La théorie des invariants des formes quadratiques ternaires revisitée.

Bruno Blind*

L'histoire qui va suivre est véridique dans ses moindres détails, à moins qu'une affreuse erreur n'ait tout faussé depuis le début.
Roland Topor

Abstract: The simultaneous invariants of 2, 3, 4 and 5 ternary quadratic forms under the group $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ were given by several authors (P. Gordan, C. Ciamberlini, H.W. Turnbull, J.A Todd), utilizing the symbolic method. Using the Jordan algebra structure of the space of ternary quadratic forms, we give these invariants explicitely.

Résumé: Grâce à la structure naturelle d'algèbre de Jordan que porte l'espace $V = \mathrm{Sym}(3, \mathbb{C})$, nous identifions les invariants, sous $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$, de plusieurs formes quadratiques ternaires trouvés à l'aide de la méthode symbolique par divers auteurs (P. Gordan, C. Ciamberlini, H.W. Turnbull, J.A Todd et d'autres).

Classification AMS: 13A50; 15A72; 17C99

Mots clefs: Théorie classique des invariants, Formes quadratiques ternaires; Algèbre de Jordan.

*Institut Elie Cartan, Nancy-Université, CNRS, INRIA, Boulevard des Aiguillettes, B.P. 239, F- 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy, France; blind@iecn.u-nancy.fr

1. Introduction.

La détermination des invariants (et plus généralement des covariants) de plusieurs formes quadratiques ternaires sous l'action du groupe $G = \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ est un des problèmes abondamment étudiés par la théorie classique des invariants. Le cas des deux formes est traité par P. Gordan [Gor.1], il montre en particulier que $A(2)$ (nous notons $A(p)$ l'algèbre des invariants de p formes) est engendrée par 4 invariants. Le cas $p = 3$ est abordé en 1886 par C. Ciamberlini (et d'autres), qui trouve que $A(3)$ est engendrée par 11 invariants [Cia.]. Les résultats de ces deux auteurs ont été précisés en 1923 par Van der Waerden [Wae.]. En 1948, J.A Todd, dans deux longs articles [Tod.1 et Tod.2], examine et complète le travail effectué en 1910 par H.W. Turnbull [Tur.] sur les cas restants ($p = 4$ et $p = 5$). Tous ces auteurs donnent les invariants sous forme symbolique, et, à ma connaissance, leur forme explicite, en particulier pour $A(4)$ et $A(5)$, n'a pas été donnée.

Un des buts de ce travail est de donner ces invariants sous forme explicite. A cette fin, nous utilisons la structure d'algèbre de Jordan naturelle que porte l'espace V des formes quadratiques ternaires, cet espace V apparait en effet dans la série des quatre algèbres de Jordan simples de rang trois, série qui comporte l'algèbre d'Albert. Pour chacune de ces algèbres, nous pouvons définir un analogue naturel pour le groupe G et énoncer un problème d'invariants, pour lequel les polynômes trouvés dans le cas des formes quadratiques ternaires nous donnent encore des invariants.

Après les préliminaires, nous redémontrons aux paragraphes 3 et 5 les résultats de P. Gordan et C. Ciamberlini. Le cas $p = 2$ est traité dans le paragraphe 3 et est une belle application de la méthode géométrique initiée par T. Vust [Vus.]. Au paragraphe 4, grâce à une étude du nilcône de pV, nous obtenons suffisamment d'informations sur un système de paramètres homogènes pour en déduire explicitement la série de Poincaré de l'algèbre $A(3)$. Nous exploitons au paragraphe 5 cette connaissance de la série de Poincaré pour redémontrer les résultats de C. Ciamberlini concernant le cas des trois formes. L'algèbre $A(3)$ est engendrée par 11 invariants soumis à une relation cubique, nous indiquons en appendice une méthode pour écrire explicitement cette relation.

Nous n'arrivons malheureusement pas à redémontrer les résultats de H.W. Turnbull et J.A. Todd concernant $A(4)$ et $A(5)$. Aussi, dans le paragraphe 6, pour le cas des quatre formes, nous utilisons le fait que $A(4)$ est engendrée par ses éléments de degré inférieur à 6 pour pouvoir les écrire explicitement, et dans le cas des cinq formes, nous identifions (nous avons mis les détails en appendice) un invariant donné sous forme symbolique par Todd pour conclure.

Tout au long de ce travail, nous faisons usage du logiciel LIE développé par Marc A.A. van Leeuwen, Arjeh M. Cohen et Bert Lisser, nous le désignerons simplement par LIE dans la suite.

Je remercie F. Chargois, J-L. Clerc et P. Y. Gaillard qui m'ont encouragé et avec qui j'ai eu des discussions toujours stimulantes. Mes remerciements vont également à W. Bertram, O. Hijazi et G. Rousseau pour leurs critiques et encouragements.

2. Préliminaires.

2.1. Les invariants simultanés des formes quadratiques ternaires.

Nous faisons opérer le groupe $G = \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ sur l'espace $V = \mathrm{Sym}(3, \mathbb{C})$ des matrices $(3, 3)$ symétriques (identifiées aux formes quadratiques ternaires) par l'action:

$$g.x = gxg^t$$

cette représentation, notée ϕ_1^2 dans [Sch.1]), donne lieu à une action de G sur l'algèbre $\mathbb{C}[pV]$ des polynômes sur $pV = V \oplus \cdots \oplus V$, et on notera par $A(p)$ la sous-algèbre $\mathbb{C}[pV]^G$ des invariants. C'est une algèbre graduée par le degré des polynômes, et vu l'action du centre de G, il est facile de voir que le degré d'un invariant est un multiple de 3. On a donc la décomposition:

$$A(p) = \bigoplus_{n \geq 0} A_{3n}(p),$$

$A_{3n}(p)$ étant le sous espace vectoriel de $A(p)$ constitué par les invariants homogènes de degré $3n$.

Il est classique de voir pV comme un $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C}) \times G$-module, d'où l'identification de $\mathbb{C}[pV]$ avec le $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C}) \times G$-module $S^\bullet(\psi_1(p) \otimes V^*)$, $\psi_1(p)$ désignant la représentation standard de $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ (on reprend ici les notations de [Sch.2] page 192, disons brièvement que $\psi_i(p) = \Lambda^i(\psi_1(p)$ pour $i \geq 0$, et que $\psi_{(a_1, \cdots, a_m, 0)}$ est la composante de plus haut poids dans le produit tensoriel $S^{a_1}(\psi_1(p)) \otimes \cdots \otimes S^{a_m}(\psi_m(p))$). Le théorème de Cauchy en donne la décomposition en modules irréductibles, on peut ainsi obtenir la décomposition du $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$-module $A(p)$, on a:

$$A(p) = \bigoplus_{(a) = (a_1, \cdots, a_6, 0)} \psi_{(a)}(p) \otimes \psi_{(a)}(V^*)^G$$

(voir [Sch.2], page 196 ou [Pro.], page 386 pour tout ceci). Une des conséquences de cette décomposition est que pour $p > 6$, $A(p)$ est engendrée par les polarisés des éléments de $A(6)$ ([Pro.], page 386 théorème 1); en fait ici il nous suffit de connaitre $A(5)$ ([Pro.], page 386 théorème 2).

La graduation de $A(p)$ est préservée par l'action de $\mathrm{GL}(p,\mathbb{C})$, en particulier on a:

$$A_3(p) = \bigoplus_{\substack{(a)=(a_1,a_2,a_3,0,\cdots)\\ a_1+2a_2+3a_3=3}} \psi_{(a)}(p) \otimes \psi_{(a)}(V^*)^G$$

ici $(a) = (3, \cdots, 0)$, ou $(a) = (1, 1, \cdots, 0)$, ou $(a) = (0, 0, 1, \cdots, 0)$ les deux derniers cas étant exclus par LIE par exemple, et l'on obtient pour le $\mathrm{GL}(p,\mathbb{C})$-module $A_3(p)$:

$$A_3(p) = \psi_{(3,\cdots,0)}(p) = \mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^p).$$

On sait que la représentation $2\phi_1^2$ est corégulière mais que $3\phi_1^2$ ne l'est pas (cf. [Sch.1]) c'est-à-dire que $A(p)$ n'est une algèbre de polynômes que pour $p < 3$. Divers auteurs ont donné un système générateur de ces algèbres $A(p)$.

Par ailleurs le résultat de P. Gordan dit que l'algèbre $A(2)$ est engendrée par ses éléments de degré 3; celui de C. Ciamberlini que l'algèbre $A(3)$ est engendrée par $A_3(3) \bigoplus A_6(3)$; il en est de même pour $A(4)$ d'après H.W.Turnbull et J.A.Todd, tandis que $A(5)$, elle, est engendrée par $A_3(5) \bigoplus A_6(5) \bigoplus A_9(5)$. Tous ces auteurs utilisent la méthode symbolique élaborée au XIX siècle.

2.2. La méthode symbolique.

Nous décrivons ici très sommairement la notation symbolique employée par les auteurs cités plus haut pour énumérer les invariants. On trouvera dans [Gra.-You.] une exposition classique (voir aussi [Gor.2]); pour une présentation moderne et rigoureuse, nous renvoyons le lecteur à [Gro.- Rot.- Ste.] (voir aussi l'article de synthèse [Rot.- Stu.]).

Aux éléments $x, y, z, \cdots$ de V sont associés (en nombre arbitraire) des vecteurs symboliques $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ etc. qui représentent x; $a' = (a'_1, a'_2, a'_3)$, $b' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ etc. qui représentent y; $a'' = (a''_1, a''_2, a''_3)$, $b'' = (b''_1, b''_2, b''_3)$ etc. qui représentent z... On forme l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[\{a_i\}, \{a'_i\}, \{a''_i\}, \cdots, \{b_i\}, \{b'_i\}, \{b''_i\}, \cdots]$ appelé espace ombral et on définit l'application ombrale $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{U} : \mathbb{C}[\{a_i\}, \{a'_i\}, \{a''_i\}, \cdots, \{b_i\}, \{b'_i\}, \{b''_i\}, \cdots] \mapsto \mathbb{C}[pV]$$

c'est une application linéaire dont nous rappelons seulement les propriétés suivantes: si x (resp y) est la matrice (x_{ij}) (resp (y_{ij})), on a:

$$\mathcal{U}(a_i^2) = \mathcal{U}(b_i^2) = \cdots = x_{ii};\ \ \mathcal{U}(a_i a_j) = \mathcal{U}(b_i b_j) = \cdots = x_{ij} (i \neq j)$$

$$\mathcal{U}(a_i^r a_j^s) = \mathcal{U}(b_i^r b_j^s) = 0 \ \text{ si } \ r + s \neq 2$$

$$\mathcal{U}((a'_i)^2) = \mathcal{U}((b'_i)^2) = \cdots = y_{ii};\ \ \mathcal{U}(a'_i a'_j) = \mathcal{U}(b'_i b'_j) = \cdots = y_{ij} (i \neq j)$$

(voir [Rot.- Stu.] page 8 pour une définition complète de $\mathcal{U}$). D'autre part, si u, v, w sont trois vecteurs symboliques, leur déterminant, appelé crochet, sera noté $[u, v, w]$. Le point clef de la méthode symbolique est alors le théorème suivant (voir les références citées plus haut):

Théorème 2.1. *Tout élément de $A(p)$ est de la forme $\mathcal{U}(Q)$ où Q est un polynôme en les crochets.*

On vérifie par exemple que si les trois vecteurs symboliques représentent l'élément x, leur crochet redonne essentiellement l'invariant $\det x$, d'une manière plus précise:

$$\mathcal{U}([a,b,c]^2) = \frac{1}{6}\det x.$$

Introduisons, pour finir, une dernière notation symbolique: à partir de deux vecteurs symboliques $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$, on construit un troisième triplet symbolique (produit vectoriel de u avec v) de composantes:

$$u_2v_3 - u_3v_2, \quad u_3v_1 - u_1v_3, \quad u_1v_2 - u_2v_1$$

quand u et v représentent x, on notera cet élément par α, et on écrira le crochet $[a,b,c]$ comme produit scalaire de a avec α: $[a,b,c] = a_\alpha$. P. Gordan montre qu'un système générateur minimal de l'algèbre $A(2)$ s'écrit dans ces notations:

$$a_\alpha^2, \quad (a'_{\alpha'})^2, \quad (a'_\alpha)^2, \quad a_{\alpha'}^2.$$

Les résultats de C. Ciamberlini nous donnent un système générateur minimal de l'algèbre $A(3)$ formé de onze invariants:

$$a_\alpha^2, a_{\alpha'}^2, a_{\alpha''}^2, (a'_{\alpha'})^2, (a'_\alpha)^2, (a'_{\alpha''})^2, (a''_{\alpha''})^2, (a''_\alpha)^2, (a''_{\alpha'})^2, [a,a',a'']^2, [\alpha,\alpha',\alpha'']^2$$

2.3. V vue comme algèbre de Jordan.

On s'aperçoit que ces invariants donnés sous forme symbolique peuvent s'exprimer sous forme concrète en utilisant la structure d'algèbre de Jordan de l'espace $V = \mathrm{Sym}(3,\mathbb{C})$ muni du produit:

$$x \bullet y = \frac{1}{2}(xy + yx).$$

De plus, les formules obtenues ont un sens dans la situation plus générale des algèbres de Jordan sur $\mathbb{C}$ simples et de rang 3. Nous détaillons brièvement cette situation, en renvoyant le lecteur à [Far.-Kor.] et à [Spr.] pour les définitions et les principaux faits concernant ces algèbres.

Soit donc V une algèbre de Jordan sur $\mathbb{C}$ simple, de rang 3 et de dimension n; V est munie de la forme bilinéaire définie positive $< x, y >= \frac{3}{n}\mathrm{tr}L(x \bullet y)$ où $\mathrm{L}(x)$ désigne l'endomorphisme multiplication par x: $\mathrm{L}(x) : y \mapsto x \bullet y$, cette forme vérifie

$$< x \bullet z, y >=< x, y \bullet z > .$$

On note par det le déterminant de V, c'est un polynôme irréductible et homogène de degré le rang de V, c'est à dire ici 3; un élément x de V est inversible si $\det x \neq 0$, et dans ce cas l'inverse x^{-1} s'écrit sous la forme

$$x^{-1} = \frac{\mathrm{n}(x)}{\det(x)}$$

où n est une application quadratique de V dans V, on désigne par $\times$ l'application bilinéaire symétrique associée à n: $x \times y = \mathrm{n}(x+y) - \mathrm{n}(x) - \mathrm{n}(y)$. Par polarisation du polynôme det, nous obtenons une forme trilinéaire f sur V telle que $f(x,x,x) = 6 \det x$, et nous avons l'importante relation (voir [Spr.], chapitre 4, formule (4), page 55):

$$f(x,y,z) = < x \times y, z > .$$

Soit G le sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ laissant invariant la fonction det; c'est un sous-groupe du groupe de structure de V (voir [Spr.], Proposition 12.3, page 123) qui contient le groupe $\mathrm{Aut}(V)$ des automorphismes de l'algèbre V. La forme trilinéaire f est invariante par G; d'autre part, il n'est pas difficile de constater que l'application n vérifie la propriété de G-équivariance suivante

$$\mathrm{n}(g.x) = (g^{-1})' \mathrm{n}(x)$$

où g' désigne l'adjoint de g par rapport à la forme bilinéaire $<,>$ (voir [Far.-Kor.] page 148). A partir de la forme trilinéaire f et de l'application bilinéaire $\times$, nous pouvons donc facilement construire des invariants du groupe G, par exemple le polynôme $f(\mathrm{n}(x), \mathrm{n}(y), \mathrm{n}(z))$ ainsi que tous ses polarisés sont des invariants. Ces invariants ont également été considérés par A.V. Iltyakov dans [Ilt.].

Dans le cas de l'espace $V = \mathrm{Sym}(3, \mathbb{C})$ muni du produit de Jordan $x \bullet y = \frac{1}{2}(xy + yx)$, la fonction det est le déterminant usuel des matrices et $n(x)$ n'est autre que la transposée de la matrice des cofacteurs de la matrice x (l'inverse de Jordan et l'inverse usuel coincident); la forme bilinéaire $< x, y >$ est la trace habituelle de xy et G est le groupe $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ agissant sur V par $g.x = gxg^t$.

Le lecteur trouvera dans [Far.-Kor.] et dans [Spr.] la classification (il y en a 4) des algèbres de Jordan sur $\mathbb{C}$ simples et de rang 3, rappelons seulement qu'outre le cas des formes quadratiques ternaires que nous envisageons dans ce travail, il y a l'algèbre d'Albert et que dans ce cas le groupe G est le groupe complexe simplement connexe E_6.

3. L'algèbre $A(2)$.

On se propose dans ce paragraphe de redémontrer le théorème de P. Gordan concernant $A(2)$ (cf [Gor.1]); nous en donnons une preuve qui se généralise immédiatement au cas des algèbres de Jordan sur $\mathbb{C}$ simples et de rang 3 évoquées plus haut. Dans toute la suite, on fixe un repère de Jordan $\{e_1, e_2, e_3\}$ de V.

Théorème 3.1. *L'algèbre $A(2)$ est une algèbre de polynômes engendrée par les quatres polynômes:*

$$\det x, \quad \det y, \quad f(x,x,y), \quad f(x,y,y).$$

La démonstration consiste à utiliser la méthode géométrique de T. Vust (cf [Vus.]). On identifie $2V$ à $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^2, V)$: l'élément (x,y) de $2V$ est vu comme l'application linéaire $\alpha_{(x,y)}$ définie par: $\alpha_{(x,y)}(a,b) = ax + by$, et on considère l'application χ de $2V$ dans l'espace $\mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^2)$ des polynômes homogènes de degré 3 sur $\mathbb{C}^2$ donnée par la formule: $\chi(x,y) = \det \circ \alpha_{(x,y)}$, c'est-à-dire que $\chi(x,y)$ est le polynôme à deux variables a et b suivant:

$$(a,b) \mapsto \det(ax+by) = a^3 \det x + b^3 \det y + \frac{a^2 b}{2} f(x,x,y) + \frac{ab^2}{2} f(x,y,y).$$

Il est alors clair que le morphisme algébrique χ est G-invariant. Il se factorise donc suivant le diagramme:

$$\begin{tikzcd} & 2V \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\chi"] & \\ 2V//G \arrow[rr, dashed, "\Psi"'] & & \mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^2) \end{tikzcd}$$

où l'espace $2V//G$ est la variété algébrique affine irréductible associée à l'algèbre (intègre, de type fini) $A(2)$ et l'application $\pi : 2V \to 2V//G$ est le morphisme canonique.

La stratégie est alors la suivante: on montre que Ψ est surjective et birationnelle; il en résultera que c'est un isomorphisme algébrique car $\mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^2)$ est une variété normale (voir par exemple [Bri.], lemme 1 page 132), et, vu la forme de l'application χ, le théorème 3.1 s'en suivra.

Il n'est pas difficile de montrer que χ, et par conséquent Ψ, est surjective: en effet, considérons un élément g de $\mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^2)$, comme on a $g(a,b) = b^3 g(\frac{a}{b}, 1)$, le polynôme g peut s'écrire sous la forme:

$$g(a,b) = \lambda b^{3-N} \prod_1^N (a - \alpha_i b)$$

où λ est un scalaire non nul, et avec $0 \leq N \leq 3$ (un produit vide étant égal à 1). En posant alors $x = \sum_1^N e_i$ (on prend $x = 0$ si $N = 0$) et $y = -\sum_1^N \alpha_i e_i + e_{N+1} \cdots + e_3$, il vient

$$\det \circ \alpha_{(x,y)} = \frac{1}{\lambda} f$$

et donc $g \in Im\chi$, puisque cette image est $\mathbb{C}^*$ invariant.

Le morphisme algébrique Ψ étant surjectif, il est dominant; pour montrer qu'il est birationnel il nous suffit (voir par exemple [Vin.], lemme 1 page 252) d'exhiber un sous-ensemble $\mathcal{V}$ dense de $\mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^2)$ tel que pour tout v de $\mathcal{V}$ la fibre $\Psi^{-1}(v)$ soit réduite à un point. On prend alors

$$\mathcal{V} = \chi(\mathcal{U})$$

$\mathcal{U}$ étant le sous-ensemble dense de $2V$ constitué des couples (x, y) avec x inversible et y possédant trois valeurs propres distinctes. Soit (x_0, y_0) un élément de $\mathcal{U}$, on va montrer que si $(x, y) \in 2V$ est tel que

$$(*) \qquad \chi(x_0, y_0) = \chi(x, y)$$

alors (x, y) et (x_0, y_0) sont dans la même G-orbite, ce qui entrainera bien que la fibre $\Psi^{-1}(\chi(x_0, y_0))$ est réduite à $\pi(x_0, y_0)$. Tout d'abord, on peut supposer que $\det x_0 = 1$ sans restreindre la généralité du problème; on peut alors (voir [Far.-Kor.], proposition VIII.3.5, page 153), en se déplaçant dans la G-orbite de (x_0, y_0), supposer que $x_0 = e$. La relation $(*)$ entraine alors que $\det x = 1$, on peut donc encore, en se déplaçant cette fois ci dans la G-orbite de (x, y) (et quitte à changer de notation) remplacer (x, y) par (e, y); la relation $(*)$ nous donne en particulier pour tout complexe a:

$$\det\,(ae + y_0) = \det\,(ae + y)$$

et ceci implique que y possède les mêmes valeurs propres distinctes $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ que y_0. On sait alors (voir [Far.-Kor.], proposition VIII.3.2, page 151) que les éléments y_0 et y peuvent s'écrire sous la forme:

$$y_0 = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3, \quad y = \lambda_1 c_1' + \lambda_2 c_2' + \lambda_3 c_3'$$

où (c_1, c_2, c_3) et (c_1', c_2', c_3') sont deux repères de Jordan de V, mais l'on sait (voir [Far.-Kor.], théorème IV.2.5, page 71) que le groupe $\mathrm{Aut}(V)$ des automorphismes de V opère transitivement sur les repères de Jordan. Il résulte de tout ceci que (x, y) et (x_0, y_0) sont bien dans la même G-orbite.

Le résultat de P. Gordan nous permet de trouver la dimension de Krull $d(p)$ de $A(p)$ pour $p \geq 2$; en effet comme $d(2) = 4$, il résulte de la formule:

$$d(2) = \dim 2V - \max \dim(G.v)$$

que la dimension maximale d'une G-orbite $G.v$ dans $2V$ est 8, ce qui est la dimension du groupe G; par conséquent la dimension maximale d'une G-orbite dans pV est également de 8 et donc on a la:

Proposition 3.3. *La dimension de Krull $d(p)$ de $A(p)$ ($p \geq 2$) est:*

$$d(p) = 6p - 8.$$

Pour terminer ce paragraphe, donnons la structure des $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ modules $A_3(2)$, $A_6(2)$ et $A_9(2)$. Nous avons (voir le paragraphe 2):

$$A_3(2) = \mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^2) = \psi_{(3,\cdots,0)}(2).$$

Par LIE nous obtenons:

$$A_6(2) = \mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^2)) = \psi_{(6,0,\cdots,0)}(2) \oplus \psi_{(2,2,0,\cdots,0)}(2)$$

$$A_9(2) = \mathrm{Sym}^3(\mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^2)) = \psi_{(9,0,\cdots,0)}(2) \oplus \psi_{(5,2,0,\cdots,0)}(2) \oplus \psi_{(3,3,0,\cdots,0)}(2) \oplus \psi_{(0,3,1,\cdots,0)}(2)$$

4. Système de paramètres homogènes.

Notons $B(p)$ la sous-algèbre de $A(p)$ engendrée par les polynomes $f(x_i, x_j, x_k)$, $1 \leq i, j, k \leq p$. Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème:

Théorème 4.1. *L'algèbre $A(p)$ est entière sur $B(p)$.*

Il est classique (voir par exemple [Der.-Kem.], lemme 2.4.5, page 60) que ce théorème résulte du lemme suivant (où $\mathcal{N}_{pV}$ $(p \geq 1)$ désigne le nilcône de pV):

Lemme 4.2. *On a:*

$$\mathcal{N}_{pV} = \{(x_1, \ldots, x_p) \in pV \;\; / f(x_i, x_j, x_k) = 0 \;\; 1 \leq i, j, k \leq p\}.$$

On peut bien entendu supposer, sans restreindre la généralité, que $p \geq 3$. Soit $\{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$ une famille satisfaisant aux relations $f(x_i, x_j, x_k) = 0$, par application du critère de Hilbert-Mumford (voir [Bri.] page 139, ou bien [Der.-Kem.] page 60) il suffit de montrer qu'il existe un sous-groupe à un paramètre λ de G tel que

$$\lim_{t \to 0} \lambda(t) x_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, p.$$

A conjugaison près, les sous-groupes à un paramètre de G sont les $\lambda_{(n_1,n_2,n_3)}$:

$$\lambda_{(n_1,n_2,n_3)} : t \in \mathbb{C}^* \mapsto (\begin{pmatrix} t^{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & t^{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & t^{n_3} \end{pmatrix}, \quad n_3 = -n_1 - n_2$$

opérant sur V par:

$$\lambda_{(n_1,n_2,n_3)}(t).(x_{ij}) = (t^{n_i + n_j} x_{ij}).$$

La démonstration consistera alors à montrer que dans la G-orbite de $\{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$ il existe soit une famille formée de matrices toutes de la forme:

$$\begin{pmatrix} \star & \star & 0 \\ \star & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

soit une famille formée de matrices toutes de la forme:

$$\begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ \star & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour ces deux formes, il n'est pas difficile d'exhiber explicitement un sous-groupe à un paramètre $\lambda_{(n_1,n_2,n_3)}$ qui convient.

Nous avons choisi de donner ici une preuve qui se généralise à la situation des algébres de Jordan simples et de rang trois, et qui repose sur l'emploi des transformations de Frobenius (voir [Far.-Kor.] page 106). On écrira indifféremment un élément y de V sous la forme matricielle $y = (y_{ij})$ ou dans la décomposition de Peirce $y = y_{11}e_1 + y_{22}e_2 + y_{33}e_3 + \mathbf{y}_{12} + \mathbf{y}_{13} + \mathbf{y}_{23}$ associée au repère de Jordan (e_1, e_2, e_3) (avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & y_{12} & 0 \\ y_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, etc). On peut, bien entendu, donner une preuve plus élémentaire de ce qui va suivre.

• On suppose dans un premier temps que l'un des x_i, par exemple x_1, soit de rang 2; par action du groupe G, et par multiplication d'un scalaire, on peut se ramener au cas où $x_1 = e_1 + e_2$. Soit alors y un autre élément x_i de la famille; comme $\mathrm{n}(e_1 + e_2) = e_3$, la relation $f(x_1, x_1, y) = 0$ donne

$$y_{33} = 0$$

et en calculant alors les composantes de $\mathrm{n}(y)$, la relation $f(x_1, y, y) = 0$ entraine que:

$$y_{23}^2 = -y_{13}^2.$$

Si l'on a $y_{23} = 0$ pour chacun des y, tous les éléments de la famille sont de la forme:

$$\begin{pmatrix} \star & \star & 0 \\ \star & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et nous avons fini; on peut donc supposer qu'il existe un élément $y = (y_{ij})$ de la famille avec $y_{23} \neq 0$; nous allons montrer que dans ce cas nous pouvons supposer que la famille soit du type $(x, y', \cdots)$ avec:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y' = \begin{pmatrix} * & 0 & a' \\ 0 & 0 & 0 \\ a' & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a et a' étant deux nombres complexes non nuls. Pour ce faire, appliquons à notre famille la transformation de Frobenius $\tau(u)$ avec

$$u = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{y_{23}}{y_{13}} & 0 \\ -\frac{y_{23}}{y_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il vient (voir [Far.-Kor.], lemme VI.3.1, page 106):

$$\tau(u)(e_1 + e_2) = e_2 + e_1 + 2ue_1 + 2(e_2 + e_3)(u(ue_1)) =$$

$$e_2 + e_1 + u + (e_2 + e_3)(u^2) = e_1 + u$$

de même, pour $y = y_{11}e_1 + y_{22}e_2 + \mathbf{y}_{12} + \mathbf{y}_{13} + \mathbf{y}_{23}$, il vient:

$$\tau(u)(y) = y_{11}\tau(u)(e_1) + \tau(u)(\mathbf{y}_{12} + \mathbf{y}_{13}) + y_{22}e_2 + \mathbf{y}_{23} =$$

$$y_{11}(e_1 + u - e_2) + \mathbf{y}_{12} + \mathbf{y}_{13} + 2(e_2 + e_3)(u(\mathbf{y}_{12} + \mathbf{y}_{13})) + y_{22}e_2 + \mathbf{y}_{23} =$$

$$y_{11}e_1 + (y_{22} - y_{11} - 2\frac{y_{12}y_{23}}{y_{13}})e_2 + y_{11}u + \mathbf{y}_{12} + \mathbf{y}_{13} + \mathbf{y}_{23} + 2u\mathbf{y}_{13}$$

mais $y_{22} - y_{11} - 2\frac{y_{12}y_{23}}{y_{13}} = 0$ puisque det $y = 0$ et $\mathbf{y}_{23} + 2u\mathbf{y}_{13} = 0$, et par conséquent:

$$\tau(u)(y) = y_{11}e_1 + y_{11}u + \mathbf{y}_{12} + \mathbf{y}_{13}$$

maintenant, quitte à rajouter à notre famille une combinaison linéaire de $\tau(u)(y)$ et de $\tau(u)(e_1 + e_2)$, nous pouvons supposer que la famille possède un élément tel que y'.

Soit maintenant z un troisième élément de la famille et regardons les équations vérifiées par le triplet (x, y', z). De l'équation $f(x, x, z) = 0$ nous tirons à nouveau $z_{33} = 0$, de $f(y', y', z) = 0$ nous pouvons conclure que $z_{22} = 0$, enfin $f(x, y', z) = 0$ nous donne:

$$\mathbf{z}_{23} = 0$$

(en effet, un calcul simple nous montre que $x \times y' = 2\mathbf{x}_{12}\mathbf{y}'_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & aa' \\ 0 & aa' & 0 \end{pmatrix}$).

• Il reste le cas où tous les x_i sont de rang 1. Par action du groupe G, et par multiplication d'un scalaire, on prend $x_1 = e_1$. On regarde la composante $(\ )_{33}$ des éléments de la famille.

$\mapsto$ Supposons dans un premier temps qu'il existe un x_i, avec cette composante non nulle; notons cet élément par y:

$$y = y_{11}e_1 + y_{22}e_2 + y_{33}e_3 + \mathbf{y}_{12} + \mathbf{y}_{13} + \mathbf{y}_{23}, \quad y_{33} \neq 0.$$

Nous allons, par une transformation de Frobenius $\tau(u)$ laissant fixe e_1, changer y en $y' = y_{33}e_3$; en rajoutant ensuite à notre famille de départ l'élément $e_1 + y'$, nous serons ramené au cas précédent. Prenons donc $\tau(u)$ avec $u = -\frac{1}{y_{33}}(\mathbf{y}_{13} + \mathbf{y}_{23})$; cette transformation laisse fixe e_1, e_2 et les composantes $(\ )_{12}$, par conséquent:

$$\tau(u)(y) = y_{11}e_1 + y_{22}e_2 + \mathbf{y}_{12} + \mathbf{y}_{13} + \mathbf{y}_{23} + 2\mathrm{L}(e_1 + e_2)[u(\mathbf{y}_{13} + \mathbf{y}_{23})] +$$

$$y_{33}(e_3 + 2ue_3) + 2y_{33}\mathrm{L}(e_1 + e_2)[u(ue_3)]$$

cela donne après un petit calcul et compte tenu du choix de u:

$$\tau(u)(y) = y' = y'_{11}e_1 + y'_{22}e_2 + y_{33}e_3 + \mathbf{y}'_{12}.$$

Cet élément y' étant de rang 1 puisque les transformations de Frobenius conservent le rang, il vient:

$$y' = y_{33}e_3$$

comme souhaité.

$\mapsto$ Supposons enfin que la composante $(\ )_{33}$ de tous les x_i soit nulle. Si pour tous ces x_i les composantes $(\ )_{23}$ et $(\ )_{22}$ sont nulles, tous les éléments de la famille seront de la forme:

$$\begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ \star & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et nous avons fini. Soit donc

$$y = y_{11}e_1 + y_{22}e_2 + \mathbf{y}_{12} + \mathbf{y}_{13} + \mathbf{y}_{23}$$

un élément de la famille avec y_{22} et y_{23} non nuls simultanément. Nous allons, toujours par une transformation de Frobenius $\tau(u)$, ramener y à y' avec $y'_{33} \neq 0$. On prend cette fois fois ci $\tau(u)$, avec $u = \mathbf{u}_{23}$, laissant fixe $y_{11}e_1 + \mathbf{y}_{13}$, et qui fait apparaitre dans $\tau(u)(y) = y'$ le terme

$$y'_{33} = 2u_{23}y_{23} + y_{22}{u_{23}}^2.$$

Vu les hypothèses faites, nous pouvons rendre cette expression non nulle, et ainsi nous ramener au cas précédent, ce qui achève la démonstration.

Remarque 4.3. Dans un travail en cours de rédaction, nous montrons un analogue du théorème 4.1 pour les autres algèbres de Jordan simples de rang trois. Dans ces cas, il faut adjoindre à la sous-algèbre $B(p)$ d'autres invariants (par exemple dans le cas de l'algèbre d'Albert où G est le groupe E_6, il faut ajouter un invariant de degré 9), la preuve du lemme 4.2 devient alors nettement plus pénible.

Remarquons enfin pour terminer ce paragraphe, qu'il résulte du théorème 4.1 que l'algèbre $A(p)$ possède un système de paramètres homogènes constitué de $6p-8$ éléments de degré 3 qui sont des combinaisons linéaires des polynômes $f(x_i, x_j, x_k)$, $1 \leq i, j, k \leq p$ (voir par exemple [Der.-Kem.], lemme 2.4.7, page 61) .

5. L'algèbre $A(3)$.

Dans ce paragraphe, nous redémontrons le résultat de C. Ciamberlini concernant l'algèbre $A(3)$. Ici la connaissance de la série de Poincaré nous suffira pour déterminer l'algèbre.

Notons par $f_1, \cdots f_{10}$ les dix polynômes:

$$\det x, \quad \det y, \quad \det z, \quad f(x,x,y), \quad f(x,x,z)$$

$$f(y,y,x), \quad f(y,y,z), \quad f(z,z,x), \quad f(z,z,y), \quad f(x,y,z).$$

Par le paragraphe précédent, nous savons que ces dix polynômes forment un système de paramètres homogènes de $A(3)$; cette algèbre est donc un $\mathbb{C}[f_1, \cdots, f_{10}]$-module libre de rang r: il existe des invariants $g_2, \cdots g_r$ tels que:

$$A(3) = \mathbb{C}[f_1, \cdots, f_{10}] \bigoplus \mathbb{C}[f_1, \cdots, f_{10}]g_2 \bigoplus \cdots \mathbb{C}[f_1, \cdots, f_{10}]g_r.$$

Nous allons déterminer ce rang en calculant la série de Poincaré $P(t)$ de $A(3)$. Cette série s'écrit:

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^{l} a_{3i} t^{3i}}{(1-t^3)^{10}}$$

puisque les 10 polynômes $f_1, \cdots f_{10}$ sont de degré 3. D'autre part, il résulte des tables de F. Knop et P. Littelmann (voir [Kno.- Lit.]) que:

$$3l = 30 - 18 = 12$$

enfin, les anneaux $A(p)$ étant de Gorenstein (cf [Pro.], page 562) nous avons $a_0 = a_{12} = 1$ et $a_{12-3i} = a_{3i}$; finalement:

$$P(t) = \frac{1 + a_3 t^3 + a_6 t^6 + a_3 t^9 + t^{12}}{(1-t^3)^{10}}.$$

On a $\dim A_3(3) = \dim \mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^3) = 10$ et, par utilisation du logiciel LIE, on obtient:

$$\dim A_6(3) = 56.$$

On en tire facilement:

$$P(t) = \frac{1 + t^6 + t^{12}}{(1-t^3)^{10}}.$$

En particulier, le $\mathbb{C}[f_1, \cdots, f_{10}]$-module libre $A(3)$ est de rang $r = 3$, et il existe une base de la forme $(1, g, g^2)$, où g est invariant de degré 6. L'algèbre $A(3)$ est donc engendrée par ses éléments de degré 3 et 6. L'espace vectoriel $\psi_{(6,0,\cdots,0)}(3) \oplus \psi_{(2,2,0,\cdots,0)}(3)$ est de dimension 55, on cherche donc par

LIE un candidat $\psi_{(a_1,a_2,a_3,\cdots,0)}(3)$ (de dimension 1) pouvant intervenir dans la décomposition du $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$ module $A_6(3)$, c'est à dire tel que $\psi_{(a_1,a_2,a_3,\cdots,0)}(V^*) \neq 0$; on trouve:

$$\begin{aligned} A_6(3) &= \psi_{(6,0,\cdots,0)}(3) \oplus \psi_{(2,2,0,\cdots,0)}(3) \oplus \psi_{(0,0,2,\cdots,0)}(3) \\ &= \mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^3)) \oplus \psi_{(0,0,2,\cdots,0)}(3) = A_3(3)A_3(3) \oplus \psi_{(0,0,2,\cdots,0)}(3) \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que l'invariant $f_{11}(x,y,z) = f(\mathrm{n}(x),\mathrm{n}(y),\mathrm{n}(z))$ n'appartient pas à $A_3(3)A_3(3)$ et que donc il a une projection non nulle sur l'espace $\psi_{(0,0,2,\cdots,0)}(3)$ de $A_6(3)$. En effet, supposons que f_{11} soit dans $A_3(3)A_3(3)$, nous aurions une relation du type:

$$f_{11}(x,y,z) = A[f(x,x,y)f(y,z,z) + f(x,x,z)f(z,y,y) + f(y,y,x)f(x,z,z)] + Bf(x,y,z)^2$$

prenons cette relation pour $x = e_1$ et $y = e_2$, il vient $\mathrm{n}(x) = \mathrm{n}(y) = 0$ et donc $Bf(e_1,e_2,z) = 0$ pour tous les z, d'où $B = 0$, et par conséquent:

$$f_{11}(x,y,z) = A[f(x,x,y)f(y,z,z) + f(x,x,z)f(z,y,y) + f(y,y,x)f(x,z,z)]$$

on fait cette fois ci $x = e_1$, on aurait pour tous les y et z: $Af(y,y,e_1)f(e_1,z,z) = 0$, ce qui conduit à $A = 0$, absurde, puisque l'invariant f_{11} n'est pas nul identiquement. Finalement nous avons:

Proposition 5.1. *$(1, f_{11}, f_{11}^2)$ est une base du $\mathbb{C}[f_1,\cdots,f_{10}]$-module libre $A(3)$.*

Remarque 5.2. Il résulte de la forme de la série de Poincaré que l'invariant f_{11} vérifie une relation du type:

$$f_{11}^3 + Q_1(f_1,\cdots,f_{10})f_{11}^2 + Q_2(f_1,\cdots,f_{10})f_{11} + Q_3(f_1,\cdots,f_{10}) = 0$$

nous donnerons en appendice une méthode pour écrire explicitement cette relation. Disons également que dans le cas des autres algèbres de Jordan simples de rang trois, l'algèbre $A(3)$ est une algèbre de polynômes engendrée par les onze éléments $f_1,\cdots,f_{11}$.

Enfin, il est utile de noter pour le prochain paragraphe la structure du $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$ module $A_9(3)$:

$$\begin{aligned} A_9(3) &= \psi_{(9,0,\cdots,0)}(3) \oplus \psi_{(5,2,0,\cdots,0)}(3) \oplus \psi_{(3,3,0,\cdots,0)}(3) \oplus \psi_{(0,3,1,\cdots,0)}(3) \oplus 2\psi_{(3,0,2,\cdots,0)}(3) \\ &= \mathrm{Sym}^3(\mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^3)) \oplus \psi_{(3,0,2,\cdots,0)}(3) \end{aligned}$$

$A_9(3)$ contient $\psi_{(9,0,\cdots,0)}(3) \oplus \psi_{(5,2,0,\cdots,0)}(3) \oplus \psi_{(3,3,0,\cdots,0)}(3) \oplus \psi_{(0,3,1,\cdots,0)}(3) \oplus \psi_{(3,0,2,\cdots,0)}(3)$; LIE nous donne leur dimension: 230 et 220 et permet de vérifier que $\psi_{(3,0,2,\cdots,0)}(V^*)$ est de dimension 2.

6. Un système générateur des algèbres $A(4)$ et $A(5)$.

Nous pourrions, sur le modèle de ce que nous avons fait concernant l'algèbre $A(3)$, déterminer les séries de Poincaré de $A(4)$ et $A(5)$; mais cela ne suffirait pas pour connaitre ces algèbres, aussi allons nous nous servir de certains résultats de H.W.Turnbull et J.A.Todd, déjà évoqués au paragraphe 2.

6.1 Le cas de $A(4)$.

Ici nous savons que l'algèbre $A(4)$ est engendrée par ses éléments de degré 3 et 6. Par LIE, nous pouvons obtenir la structure du $\mathrm{GL}(4,\mathbb{C})$ module $A_6(4)$:

$$A_6(4) = \psi_{(6,0,\cdots,0)}(4) \oplus \psi_{(2,2,0,\cdots,0)}(4) \oplus \psi_{(0,0,2,\cdots,0)}(4)$$

(par exemple, nous savons que l'espace vectoriel $\psi_{(6,0,\cdots,0)}(4) \oplus \psi_{(2,2,0,\cdots,0)}(4) \oplus \psi_{(0,0,2,\cdots,0)}(4)$ est contenu dans $A_6(4)$ et ils sont tous deux de dimension 220). Au vu de la structure de $A_6(3)$ obtenue au paragraphe 5, nous avons la:

Proposition 6.1. *L'algèbre $A(4)$ est engendrée par les polarisés de* $\det x$ *et de* $f(\mathrm{n}(x), \mathrm{n}(y), \mathrm{n}(z))$.

Remarque 6.2. A nouveau, on peut trouver par LIE, la structure du $\mathrm{GL}(4,\mathbb{C})$ module $A_9(4)$:

$$\begin{aligned} A_9(4) = \psi_{(9,0,\cdots,0)}(4) \oplus \psi_{(5,2,0,\cdots,0)}(4) \oplus \psi_{(3,3,0,\cdots,0)}(4) \oplus \psi_{(0,3,1,\cdots,0)}(4) \oplus 2\psi_{(3,0,2,\cdots,0)}(4) \\ \oplus \psi_{(1,0,0,2,\cdots,0)}(4) \oplus \psi_{(2,0,1,1,\cdots,0)}(4) \\ = \mathrm{Sym}^3(\mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^4)) \oplus \psi_{(3,0,2,\cdots,0)}(4) \end{aligned}$$

6.2 Le cas de $A(5)$.

L'algèbre $A(5)$ est engendrée par ses éléments de degré 3 et 6 et 9. A nouveau LIE nous donne le $\mathrm{GL}(5,\mathbb{C})$ module $A_6(5)$:

$$A_6(5) = \psi_{(6,0,\cdots,0)}(5) \oplus \psi_{(2,2,0,\cdots,0)}(5) \oplus \psi_{(0,0,2,\cdots,0)}(5)$$

il n'y a donc pas de nouveaux invariants de degré 6. Par contre, l'espace vectoriel $\psi_{(9,0,\cdots,0)}(5) \oplus \psi_{(5,2,0,\cdots,0)}(5) \oplus \psi_{(3,3,0,\cdots,0)}(5) \oplus \psi_{(0,3,1,\cdots,0)}(5) \oplus 2\psi_{(3,0,2,\cdots,0)}(5)$ est de dimension 9520, alors que

$$\dim A_9(5) = 9570 = 9520 + 50.$$

On cherche alors par LIE un candidat $\psi_{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,0,\cdots)}(5)$ pouvant intervenir dans la décomposition du $\mathrm{GL}(5,\mathbb{C})$ module $A_9(5)$, on trouve par élimination le module $\psi_{(0,2,0,0,1,0,\cdots)}(5)$, c'est-à-dire que nous avons:

$$A_9(5) = \psi_{(9,0,\cdots,0)}(5) \oplus \psi_{(5,2,0,\cdots,0)}(5) \oplus \psi_{(3,3,0,\cdots,0)}(5) \oplus \psi_{(0,3,1,\cdots,0)}(5)\oplus$$

$$2\psi_{(3,0,2,\cdots,0)}(5) \oplus \psi_{(0,2,0,0,1,0,\cdots)}(5)$$

$$A_9(5) = A_3(5)A_6(5) \oplus \psi_{(0,2,0,0,1,0,\cdots)}(5).$$

Todd nous donne la notation symbolique d'un invariant qui n'appartient pas à $A_3(5)A_6(5)$, il s'agit de:

$$[a, a', a''][a, a', a^{(3)}]a''_\alpha a^{(4)}_\alpha a^{(4)}_{\alpha'} a^{(3)}_{\alpha'}$$

or il résulte des calculs donnés en appendice que l'invariant

$$\mathcal{U}([a, a', a''][a, a', a^{(3)}]a''_\alpha a^{(4)}_\alpha a^{(4)}_{\alpha'} a^{(3)}_{\alpha'})$$

est, modulo des termes appartenant à $A_3(5)A_6(5)$, proportionnel à:

$$f(\mathrm{n}(x) \times \mathrm{n}(y), (x \times z) \times (y \times t), u)$$

par conséquent ce dernier invariant possède une projection non nulle sur $\psi_{(0,2,0,0,1,0,\cdots)}(5)$. L'algèbre $A(5)$ est engendrée par les polarisés de $\det x$, de $f(\mathrm{n}(x), \mathrm{n}(y), \mathrm{n}(z))$ et de $f(\mathrm{n}(x) \times \mathrm{n}(y), (x \times z) \times (y \times t), u)$. Nous pouvons résumer tout ceci dans la

Proposition 6.3. *L'algèbre $A(5)$ est engendrée par les polynômes*

$$f(x_i, x_j, x_k), \quad f(x_i \times x_j, x_k \times x_l, x_m \times x_n)$$

et

$$f((x_i \times x_j) \times (x_k \times x_l), (x_m \times x_n) \times (x_o \times x_p), x_q).$$

7. Appendices.

7.1. Obtention de la relation cubique 5.2.

Dans cet appendice, nous indiquons un procédé pour écrire la relation reliant les onze invariants $f_1, \cdots f_{11}$ et cubique en f_{11} de l'algèbre $A(3)$ évoquée au paragraphe 5.

Soit $z = (z_{ij})$ un élément de V et notons Z_i les coefficients diagonaux de $\mathrm{n}(z)$:

$$Z_1 = z_2z_3 - z_{23}^2, \quad Z_2 = z_1z_3 - z_{13}^2, \quad Z_3 = z_1z_2 - z_{12}^2.$$

Nous avons $f_3 = \det z = z_1z_2z_3 - z_1z_{23}^2 - z_2z_{13}^2 - z_3z_{12}^2 + 2z_{12}z_{23}z_{13} = -2z_1z_2z_3 + \sum_{i=1}^3 z_iZ_i + 2z_{12}z_{23}z_{13}$, relation que nous écrivons sous la forme:

$$(*) \qquad 2z_{12}z_{23}z_{13} = f_3 + 2z_1z_2z_3 - \sum_{i=1}^3 z_iZ_i = f_3 + 2\pi - V$$

où nous avons posé $\pi = z_1z_2z_3$ et $V = \sum_{i=1}^3 z_iZ_i$. Des relations donnant les coefficients Z_i, et en posant $\Pi = Z_1Z_2Z_3$, il vient :

$$z_{12}^2z_{23}^2z_{13}^2 = -\Pi + \pi^2 - \pi V + \sum_{i<j} z_iz_jZ_iZ_j.$$

La formule (*) donne alors l'égalité:

$$(**) \qquad 4\Pi = -V^2 + 4\sum_{i<j} z_iz_jZ_iZ_j + 2Vf_3 - 4\pi\ f_3 - f_3^2.$$

que nous voyons comme une relation liant Π, z_i, Z_i et f_3.

On fait alors l'observation suivante: il y a dans la G-orbite d'un élément générique de $3V$ un triplet de la forme $(\lambda e, \sum y_ie_i, z)$ avec λ non nul et y_1, y_2, y_3 distincts. Par abus de notation, nous désignerons par $f_1, \cdots f_{11}$, les valeurs des onze invariants en ce triplet (ainsi par exemple: $\lambda^3 = f_1$). Il se trouve que les triplets (z_1, z_2, z_3) et (Z_1, Z_2, Z_3) sont entièrement déterminés par ces $f_1, \cdots f_{11}$. Ainsi, on constate que (z_1, z_2, z_3) est solution du système:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} z_1 & + & z_2 & + & z_3 & = & \frac{1}{2}\lambda^{-2}f_5 \\ y_2y_3z_1 & + & y_1y_3z_2 & + & y_1y_2z_3 & = & \frac{1}{2}f_7 \\ (y_2+y_3)z_1 & + & (y_1+y_3)z_2 & + & (y_1+y_2)z_3 & = & \lambda^{-1}f_{10} \end{array}\right.$$

qui est de Cramer, de déterminant: $\Delta = (y_1 - y_3)(y_2 - y_3)(y_2 - y_1)$, on a d'une manière plus précise:

$$z_1 = \frac{1}{\Delta}(y_3 - y_2)P(y_1), \quad z_2 = \frac{1}{\Delta}(y_1 - y_3)P(y_2), \quad z_3 = \frac{1}{\Delta}(y_2 - y_1)P(y_3)$$

avec $P(y_i) = \frac{1}{2}\lambda^{-2} f_5 y_i^2 - \lambda^{-1} f_{10} y_i + \frac{1}{2} f_7$. Cela donne pour π:

$$\pi = -\frac{1}{\Delta^2} P(y_1)P(y_2)P(y_3)$$

Le produit $P(y_1)P(y_2)P(y_3)$ est symétrique en y_1, y_2, y_3 et s'exprime donc comme polynôme en

$$\sigma_1 = \sum y_i = \frac{1}{2}\lambda^{-2} f_4,\ \sigma_2 = \sum_{i<j} y_i y_j = \frac{1}{2}\lambda^{-1} f_6,\ \sigma_3 = y_1 y_2 y_3 = f_2$$

il en est de même pour Δ^2. On vérifie ensuite que $f_1^2 \Delta^2$ est un polynôme en f_1, f_2, f_4, f_6 et que $f_1^2 P(y_1)P(y_2)P(y_3)$ est un polynôme en $f_1, f_2, f_4, f_6, f_5, f_7, f_{10}$ (les vérifications sont un peu longues mais ne présentent pas de difficultés).
De même, le triplet (Z_1, Z_2, Z_3) est solution du système:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} Z_1 & + & Z_2 & + & Z_3 & = & \frac{1}{2}\lambda^{-1} f_8 \\ y_1 Z_1 & + & y_2 Z_2 & + & y_3 Z_3 & = & \frac{1}{2} f_9 \\ (y_2 + y_3) y_1 Z_1 & + & (y_1 + y_3) y_2 Z_2 & + & (y_1 + y_2) y_3 Z_3 & = & \lambda^{-2} f_{11} \end{array} \right.$$

de même déterminant Δ; on a:

$$Z_1 = \frac{1}{\Delta}(y_3 - y_2) Q(y_1, y_2 y_3),\ \ Z_2 = \frac{1}{\Delta}(y_1 - y_3) Q(y_2, y_1 y_3),\ \ Z_3 = \frac{1}{\Delta}(y_2 - y_1) Q(y_3, y_1 y_2)$$

avec $Q(X, Y) = \frac{1}{2}\lambda^{-1} f_8 Y + \frac{1}{2} f_9 X - \lambda^{-2} f_{11}$. Ici on trouve que:
$\Pi = -\frac{1}{\Delta^2} Q(y_1, y_2 y_3) Q(y_2, y_1 y_3) Q(y_3, y_1 y_2)$, et à nouveau on peut constater que $f_1^2 Q(y_1, y_2 y_3) Q(y_2, y_1 y_3) Q(y_3, y_1 y_2)$ est un polynôme en $f_1, f_2, f_4, f_6, f_8, f_9, f_{11}$ (de degré 3 en f_{11}).
Enfin, on peut faire les mêmes manipulations sur V et constater que $f_1^2 \Delta^2 V$ est un polynôme en $f_1, f_2, f_4, f_6, f_5, f_7, f_{10}, f_8, f_9, f_{11}$ (de degré 1 en f_{11}).

Tout ceci nous conduit à réécrire la relation (**) en la multipliant par le facteur $f_1^2 \Delta^2$:

$$4 f_1^2 \Delta^2 \Pi = f_1^2 \Delta^2 (-V^2 + 4 \sum_{i<j} z_i z_j Z_i Z_j) + 2(f_1^2 \Delta^2 V) f_3 - 4(f_1^2 \Delta^2 \pi)\, f_3 - (f_1^2 \Delta^2) f_3^2.$$

Le membre de gauche de cette égalité est un polynôme en $f_1, f_2, f_4, f_6, f_8, f_9, f_{11}$ de degré 3 en f_{11}, et dans le membre de droite, l'expression $2(f_1^2 \Delta^2 V) f_3 - 4(f_1^2 \Delta^2 \pi)\, f_3 - (f_1^2 \Delta^2) f_3^2$ est un polynôme en les f_i, de degré 1 en f_{11}

Il nous reste à étudier l'expression $-V^2 + 4 \sum_{i<j} z_i z_j Z_i Z_j$:

$$-V^2+4\sum_{i<j} z_i z_j Z_i Z_j = -\sum z_i^2 Z_i^2 + 2\sum_{i<j} z_i z_j Z_i Z_j =$$

$$-\frac{1}{\Delta^4}[(y_3-y_2)^4 P^2(y_1)Q^2(y_1,y_2y_3)+(y_1-y_3)^4P^2(y_2)Q^2(y_2,y_1y_3)+$$

$$(y_1-y_2)^4P^2(y_3)Q^2(y_3,y_1y_2)]+\frac{2}{\Delta^4}[(y_3-y_2)^2(y_1-y_3)^2P(y_1)P(y_2)Q(y_1,y_2y_3)Q(y_2,y_1y_3)$$

$$+(y_3-y_2)^2(y_1-y_2)^2P(y_1)P(y_3)Q(y_1,y_2y_3)Q(y_3,y_1y_2)$$

$$+(y_3-y_2)^2(y_1-y_2)^2P(y_2)P(y_3)Q(y_2,y_1y_3)Q(y_3,y_1y_2)].$$

Considérons la quantité

$$-(y_3-y_2)^4P^2(y_1)Q^2(y_1,y_2y_3)-(y_1-y_3)^4P^2(y_2)Q^2(y_2,y_1y_3)+$$

$$2(y_3-y_2)^2(y_1-y_3)^2P(y_1)P(y_2)Q(y_1,y_2y_3)Q(y_2,y_1y_3)=$$

$$-((y_3-y_2)^2P(y_1)Q(y_1,y_2y_3)-(y_1-y_3)^2P(y_2)Q(y_2,y_1y_3))^2$$

l'expression $(y_3-y_2)^2P(y_1)Q(y_1,y_2y_3)-(y_1-y_3)^2P(y_2)Q(y_2,y_1y_3)$ s'annulle pour $y_1=y_2$, et par conséquent le numérateur de $-V^2+4\sum_{i<j} z_iz_jZ_iZ_j$ est divisible par $(y_1-y_2)^2$, étant un polynôme symétrique en y_1,y_2,y_3 il sera divisible par Δ^2; en d'autres termes $\Delta^2(-V^2+4\sum_{i<j} z_iz_jZ_iZ_j)$ est polynôme symétrique en y_1,y_2,y_3; on vérifie ensuite que $f_1^2\Delta^2(-V^2+4\sum_{i<j} z_iz_jZ_iZ_j)$ est un polynôme en $f_1,f_2,f_4,f_6,f_5,f_7,f_{10},f_8,f_9,f_{11}$ de degré 2 en f_{11}. Tous ces calculs, quoique fastidieux ne sont pas difficiles et sont faisables par Maple.

7.2. Calcul symbolique.

Ici nous indiquons brièvement comment montrer que l'invariant

$$\mathcal{U}([a,a',a''][a,a',a^{(3)}]a''_\alpha a^{(4)}_\alpha a^{(4)}_{\alpha'} a^{(3)}_{\alpha'})$$

du paragraphe 6 est relié à $f(\mathrm{n}(x)\times\mathrm{n}(y),(x\times z)\times(y\times t),u)$. Rappelons que si le vecteur symbolique $a=(a_1,a_2,a_3)$ représente l'élément $x=(x_{ij})$ de V, l'on a:

$$x_{11}=\mathcal{U}(a_1^2), x_{22}=\mathcal{U}(a_2^2), x_{33}=\mathcal{U}(a_3^2), x_{12}=\mathcal{U}(a_1a_2), x_{13}=\mathcal{U}(a_1a_3), x_{23}=\mathcal{U}(a_2a_3).$$

$\mathcal{U}$ désignant l'opérateur ombral.
Nous aurons besoin d'un certain nombre de lemmes; on a tout d'abord facilement le:

Lemme 7.1. *Si $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$ représentent deux éléments x et y de V, alors le triplet symbolique produit vectoriel de u avec v de composantes:*

$$u_2v_3 - u_3v_2, \quad u_3v_1 - u_1v_3, \quad u_1v_2 - u_2v_1$$

correspond à l'élément $x \times y$ de l'algèbre de Jordan V.

En particulier, $x \times x$ et $y \times y$ sont représentés par:

$$\alpha = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

et

$$\alpha' = (a_2'b_3' - a_3'b_2',\ a_3'b_1' - a_1'b_3',\ a_1'b_2' - a_2'b_1')$$

on notera par (α, α') le produit vectoriel de α avec α', qui représente donc $(x \times x) \times (y \times y)$.

Lemme 7.2. *On a la formule:*

$$[(\alpha, \alpha'), u, v] = u_\alpha v_{\alpha'} - u_{\alpha'} v_\alpha.$$

Développons le déterminant $[(\alpha, \alpha'), u, v]$ suivant la dernière colonne v:

$$[(\alpha, \alpha'), u, v] = v_1((\alpha, \alpha')_2 u_3 - (\alpha, \alpha')_3 u_2)$$

$$-v_2((\alpha, \alpha')_1 u_3 - (\alpha, \alpha')_3 u_1) + v_3((\alpha, \alpha')_1 u_2 - (\alpha, \alpha')_2 u_1)$$

on insère ensuite les formules:

$$(\alpha, \alpha')_1 = \alpha_2 {\alpha'}_3 - \alpha_3 {\alpha'}_2, (\alpha, \alpha')_2 = \alpha_3 {\alpha'}_1 - \alpha_1 {\alpha'}_3, (\alpha, \alpha')_3 = \alpha_1 {\alpha'}_2 - \alpha_2 {\alpha'}_1.$$

En mettant $v_i {\alpha'}_i$ (resp. $v_i \alpha_i$) en facteur dans les termes intervenant avec le signe plus (resp. avec le signe moins), il vient:

$$[(\alpha, \alpha'), u, v] = v_1 {\alpha'}_1 [u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3] - v_1 \alpha_1 [u_2 {\alpha'}_2 + u_3 {\alpha'}_3]$$

$$+v_2 {\alpha'}_2 [u_3 \alpha_3 + u_1 \alpha_1] - v_2 \alpha_2 [u_3 {\alpha'}_3 + u_1 {\alpha'}_1]$$

$$+v_3 {\alpha'}_3 [u_2 \alpha_2 + u_1 \alpha_1] - v_3 \alpha_3 [u_2 {\alpha'}_2 + u_1 {\alpha'}_1].$$

Sous cette forme, on voit bien ce qu'il faut ajouter et retrancher pour avoir:

$$[(\alpha, \alpha'), u, v] = v_1 {\alpha'}_1 u_\alpha - v_1 \alpha_1 u_{\alpha'} + v_2 {\alpha'}_2 u_\alpha - v_2 \alpha_2 u_{\alpha'} + v_3 {\alpha'}_2 u_\alpha - v_3 \alpha_3 u_{\alpha'}$$

ce qui montre le lemme.
Si x, y, z et t sont représentés par les vecteurs a(ou b), a'(ou b'), a''(ou b'') et $a^{(3)}$(ou $b^{(3)}$), on montre de même le:

Lemme 7.3. *L'expression:*

$$a^{(3)}[a', a, a''] - a'[a^{(3)}, a, a'']$$

représente la matrice $(x \times z) \times (y \times t)$.

Enfin, nous aurons besoin d'un dernier résultat:

Lemme 7.4. *Si* $A = (A_1, A_2, A_3)$, $B = (B_1, B_2, B_3)$ *et* $C = (C_1, C_2, C_3)$ *représentent les trois éléments* X, Y, Z *de* V, *on a:*

$$\mathcal{U}([A, B, C]^2) = f(X, Y, Z).$$

Ceci résulte de la formule $f(X, Y, Z) = \mathrm{tr}((X \times Y)Z)$, du lemme 7.1, et de

$$\mathcal{U}(\sum a_i a'_i) = \mathrm{tr}(x.y)$$

où $a = (a_1, a_2, a_3)$ et $a' = (a'_1, a'_2, a'_3)$ représentent x et y.

Si maintenant u est un cinquième élément de V représenté par $a^{(4)}$, les trois premiers lemmes nous donnent:

$$f(\mathrm{n}(x) \times \mathrm{n}(y), (x \times z) \times (y \times t), u) = \mathcal{U}([(\alpha, \alpha'), a^{(3)}[a', a, a''] - a'[a^{(3)}, a, a''], a^{(4)}]^2) =$$
$$\mathcal{U}(([(\alpha, \alpha'), a^{(3)}, a^{(4)}][a', a, a''] - [(\alpha, \alpha'), a', a^{(4)}][a^{(3)}, a, a''])^2).$$

Par le lemme 7.2 nous avons:

$$[(\alpha, \alpha'), a^{(3)}, a^{(4)}] = a^{(3)}_\alpha a^{(4)}_{\alpha'} - a^{(3)}_{\alpha'} a^{(4)}_\alpha$$

$$[(\alpha, \alpha'), a', a^{(4)}] = a'_\alpha a^{(4)}_{\alpha'} - a'_{\alpha'} a^{(4)}_\alpha.$$

On insère ces formules; en développant le carré on constate alors facilement que l'application ombrale transforme les termes en produits d'invariants déjà connus, sauf les deux expressions symboliques:

$$2a^{(3)}_\alpha a^{(4)}_{\alpha'}(a', a, a'')a'_{\alpha'} a^{(4)}_\alpha (a^{(3)}, a, a'')$$

et

$$2a^{(3)}_{\alpha'} a^{(4)}_\alpha (a', a, a'')a'_\alpha a^{(4)}_{\alpha'}(a^{(3)}, a, a'')$$

il est classique (voir [Gra.-You.] page 275, ou [Tod.2] page 400) que l'application ombrale transforme une expression symbolique contenant $a'_{\alpha'} = [a', b', c']$ où a', b' et c' représentent l'élément y, en un produit (éventuellement nul) d'invariants divisible par $\det y$. Finalement, modulo $A_3(5)A_6(5)$, nous avons le résultat escompté

$$f((x \times x) \times (y \times y), (x \times z) \times (y \times t), u) = 2\mathcal{U}(a'_\alpha a^{(4)}_\alpha a^{(4)}_{\alpha'} a^{(3)}_{\alpha'}(a^{(3)}, a, a'')(a', a, a'')).$$

Bibliographie.

[Bri.] M. Brion, *Invariants et covariants des groupes réductifs,* in M. Brion, G.W. Schwarz, *Théorie des invariants et géométrie des variétés quotients,* Paris, Hermann, 2000.

[Cia.] C. Ciamberlini, *Sul sistema di tre forme ternarie quadratiche,* Giornale di Battaglini 24 (1886) 141-157.

[Der.-Kem.] H. Derksen, G. Kemper, *Computational Invariant Theory,* Springer-Verlag 2002.

[Far.-Kor.] J. Faraut, A. Koranyi, *Analysis on Symmetric Cones,* Clarendon Press, Oxford 1994.

[Gor.1] P. Gordan, *Über Büschel von Kegelschnitten,* Math. Ann 19 (1882) 529-552.

[Gor.2] P. Gordan, *Vorlesungen über Invariantentheorie,* Chelsea, 1987 (reprint des originaux, Leipzig, 1885 et 1887).

[Gra.-You.] J.H. Grace, A. Young, *Algebra of invariants,* Chelsea, (reprint de l'original, Cambridge University Press, 1903).

[Gro.- Rot.- Ste.] F.D. Grosshans, G-C. Rota, J.A. Stein, *Invariant theory and superalgebras,* AMS Regional Confe. Series 69 (1987).

[Ilt.] A.V. Iltyakov, *On rational Invariants of the Group E_6,* Proc. Ame. Math. Soc. 124 (1996) 3637-3640.

[Kno.- Lit.] F. Knop, P. Littelmann, *Der Grad erzeugender Funktionen von Invariantenringen,* Mathemat. Zeit. 196 (1987) 211-229.

[Pro.] C. Procesi, *Lie Groups. An Approach through Invariants and Representations,* Springer-Verlag 2007.

[Rot.- Stu.] G-C. Rota, B. Sturmfels, *Introduction to Invariant Theory in Superalgebras,* in D. Stanton ed., *Invariant Theory and Tableaux,* Springer-Verlag, IMA volumes in mathematics and its applications, vol 19, 1990.

[Sch.1] G.W. Schwarz, *Representations of Simple Lie Groups with Regular Rings of Invariants,* Inventiones mathematicae 49 (1978) 167-191.

[Sch.2] G.W. Schwarz, *On Classical Invariant Theory and Binary cubics,* Ann. Inst. Fourier, 37 (1987) 191-216.

[Spr.] T.A. Springer, *Jordan Algebras and Algebraic Groups,* Springer-Verlag, Ergebn. der Math. und ihrer Grenz., vol 75, 1973.

[Tod.1] J.A. Todd, *The complete irreducible system of four ternary quadratic,* Proc. Lond. Math. Soc. (2) 52 (1951) 271 - 294.

[Tod.2] J.A. Todd, *Ternary quadratic types,* Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A, 241 (1948) 399 - 456.

[Tur.] H.W. Turnbull, *Ternary quadratic types,* Proc. London Math. Soc 2 (1910) 81-121.

[Vin.] E.B. Vinberg, *On Invariants of a set of matrices,* Jour. of Lie Theory, 6, (1996) 249-269.

[Vus.] T. Vust, *Sur la théorie des invariants des groupes classiques,* Ann. Inst. Fourier 26 (1976) 1-31.
[Wae.] B.L. Van der Waerden *Over het concomitantensystem van twee en drie ternaire quadratische vormen,* Amst. Ak. Versl. 32 (1923) 138-147.