

# THÈSES

présentées à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE  
DE GRENOBLE

pour obtenir le grade de  
DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

**Jean-Louis AURIAULT**

*PREMIÈRE THÈSE*

## **Contribution à l'étude de la consolidation des sols**

---

*DEUXIÈME THÈSE*

Propositions données par la Faculté

## **Sur une théorie de la thermodynamique des processus irréversibles dans les milieux continus**

---

Soutenues le 4 Avril 1973 devant la Commission d'Examen

M. NÉEL  
Membre de l'Institut

Président

M. KRAVTCHENKO

Rapporteur

M. CRAYA  
M. GASTINEL

Examineurs



DEUXIEME THESE

SUR UNE THEORIE DE LA THERMODYNAMIQUE  
DES PROCESSUS IRREVERSIBLES DANS LES MILIEUX CONTINUS

-----\*



## S O M M A I R E

|   | Pages |
|---|-------|
| I - INTRODUCTION .....  | 2     |
| II- EXPOSE DE LA METHODE .....  | 8     |
| A. Processus thermodynamique .....  | 8     |
| B. Inégalité de CLAUSIUS-DUHEM .....  | 10    |
| C. Les équations constitutives .....  | 10    |
| D. Conséquences de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM sur<br>l'écriture des lois constitutives ..... | 11    |
| III- PRESENTATION DE QUELQUES RESULTATS .....   | 14    |
| A. Description d'un matériau élastique viscoplastique .   | 14    |
| B. Matériau élastique-plastique .....   | 16    |
| C. Matériau hyper-élastique .....   | 19    |
| D. Matériau viscoélastique - viscoplastique .....   | 19    |
| IV- CONCLUSION .....  | 20    |
| BIBLIOGRAPHIE .....   | 21    |



## I - INTRODUCTION

La thermodynamique des milieux continus qui sont le siège de processus irréversibles a connu ces dix dernières années plusieurs tentatives pour élargir la théorie classique - basée sur les travaux de ONSAGER ([1] 1931) - aux processus non linéaires et éloignés de l'équilibre. En tenant compte de la théorie classique, on peut distinguer quatre approches. Toutes diffèrent par les postulats de base et aucune n'est communément admise ; aucune ne fait appel à la structure atomique : elles portent sur l'étude d'approximations macroscopiques propres à décrire les processus d'évolution de matériaux continus.

Nous nous proposons ici de détailler une de ces approches, issue des travaux de COLEMAN et NOLL et exploitée, entre autres, par TRUESDELL, GREEN, ZERNA et PERZYNA. Mais nous croyons utile de rappeler auparavant brièvement les bases des quatre théories afin de mieux situer la contribution des auteurs cités ci-dessus.

La première approche découle des travaux de ONSAGER ([1] 1931) et CASIMIR ([2] 1945). On en trouvera un exposé détaillé dans le livre de S.R. DE GROOT et P. MAZUR ([3] 1969) ou celui de H. ZIEGLER ([4] 1963). Cette théorie - dite théorie classique de la thermodynamique des processus irréversibles - est construite sur les postulats suivants :

1. La température et l'entropie existent en dehors de l'équilibre thermodynamique dont l'état considéré est voisin.
2. On admet le principe de l'état local. La relation de GIBBS, démontrée à l'équilibre thermodynamique, est valable au voisinage de celui-ci.
3. La variation de l'entropie est la somme d'un flux et d'une source positive qui peut être mise sous la forme d'une somme de produits entre flux et forces généralisées.
4. Les relations phénoménologiques sont des relations entre ces flux et ces forces.

5. Dans le cas où on admet que ces dernières relations sont linéaires, les coefficients des équations phénoménologiques vérifient les relations de réciprocity d'ONSAGER-CASIMIR.

Cette théorie est sujette à la critique, notamment en ce qui concerne les points 4 et 5 (cf. TRUESDELL [5]). Toutefois, limitée aux trois premiers points, elle apparaît comme cas particulier des théories plus générales développées dans la seconde et la quatrième approche abordées plus loin. Dans son ensemble, et bien que linéaire, elle a souvent donné de bons résultats, vérifiés expérimentalement.

\*  
\* \*  
\*

La seconde approche a pour point de départ les travaux de COLEMAN et NOLL (1963 [6]) ; elle a été développée ensuite par de nombreux auteurs dont TRUESDELL [7] , GREEN et ZERNA [8], PERZYNA [9].

Ses principaux postulats sont les suivants :

1. L'entropie et la température existent hors de l'équilibre.
2. L'état thermodynamique d'une particule est déterminé par l'histoire des états thermodynamiques de cette particule (principe de causalité et principe de localisation spatiale).
3. L'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM est admise hors de l'équilibre.
4. L'état thermodynamique du corps est décrit par un certain nombre de variables d'état indépendantes et de variables cachées ou variables internes. Les variables d'état suffisent à décrire l'évolution du milieu durant un processus thermodynamique réversible. Par contre, les variables cachées - prises constantes dans un processus réversible - décrivent la dissipation interne du matériau. Leurs évolutions dans le temps sont commandées par les variables d'état. Ainsi l'expérimentateur, qui provoque un processus thermodynamique dans un corps donné au moyen de certaines conditions aux frontières, ne peut pas imposer directement une évolution de ces variables cachées.

Il n'est fait aucune hypothèse tant sur la forme des relations constitutives qui peuvent être non-linéaires que sur la proximité d'un état

d'équilibre thermodynamique.

Cette théorie se prête bien aux développements mathématiques et l'introduction des variables cachées lui donne un champ d'application très étendu.

En partant de cette approche, COLEMAN [10] justifie l'utilisation de la formule de GIBBS pour les processus lents au voisinage d'un état d'équilibre thermodynamique, et fait ainsi apparaître la base de la théorie classique comme un cas particulier de cette approche.

Mais les fondements physiques de la théorie sont incertains et en particulier, rappelons-le, les notions d'entropie et de température hors de l'équilibre thermodynamique sont sujettes à caution.

En considérant des réseaux électriques comme des exemples particuliers de systèmes thermodynamiques, MEIXNER [11] montre que l'entropie d'un réseau n'est pas déterminée de manière unique si le comportement du réseau est étudié comme celui d'un milieu continu - c'est-à-dire si on cherche à définir l'entropie comme une fonction des sollicitations imposées et des réponses observables du milieu. Le réseau est, en quelque sorte, enfermé dans une boîte noire et seules ses extrémités sont accessibles à l'observateur. MEIXNER se fonde sur cette remarque pour rejeter la notion d'entropie hors de l'équilibre.

Toutefois, la non-unicité de l'entropie dans le sens évoqué ci-dessus est explicable dans le cadre de la deuxième approche : l'entropie y apparaît comme une fonction de quantités observables et de paramètres cachés ; deux séries distinctes de ces paramètres - auxquelles il correspond deux entropies distinctes - peuvent, a priori, décrire la partie observable de l'évolution d'un processus thermodynamique donné. Mais si nous savons déterminer de façon unique les variables cachées qui entrent en jeu, l'entropie est unique et découle - comme nous le verrons par la suite - de l'expression de l'énergie libre.

Le choix des variables cachées, au moyen de considérations physiques, semble bien constituer la pierre angulaire de cette théorie.

\* \*  
\* \*

Voulant s'affranchir de la notion d'entropie hors de l'équilibre thermodynamique, MEIXNER est à l'origine des deux approches suivantes.

\* \*  
\* \*

La troisième approche est basée sur les points suivants (MEIXNER [12] 1965) :

1. Les états thermodynamiques considérés sont voisins de l'état d'équilibre.
2. On n'admet pas le principe de l'état local.
3. L'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM est remplacée par une inégalité découlant du second principe de la thermodynamique et démontrée seulement pour un état d'équilibre.
4. Il existe une température hors de l'équilibre.
5. La notion d'entropie hors-équilibre n'existe pas.

\* \* \*

La quatrième approche, non linéaire, est fondée sur une inégalité fondamentale dont les caractéristiques sont les suivantes (MEIXNER [13] 1969) :

1. La notion d'entropie hors équilibre n'existe pas. Il intervient, par contre, une fonction auxiliaire qui est l'entropie d'un état d'équilibre thermodynamique fictif, calculé à partir de l'énergie interne et de la déformation dans l'état actuel.
2. On admet le principe de causalité et le principe de localisation spatiale. Les milieux étudiés sont matériellement simples.
3. Il existe une température définie hors équilibre.
4. Aucune condition de stabilité thermodynamique n'est utilisée.

MEIXNER [13] montre que la théorie classique des processus irréversibles apparaît comme un cas particulier de cette approche.

Les travaux de VALANIS [14] sont à rapprocher du point 1 ci-dessus concernant la définition d'une entropie hors-équilibre. Les variables d'état utilisées par cet auteur sont la déformation  $c$ , la température  $\theta$  et les variables cachées sont:  $q_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2 \dots p$ ).

La première loi de la thermodynamique implique le bilan énergétique suivant pour un système infinitésimal :

$$dQ = \frac{\partial \epsilon}{\partial c} dc + \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta} d\theta - Tdc$$

où  $Q(c, \theta, q_\alpha)$  est la quantité de chaleur fournie

$\epsilon(c, \theta, q_\alpha)$  est l'énergie interne

$T(c, \theta, q_\alpha)$  est la contrainte.

Le théorème de CARATHEODORY sur l'intégrabilité des formes de PFAFF permet de montrer que la forme de  $dQ$  est intégrable dans le cas de processus réversibles pour lesquels les variables sont réduites à la température  $\theta$  et la déformation  $c$ . On introduit ainsi la fonction entropie  $\eta$  par :

$$d\eta = \frac{dQ}{\theta}$$

Pour les processus irréversibles, un résultat semblable peut être atteint - d'après VALANIS - si, un état thermodynamique étant donné, les variables cachées  $q_\alpha$  sont prises arbitrairement constantes dans la suite du processus - ce qui n'est pas le cas en général dans le processus réel et ce qui, a priori, ne semble pas toujours possible. En fait, cela revient à accepter la validité de l'axiome d'état local. VALANIS définit ainsi une entropie qui apparaît comme l'entropie du processus réversible "tangent" au processus irréversible considéré.

\*\*  
\*\*

Bien que les postulats constituant la base de la deuxième approche - en particulier existence d'une température et d'une entropie dans un processus thermodynamique irréversible - ne s'appuient sur aucune interprétation physique des phénomènes, nous avons choisi de présenter ici une étude plus poussée de cette théorie.

Celle-ci permet, en effet, des développements mathématiques assez poussés pour donner des résultats concrets dans plusieurs domaines de la mécanique des milieux continus comme l'étude des matériaux à mémoire (COLEMAN [10]), élastiques-viscoplastiques, élastiques-plastiques ou visco-plastiques (PERZYNA [9]). Nous étudions plus précisément les développements donnés à la théorie par cet auteur.

La méthode consiste - à partir des points de base énoncés plus haut et des principes fondamentaux de la mécanique comme par exemple celui d'objectivité - à définir une méthode mathématique qui permet, avec la donnée de l'expression de l'énergie libre et des lois d'évolution des paramètres cachés en fonction des variables d'état, de déterminer les équations constitutives d'un matériau. Le résultat dépend alors du choix des variables d'état et des variables cachées.

A notre connaissance, la méthode n'a permis d'aboutir à des résultats concrets que dans le cas de matériaux connus simples.

## II - EXPOSE DE LA METHODE

### A- Processus thermodynamique

Nous considérons, avec COLEMAN et GURTIN [15] et PERZYNA [9], un corps B susceptible de déformations et de conduction calorifique. Il n'y a pas de couple de surface ni de couple de volume, si bien que le tenseur des contraintes en chaque point est symétrique. La diffusion massique est négligée. Pour simplifier, nous n'étudierons que des milieux matériellement simples.

Si  $X$  repère, à l'instant initial, dans un certain système de référence  $R$ , un point de  $B$ , et si  $t$  désigne le temps, l'état thermodynamique en ce point est décrit par les  $8 + m + n$  fonctions de  $X$  et  $t$  qui sont les suivantes.

1. La position de la particule  $X$  au temps  $t$ , définie par le vecteur  $x = \mathbf{X}(X, t)$

2. Le tenseur des contraintes de CAUCHY, symétrique,  $T = T(X, t)$ .

3. La force de volume par unité de masse  $b = b(X, t)$

4. L'énergie libre par unité de masse  $\psi = \psi(X, t)$

5. Le flux de chaleur  $q = q(X, t)$

6. La source de chaleur par unité de masse et de temps  $r = r(X, t)$  (chaleur absorbée par  $B$  et fournie par des radiations en provenance de l'extérieur)

7. L'entropie par unité de masse  $\eta = \eta(X, t)$

8. La température absolue  $\theta = \theta(X, t)$

9. Les paramètres cachés au paramètres internes qui seront ici - pour fixer les idées - divisés en deux catégories :

- les paramètres  $\alpha_i = \alpha_i(X, t)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) scalaires
- les paramètres  $A_j = A_j(X, t)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) tenseurs symétriques du second ordre.

Ces paramètres sont à déterminer a priori par des considérations physiques.

Pour la suite, nous introduisons classiquement :

1. Le tenseur des déformations  $F = \text{grad } \mathbf{X}$
2. Le deuxième tenseur des contraintes de PIOLA-KIRCHOFF :  

$$\mathbf{T}_R = J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} (\mathbf{F}^{-1})^t$$
 où  $J$  est le déterminant de  $F$  et  $(\mathbf{F}^{-1})^t$  la transposée de  $\mathbf{F}^{-1}$
3. Le flux de chaleur par unité de surface dans  $R$  :  

$$\mathbf{q}_R = J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{q}$$
4. La densité dans  $R$  :  $\rho_R$
5. Le tenseur des déformations de CAUCHY-GREEN :  

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^t \mathbf{F}$$
6.  $\mathbf{g} = \text{grad } \theta$

Les paramètres qui décrivent un processus thermodynamique doivent satisfaire la première loi de la thermodynamique qui se traduit ici par :

1. Le bilan de masse déjà exprimé dans la définition de  $\rho_R$

2. Le bilan des quantités de mouvement :

$$(1) \quad \text{div} (\mathbf{F} \mathbf{T}_R) + \rho_R \mathbf{b} = \rho_R \ddot{\mathbf{x}}$$

où l'opérateur divergence s'applique aux coordonnées matérielles et un point surmontant une grandeur exprime la dérivée matérielle de cette grandeur par rapport au temps.

3. Le bilan d'énergie

$$(2) \quad \frac{1}{2} \text{tr} (\mathbf{T}_R \dot{\mathbf{C}}) - \text{div} \mathbf{q}_R - \rho_R (\dot{\psi} + \theta \dot{\eta} + \dot{\theta} \eta) + \rho_R r = 0$$

où  $\text{tr} (\mathbf{T}_R \dot{\mathbf{C}})$  désigne la trace du tenseur  $\mathbf{T}_R \dot{\mathbf{C}}$

Les fonctions  $b$  et  $r$  sont supposées données. Pour décrire le processus il suffit donc, à ce stade, de connaître  $\chi$ ,  $T_R$ ,  $\psi$ ,  $q_R$ ,  $\eta$ ,  $\theta$  et les paramètres cachés  $\alpha_i$  et  $A_j$ .

### B- L'inégalité de CLAUSIUS DUHEM

Si nous considérons  $\frac{q}{\theta}$  comme un flux entropique dû à l'écoulement de chaleur et  $\frac{r}{\theta}$  une source entropique due aux radiations, la production entropique  $\gamma$  s'écrit :

$$(3) \quad \gamma = \dot{\eta} - \frac{1}{\rho_R} \left[ \frac{\rho_R r}{\theta} - \text{div} \frac{q_R}{\theta} \right]$$

La seconde loi de la thermodynamique exprime que tout processus thermodynamique vérifie :

$$\gamma \geq 0$$

pour tout point de B à chaque instant  $t$ .

Utilisant (2) et (3) cette inégalité s'écrit alors sous la forme :

$$(4) \quad -\dot{\psi} - \dot{\theta} \eta + \frac{1}{2\rho_R} \text{tr} (T_R \dot{C}) - \frac{1}{\rho_R \theta} q_R g \geq 0$$

connue sous le nom d'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM.

### C- Les équations constitutives

Nous disposons de quatre équations scalaires fournies par (1) et (2) reliant les inconnues  $\chi$ ,  $T_R$ ,  $\psi$ ,  $q_R$ ,  $\eta$ ,  $\theta$  et les paramètres cachés  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) et  $A_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) soit  $15 + m + 6n$  inconnues scalaires. Le problème est fermé par la donnée de  $11 + m + 6n$  relations entre les inconnues : ce sont les équations constitutives.

Dans la théorie étudiée les variables d'état choisies sont :  $c$ ,  $\theta$ ,  $g$ , et le matériau est caractérisé par les équations constitutives qui donnent  $\chi$ ,  $\eta$ ,  $T_R$ ,  $q_R$ ,  $\dot{\alpha}_i$  et  $\dot{A}_j$  en fonction de ces variables d'état et des variables cachées  $\alpha_i$  et  $A_j$ . Il est logique de supposer a priori que chacune de ces grandeurs dépend de toutes les variables d'état, les lois de la physique apportant par la suite éventuellement des restrictions (C'est ce qu'il est convenu d'appeler parfois le principe d'équiprésence). Les équations constitutives s'écrivent alors :

$$(5.1) \quad \psi = \hat{\psi}(c, \theta, g, \alpha_i, A_j)$$

$$(5.2) \quad \eta = \hat{\eta}(c, \theta, g, \alpha_i, A_j)$$

$$(5.3) \quad T_R = \hat{T}_R(c, \theta, g, \alpha_i, A_j)$$

$$(5.4) \quad q_R = \hat{q}_R(c, \theta, g, \alpha_i, A_j)$$

$$(5.5) \quad \dot{\alpha}_i = \hat{\dot{\alpha}}_i(c, \theta, g, \alpha_i, A_j)$$

$$(5.6) \quad \dot{A}_j = \hat{\dot{A}}_j(c, \theta, g, \alpha_i, A_j)$$

$\hat{\psi}, \hat{\eta}, \hat{T}_R, \hat{q}_R, \hat{\dot{\alpha}}_i$  et  $\hat{\dot{A}}_j$  sont des fonctions.

Nous supposons que les équations (5) satisfont au principe d'objectivité.

Il est évident que le choix des variables d'état adopté entache la généralité des résultats futur. Ce choix ne peut se justifier que dans la mesure où les équations (5) permettent effectivement de décrire des matériaux réels. Remarquons, en outre - avec J. LANIER - que les équations (5) ne permettent pas d'utiliser comme paramètre caché la densité  $\rho_R$  dont les travaux de STUTZ [17] ont mis en relief le rôle dans les lois de comportement des milieux pulvérulents.

Un processus thermodynamique sera dit admissible si les équations constitutives (5) sont vraies en chaque point et à chaque instant.

#### D- Conséquences de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM sur l'écriture des lois constitutives

Dérivons (5.1) matériellement par rapport au temps :

$$\dot{\psi} = \text{tr} \left( \partial_c \hat{\psi} \dot{c} \right) + \partial_\theta \hat{\psi} \dot{\theta} + \partial_g \hat{\psi} \dot{g} + \sum_i \partial_{\alpha_i} \hat{\psi} \dot{\alpha}_i + \sum_j \text{tr} \left( \partial_{A_j} \hat{\psi} \dot{A}_j \right)$$

$$\text{où } \partial_\theta \hat{\psi} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} \quad \partial_{\alpha_i} \hat{\psi} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \alpha_i}$$

$$\partial_g \hat{\psi} \text{ est le vecteur de composantes : } \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial g_i} \quad i = 1, 2, 3$$

$\hat{\partial}_c \hat{\psi}$  est le tenseur de composantes :

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial c_{ij}} \quad i, j = 1, 2, 3$$

et  $\hat{\partial}_{A_j} \hat{\psi}$  le tenseur de composantes:  $\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial (A_j)_{kl}}$

Portant la valeur de  $\hat{\psi}$  ainsi calculée dans (4), il vient :

$$(6) \quad \frac{1}{2 \rho_R} \operatorname{tr} \left[ (T_R - 2 \rho_R \partial_c \hat{\psi}) \dot{c} \right] - (\partial_\theta \hat{\psi} + \eta) \dot{\theta} - \partial_g \hat{\psi} \dot{g} - \sum_i \partial_{\alpha_i} \hat{\psi} \dot{\alpha}_i \\ - \sum_j \operatorname{tr} \left[ \partial_{A_j} \hat{\psi} \dot{A}_j \right] - \frac{1}{\rho_R \theta} q_R \dot{g} \geq 0$$

Nous allons montrer les conséquences de (6) sur la forme des lois constitutives (5.1) à (5.6).

Supposons les fonctions  $c(X, t)$ ,  $\theta(X, t)$ ,  $g(X, t)$ ,  $\hat{\alpha}_i(c, \theta, g, \alpha_i, A_j)$  et  $\hat{A}_j(c, \theta, g, \alpha_i, A_j)$  et les conditions initiales  $(\alpha_i)_0 = \alpha_i(X, t_0)$  et  $(A_j)_0 = A_j(X, t_0)$  suffisamment régulières pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution du système d'équations différentielles (5.5) et (5.6) dans un intervalle  $[t_0, t_0 + \tau]$  quand  $c$ ,  $\theta$  et  $g$  sont donnés. Alors  $\hat{\psi}$ ,  $\eta$ ,  $T_R$  et  $q_R$  existent et sont uniques. A un choix correct de  $c$ ,  $\theta$  et  $g$ , il correspond donc un processus thermodynamique admissible et un seul.

Considérons un point  $X'$  du corps  $B$  étudié et  $C_0 = c(X', t_0)$ ,  $\theta_0 = \theta(X', t_0)$ ,  $g_0 = g(X', t_0)$ ,  $(\alpha_i)_0 = \alpha_i(X', t_0)$ ,  $(A_j)_0 = A_j(X', t_0)$  appartenant au domaine de définition de  $\hat{\psi}$ ,  $\hat{\eta}$ ,  $T_R$ ,  $\hat{\alpha}_i$  et  $\hat{A}_j$  en  $X'$ . Soient arbitrairement  $p$  un tenseur du deuxième ordre,  $U$  un vecteur et  $a$  un scalaire. Nous prenons pour  $X$  et  $\theta$  - auxquels correspondent  $C = \operatorname{grad} X$  et  $g = \operatorname{grad} \theta$  - les expressions suivantes :

$$(7) \quad X(X, t) = X' + [C_0 + (t - t_0) U] (X - X')$$

$$\theta(X, t) = \theta_0 + (t - t_0)a + [g_0 + (t - t_0)p] \cdot C_0 (X - X')$$

$C$ ,  $\theta$  et  $g(X, t)$  remplissent à l'évidence les conditions de régularité envisagées plus haut. Les expressions (7) et les conditions initiales  $(\alpha_i)_0 = \alpha_i(X, t_0)$  et  $(A_j)_0 = A_j(X, t_0)$  déterminent alors un processus thermodynamique admissible dans un intervalle de temps  $(t_0, t_0 + \tau)$

(7) permet d'écrire :

$$\dot{c}(X', t_0) = U \quad \dot{\theta}(X', t_0) = a \quad \dot{g}(X', t_0) = p$$

et (6) devient, au temps  $t = t_0$  :

$$(8) \quad \frac{1}{2(\rho_R)_0} \text{tr} ((T_R - 2\rho_R \partial_c \hat{\psi})_0 \cdot U) - (\partial_\theta \hat{\psi} + \eta)_0 \cdot a - (\partial_g \hat{\psi})_0 \cdot p \\ - \left( \sum_1^m \partial_{\alpha_i} \hat{\psi} \dot{\alpha}_i \right)_0 - \left( \sum_1^n \text{tr} (\partial_{A_j} \hat{\psi} \dot{A}_j) \right)_0 - \frac{1}{(\rho_R \theta)_0} \hat{q}_{R_0} \cdot g_0 \geq 0$$

où l'indice  $_0$  indique que nous considérons le processus au temps  $t_0$  et au point  $X'$ .

L'inégalité (8) doit être vérifiée quel que soit  $t_0$  et les arbitraires  $U$ ,  $p$  et  $a$  ; cela entraîne :

$$(9) \quad \partial_g \hat{\psi} = 0$$

$$(10) \quad T_R = 2\rho_R \partial_c \hat{\psi}$$

$$(11) \quad \eta = -\partial_\theta \hat{\psi}$$

$$(12) \quad \sum_{i=1}^m \partial_{\alpha_i} \hat{\psi} \dot{\alpha}_i + \sum_1^n \text{tr} [\partial_{A_j} \hat{\psi} \dot{A}_j] + \frac{1}{\rho_R \theta} \hat{q}_R \cdot g \leq 0$$

La relation (9) indique que l'énergie libre  $\psi$  est indépendante de  $g$ . Les relations (10) et (11) donnent le tenseur des contraintes  $T_R$  et l'entropie  $\eta$  en fonction de  $\psi$ . Enfin l'inégalité (12) s'écrit en posant :

$$\sigma = -\frac{1}{\theta} \left[ \sum_1^m \partial_{\alpha_i} \psi \dot{\alpha}_i + \sum_1^n \text{tr} (\partial_{A_j} \psi \dot{A}_j) \right]$$

$$\sigma - \frac{1}{\rho_R \theta} \hat{q}_R \cdot g \leq 0$$

$\sigma$  est la dissipation interne causée par l'évolution des paramètres internes.

### III - PRESENTATION DE QUELQUES RESULTATS

#### A- Description d'un matériau élastique - viscoplastique (cf PERZYNA [9])

L'expérience montre que de nombreux matériaux présentent un comportement différent suivant que le mode d'application de la contrainte est statique ou dynamique ; ces matériaux possèdent un comportement sensible à la vitesse de déformation. Il est possible de prendre en compte cet effet dans la description d'un matériau élastique-viscoplastique qui suit.

Le matériau étudié est purement élastique avant écoulement. La viscosité n'apparaît que lorsque la limite d'écoulement est atteinte. Les paramètres cachés choisis sont :

- $\chi$  paramètre scalaire d'écrouissage
- $P$  tenseur de déformation inélastique
- $\Gamma^{(i)}$   $i = 1, 2, \dots, n$  tenseurs de dislocation

$P$  et  $\Gamma^{(i)}$  sont symétriques du deuxième ordre.

Des recherches en viscoplasticité (cf PERZYNA [16]) ont montré que  $\dot{P}$  est proportionnel à une certaine fonction  $\phi$  de  $\mathbf{T}$ , où  $\mathbf{T}$  est défini par :

$$(13) \quad \mathbf{T} = \frac{1}{\chi} f(\mathbf{T}_R, \boldsymbol{\theta}, P, \Gamma^{(i)}) - 1, \quad ,$$

$\chi$  déterminé par l'équation différentielle :

$$(14) \quad \dot{\chi} = \text{tr} (N(\mathbf{T}_R, \boldsymbol{\theta}, \chi, P, \Gamma^{(k)}) \dot{P})$$

Remarquons que  $\dot{\chi} = 0$  quand  $\dot{P} = 0$  ; cela signifie qu'il n'y a pas d'écrouissage quand l'accroissement de la déformation plastique est nul. Ce fait est couramment admis en théorie de la plasticité. Dans les expressions (13) et (14) les fonctions  $f$  et  $N$  sont des fonctions tensorielles données.

$\mathbf{T} = 0$ , ou  $f(\mathbf{T}_R, \boldsymbol{\theta}, P, \Gamma^{(k)}) = \chi$  représente la limite d'écoulement statique (charges constantes dans le temps).  $\mathbf{T}$  caractérise donc l'écart entre l'état considéré du matériau et l'état à la limite d'écoulement statique.

La fonction  $\phi$  traduit l'influence de la vitesse de chargement et de la température sur la limite d'écoulement du matériau.  $\phi$  est elle aussi à déterminer expérimentalement.

Le matériau est élastique avant écoulement ; cela entraîne :

$$P = 0 \quad \text{si} \quad \mathbf{T} \leq 0$$

PERZYNA écrit :

$$(15) \quad \dot{P} = \gamma(\theta) \langle \phi(\mathbf{T}) \rangle M(T_R, \theta, g, \chi, P, \Gamma^{(k)})$$

où  $\gamma(\theta)$  est le coefficient de viscosité qui dépend de la température, et :

$$\langle \phi(\mathbf{T}) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{T} \leq 0 \\ \phi(\mathbf{T}) & \text{si } \mathbf{T} > 0 \end{cases}$$

$M$  est une fonction tensorielle symétrique ( $M^t = M$ ).

Les équations (13) et (15) conduisent à :

$$(16) \quad f(T_R, \theta, P, \Gamma^{(k)}) = \chi \left\{ 1 + \phi^{-1} \left[ \frac{(\text{tr } \dot{P}^2)^{\frac{1}{2}}}{\gamma(\theta)} (\text{tr } M^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\}$$

Cette expression traduit l'évolution au cours d'un processus thermodynamique de la surface limite d'écoulement en fonction de l'écroûissage  $\chi$ , de la température  $\theta$ , de  $P$ , etc... Le fait que  $f$  soit fonction de  $\dot{P}$  montre la sensibilité du matériau à la vitesse de déformation inélastique.

PERZYNA suppose que les modifications dans l'arrangement des dislocations apparaissent uniquement dans le matériau au cours de la phase viscoplastique de son comportement. Il écrit :

$$(17) \quad \Gamma^{(i)} = L^{(i)}(C, \theta, g, \chi, P, \Gamma^{(k)}) \dot{P}$$

Les équations constitutives d'un matériau élastique-viscoplastique s'écrivent avec (9), (10), (11), (14), (15) et (17) :

$$(18-1) \quad \psi = \hat{\psi}(C, \theta, \chi, P, \Gamma^{(k)})$$

$$(18-2) \quad T_R = 2 \rho_R \partial_c \hat{\psi}$$

$$(18-3) \quad \eta = - \partial_\theta \hat{\psi}$$

$$(18-4) \quad q_R = \hat{q}_R (c, \theta, g, \chi, P, \Gamma^{(k)})$$

$$(18.5) \quad \dot{P} = \gamma(\theta) \langle \phi(T) \rangle M(T_R, \theta, g, \chi, P, \Gamma^{(k)})$$

$$(18.6) \quad \dot{\chi} = \text{tr} \left[ N(T_R, \theta, \chi, P, \Gamma^{(k)}) \dot{P} \right]$$

$$(18.7) \quad \dot{\Gamma}^{(i)} = L^{(i)}(c, \theta, g, \chi, P, \Gamma^{(k)}) \dot{P}$$

En utilisant (18.2), les équations (18.5) et (18.6) permettent d'exprimer les quantités  $\dot{P}$  et  $\dot{\chi}$  en fonction des variables  $c, \theta, g, \chi, P$  et  $\Gamma^{(k)}$  et les équations (18) prennent la forme des équations (5) postulée au début.

Remarquons que (18.6) et (18.7) décrivent des propriétés du matériaux liées à la seule plasticité. Elle doivent être invariantes dans un changement d'échelle du temps. Il n'en est pas de même pour (18.5) qui fait intervenir des effets visco-plastiques.

Bien entendu, les équations (18) doivent satisfaire l'inégalité (12).

#### B. Matériau élastique-plastique

Le matériau élastique-plastique peut être considéré, à la limite, comme un cas particulier du matériau élastique-visco-plastique étudié au paragraphe A. En effet, pour un tel corps, la vitesse de déformation n'influe pas sur le comportement, si bien qu'il faut faire tendre la viscosité vers l'infini

$$\gamma(\theta) \rightarrow \infty$$

De plus, le matériau vérifie la condition d'écoulement statique lorsque la plasticité est atteinte

$$T = 0.$$

La quantité  $\gamma(\theta) \langle \phi(T) \rangle$ , qui intervient dans les équations (15) et (18.5), apparaît comme une forme indéterminée qu'il s'agit de préciser.

Pour cela écrivons que, à l'état plastique, le point représentatif de l'état du matériau se trouve sur la surface d'écoulement statique :

$$f(T_R, \theta, P, \Gamma^{(k)}) = \chi$$

Au cours de l'évolution, le point considéré reste sur cette surface, et :

$$\dot{f} = \dot{\chi}$$

Utilisant (14), il vient alors :

$$\text{tr}(\partial_{T_R} f \dot{T}_R) + \partial_{\theta} f \dot{\theta} + \text{tr}(\partial_P f \dot{P}) + \sum_{k=1}^m \text{tr}(\partial_{\Gamma^{(k)}} f \dot{\Gamma}^{(k)}) = \text{tr}(\dot{NP})$$

Soit, avec (18.7) et (15)

$$\gamma(\theta) \langle \phi(T) \rangle = \lambda \left[ \text{tr}(\partial_{T_R} f \dot{T}_R) + \partial_{\theta} f \dot{\theta} \right]$$

où on a posé :

$$\lambda = \left\{ \text{tr} \left[ (N - \partial_P f - \sum_1^m \partial_{\Gamma^{(k)}} f L^{(k)}) M \right] \right\}^{-1}$$

L'équation (15) peut alors s'écrire :

$$\dot{P} = \lambda \langle \text{tr}(\partial_{T_R} f \dot{T}_R) + \partial_{\theta} f \dot{\theta} \rangle . M$$

où l'expression  $\langle \text{tr}(\partial_{T_R} f \dot{T}_R) + \partial_{\theta} f \dot{\theta} \rangle$  est définie par :

$$\langle \text{tr}(\partial_{T_R} f \dot{T}_R) + \partial_{\theta} f \dot{\theta} \rangle = \begin{cases} \left[ \right] & \text{si } f = \chi \text{ et } \left[ \right] > 0 \\ 0 & \text{si } f = \chi \text{ et } \left[ \right] \leq 0 \\ & \text{ou si } f < \chi \end{cases}$$

Dérivant ensuite (18.2) par rapport au temps, il est possible - au moyen de (18.5), (18.6) et (18.7) - d'exprimer  $T_R$  en fonction de  $C, \theta, \chi, P$  et  $\Gamma^{(k)}$  et des seules dérivées de  $C$  et  $\theta$ .

Les équations constitutives prennent alors la forme :

$$(19.1) \quad \Psi = \hat{\Psi}(C, \theta, \chi, P, \Gamma^{(k)})$$

$$(19.2) \quad T_R = 2 \rho_R \partial_c \hat{\psi}$$

$$(19.3) \quad \eta = - \partial_\theta \hat{\psi}$$

$$(19.4) \quad q_R = \hat{q}_R (C, \theta, g, \chi, P, \Gamma^{(k)})$$

$$(19.5) \quad \dot{P} = H_1 (C, \theta, g, \chi, P, \Gamma^{(k)}) \dot{C} + H_2 (C, \theta, g, \chi, P, \Gamma^{(k)}) \dot{\theta}$$

$$(19.6) \quad \dot{\chi} = \text{tr} \left[ N_1 (C, \theta, g, \chi, P, \Gamma^{(k)}) \dot{C} \right] + \beta_1 (C, \theta, g, \chi, P, \Gamma^{(k)}) \dot{\theta}$$

$$(19.7) \quad \dot{\Gamma}^{(k)} = L_1^{(k)} (C, \theta, g, \chi, P, \Gamma^{(k)}) \dot{C} + L_2^{(k)} (C, \theta, g, \chi, P, \Gamma^{(k)}) \dot{\theta}$$

Les équations (19) restent invariantes - comme il convient pour un matériau à l'état plastique - dans un changement d'échelle du temps. Elles sont astreintes, pour satisfaire le second principe, à vérifier l'inégalité (12).

Remarquons que les équations constitutives du matériau élastique-plastique (19) ne sont pas du même type que les équations constitutives (5) dont les expressions servent de base à la théorie. En effet,  $\dot{P}$ ,  $\dot{\chi}$  et les  $\dot{\Gamma}^{(i)}$  apparaissent ici comme des fonctions des dérivées  $\dot{\theta}$  et  $\dot{C}$ , éventualité qui n'est pas prise en compte dans la théorie, comme le montrent les équations (5). Si nous reprenons les raisonnements du paragraphe II, en postulant pour les expressions  $\dot{P}$ ,  $\dot{\chi}$  et  $\dot{\Gamma}^{(i)}$  des formes du type (19.5), (19.6) et (19.7), nous aboutissons à un résultat totalement différent et, en particulier, les équations correspondant à (18.1), (18.2), (18.3), (18.4) et (19.1), (19.2), (19.3), (19.4) sont d'expressions autres. Cela signifie que les équations de comportement du milieu élastique-plastique définies par (19) ne peuvent être admises - telles quelles - dans le cadre de la théorie exposée ici.

Toutefois, les équations (19) sont obtenues par un passage à la limite:

$$\gamma(\theta) \rightarrow \infty \quad T \rightarrow 0$$

Si la limite elle-même ne peut satisfaire les hypothèses de base de la théorie, les équations constitutives pour les états proches de cette limite ne sont pas en contradiction avec elle. Les équations (19) représentent alors le comportement d'un matériau idéal élastique-plastique qui approche convenablement la réalité, c'est-à-dire un matériau élastique-viscoplastique presque élastique-plastique.

### C. Matériau hyper-élastique

Le matériau élastique est un cas particulier du matériau élastique-visco-plastique étudié au paragraphe A ci-dessus.

Il suffit de prendre les paramètres cachés  $\chi$ ,  $P$  et  $\Gamma^{(i)}$  constants dans le temps, Les équations constitutives s'écrivent alors sous la forme :

$$\psi = \hat{\psi}(c, \theta)$$

$$T_R = 2 \rho_R \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial c}$$

$$\eta = - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta}$$

$$q_R = \hat{q}_R(c, \theta, g)$$

Dans ce cas, la dissipation interne  $\sigma$  est nulle :

$$\sigma = 0$$

et le deuxième principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\frac{1}{\rho_R \theta} \hat{q}_R g \leq 0$$

### D. Matériau viscoélastique - viscoplastique

Ce matériau peut être obtenu par une généralisation du matériau élastique-viscoplastique en introduisant de nouveaux paramètres cachés scalaires :

$$\alpha^{(i)} \quad i = 1 \dots m$$

Dans ce cas, il est aisé de montrer que les équations constitutives deviennent :

$$(20.1) \quad \psi = \hat{\psi}(c, \theta, \alpha^{(k)}, \chi, P, \Gamma^{(k)})$$

$$(20.2) \quad T_R = 2 \rho_R \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial c}$$

$$(20.3) \quad \eta = - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta}$$

$$(20.4) \quad q_R = \hat{q}_R (C, \theta, g, \alpha^{(k)}, \chi, P, \Gamma^{(k)})$$

$$(20.5) \quad \dot{\alpha}^{(i)} = \hat{\alpha}^{(i)} (C, \theta, g, \alpha^{(k)}, \chi, P, \Gamma^{(k)})$$

$$(20.6) \quad \dot{P} = \gamma(\theta) \langle \phi(T) \rangle_M (C, \theta, g, \alpha^{(k)}, \chi, P, \Gamma^{(k)})$$

$$(20.7) \quad \dot{\chi} = \text{tr} (N \dot{P})$$

$$(20.8) \quad \dot{\Gamma}^{(i)} = L^{(i)} (C, \theta, g, \alpha^{(k)}, \chi, P, \Gamma^{(k)}) \dot{P}$$

Les effets visqueux dans la phase viscoélastique sont caractérisés par les paramètres  $\alpha^{(i)}$  qui permettent-au travers de (20.5) - de prendre en compte l'histoire du tenseur de déformation  $C$ , de la température  $\theta$ , et du gradient de température  $g$ . Bien entendu les équations (20) doivent satisfaire l'inégalité (12).

#### IV - CONCLUSION

Les exemples particuliers traités ci-dessus montrent à quel point la théorie présentée dans ce travail est tributaire de l'expérience. Celle-ci doit guider le chercheur dans le choix des paramètres cachés et la forme des lois constitutives. La théorie thermodynamique des processus irréversibles se présente comme un cadre dans lequel doivent s'insérer les résultats obtenus. Encore, ce cadre est-il sujet à caution, du fait des postulats de base de la théorie et des hypothèses faites au cours de son développement.



BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. ONSAGER - Reciprocal relations in irreversible processus  
I. Phys. Rev. 37 , 405 - 406 , 1931  
II. Phys. Rev. 38, 2265 - 2279 , 1931
- [2] H.B.G. CASIMIR - "On ONSAGER's principle of microscopic reversibility"  
Rev. Mod. Phys. 17 , 343-350 , 1945
- [3] S.R. DE GROOT et P. MAZUR - "Non-equilibrium thermodynamics" - North-Holland Publ. - London 1969
- [4] H. ZIEGLER - "Some extremum principles in irreversible Thermodynamics with applications to continuum mechanics" - Progress in Solid Mechanics - IV - p.93-193 - North Holland Publ. - Amsterdam 1963.
- [5] C. TRUESDELL - Six Lectures on Modern Natural Philosophy - N.Y. Springer 1966.
- [6] B.D. COLEMAN et W. NOLL - "The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity" - Arch. Ration. Mech. Anal. 13, 167-178 - 1963.
- [7] C. TRUESDELL - "Six Lectures on Modern Natural Philosophy" - Springer - Berlin 1966.
- [8] A.E. GREEN et W. ZERNA - "Theoretical Elasticity" - Oxford University Press - London and New York - 1968.
- [9] P. PERZYNA - "Thermodynamic Theory of Viscoplasticity" - Advances in Applied Mechanics - vol. 11 - p.313-354.
- [10] B.D. COLEMAN - "Thermodynamics of material with memory" - Arch. Rat. Mech. Anal. - 17 - P.1-46 - 1964.
- [11] J. MEIXNER - "T.I.P. has many faces" - IUTAM Symp. Irreversible Aspects Continuum Mech. - 1966 - pp. 237-249.
- [12] J. MEIXNER - "On the theory of linear viscoelastic behaviour" - Rheol. Acta 4 , p.77-85 - 1965.
- [13] J. MEIXNER - "Processes in Simple thermodynamic Materials" - Arch. Ration. Mech. Anal. 33 - p.33-53 - 1969.
- [14] K.C. VALANIS - "Irreversibility and existence of entropy" - Int. J. Non-Linear Mechanics - 6 - p.337-360 - 1971.
- [15] B.D. COLEMAN et M.E. GURTIN - "Thermodynamics with Internal State Variables" Journal of Chemical Physics 47, 2 - 15 Juillet 1967 - p.597-613.
- [16] P. PERZYNA - "The constitution equations for work-hardening and rate sensitive plastic materials" - Proc. Vibr. Probl. 4, p.281-290.
- [17] P. STUTZ - "Contribution à l'étude de la loi rhéologique des milieux pulvérulents" - Thèse de Doctorat ès-sciences physiques - Grenoble- le 4 Mai 1972.