

Par contre, ce n'est plus vraie pour les différences inverses divisées.
On peut les calculer en utilisant les différences réciproques, qui sont commutatives :

En particulier,

$$[x_0,..,x_{k+1};f] = \frac{[x_0,..,x_k;f]-[x_1,..,x_{k+1};f]}{x_0-x_{k+1}}$$

ce qui permet de les calculer en formant le tableau :

$[x_0;f]$
$[x_0,x_1;f]$
$[x_1;f]$
$[x_0,x_1,x_2;f]$
$[x_1,x_2;f]$
$[x_0,x_1,x_2,x_3;f]$
$[x_2;f]$
$[x_1,x_2,x_3;f]$
$[x_2,x_3;f]$
$[x_3;f]$
⋮

$$\begin{cases} \varrho[x_0] = f(x_0) \\ \varrho[x_0,x_1] = \dfrac{x_0-x_1}{\varrho[x_0]-\varrho[x_1]} \\ \vdots \\ \varrho[x_0,..,x_{k+1}] = \dfrac{x_0-x_{k+1}}{\varrho[x_0,..,x_k]-\varrho[x_1,..,x_{k+1}]} + \varrho[x_1,..,x_k] \end{cases}$$

On peut donc les calculer en les rangeant dans un tableau analogue au tableau ci-contre.

Puis, on utilise le lien :

$$\begin{cases} \Delta[x_0] = \varrho[x_0] \\ \Delta[x_0,x_1] = \varrho[x_0,x_1] \\ \Delta[x_0,x_1,x_2] = \varrho[x_0,x_1,x_2]-\varrho[x_0] \\ \vdots \\ \Delta[x_0,x_1,\dots,x_{k+1}] = \varrho[x_0,..,x_{k+1}]-\varrho[x_0,..,x_{k-1}] \end{cases}$$

$k \geq 1$

Formule exacte

$$f(x) = \underbrace{[x_0;f]+[x_0,x_1;f]\omega_1(x)+\dots+[x_0,..,x_m;f]\omega_m(x)}_{\text{polynôme } P_m(x)} + \underbrace{[x_0,..,x_m,x;f]\omega_{m+1}(x)}_{\text{erreur}}$$

(forme intégrale par la formule d'Hermite → convergence éventuelle)

$$f(x) = \underbrace{\Delta[x_0] + \frac{x-x_0}{\Delta[x_0,x_1]} + \dots + \frac{x-x_{m-1}}{\Delta[x_0,..,x_m]}}_{\text{fraction } r_m(x)} + \frac{x-x_m}{\Delta[x_0,..,x_m,x]}$$

Rq : on dispose aussi d'une forme intégrale des différences $\Delta[x_0,..,x_m,x]$ (Nörlund) → convergence

Calcul récurrent

des polynômes P_m

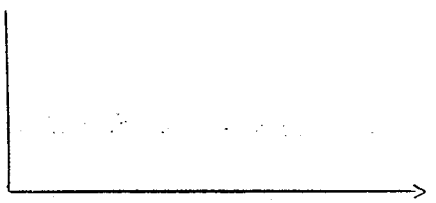
Simplement,

$$P_{m+1} = P_m + [x_0, .., x_{m+1}]\, \omega_{m+1}$$

où $\omega_{m+1}(x) = \prod_{i=0}^{m} (x - x_i)$

$d^\circ P_m \leqslant m$

Utilisation des P_k



des fractions r_m

Pour calculer les convergents successifs d'une fraction continue $\overset{\infty}{\underset{k=0}{K}}\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$, on utilise par exemple

l'algorithme descendant : en notant $p_m/q_m = \overset{m}{\underset{k=0}{K}}\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$ on a :

pour $m \geqslant 2$ $\begin{pmatrix} p_m \\ q_m \end{pmatrix} = a_m \begin{pmatrix} p_{m-2} \\ q_{m-2} \end{pmatrix} + b_m \begin{pmatrix} p_{m-1} \\ q_{m-1} \end{pmatrix}$

il suffit ici de l'appliquer à $\overset{\infty}{\underset{k=0}{K}}\left(\frac{x - x_k}{\Delta[x_0, .., x_{k+1}]}\right)$

Les convergents r_m de la fraction continue de Thiele forment l'escalier :

[0/0]

[1/0] [1/1]

[2/1] [2/2]

[3/2] [3/3]

⋮ ...

où, dans [k/ℓ] k désigne le degré du numérateur, et ℓ le degré du dénominateur de la fraction.

Plus généralement, en cherchant les fractions continues limitées de Thiele des fonctions $[x_0, \dots, x_k, x ; f] = \dfrac{f(x) - P_k(x)}{\omega_{k+1}(x)}$, on forme les escaliers :

[k+1/0]

[k+2/0] [k+2/1]

[k+3/1] [k+3/2]

⋮ ...

(en utilisant les points $x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, \dots$)

Quand f est un polynôme, le développement est fini.

Remarque : ces fractions $[k/\ell]$ $(k \geqslant \ell)$ sont les approximants de Padé-Newton de f. Pour les obtenir tous, quand c'est possible, on applique la même méthode à $1/f$ car : $[k/\ell]_{1/f} = 1/[\ell/k]_f$. Quand f est une fraction rationnelle, le développement est fini.

2) Cas limite où tous les x_i valent 0

↓

développement en

série de Mac-Laurin de f

$$f(x) = \sum_{k \geqslant 0} \underbrace{\frac{f^{(k)}(0)}{k!}}_{a_k} x^k$$

$$= \lim_{x_0, x_1, \ldots, x_k \to 0} [x_0, \ldots, x_k ; f]$$

les a_k font intervenir les dérivées de f en 0

fraction continue de f

$$f(x) = f(0) + \underset{k \geqslant 0}{\mathrm{K}} \left(\frac{x}{c_k} \right)$$

$$c_k = \lim_{x_0, x_1, \ldots, x_k \to 0} \Delta [x_0, \ldots, x_k]$$

Plus précisément, si on note $\varkappa_k f(x) = \lim_{x_0, \ldots, x_k \to x} \varrho [x_0, \ldots, x_k]$

on a :
$$\begin{cases} \varkappa_0 f(x) = f(x) \\ \varkappa_1 f(x) = \dfrac{1}{f'(x)} = \varkappa f(x) \\ n \geqslant 2 \quad \varkappa_n f(x) = n \varkappa \varkappa_{n-1} f(x) + \varkappa_{n-2} f(x) \end{cases}$$

appelées dérivées réciproques de f en x.

ainsi $c_k = (k+1) \varkappa \varkappa_k f(0)$; les premiers termes sont :

$$c_0 = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{a_0}$$

$$c_1 = \frac{-2(f'(0))^2}{f''(0)} = -\frac{a_1^2}{a_2}$$

$$c_2 = \frac{3(f''(0))^2}{f'(0)\,(2 f'(0) f'''(0) - 3(f''(0))^2)} = \frac{a_2^2}{a_1(a_1 a_3 - a_2^2)}$$

- Par exemple, pour la fonction e^x :
$\kappa_{2n}\, e^x = (-1)^n e^x$; $\kappa_{2n+1}\, e^x = (-1)^n (n+1) e^{-x}$,
ce qui donne le développement :

$$e^x = 1 + \cfrac{x}{1} + \cfrac{x}{-2} + \cfrac{x}{-3} + \cfrac{x}{2} + \cfrac{x}{5} + \cfrac{x}{-2} + \cdots$$

qui s'écrit encore :

$$e^x = 1 + \cfrac{x}{1} - \cfrac{x}{2} + \cfrac{x}{3} - \cfrac{x}{2} + \cfrac{x}{5} - \cfrac{x}{2} + \cfrac{x}{7} - \cdots - \cfrac{x}{2} + \cfrac{x}{2n+1} - \cdots$$

- $$(1+x)^\nu = 1 + \frac{\nu x}{1} + \frac{(1-\nu)x}{2} + \frac{(1+\nu)x}{3} + \frac{(2-\nu)x}{2} + \cdots + \frac{(n-\nu)x}{2} + \frac{(n+\nu)x}{2n+1} + \cdots$$

- $$\operatorname{tg} x = \cfrac{x}{1} - \cfrac{x^2}{3} - \cfrac{x^2}{5} - \cfrac{x^2}{7} - \cdots - \cfrac{x^2}{2n+1} - \cdots$$

- $$\operatorname{Log}(1+x) = \cfrac{x}{1} + \cfrac{1^2 x}{2} + \cfrac{1^2 x}{3} + \cfrac{2^2 x}{5} + \cdots + \cfrac{n^2 x}{2n} + \cfrac{n^2 x}{2n+1} + \cdots$$

D'autres exemples classiques portent sur la fonction Γ et les fonctions hypergéométriques.

Remarque : Les coefficients de ces fractions continues peuvent aussi être calculés par le qd. algorithme ; que Wuytack transforme en "qd-algorithme généralisé" pour les fractions continues multi-points. Signalons aussi le tg-algorithme de Claessens pour le calcul des approximants de Padé-Newton, directement lié à leur développement en fraction continue.

Exemple: la fraction continue limitée :

$$1 + \cfrac{x}{1} + \cfrac{x-1}{1} + \cfrac{x-2}{1} + \cfrac{x-3}{1}$$

est la fraction d'interpolation de f qui prend les valeurs :

$f(0) = 1$

$f(1) = 2$

$f(2) = 2$

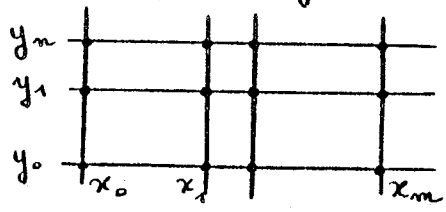
$f(3) = 5/2$

$f(4) = 13/5$

II Construction de fractions continues d'interpolation à deux variables.

1) Principe

ⓐ Supposant f connue aux points $(x_k, y_\ell)_{\substack{0 \le k \le m \\ 0 \le \ell \le n}}$,



considérons la fonction F_y d'une seule variable : (à y fixé)

$$\boxed{F_y : x \longrightarrow f(x,y)}$$

et sa fraction continue limitée d'interpolation bâtie sur les points $x_0, x_1, \dots, x_m$:

on note $\Delta_x [x_0, \dots, x_i ; y]$ les différences inverses divisées de la fonction F_y, prises entre les points $x_0, x_1, \dots, x_i$.

L'expression :

$$\Delta_x [x_0; y] + \cfrac{x - x_0}{\Delta_x [x_0, x_1; y]} + \cfrac{x - x_1}{\Delta_x [x_0, x_1, x_2; y]} + \cdots + \cfrac{x - x_{m-1}}{\Delta_x [x_0, x_1, \dots, x_m; y]}$$

prend les mêmes valeurs que F_y aux points $x_0, x_1, \dots, x_m$; mais ce n'est pas encore une fraction en x, y, car chacun des termes $\Delta_x [x_0, x_1, \dots, x_i ; y]$ est une fonction de y.

Par exemple,

$$\begin{cases} \Delta_x [x_0; y] = f(x_0, y) \\ \Delta_x [x_0, x_1; y] = \dfrac{x_1 - x_0}{f(x_1, y) - f(x_0, y)} \\ \Delta_x [x_0, x_1, x_2; y] = \dfrac{x_2 - x_1}{\dfrac{x_2 - x_0}{f(x_2, y) - f(x_1, y)} - \dfrac{x_1 - x_0}{f(x_1, y) - f(x_0, y)}} \end{cases}$$

(b) Interpolons chacune de ces fonctions de y :

$g_i : y \longrightarrow \Delta_x [x_0, \dots, x_i; y]$ pour $i \in [0, m]$

par la fraction continue limitée de Thiele en y, bâtie sur les points $y_0, y_1, \dots, y_n$.

En définissant $\boxed{\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y_j]}$ les différences inverses divisées de la fonction g_i, prises entre les points $y_0, \dots, y_j$, chaque fraction rationnelle en y :

$$\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_i; y_0] + \cfrac{y - y_0}{\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_i; y_0, y_1] + \cfrac{y - y_1}{\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_i; y_0, y_1, y_2] + \cdots + \cfrac{y - y_{n-1}}{\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_i; y_0, \dots, y}}}$$

prend les mêmes valeurs que g_i aux points $y_0, \dots, y_n$.

Par conséquent,

$$\Delta_{y,x} [x_0; y_0] + \underset{j=0}{\overset{n-1}{K}} \left(\frac{y - y_j}{\Delta_{y,x} [x_0; y_0, \dots, y_{j+1}]} \right) + \cfrac{x - x_0}{\Delta_{y,x} [x_0, x_1; y_0] + \underset{j=0}{\overset{n-1}{K}} \left(\dfrac{y - y_j}{\Delta_{y,x} [x_0, x_1; y_0, \dots, y_{j+1}]} \right)}$$

$$+ \cfrac{x - x_1}{\Delta_{y,x} [x_0, x_1, x_2; y_0] + \underset{j=0}{\overset{n-1}{K}} \left(\dfrac{y - y_j}{\Delta_{y,x} [x_0, x_1, x_2; y_0, \dots, y_{j+1}]} \right)} + \cdots + \cfrac{x - x_{m-1}}{\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_m; y_0] + \underset{j=0}{\overset{n-1}{K}} \left(\dfrac{y - y_j}{\Delta_{y,x} [x_0, \dots, x_m; y_0, \dots, y_{j+1}]} \right)}$$

qui, cette fois, est une fraction rationnelle en x, y et qu'on peut écrire de manière plus condensée :

$$\Delta_{y,x}[x_0;y_0] + \sum_{j=0}^{n-1} K\left(\frac{y-y_j}{\Delta_{y,x}[x_0;y_0,\dots,y_{j+1}]}\right)$$

$$+ \sum_{i=0}^{m-1} K\left(\frac{x-x_i}{\Delta_{y,x}[x_0,\dots,x_{i+1};y_0] + \sum_{j=0}^{n-1} K\left(\frac{y-y_j}{\Delta_{y,x}[x_0,\dots,x_{i+1};y_0,\dots,y_{j+1}]}\right)}\right)$$

prend les mêmes valeurs que f en tous les points (x_k, y_ℓ) $\begin{matrix}0\le k\le m\\ 0\le \ell\le n\end{matrix}$

En fait, en appliquant les formules exactes en x, puis en y pour chacune des g_i et $\Delta_x[x_0,\dots,x_m;y]$, on obtient l'égalité :

$f(x,y)$

$$= \Delta_{y,x}[x_0;y_0] + \cfrac{y-y_0}{\Delta_{y,x}[x_0;y_0,y_1]} + \dots + \cfrac{y-y_{n-1}}{\Delta_{y,x}[x_0;y_0,\dots,y_n]} + \cfrac{y-y_n}{\Delta_{y,x}[x_0;y_0,\dots,y_n,y]}$$

$$+ \cfrac{x-x_0}{\Delta_{y,x}[x_0,x_1;y_0] + \cfrac{y-y_0}{\Delta_{y,x}[x_0,x_1;y_0,y_1]} + \dots + \cfrac{y-y_{n-1}}{\Delta_{y,x}[x_0,x_1;y_0,\dots,y_n]} + \cfrac{y-y_n}{\Delta_{y,x}[x_0,x_1;y_0,\dots,y_n,y]}}$$

$$+ \vdots$$

$$+ \cfrac{x-x_{m-1}}{\Delta_{y,x}[x_0,\dots,x_m;y_0] + \cfrac{y-y_0}{\Delta_{y,x}[x_0,\dots,x_m;y_0,y_1]} + \dots + \cfrac{y-y_{n-1}}{\Delta_{y,x}[x_0,\dots,x_m;y_0,\dots,y_n]} + \cfrac{y-y_n}{\Delta_{y,x}[x_0,\dots,x_m;y_0,\dots,y_n,y]}}$$

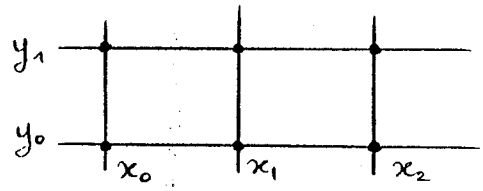
$$+\cfrac{x-x_m}{\Delta_{y,x}[x_0,..,x_m,x;y_0] + \cfrac{y-y_0}{\Delta_{y,x}[x_0,..,x_m,x;y_0,y_1]} + \cdots + \cfrac{y-y_{n-1}}{\Delta_{y,x}[x_0,..,x_m,x;y_0,..,y_n]} + \cfrac{y-y_n}{\Delta_{y,x}[x_0,..,x_m,x;y_0,..,y_n,y_{n+1}]}}$$

Cependant, il ne paraît pas simple d'exprimer l'erreur, car il apparaît des termes supplémentaires par rapport à ceux de la fraction continue d'interpolation dans toutes les fractions continues qui la composent : c'est ce qui résulte de la non-linéarité de cette interpolation.

2) Généralisations

• Au lieu de commencer par de l'interpolation suivant x, puis poursuivre suivant y, on peut échanger leurs rôles. Contrairement au cas de l'interpolation polynômiale, cette méthode ne fournit pas les mêmes fractions.

Par exemple, pour les 6 points :



en commençant par x, on obtient la fraction $r_{y,x}$:

$$f(x_0,y_0) + \cfrac{y-y_0}{\Delta_{y,x}[x_0;y_0,y_1]} + \cfrac{x-x_0}{\Delta_{y,x}[x_0,x_1;y_0] + \cfrac{y-y_0}{\Delta_{y,x}[x_0,x_1;y_0,y_1]} + \cfrac{x-x_1}{\Delta_{y,x}[x_0,x_1,x_2;y_0] + \cfrac{y-y_0}{\Delta_{y,x}[x_0,x_1,x_2;y_0,y_1]}}}$$

alors qu'en commençant par y, on obtient la fraction $r_{x,y}$:

$$f(x_0,y_0) + \frac{x-x_0}{\Delta_{x,y}[x_0,x_1;y_0] + \frac{x-x_1}{\Delta_{x,y}[x_0,x_1,x_2;y_0]}} + \frac{y-y_0}{\Delta_{x,y}[x_0;y_0,y_1] + \frac{x-x_0}{\Delta_{x,y}[x_0,x_1;y_0,y_1] + \frac{x-x_1}{\Delta_{x,y}[x_0,x_1,x_2;y_0,$$

	numérateur	dénominateur
$r_{y,x}$	y^3 y^2 y $\quad xy$ 1 $\quad x$	y^2 y 1 $\quad x$
$r_{x,y}$	$y \quad xy \quad x^2y$ $1 \quad x \quad x^2$	$1 \quad x \quad x^2$

Numérateurs et dénominateurs de ces deux fractions appartiennent à des espaces vectoriels différents.

C'est pourquoi il est <u>important de préciser l'ordre de définition des différences inverses divisées doubles</u> :

<u>$\Delta_{y,x}[x_0,..,x_i ; y_0,..,y_j]$ ou $\Delta_{x,y}[x_0,..,x_i;y_0,..,y_j]$</u>

qui sont en général distinctes, mais ne dépendent que des valeurs de f aux points $(x_k, y_\ell)_{\substack{0\le k\le i \\ 0\le \ell\le j}}$.

Par exemple :

$$\begin{cases} \Delta_{y,x}[x_0,x_1;y_0,y_1] = \dfrac{y_1-y_0}{\dfrac{x_1-x_0}{f(x_1,y_1)-f(x_0,y_1)} - \dfrac{x_1-x_0}{f(x_1,y_0)-f(x_0,y_0)}} \\ \neq \Delta_{x,y}[x_0,x_1;y_0,y_1] = \dfrac{x_1-x_0}{\dfrac{y_1-y_0}{f(x_1,y_1)-f(x_1,y_0)} - \dfrac{y_1-y_0}{f(x_0,y_1)-f(x_0,y_0)}} \end{cases}$$

Remarquons qu'il ne suffit pas de se donner le type du numérateur et du dénominateur, c'est-à-dire les espaces vectoriels où ils se trouvent, pour déterminer la fraction d'interpolation ; car dans l'exemple, nous avons à priori $9 = 10 - 1$ coefficients à choisir pour seulement 6 équations.

↑ facteur de proportionnalité pour $\frac{P}{Q}$

Il y a donc des <u>équations supplémentaires</u> cachées, ce qui semble définir un nouveau type d'approximants de Padé à deux variables, dans le cas limite où tous les x_i et y_j valent 0. (Chisholm introduit des équations supplémentaires pour ses approximants, obtenues par " symmétrisation ").

• De la même manière que pour atteindre d'autres escaliers dans la table de Padé-Newton d'une fonction d'une seule variable, on peut ici <u>mixer polynômes de Newton et fractions continues</u> pour obtenir d'autres sortes de fractions.

* Par exemple, <u>interpoler chacune des fonctions g_i</u> non plus par une fraction continue limitée, mais <u>par le polynôme de Newton</u> associé aux points $y_0, y_1, \dots, y_n$:

on note :

$\delta_y \Delta_x [x_0, .., x_i ; y_0, .., y_j]$	la différence divisée en y :
$[y_0, .., y_j ; \underbrace{\Delta_x [x_0, .., x_i ; y]}_{g_i(y)}]$	de la fonction $g_i(y)$

Cette fois, chaque $g_i(y)$ qui apparaît dans la fraction continue :

$$g_0(y) + \overset{m-1}{\underset{i=0}{K}} \left(\frac{x - x_i}{g_{i+1}(y)} \right)$$

est interpolée par :

$$\sum_{j=0}^{n} \delta_y \, \Delta_x [x_0,..,x_i ; y_0,..,y_j] \underbrace{\Omega_j(y)}_{\prod_{l=0}^{j-1}(y-y_l)} ,$$

ce qui donne la fraction rationnelle :

$$\sum_{j=0}^{n} \delta_y \, \Delta_x [x_0 ; y_0,..,y_j] + \mathop{K}_{i=0}^{m-1} \left(\frac{x - x_i}{\sum_{j=0}^{n} \delta_y \, \Delta_x [x_0,..,x_{i+1} ; y_0,..,y_j] \, \Omega_j(y)} \right)$$

De façon plus générale, entre ces deux cas extrêmes pour l'interpolation des g_i en y, (polynôme ou fraction de Thiele), on dispose de toutes les fractions intermédiaires obtenues en calculant le développement de Thiele de $\dfrac{g_i - \sum_{k=0}^{l} [y_0,..,y_k ; g_i] \, \Omega_k}{\Omega_{l+1}}$

entre les points $y_{l+1}, y_{l+2}, \ldots, y_n$. (cf. BI-1) calcul récurrent.

* Nous pouvons aussi changer de fraction continue non seulement au niveau des fonctions $g_i(y)$, mais dès le départ, au niveau de la fonction $F_y(x) = f(x,y)$.

Par exemple, son polynôme de Newton relatif aux points $x_0, x_1, .., x_m$ est :

$$\sum_{i=0}^{m} \underbrace{[x_0,x_1,..,x_i ; F_y]}_{\text{différence divisée en } x} \underbrace{\omega_i(x)}_{\prod_{k=0}^{i-1}(x-x_k)}$$

Pour homogénéiser les notations, on définit :

$\delta_x [x_0,..,x_i ; y] = [x_0,..,x_i ; F_y]$ qui est une fonction de y,

notée $h_i(y)$.

Il reste maintenant à interpoler chacune des fonctions $h_i(y)$ qui apparaît dans $\sum_{i=0}^{m} h_i(y)\,\omega_i(x)$ suivant les points $y_0, y_1, \dots, y_n$.

Si on utilise leurs polynômes de Newton, on retrouve l'interpolation de Newton du chapitre 4, le coefficient de $\omega_i(x)\,\Omega_j(y)$ étant $\boxed{\delta_y\,\delta_x\,[x_0,\dots,x_i\,;\,y_0,\dots,y_j]}$ alors noté $[x_0,\dots,x_i;y_0,\dots,y_j;f(x,y)]$

Si on utilise leurs fractions continues de Thiele, on obtient alors la fraction rationnelle :

$$\sum_{i=0}^{m}\left(\Delta_y\,\delta_x\,[x_0,\dots,x_i\,;\,y_0] + \mathop{\mathrm{K}}_{j=0}^{n-1}\left(\frac{x-x_j}{\Delta_y\,\delta_x\,[x_0,\dots,x_i\,;\,y_0,\dots,y_{j+1}]}\right)\right)\omega_i(x$$

où $\boxed{\Delta_y\,\delta_x\,[x_0,\dots,x_i\,;\,y_0,\dots,y_j]}$ est la différence inverse divisée en y de la fonction $h_i(y) = \delta_x\,[x_0,\dots,x_i\,;\,y]$

Les différentes fonctions intermédiaires qui apparaissent peuvent très bien être interpolées par des fractions de types différents, ce qui augmente encore la généralité.

Remarquons que les différents coefficients qui interviennent dans ces développements se calculent en appliquant successivement les algorithmes des différences divisées et des différences inverses divisées (ou inversement).

Cependant, les propriétés des fractions continues sont intimement liées à celles des transformations homographiques (de même que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ est associée aux transformations $u \longrightarrow a_n + u$

et que le produit infini $\prod_{n\geqslant 0} p_n$ est lié aux transformations $u \longrightarrow p_n\,u$.).

3) Interprétation utilisant des transformations homographiques (dans deux directions)

Soit $r(x,y)$ la première fraction continue obtenue au 1).

Ecriture du terme : $\Delta_{y,x}[x_0,..,x_i ; y_0] + \overset{n-1}{\underset{j=0}{K}} \left(\dfrac{y-y_j}{\Delta_{y,x}[x_0,..,x_i ; y_0,..,y_{j+1}]} \right)$

Soit $t_{i,0}$ la transformation homographique dans le plan complété $\hat{\mathbb{C}}$:

$$\begin{cases} t_{i,0} : v \longrightarrow \Delta_{y,x}[x_0,..,x_i ; y_0] + \dfrac{y-y_0}{v} \\ \text{puis} \\ t_{i,1} : v \longrightarrow \Delta_{y,x}[x_0,..,x_i ; y_0,y_1] + \dfrac{y-y_1}{v} \\ \vdots \\ \text{et} \\ t_{i,j} : v \longrightarrow \Delta_{y,x}[x_0,..,x_i ; y_0,..,y_j] + \dfrac{y-y_j}{v} \end{cases}$$

On a : $\Delta_{y,x}[x_0,..,x_i ; y_0] + \overset{n-1}{\underset{j=0}{K}} \left(\dfrac{y-y_j}{\Delta_{y,x}[x_0,..,x_i ; y_0,..,y_{j+1}]} \right)$

$$= \underline{t_{i,0} \circ t_{i,1} \circ \dots \circ t_{i,n-1}(\infty)}$$

Ecriture de $r(x,y)$:

Soit maintenant les transformations s_i dans le plan des u :

$$\begin{cases} s_0 : u \longrightarrow t_{0,0} \circ t_{0,1} \circ \dots \circ t_{0,n-1}(\infty) + \dfrac{x-x_0}{u} \\ s_1 : u \longrightarrow t_{1,0} \circ t_{1,1} \circ \dots \circ t_{1,n-1}(\infty) + \dfrac{x-x_1}{u} \\ \vdots \\ s_i : u \longrightarrow t_{i,0} \circ t_{i,1} \circ \dots \circ t_{i,n-1}(\infty) + \dfrac{x-x_i}{u} \end{cases}$$

de sorte que : $\boxed{R(x,y) = s_0 \circ s_1 \circ \dots \circ s_{m-1}(\infty).}$

4) Conclusion

Les fractions continues ainsi construites répondent au problème de l'interpolation rationnelle, et ceci de nombreuses manières différentes.

Il reste cependant à étudier la nature des réduites obtenues, ce qui semble conduire à de nouveaux types d'approximants de Padé à deux variables, dans le cas limite où tous les points sont confondus.

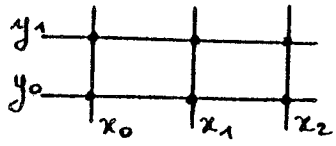
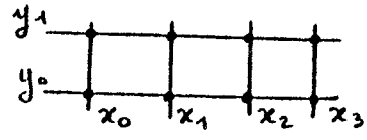
Un autre problème important est la recherche d'une forme agréable de l'erreur, pour la convergence éventuelle d'une suite de telles fractions vers la fonction qu'on interpole; ce qui ne découle pas immédiatement de la formule exacte.

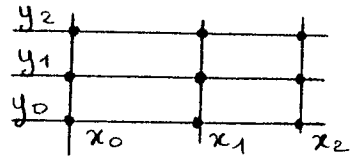
Références

[1] P. HENRICI (1974) Applied and computational complex analysis. Pure and Applied Mathematics. Wiley - Interscience
vol 1. Power series. Integration - Conformal mapping - Location of zeros
vol 2. Special functions. Integral transforms. Asymptotics - Continued fractions.

[2] W. B. JONES W.J. THRON (1980) Continued fractions. Analytic theory and applications. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. G.C. Rota ed.

Fractions continues à deux variables : quelques exemples des espaces vectoriels auxquels appartiennent numérateur et dénominateur.

	Numérateur	Dénominateur
$\Delta_{y,x}$	 y^3 y^2 $y \quad xy$ $1 \quad x$	y^2 y $1 \quad x$
$\Delta_{x,y}$	$y \quad xy \quad x^2y$ $1 \quad x \quad x^2$	$1 \quad x \quad x^2$
$\Delta_{y,x}$	 y^4 y^3 $y^2 \quad xy^2$ $y \quad xy$ $1 \quad x \quad x^2$	y^3 y^2 $y \quad xy$ $1 \quad x$
$\Delta_{x,y}$	$y \quad xy \quad x^2y$ $1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4$	$1 \quad x \quad x^2 \quad x^3$

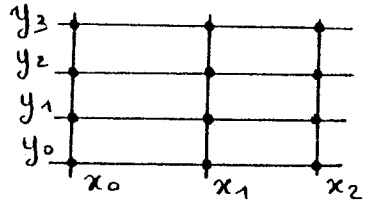


$\Delta_{y,x}$

$$\begin{array}{cc} y^3 & xy^3 \\ y^2 & xy^2 \\ y & xy \\ 1 & x \end{array} \qquad \begin{array}{cc} y^3 & xy^3 \\ y^2 & xy^2 \\ y & xy \\ 1 & 1 \end{array}$$

$\Delta_{x,y}$

$$\begin{array}{cccc} y & xy & x^2y & x^3y \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} y & xy & x^2y & x^3y \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{array}$$

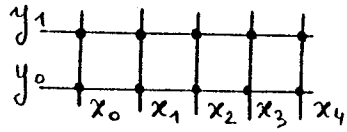


$\Delta_{y,x}$

$$\begin{array}{cc} y^6 & \\ y^5 & \\ y^4 & xy^4 \\ y^3 & xy^3 \\ y^2 & xy^2 \\ y & xy \\ 1 & x \end{array} \qquad \begin{array}{cc} y^5 & \\ y^4 & \\ y^3 & xy^3 \\ y^2 & xy^2 \\ y & xy \\ 1 & x \end{array}$$

$\Delta_{x,y}$

$$\begin{array}{ccccc} y^2 & xy^2 & x^2y^2 & x^3y^2 & x^4y^2 \\ y & xy & x^2y & x^3y & x^4y \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} y & xy & x^2y & x^3y & x^4y \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \end{array}$$



$\Delta_{y,x}$

$$\begin{array}{cc} y^5 & \\ y^4 & \\ y^3 & xy^3 \\ y^2 & xy^2 \\ y & xy \\ 1 & x \end{array} \qquad \begin{array}{cc} y^4 & \\ y^3 & \\ y^2 & xy^2 \\ y & xy \\ 1 & x \end{array}$$

$\Delta_{x,y}$

$$\begin{array}{ccccc} y & xy & x^2y & x^3y & x^4y \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \end{array}$$

DERNIERE PAGE D'UNE THESE

3E CYCLE, DOCTEUR INGÉNIEUR OU UNIVERSITÉ

Vu les dispositions de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu les rapports de M. ..Della Dora.....

M. .....

M.me...CHAFFY..Claudine..née..CAMUS..... est autorisé à présenter une thèse en vue de l'obtention du grade de DOCTEUR .de.3ème cycle.. .....

Grenoble, le 19 JUIN 1984

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale

M. TANCHE