

# À propos de tomographie algébrique dans le cadre projectif ou torique

Alekos Vidras et Alain Yger

msvidras@ucy.ac.cy

University of Cyprus, Nicosia 1678, Cyprus

yger@math.u-bordeaux1.fr

Université Bordeaux 1, 33405 Talence, France

Le second auteur voudrait dédier ce travail à son ami Bensalem Jennane, à qui les échanges réciproques entre Rabat et Bordeaux, tant au niveau de la recherche que de la formation des doctorants, doivent tant ! Que ce court texte, instantané d'un travail entamé depuis un cours de DEA en 2002 (où les étudiants ont plus que leur part) et qui fut présenté à la conférence en son honneur, soit un humble gage de la reconnaissance d'un Bordelais qui en a tant profité !

## 1 Les transformées de type Radon dans le contexte projectif (revisitées avec le calcul résiduel)

On sait le rôle crucial que jouent les transformations du type Radon en géométrie intégrale réelle (tomographie, CAT Scanner). Le principe de ces transformations est bien connu : à une fonction  $f$ , disons suffisamment régulière et à support compact dans  $\mathbb{R}^n$ , on associe,  $k$  étant un entier fixé entre 1 et  $n - 1$ , la collection de fonctions obtenues par intégration de  $f$  sur la collection des sous-espaces affines de dimension  $k$  de  $\mathbb{R}^n$  ; on a ainsi la transformation de Radon ( $k = n - 1$ ), la transformation de Radon par les droites ( $k = 1$ ) ou  $X$ -Ray transformation, *etc.* La réalisation de l'inversion de ces transformations (souvent d'ailleurs envisagées avec données soit incomplètes, soit sous forme "atténuée" – ce qui signifie que l'intégration se trouve pondérée par une densité) est un problème majeur, par exemple en imagerie médicale. De récents développements technologiques ont par ailleurs récemment mis en lumière l'intérêt d'envisager des transformées de Radon suivant d'autres familles de  $k$ -sous variétés que les familles de  $k$ -plans ( $k = 1, \dots, n - 1$ ) ; la  $X$ -Ray transformation par les cercles en est un exemple.

Ces transformations du type Radon sont aussi intéressantes dans le contexte complexe, plus précisément dans le contexte de l'espace projectif  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , en relation étroite avec la notion de  $k$ -concavité. L'une des propriétés majeures de l'espace projectif  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  (intrinsèquement liée précisément à la définition des transformations du type Radon dans le cadre complexe) est que tous les hyperplans projectifs y sont rationnellement équivalents, le groupe de Chow  $A_{n-1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}$  offrant un outil pour "grader" l'anneau des coordonnées homogènes  $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  ; cet anneau est étroitement associé à  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , qui se présente comme quotient géométrique de  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{z_0 = \dots = z_n = 0\}$  sous l'action du groupe  $\mathbb{T} = \mathbb{C}^*$ . Balayer la famille des  $(n - 1)$ -hyperplans projectifs correspond à balayer la classe d'équivalence de l'hyperplan à l'infini  $\{z_0 = 0\}$  modulo équivalence rationnelle ; balayer la famille des  $k$ -plans projectifs correspond à balayer la grassmannienne  $G(k, n)$ , tous ces  $k$ -plans se trouvant de fait dans la classe (modulo équivalence rationnelle) correspondant au générateur du groupe de Chow  $A_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ . Un ouvert  $k$ -concave  $U$  de l'espace projectif  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  est un ouvert se

présentant comme une union de  $k$ -plans et l'ensemble des  $k$ -plans inclus dans un tel ouvert est lui-même un ouvert  $U^*$  de la grassmannienne  $G(k, n)$ .

Étant donné un tel ouvert  $k$ -concave  $U$ , la transformation de Radon au sens d'Andreotti-Norguet [2] associe à une  $(k, k)$  forme continue  $\omega \in C_{k,k}^0(U)$  la fonction continue sur  $U^* \subset G(k, n)$  :

$$u \longmapsto \int_{\Pi_u} \omega|_{\Pi_u},$$

où  $\Pi_u$  désigne le  $k$ -plan défini en coordonnées homogènes par les équations

$$\langle \zeta, u_j \rangle := \sum_{k=0}^n u_{jk} \zeta_k = 0, \quad j = 1, \dots, n - k.$$

On remarque que la transformée de Radon au sens d'Andreotti-Norguet d'une telle  $(k, k)$ -forme lorsqu'elle est de classe  $C^1$  et  $\bar{\partial}$ -fermée dans  $U$  ne dépend de fait que de la classe de  $\omega$  dans  $H^{k,k}(U, \mathbb{C})$ .

Intimement liée à l'idée présidant au concept de ces transformations de type Radon (dont la transformation d'Andreotti-Norguet constitue un premier exemple), on trouve la notion d'*incidence* : la variété d'incidence ("coiffant" à la fois  $U$  et  $U^*$ ) est la sous-variété lisse (d'ailleurs intersection complète) de  $U \times U^*$  définie comme

$$\text{Inc}(U) := \{(\zeta, u) \in U \times U^* ; \zeta \in \Pi_u\}.$$

Cette variété se projette *via* la submersion holomorphe  $\pi_1 : (\zeta, u) \longmapsto \zeta$  sur  $U$  et *via* la projection holomorphe propre  $\pi_2 : (\zeta, u) \longmapsto u$  sur  $U^*$  (elle aussi submersion). Si  $\omega$  est une  $(n, k)$ -forme régulière dans  $U$  ( $\omega \in C_{n,k}^\infty(U)$ ), on peut la remonter par image inverse *via* la submersion  $\pi_1$  en une forme régulière  $\pi_1^*(\omega)$  sur la variété d'incidence  $\text{Inc}(U)$ , traiter cette forme comme un  $(n, k)$ -courant  $[\pi_1^*(\omega)]$ , puis transformer ce courant par image directe *via* la projection propre  $\pi_2$  en un courant  $(\pi_2)_*([\pi_1^*(\omega)])$  ; le  $(n - k, 0)$ -courant dans  $U^*$  ainsi attaché à la forme régulière  $\omega$  correspond de fait à une  $(n - k, 0)$ -forme différentielle régulière dans l'ouvert  $U^*$ , dite transformée de Radon (au sens d'Abel) de la  $(n, k)$ -forme régulière  $\omega$ . La transformée de Radon (au sens d'Abel) est la  $(n - k, 0)$ -forme abélienne dans  $U^*$  s'expriment en fonction des coordonnées  $u_1, \dots, u_{n-k}$  sous la forme

$$u \longmapsto \left\langle \bigwedge_{j=1}^{n-k} \bar{\partial}_\zeta \left[ \frac{1}{\langle \zeta, u_j \rangle} \right], \theta_u(\zeta) \omega(\zeta) \wedge \bigwedge_{j=1}^{n-k} d_u[\langle \zeta, u_j \rangle] \right\rangle,$$

où  $\theta_u$  est, pour  $u \in U^*$ , une fonction "plateau" supportée par  $U$  et identiquement égale à 1 dans un voisinage de l'hyperplan  $\Pi_u$  ; le courant résiduel symboliquement introduit ici avec la notation

$$\bigwedge_{j=1}^{n-k} \bar{\partial}_\zeta \left[ \frac{1}{\langle \zeta, u_j \rangle} \right]$$

est le courant  $(0, n - k)$  résiduel de Coleff-Herrera [6] (voir aussi [22] pour un panorama récent). Lorsque  $\omega$  est une  $(n, k)$ -forme de classe  $C^1$   $\bar{\partial}$ -fermée, la transformée de Radon (au sens d'Abel) de la forme  $\omega$  est (voir [13]) la  $(n - k, 0)$ -forme abélienne

$$u \longmapsto \int_{\zeta \in \Pi_u} \text{Res}_{\Pi_u} \frac{\omega(\zeta) \wedge \bigwedge_{j=1}^{n-k} d_{u_j}[\langle \zeta, u_j \rangle]}{\prod_{j=1}^{n-k} \langle \zeta, u_j \rangle}$$

(la notation  $\text{Res}_{\Pi_u}$  désignant la prise de résidu de Poincaré itéré relativement au  $k$ -plan  $\Pi_u$ ) et ne dépend de fait que de la classe de cohomologie de  $\omega$  dans  $H^{n,n-k}(U, \mathbb{C})$ .

Couplée avec la transformation de Radon (au sens d'Abel), on peut voir la transformation d'Abel comme la transformation de Radon des ensembles "fins" (c'est à G. Henkin, qui l'a étudié sous tous ses aspects, voir par exemple [15, 16], que l'on doit cette interprétation). Plus précisément, soit  $U$  un ouvert  $k$ -concave de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ,  $V$  un sous ensemble analytique fermé de  $U$  de dimension pure égale à  $n-k$ ,  $\omega$  une  $(p, 0)$ -forme méromorphe sur  $V$  (c'est-à-dire de fait méromorphe au voisinage de  $U$  et de lieu polaire intersectant proprement  $V$ ) avec  $0 \leq p \leq n-k$ ; la multiplication  $\pi_1^*(\omega) \wedge [\pi_1^{-1}(V)]$  s'avère possible (voir par exemple [4]) car  $\pi_1^*(\omega)$  définit une forme méromorphe sur  $\pi_1^{-1}(V)$ , ce qui nous permet d'introduire un  $(k+p, k)$ -courant sur  $\text{Inc}(U)$ , courant dont l'image directe par  $\pi_2$  est un  $(p, 0)$ -courant sur  $U^*$ ; ce courant  $(\pi_2)_*[\pi_1^*(\omega) \wedge [\pi_1^{-1}(V)]]$  est de fait un courant à coefficients méromorphes dans  $U^*$ , qui s'exprime hors d'une certaine hypersurface de  $U^*$  sous une forme close tout à fait explicite en termes de calcul résiduel (ce grâce à la factorisation du courant d'intégration que fournit dans le cadre d'une intersection complète la formule de Lelong-Poincaré). Cette forme  $(p, 0)$  méromorphe dans  $U^*$  (dual relativement à la  $k$ -concavité) est dite transformée d'Abel (ou trace) de la forme  $\omega$  et l'on a son expression close

$$\text{Tr}[\omega](u) = \left\langle \bigwedge_{j=1}^{n-k} \bar{\partial}_\zeta \left[ \frac{1}{\langle \zeta, u_j \rangle} \right], \theta_u(\zeta)\omega(\zeta) \wedge \left( \bigwedge_{j=1}^{n-k} d_{\zeta, u}[\langle \zeta, u_j \rangle] \right)_{n-k-p, p} \right\rangle_V,$$

la composante  $(\cdot)_{n-k-p, p}$  d'une  $(n-k, 0)$ -forme en  $(\zeta, u)$  étant sa composante de bidegrés respectifs  $n-k-p$  en  $\zeta$  et  $p$  en  $u$ ; le résidu de Coleff-Herrera utilisé ici est le courant résiduel sur l'ensemble analytique réduit  $V$ , ce qu'indique la notation  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ . Notons que si  $\omega$  est une  $n-k$ -forme, la transformée d'Abel de  $\omega$  se lit de fait comme la transformée de Radon (au sens d'Abel) du courant  $\omega \wedge [V]$ , "produit" de la forme méromorphe  $\omega$  par le courant d'intégration sur l'ensemble analytique  $V$ . C'est là la raison pour l'interprétation de la transformation d'Abel comme la transformation de Radon des ensembles "fins". De fait, la trace d'une  $(p, 0)$ -forme  $\omega$  relativement à un sous-ensemble analytique fermé  $U$  s'interprète de manière naïve (au voisinage d'un point  $u_0$  générique de  $U^*$ ) comme suit : pour un tel point  $u_0$ , on peut supposer que  $\Pi_{u_0}$  et  $V$  s'intersectent proprement en un nombre fini de points  $p_1(u_0), \dots, p_N(u_0)$ , ce de manière transverse et hors du lieu polaire de la forme méromorphe  $\omega$ ; dès lors, d'après le théorème des fonctions implicites, une perturbation  $\Pi_u$  de  $\Pi_{u_0}$  intersecte  $V$  toujours de manière transverse en  $N$  points  $p_1(u), \dots, p_N(u)$ . On a, au voisinage de  $u_0$ ,

$$\text{Tr}[\omega](u) = \sum_{j=1}^N p_j^*[\omega](u),$$

ce qui nous fait bien ici remonter au classique concept de trace introduit par Abel pour contourner l'obstruction que constituait le caractère hautement transcendant des primitives du type

$$z \mapsto \int_{z_0}^z R(u)du,$$

l'intégration étant prise sur une courbe algébrique de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ,  $z_0$  étant un point de cette courbe,  $z$  le point courant, et  $R(u)du$  désignant une  $(1, 0)$ -forme rationnelle sans pôle sur l'arc de courbe  $z_0z$ .

On peut également (ceci a été fait par B. Fabre dans [12]) étendre l'action de la transformée de Radon (au sens d'Abel) aux courants localement résiduels, c'est-à-dire aux courants s'expriment localement sous la forme

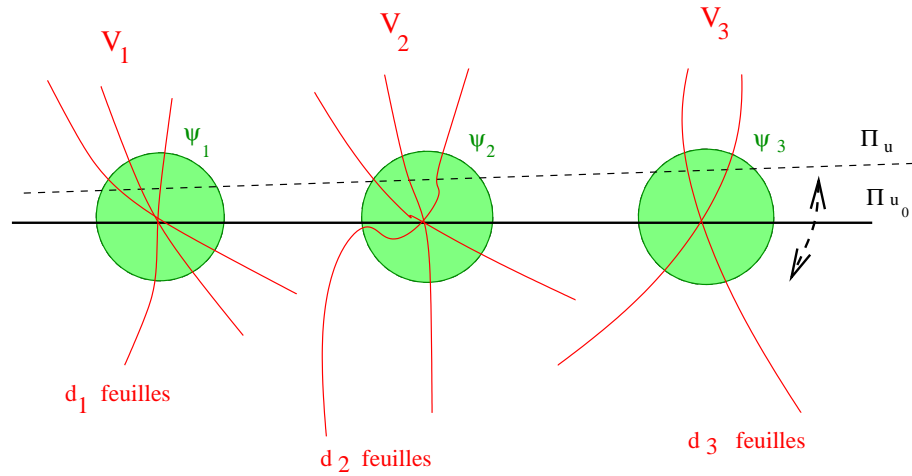
$$\omega \wedge [1/g] \bigwedge_{j=1}^{n-k} \bar{\partial}[1/f_j],$$

où  $g, f_1, \dots, f_{n-k}$  définissent une suite quasi-régulière et  $\omega$  est une  $(p, 0)$ -forme abélienne. La transformée de Radon (au sens d'Abel) d'un courant localement résiduel reste un courant résiduel et par conséquent, la transformée de Radon (au sens d'Abel) d'un courant résiduel du type  $(k + p, k)$  est une  $(p, 0)$ -forme méromorphe sur  $G(k, n)$ ; on renvoie à [12] sur cette extension qui pourra s'avérer utile dans les constructions ultérieures évoquées en section 4).

## 2 La tomographie algébrique dans le contexte projectif

Soit  $V$  un sous-ensemble algébrique de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , de dimension pure  $n - k$  et  $\omega$  une  $p$ -forme méromorphe sur  $V$ . La trace de  $\omega$  relativement à  $V$  est une forme méromorphe sur la grassmannienne  $G(k, n)$ ; c'est donc, d'après le principe GAGA [20], une forme rationnelle.

Réciproquement, supposons que l'on se donne, le long d'un  $k$ -plan  $\Pi_{u_0}$ , une collection de germes  $V_1, \dots, V_d$  d'ensembles analytiques (de dimension pure  $n - k$ ) intersectant proprement  $\Pi_u$  pour  $u$  voisin de  $u_0$  comme sur la figure 1 ci-dessous



ainsi qu'une collection de germes  $\psi_1, \dots, \psi_r$  de  $(p, 0)$ -formes méromorphes (et non identiquement nulles) respectivement sur  $V_1, \dots, V_d$ ; on peut se poser naturellement le problème d'exprimer le germe de trace correspondant (germe de forme méromorphe au voisinage de  $u_0$  dans  $G(k, n)$ ) et se demander si la rationalité de ce germe suffit à assurer l'algébricité des données (à savoir les  $V_j$  et les  $\Psi_j$ ). La réponse à cette question est oui et l'on doit à P. Griffiths (dans le cas trace nulle [14]) et à G. Henkin et M. Passare [17] (dans le cas général, le résultat y étant même formulé sous une forme semi-locale) le théorème suivant :

**Theorem 1 (Abel inverse)** *La rationalité du germe de trace correspondant aux données*

$$((V_1, \psi_1), \dots, (V_d, \psi_d))$$

*implique l'existence d'un unique sous-ensemble algébrique réduit  $V$  de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  et d'une unique  $(p, 0)$  forme rationnelle  $\omega$  telle que le germe de trace en question corresponde exactement au germe de  $\text{Tr}[\omega]$ .*

La reconstruction explicite de l'ensemble algébrique  $V$  et de la forme  $\omega$  se fait de manière directe et tout à fait effective dans le cas particulier où  $k = n - 1$  à partir de la connaissance de la trace d'une forme de degré 0 très particulière. C'est le résultat suivant, dû à J. Wood [23] :

**Theorem 2 (Théorème de Wood, version projective)** Soit  $L_0$  la droite affine de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  d'équation dans la carte affine  $\mathbb{C}^n$  :

$$\begin{aligned} x_2 &= a_2x_1 + b_2 \\ &\vdots \\ x_n &= a_nx_1 + b_n \end{aligned}$$

et  $V_1, \dots, V_d$   $d$  germes d'hypersurfaces analytiques lisses transverses à  $L_0$  en des points distincts  $p_1(0), \dots, p_d(0)$ . Une condition nécessaire et suffisante pour que les  $V_j$  s'interpolent exactement en une hypersurface algébrique de degré exactement  $d$  est que le germe de  $\text{Tr}[x_1]$  dépendent de manière au plus affines de  $b_2, \dots, b_n$ . De plus, sous cette hypothèse, la reconstruction de l'équation de l'hypersurface interpolante  $V$  à partir du germe de trace se fait explicitement.

Il est intéressant, à la lumière de ces deux résultats, de se poser la question de savoir pourquoi la clause de rationalité de la trace d'une forme quelconque implique nécessairement celle d'une 0-forme très spéciale, à savoir dans le contexte du théorème de Wood, la fonction exprimée en coordonnées affines comme  $x_1$ . C'est en cherchant à caractériser les formes "trace" que l'on perçoit la raison algébrique de ce phénomène, ce au travers de la rigidité d'un certain système différentiel non linéaire. On a en effet l'équivalence suivante [24] : un germe de forme au voisinage de la droite  $L_0$  de  $G(1, n)$  s'écrit sous la forme

$$\omega = \text{Tr} \left( (V_1, \psi_1), \dots, (V_d, \psi_d) \right)$$

où  $V_1, \dots, V_d, \psi_1, \dots, \psi_d$  sont des données comme ci-dessus si et seulement s'il existe deux polynômes en une variable, premiers entre eux

$$\begin{aligned} F(\cdot, X) &= X^d - \sigma_1 X^{d-1} + \dots + (-1)^d \sigma_d \in \mathcal{M}_d[X] \\ H(\cdot, X) &= \gamma_0 X^{d-1} + \dots + \gamma_{d-1} \in \mathcal{M}_{d-1}[X], \end{aligned}$$

à coefficients dans l'anneau des germes des fonctions méromorphes en 0 sur  $G(1, n)$  tels que :

$$X \partial_{b_j} F - \partial_{a_j} F \equiv 0 \pmod{F}, \quad j = 2, \dots, n \tag{1}$$

$$X \partial_{b_j} H - \partial_{a_j} H \equiv 0 \pmod{F}, \quad j = 2, \dots, n \tag{2}$$

et que

$$\omega(\cdot) = \text{Res} \left[ \begin{array}{c} dX \wedge H(\cdot, X) \Psi(\cdot, X) \\ F(\cdot, X) \end{array} \right],$$

avec

$$\Psi = \left( \partial_X F - \sum_{j=2}^n a_j \partial_{b_j} F \right) \bigwedge_{j=2}^n (db_j + X da_j).$$

Écrire qu'une forme se présentant sous la forme ci-dessus est rationnelle revient à écrire que les fonctions inconnues  $\sigma_j, \tau_j$  sont solutions d'un certain système différentiel (linéaire en les  $\tau_j$  mais pas en les  $\sigma_j$ ) non homogène mais à second membre rationnel. Ce que dit le théorème d'Abel inverse (dans ce contexte particulier  $k = 1$ ) est que les seules solutions de ce système sont automatiquement rationnelles. Un tel système différentiel, couplé avec la formulation du théorème d'Abel, présente donc une propriété particulière de rigidité. Les deux outils jouant un rôle majeur dans la preuve de l'équivalence évoquée ci dessus sont aussi les deux outils clef intervenant en géométrie algébrique effective lorsque l'on suit les pas de Kronecker, à savoir le polynôme caractéristique ( $F$  en est ici la réalisation) et le polynôme d'interpolation de Lagrange ( $H$  en étant ici l'incarnation). L'équation d'onde de choc de Burgers que l'on voit apparaître, comme on le voit dans la caractérisation ci-dessus en (1) et (2), est appelée à jouer de fait un rôle central dans la réalisation des problèmes inverses.

### 3 Le contexte torique et un exemple simple, celui du produit

$$\mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

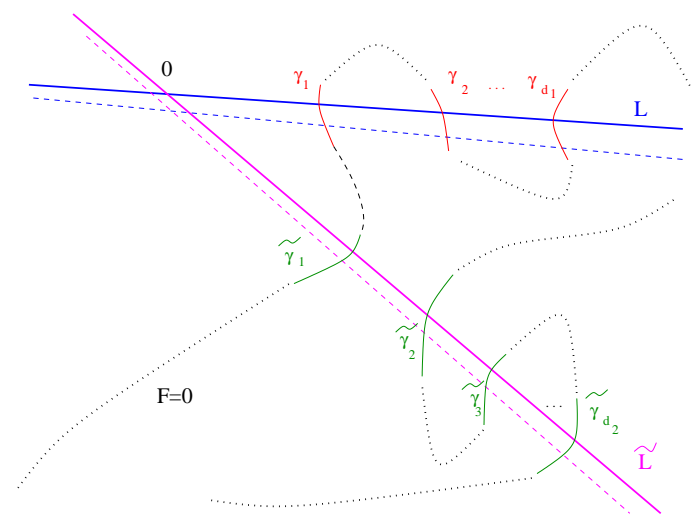
Comme on l'a souligné dans la section 1, le maniement de la géométrie intégrale dans le contexte projectif (et par voie de conséquence les questions de tomographie algébrique évoquées dans la section 2) se fonde de manière cruciale sur la notion de  $k$ -concavité. Si de plus, comme l'on fait Gindikin et Henkin dans [13], puis plus tard B. Berndtsson dans [3], on envisage de définir la transformée de Radon des  $(n, n - k)$  formes ayant un degré d'homogénéité (donc définies dans un ouvert  $k$ -concave et à valeurs dans le fibré  $\mathcal{O}(l)$ , où  $l \leq n - k$ ), on constate également que la graduation (via le groupe de Chow  $A_{n-1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$ ) de l'anneau des coordonnées homogènes  $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  (intrinsèquement lié à la représentation des points dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ) conditionne l'extension à ce cadre de la notion de transformée de Radon.

L'exemple de  $X = \mathbb{P}^{n_1}(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^{n_2}(\mathbb{C})$  est de ce point de vue révélateur : le groupe de Chow  $A_{n-1}(X)$  est dans ce cas  $\mathbb{Z}^2$  et la notion d'homogénéité devient celle de bi-homogénéité. La notion d'ouvert  $(n - 1)$ -concave doit naturellement dans ce cadre particulier être remplacée par la notion plus adéquate suivante : un ouvert  $(n - 1)$ -concave de  $X$  est un ouvert s'écrivant comme union d'hypersurfaces de  $X$  définies en coordonnées homogènes  $(\zeta, \eta)$  par

$$(u_0\zeta_0 + \dots + u_m\zeta_m)(v_0\eta_0 + \dots + \eta_n\zeta_n) = \langle \zeta, u \rangle \times \langle \eta, v \rangle = 0.$$

Ceci signifie que par tout point de  $U$ , on peut faire passer à la fois un hyperplan d'une première famille (la famille des hyperplans du type  $\{[\zeta]; \langle \zeta, u \rangle = 0\} \times \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ) restant entièrement dans  $U$  ainsi qu'un hyperplan d'une seconde famille (la famille des hyperplans du type  $\mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \times \{[\eta]; \langle \eta, v \rangle = 0\}$ ) assujetti lui aussi à rester dans  $U$ . Chacune des familles correspond à une collection d'hypersurfaces rationnellement équivalentes à l'un des deux générateurs du groupe de Chow  $A_{n-1}(X)$ . Un tel ouvert est donc le produit d'un ouvert  $(m - 1)$ -concave  $U_1$  de  $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$  et d'un ouvert  $(n - 1)$ -concave  $U_2$  de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Les transformées de type Radon (au sens d'Andreotti-Norguet ou au sens d'Abel) ou Abel doivent clairement être pensées comme des transformations dont l'image est un couple de fonctions (ou de formes), l'une sur le dual  $U_1^*$  ( $(m - 1)$ -dual de  $U_1$ ), l'autre sur le dual  $U_2^*$  ( $(n - 1)$ -dual de  $U_2$ ).

Concernant les questions de tomographie algébrique évoquées dans la section 2 (en particulier le théorème de type Wood comme le théorème 2), le cadre du produit d'espaces projectifs nous oblige à poser le problème différemment de la manière dont nous l'avions posé dans le cadre de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Les "droites" de  $\mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  sont cette fois à penser rangées dans deux familles : la première famille est celle des droites du type  $L = D \times \{[\eta]\}$ , où  $D$  est une droite de  $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$  et  $[\eta]$  est un point de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , la seconde celle des droites du type  $\{[\zeta]\} \times \tilde{D}$ , où  $[\zeta]$  est un point de  $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$  et  $\tilde{D}$  une droite de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . La figure ci-dessous illustre comment, dans un tel contexte, on peut formuler le problème que résolvait le théorème de Wood classique (théorème 2) dans le contexte projectif :



On se donne  $d_1 + d_2$  germes d'hypersurfaces lisses, organisés comme suit : les germes  $\gamma_1, \dots, \gamma_{d_1}$  sont  $d_1$  germes transverses à la droite  $L$  d'équations affines

$$\begin{aligned} x_2 = \dots = x_m &= 0 \\ y_1 = \dots = y_n &= 0 \end{aligned}$$

en des points distincts différents de l'origine  $(0, 0)$  tandis que  $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_{d_2}$  sont  $d_2$  germes transverses à la droite  $\tilde{L}$  d'équations affines

$$\begin{aligned} x_1 = \dots = x_m &= 0 \\ y_2 = \dots = y_n &= 0 \end{aligned}$$

en des points différents de l'origine (point d'intersection des droites  $L$  et  $\tilde{L}$ ). Le problème que l'on se pose, étant donnés ces germes, est de caractériser en termes de traces leur interpolabilité par une hypersurface algébrique définie par un polynôme  $F$  bihomogène en  $(X, Y)$ , de degré  $d_1$  en  $X$  (coordonnées homogènes de  $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ ) et  $d_2$  en  $Y$  (coordonnées homogènes de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ). On introduit pour cela les deux familles consistant en des versions "perturbées" respectivement de  $L$  et de  $\tilde{L}$ .

$$(L_{a,b,\beta}) \quad \begin{aligned} x_j &= a_j x_1 + b_j, & j &= 2, \dots, m \\ y_l &= \beta_l, & l &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

et

$$(\tilde{L}_{\tilde{a},\tilde{b},\alpha}) \quad \begin{aligned} x_j &= \alpha_j, & j &= 1, \dots, m \\ y_l &= \tilde{a}_l y_1 + \tilde{b}_l, & l &= 2, \dots, n \end{aligned}$$

Les coordonnées des paramètres  $a, b, \tilde{a}, \tilde{b}, \alpha, \beta$  sont voisins de l'origine. Les conditions algébriques de type de celles figurant dans l'énoncé du théorème de Wood (théorème 2), sont :

- il existe un polynôme  $R \in \mathbb{C}[\beta]$  et un polynôme  $A \in \mathcal{M}_a[\beta, b]$  avec  $\deg_b A \leq 1$  tels que

$$\text{Tr}_{L_{a,b,\beta}} [x_1] = \frac{A(\beta, b, a)}{R(\beta)};$$

- il existe un polynôme  $\tilde{R} \in \mathbb{C}[\alpha]$  et un polynôme  $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{\tilde{a}}[\alpha, \tilde{b}]$  avec  $\deg_{\tilde{b}} \tilde{A} \leq 1$  tels que

$$\text{Tr}_{\tilde{L}_{\tilde{a},\tilde{b},\alpha}} [y_1] = \frac{\tilde{A}(\alpha, \tilde{b}, \tilde{a})}{\tilde{R}(\alpha)}.$$

L'algorithme de reconstruction de J. Wood conduit sous ces hypothèses à la construction d'un polynôme de degré  $d_1$  en  $X$  (à coefficients dépendant des paramètres  $\beta$ ), de la forme

$$(R(\beta))^{d_1} X_1^{d_1} - A_1(\beta, X' - aX_1, a) X_1^{d_1-1} + \dots = Q(\beta, X)$$

(indépendant en fait de  $a$ ) et d'un polynôme de degré  $d_2$  en  $Y$  (à coefficients dépendants des paramètres  $\alpha$ ), de la forme

$$(\tilde{R}(\alpha))^{d_2} Y_1^{d_2} - \tilde{A}_1(\alpha, Y' - \tilde{a}Y_1, \tilde{a}) Y_1^{d_2-1} + \dots = \tilde{Q}(\alpha, Y)$$

(indépendant en fait de  $\tilde{a}$ ). Pour assurer l'interpolabilité des  $d_1 + d_2$  germes, il reste à assurer les conditions de compatibilité se traduisant ici par le fait que les deux polynômes  $Q(Y, X)$  et  $\tilde{Q}(X, Y)$  doivent définir la même hypersurface, donc être égaux à une constante multiplicative près.

## 4 Sur la concavité dans le cadre torique (dans une configuration plongée du type perspective multidimensionnelle)

L'exemple de  $X = \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  nous a ouvert les yeux sur une situation où le groupe de Chow  $A_{\dim X-1}(X)$  des classes de diviseurs n'était plus un groupe libre de rang 1 ; quand bien même cette variété se plonge dans un certain  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$  et que l'on puisse définir une notion de  $(n+m-1)$ -concavité sur  $\mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  (un ouvert  $(n+m-1)$ -concave serait la trace sur cette sous-variété de  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$  d'un ouvert  $(N-1)$ -concave de  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ ), il serait intéressant (si l'on a en tête les questions de tomographie algébrique) de faire apparaître une notion de  $(\dim X - 1)$ -concavité plus "intrinsèque".

Comme on l'a vu dans la section 1, l'usage des coordonnées homogènes s'avère très utile pour définir des transformations du type Radon ou Abel. Utiliser ces coordonnées homogènes comme des coordonnées affines (c'est par exemple sur ce principe que l'on trouve par exemple dans [3] décrite l'inversion *via* le passage par la transformée de Fantappiè de la transformation d'Abel-Radon des  $(n, n-k)$ -formes  $\bar{\partial}$ -fermées) repose sur la matérialisation de l'espace projectif dans la vision qui a présidé à la peinture italienne depuis la Renaissance (espace des points à l'infini des "lignes de fuite" dans  $\mathbb{C}^{n+1}$ ). Plus précisément, on a

$$\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n+1} \cup \mathbb{P}^n(\mathbb{C}),$$

avec la règle suivante : si  $x$  est un point de la carte affine  $\mathbb{C}^{n+1}$  (différent de l'origine) et si  $L_x$  est l'adhérence (dans  $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ ) de la droite complexe dirigée par  $x$ ,  $L_x$  rencontre l'hyperplan à l'infini  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  en un unique point, qui est précisément la classe  $[x]$  de  $x$  dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  (c'est-à-dire modulo l'action du groupe  $\mathbb{T} = \mathbb{C}^*$  sur  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ ).

Le modèle naturel étendant les modèles tels que  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ,  $\mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , *etc.* est celui des variétés toriques lisses associées à un éventail complet et régulier de  $\mathbb{R}^n$ .

Nous allons ici brièvement esquisser la définition de tels objets, sans perdre de vue que notre souci sera de transcrire à un tel cadre les notions évoquées aux sections 1 et 2.

Un éventail de  $\mathbb{R}^n$  est, rappelons-le, une collection  $\Sigma$  de cônes rationnels convexes saturée par prise de face et telle que l'intersection de deux cônes pris arbitrairement dans la collection soit une face de chacun d'eux ; l'éventail est dit complet lorsque l'union des cônes qui le forment est  $\mathbb{R}^n$ , régulier lorsque les vecteurs primitifs (c'est-à-dire de coordonnées premières entre elles) dirigeant les arêtes constituant le "squelette" d'un cône  $\sigma \in \Sigma(n)$  de dimension  $n$  forment une base du groupe libre  $\mathbb{Z}^n$ , ce pour tout cône de dimension  $n$  de l'éventail. Les vecteurs primitifs  $\eta_1, \dots, \eta_{n+r}$  attachés aux cônes  $\eta \in \Sigma(1)$ , de dimension 1 de l'éventail seront appelés à jouer un rôle important. On attache

en effet à chacun d'eux une coordonnée  $x_j$ , puis on définit dans  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+r}]$  un idéal monomial de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+r}]$  :

$$I := \left\langle \prod_{\tau \in \Sigma(1) \text{ non face de } \sigma} x_j ; \sigma \in \Sigma(n) \right\rangle$$

(de variété des zéros  $V(I)$ ); on introduit ensuite un groupe  $G \simeq \mathbb{T}^r$  défini (d'ailleurs comme intersection complète dans  $\mathbb{T}^{n+r}$ ) par

$$G = \left\{ (t_1, \dots, t_{n+r}) \in \mathbb{T}^{n+r} ; \prod_{i=1}^{n+r} t_i^{\eta_{ij}} = 1, j = 1, \dots, n \right\}$$

que l'on fait agir sur  $\mathbb{C}^{n+r} \setminus V(I)$  par

$$t \cdot x := (t_1 x_1, \dots, t_{n+r} x_{n+r}).$$

On peut munir le quotient

$$X = \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+r}] \setminus V(I)}{G} \quad (3)$$

d'une structure de variété analytique complexe compacte de dimension  $n$ , variété que l'on peut réaliser en recollant une liste de  $M$  copies de  $\mathbb{C}^n$  (où  $M$  est le nombre de cônes de dimension  $n$  de l'éventail) suivant des applications de changement de cartes monoïdales (les matrices d'exposants s'obtenant à partir des divers systèmes  $((\eta_\sigma^{(1)})^*, \dots, (\eta_\sigma^{(n)})^*)$ , duaux des systèmes constituant les bases de chaque cône  $\sigma \in \Sigma(n)$ ). La réalisation d'une telle variété analytique complexe lisse à partir d'un tel éventail complet et régulier est par exemple décrite dans [10, 11]. C'est à D. Cox que l'on doit [8, 9] sa réalisation sous forme du quotient géométrique (3); cette variété analytique complexe se trouve équipée avec une action du tore  $\mathbb{T}^n$ , c'est l'une des raisons qui justifient l'épithète "torique"; on y trouve une orbite ouverte dense (isomorphe à  $\mathbb{T}^n$ ), en relation avec l'unique 0-cône de l'éventail (à savoir le cône  $\{0\}$ ). L'anneau  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+r}]$  est dit anneau de coordonnées homogènes de la variété et se trouve équipé d'une graduation *via* le groupe de Chow  $A_{n-1}(X)$  qui ici est isomorphe à  $\mathbb{Z}^r$ . À chaque face  $\sigma_j$  de dimension 1 de l'éventail (donc à chaque coordonnée homogène  $x_j$ ) est associé un diviseur de Cartier  $D_j$  de  $X$  qui invariant sous l'action du tore. Pour visualiser les générateurs du groupe de Chow et les supports des diviseurs  $D_j$ , il suffit de se placer dans une carte affine  $U_\sigma \simeq \mathbb{C}^n$  correspondant à un certain cône de dimension  $n$  dont le squelette est engendré par  $\eta_1, \dots, \eta_n$ . Les plans de coordonnées correspondent (dans cette carte affine) aux supports des diviseurs  $D_1, \dots, D_n$  associés à  $\eta_1, \dots, \eta_n$  et les supports des diviseurs  $D_{n+1}, \dots, D_{n+r}$  en relation avec les autres cônes de dimension 1 de l'éventail (qui "pointent" hors de  $\sigma$  et dont les classes engendrent  $A_{n-1}(X)$ ) s'interprètent comme les "orbites à l'infini" dans cette carte affine.

Une construction (proposée récemment dans [21], section 2) permet de configurer une telle variété  $X$  dans le cadre d'une vision perspective multi-directionnelle (comme l'est  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  à l'infini dans  $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$  sous le regard des artistes de la Renaissance italienne), réalisant de fait un plongement "collant" plus à la variété qu'un plongement projectif (qui d'ailleurs, n'existe pas toujours, mais seulement à condition que l'on puisse équiper  $X$  d'un fibré en droites très ample). La notion de  $(\dim X - 1)$ -concavité proposée le sera à partir de ce plongement  $X \subset \tilde{X}$  et sera donc en relation avec le couple  $(X, \tilde{X})$  plutôt qu'intrinsèque à  $X$ . En fait, la construction est purement combinatoire : partant d'un cône particulier  $\sigma$  de dimension  $n = \dim X$  de l'éventail  $\Sigma$ , on construit un nouvel éventail  $\tilde{\Sigma}$  tout aussi complet et régulier que  $\Sigma$ , mais cette fois dans  $\mathbb{R}^{n+r}$ , éventail générant la construction d'une variété compacte torique lisse  $\tilde{X}$ , cette fois de dimension  $n + r$ , telle que :

- on a la configuration  $\tilde{X} = \mathbb{C}^{n+r} \cup S_1 \cup \dots \cup S_r$ , où  $\mathbb{C}^{n+r}$  correspond ici à l'une des cartes affines de  $\tilde{X}$  (attachée donc à un cône particulier de l'éventail  $\tilde{\Sigma}$  bien sûr bâti sur le cône  $\sigma$  de départ), les hypersurfaces  $S_j$  "à l'infini" (vues de cette carte affine) étant des hypersurfaces lisses (elles mêmes variétés toriques lisses sur le modèle de  $X$ ) en position de transversalité (ce qui autorise l'utilisation des morphismes cobord et résidu de Leray [18]);
- la variété torique  $X$  vue depuis la carte affine  $\mathbb{C}^{n+r}$  de  $\tilde{X}$  apparaît à l'infini dans ce contexte de perspective multi-directionnelle comme précisément l'intersection  $S_1 \cap \dots \cap S_r$ ;
- si  $x$  est un point de  $\mathbb{C}^{n+r} \setminus V(I)$ , l'adhérence  $L_x$  (dans  $\tilde{X}$ ) de l'orbite de  $x$  sous l'action du groupe  $G$  intersecte  $X = S_1 \cap \dots \cap S_r$  en un point unique, à savoir la classe  $[x]$  de  $x$  sous l'action de  $G$ .

Ainsi les coordonnées homogènes dans  $X$  deviennent-elles des coordonnées affines dans une carte de  $\tilde{X}$ , ce qui du point de vue calcul (définition et maniement des transformations intégrales de type Radon ou Abel) rend les choses plus commodes (outre la mise en évidence avec les diviseurs  $S_1, \dots, S_r$  du fait que le groupe de Chow  $A_{n-1}(X)$  est cette fois libre de rang  $r$  et non plus de rang 1).

À chacune des hypersurfaces toriques  $S_1, \dots, S_r$ , nous pouvons associer de manière canonique un polyèdre convexe non vide  $\Delta_j$  à sommets dans  $\mathbb{N}^{n+r}$  de manière à ce que si  $F_j$  est un polynôme de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+r}]$  à coefficients génériques et de polyèdre de Newton  $\Delta_j \subset ([0, \infty[)^{n+r}$ , alors l'adhérence dans  $\tilde{X}$  de l'ensemble  $F_j^{-1}(0)$  est une hypersurface de  $\tilde{X}$  définissant un diviseur effectif rationnellement équivalent à  $S_j$ . Le fait que le fibré en droites correspondant au diviseur  $S_j$  ait un lieu de base vide (on dit dans ce cas qu'il est semi-ample) correspond à ce que le polyèdre  $\Delta_j$  contienne l'origine; le fait que ce fibré en droites soit très ample se traduit par le fait que  $\Delta_j$  contienne le  $n+r$  simplexe construit sur les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+r}$ .

Pour envisager dans ce contexte perspective multi-directionnelle  $X \subset \tilde{X}$  une notion de (dim  $X - 1$ )-concavité sur  $X$  ainsi qu'un contexte propice au maniement de la géométrie intégrale et, par voie de conséquence, de la tomographie algébrique, inspiré du cadre projectif (mais prenant en ligne de compte que le groupe de Chow  $A_{n-1}(X)$  est de rang  $r$  et non plus 1), nous allons faire deux hypothèses.

**Hypothèse A.** *Dans la configuration perspective multi-directionnelle  $X \subset \tilde{X}$  que nous venons d'exhiber, tous les fibrés en droites  $L(S_j)$ ,  $j = 1, \dots, r$ , sont semi-amplés, ce qui signifie donc que tous les polyèdres  $\Delta_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  contiennent l'origine. On listera comme suit les points à coordonnées entières non toutes nulles de  $\Delta_j$  :*

$$(\Delta_j \cap \mathbb{N}^{n+r}) \setminus \{0\} = \{\alpha_{j,1}, \dots, \alpha_{j,N_j+1}\}$$

**Hypothèse B.** *Dans la configuration perspective multi-directionnelle  $X \subset \tilde{X}$  que nous venons d'exhiber, pour tout sous-ensemble  $\mathcal{J} \subset \{1, \dots, r\}$ , la somme de Minkowski  $\sum_{j \in \mathcal{J}} \Delta_j$  est de dimension au moins égale au cardinal de  $\mathcal{J}$ .*

Pour  $u_1 \in \mathbb{C}^{N_1+1} \setminus \{0\}, \dots, u_r \in \mathbb{C}^{N_r+1} \setminus \{0\}$  génériques, on introduit la sous-variété algébrique  $\Pi_{u_1, \dots, u_r}$  de  $\tilde{X}$  définie comme l'adhérence dans  $\tilde{X}$  de l'ensemble

$$\left\{ x \in \mathbb{C}^{n+r}; 1 + \sum_{k=1}^{N_j+1} u_{j,k} x^{\alpha_{j,k}} = 0, j = 1, \dots, r \right\}.$$

Lorsque  $u_1, \dots, u_r$  sont génériques, l'hypothèse (B) assure (grâce au théorème de Sard-Bertini) que  $\Pi_{u_1, \dots, u_r}$  est une sous-variété lisse de  $\tilde{X}$  de dimension  $n$ ; cette sous-variété intersecte  $X =$

$S_1 \cap \dots \cap S_r$  suivant une sous-variété propre de  $X$ . Comme dans le cas projectif, on constate que l'intersection de  $\Pi_{u_1, \dots, u_r}$  avec  $X = S_1 \cap \dots \cap S_r$  ne dépend de fait que des classes  $[u_1], \dots, [u_r]$  dans  $\mathbb{P}^{N_1}(\mathbb{C}) \simeq (\mathbb{P}^{N_1}(\mathbb{C}))^*, \dots, \mathbb{P}^{N_r}(\mathbb{C}) \simeq (\mathbb{P}^{N_r}(\mathbb{C}))^*$ . Ceci nous conduit à la définition intuitive naturelle, rendant compte de ce que devrait être la notion de  $(n-1)$ -concavité dans cette situation plongée correspondant à la perspective multi-directionnelle :

**Definition 1** *Soit  $X$  une variété torique compacte lisse et  $X \subset \tilde{X}$  une configuration de plongement du type perspective multi-directionnelle. Un ouvert  $(n-1)$ -concave de  $X$  (dans le contexte de cette configuration de plongement) est la trace sur  $X$  d'un ouvert  $\tilde{U}$  de  $\tilde{X}$  se présentant sous la forme*

$$\tilde{U} = \bigcup_{([u_1], \dots, [u_r]) \in U^*} \Pi_{u_1, \dots, u_r},$$

où  $U^*$  est un ouvert de  $(\mathbb{P}^{N_1}(\mathbb{C}))^* \times \dots \times (\mathbb{P}^{N_r}(\mathbb{C}))^*$ . Le dual de l'ouvert  $(n-1)$ -concave  $U$  (relativement à cette configuration de plongement) est par définition l'ouvert  $U^*$ .

Les hypothèses **(A)** et **(B)** nous permettent de mettre en œuvre les résultats établis par M. Weimann lorsqu'il a dégagé (voir [25]) le concept de  $(L_1, \dots, L_r)$ -concavité dans une variété torique compacte lisse,  $L_1, \dots, L_r$  étant  $r$ -fibrés en droites semi-amples (correspondant à des  $\mathbb{T}$ -diviseurs  $S_1, \dots, S_r$ ) et tels que la famille des polyèdres de  $\mathbb{Z}^n$  attachés à ces diviseurs soit une famille essentielle (c'est-à-dire vérifiant la clause **(B)**). C'est au niveau de la variété torique  $\tilde{X}$  (depuis laquelle  $X$  s'obtient en scrutant l'infini suivant une approche perspective multi-dimensionnelle) que nous pouvons exploiter la théorie développée par M. Weimann dans [25]. Les résultats de M. Weimann ([25], chapitre 2, section 2) garantissent en effet que l'ouvert  $\tilde{U}$  de  $\tilde{X}$  (qui est sous les hypothèses faites ici un ouvert  $(L(S_1), \dots, L(S_r))$ -concave de  $\tilde{X}$ ) se trouve "coiffé" par une variété d'incidence  $\text{Inc}(\tilde{U})$ , en l'occurrence le sous-ensemble de  $\tilde{X} \times \mathbb{P}^{N_1+1}(\mathbb{C}) \times \dots \times \mathbb{P}^{N_r+1}(\mathbb{C})$  constitué des éléments

$$(x, [u_{1,0}, u_1], \dots, [u_{r,0}, u_r])$$

tels que  $x$  appartienne à l'adhérence de la sous-variété :

$$u_{j,0} + \sum_{k=1}^{N_j+1} u_{j,k} x^{\alpha_{j,k}} = 0, \quad j = 1, \dots, r. \quad (4)$$

Cette variété d'incidence  $\text{Inc}(\tilde{U})$  est une intersection complète irréductible lisse dans

$$\tilde{X} \times (\mathbb{P}^{N_1+1}(\mathbb{C}))^* \times \dots \times (\mathbb{P}^{N_r+1}(\mathbb{C}))^* ;$$

elle se projette sur  $\tilde{X}$  via une submersion holomorphe propre  $\tilde{\pi}_1$  et sur le produit d'espaces projectifs  $(\mathbb{P}^{N_1+1}(\mathbb{C}))^* \times \dots \times (\mathbb{P}^{N_r+1}(\mathbb{C}))^*$  via une submersion propre  $\tilde{\pi}_2$ , autorisant ainsi la définition et le maniement des transformées de type Radon, Abel, comme dans la section 1. On suit pour ce faire le schéma consistant à passer du monde  $\tilde{U}$  au monde dual (l'ouvert  $\tilde{U}^*$  de  $(\mathbb{P}^{N_1+1}(\mathbb{C}))^* \times \dots \times (\mathbb{P}^{N_r+1}(\mathbb{C}))^*$  constitué des  $[u_{1,0}, u_1], \dots, [u_{r,0}, u_r]$  tels que l'adhérence de la sous-variété définie par (4) reste incluse dans  $\tilde{U}$ ) en "montant" préalablement via *pull-back* par  $\tilde{\pi}_1$  sur la variété  $\text{Inc}(\tilde{U})$ , puis en redescendant sur  $\tilde{U}^*$  par image directe (les objets étant pensés comme des courants).

Notons que le monde dual  $X^*$  s'identifie dans ce schéma comme le produit des hyperplans à l'infini dans  $(\mathbb{P}^{N_1+1}(\mathbb{C}))^* \times \dots \times (\mathbb{P}^{N_r+1}(\mathbb{C}))^* \simeq \tilde{X}^*$ , les coordonnées  $u_1, \dots, u_r$  jouant le rôle de coordonnées homogènes dans  $X^*$ , mais affines dans  $\tilde{X}^*$ , ce tout à fait en écho avec le rôle tenu par les coordonnées  $x$  (coordonnées homogènes sur  $X$ , affines dans une carte particulière de  $\tilde{X}$ ).

Si  $U$  est un ouvert  $(n-1)$ -concave de  $X$  (supposée vue depuis  $\tilde{X}$  en perspective multi-directionnelle), et  $\omega$  une  $(n, n-1)$ -forme régulière dans  $U$ , on peut, à partir de l'expression de cette forme en coordonnées affines sur l'orbite dense  $\mathbb{T}^n$  de  $X$ , exprimer  $\omega$  en coordonnées homogènes  $(x_1, \dots, x_{n+r})$ ; on note  $\tilde{\omega}(x)$  l'expression obtenue; la forme  $\tilde{\omega}$  s'exprime sous la forme

$$\left( \sum_{|I|=n-1} \varphi_I(x, \bar{x}) d\bar{x}_I \right) \wedge E(x),$$

où  $E$  désigne la forme d'Euler sur  $X$  [5, 7]; comme dans [21], on remarque que dans chaque ouvert

$$U_\sigma = \left\{ x; \prod_{\tau \in \Sigma(1) \text{ non face de } \sigma} x_\tau \neq 0 \right\}, \quad \sigma \in \Sigma(n),$$

on peut définir la forme

$$\tilde{\eta}_\sigma := \tilde{\omega}(x) \wedge \frac{1}{\det \sigma} \bigwedge_{\tau \in \Sigma(1) \text{ non face de } \sigma} \frac{dx_\tau}{x_\tau},$$

où le signe de  $\det \sigma$  est choisi de manière à ce que

$$E(x) \wedge \frac{1}{\det \sigma} \bigwedge_{\tau \in \Sigma(1) \text{ non face de } \sigma} \frac{dx_\tau}{x_\tau} = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+r}.$$

On constate que les formes  $\tilde{\eta}_\sigma$  (pour tous les cônes  $\sigma$  de dimension  $n$ ) se recollent en une  $(n+r, n-1)$ -forme semi-méromorphe  $\Omega$  dans l'ouvert  $\tilde{U}$ . Si  $\omega$  est supposée  $\bar{\partial}$ -fermée, ce procédé conduit à la construction d'une  $(n+r, n-1)$ -forme  $\bar{\partial}$ -fermée dans  $\tilde{U} \setminus V(I)$  dont  $\omega$  est précisément le résidu de Poincaré itéré au sens de Leray ([1, 18]); c'est par exemple celui qui a été utilisé dans [21] pour construire à partir de la forme volume  $\varpi$  sur  $X$  un générateur du groupe de cohomologie "atomique" (au sens de [21])  $H^{n+r, n}(\mathbb{C}^{n+r} \setminus V(I), \mathbb{C})$  afin de réaliser un modèle de noyau jouant dans l'ouvert affine  $\mathbb{C}^{n+r} \setminus V(I)$  un rôle similaire au rôle tenu dans l'ouvert  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  de  $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$  (d'où l'on voit  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  en perspective).

Les transformations intégrales du type Radon, Abel évoquées dans la section 1 (soulignons que ces transformations peuvent agir sur des êtres semi-méromorphes) peuvent être exploitées dans  $\tilde{U}$  dans le cadre de la  $(L(S_1), \dots, L(S_r))$ -concavité, mais cette fois sur les objets du type  $\Omega$ , incarnations sur  $\tilde{U}$  (depuis le monde originel  $U \subset X$ ) des êtres que sont les formes du type  $\omega$  (ou éventuellement des courants du type  $[V] \times \omega$ ,  $V$  étant un sous-ensemble analytique fermé de  $U$ , voire des courants localement résiduels au sens de [12] dans  $U$ ). On peut d'ailleurs envisager des formes  $\omega$  prenant leurs valeurs dans le fibré  $\mathcal{O}(l_1 D_{n+1} + \dots + l_{n+r} D_{n+r})$  ( $\Omega$  prenant alors ses valeurs dans  $\mathcal{O}((l_1 - 1)S_1 + \dots + (l_r - 1)S_r)$ ) et définir les (multi) transformées de Radon, la transformation de Fantappié, etc.. Ceci fait d'objet d'un travail en cours.

## 5 Retour à la tomographie : le contexte torique

Restons dans le contexte d'une variété torique lisse de dimension  $n$  introduit dans la section précédente.

Une des raisons pour lesquelles la construction que nous avons évoqué ci-dessus (mettre la variété en situation d'être vue depuis une autre en perspective multi-directionnelle) nous paraît prometteuse est qu'elle fait la part belle aux coordonnées dans les cartes affines (correspondant aux cônes de dimension maximale de l'éventail sur lequel est bâtie la variété torique) plutôt qu'aux coordonnées

homogènes. Or, si l'on pense aux problèmes de tomographie algébrique mentionnés dans la section 2 (théorème de Wood par exemple) dans le contexte projectif, on s'aperçoit que les cartes affines y jouent un rôle important, les coordonnées affines dans ces cartes par voie de conséquence aussi, plus encore que les coordonnées homogènes.

Nous concluerons donc cet exposé en formulant une version torique du théorème de J. Wood dans le cadre des variétés toriques lisses, complètes et projectives, due à Martin Weimann, dont la toute récente thèse [25] nous paraît renfermer nombre de pistes pour des développements ultérieurs.

Soit  $X$  une variété torique lisse de dimension  $n$  attachée à un éventail régulier et complet  $\Sigma$  de  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $S_1, \dots, S_{n-1}$   $n-1$  diviseurs  $\mathbb{T}$ -invariants de  $X$ , supposés tous très amples ; ceci signifie, rappelons-le, que les polyèdres  $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$  attachés à ces diviseurs (comme dans la section 4) et à une carte affine  $U_\sigma$  associée à un cône  $\sigma \in \Sigma(n)$  fixé sont des polyèdres convexes de  $([0, +\infty[)^n$ , contenant tous le simplexe construit à partir des vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Ceci implique que la variété torique est projective et il est d'ailleurs naturel de se demander si le fait que  $S_1, \dots, S_r$  soient tous semi-amples et la famille  $(\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1})$  essentielle (hypothèses **(A)** et **(B)** dans la section 4) ne constitueraient pas des conditions suffisantes.

On considère une sous-variété lisse  $L_0$  de  $X$  définie comme l'adhérence dans  $X$  de la courbe algébrique intersection complète définie dans la carte affine  $U_\sigma$  (et en coordonnées affines  $x_1, \dots, x_n$  dans cette carte) par les équations

$$u_{j,0}^{(0)} + \sum_{k=1}^{N_j+1} u_{j,k}^{(0)} x^{\alpha_{j,k}} = 0, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

(on est ici dans  $X$  et non dans  $\tilde{X}$  comme dans la section 4 mais l'on reprend néanmoins les mêmes notations).

On se donne  $d$ -germes d'hypersurfaces  $V_1, \dots, V_d$ , transverses à  $L_0$  en  $d$  points distincts de  $U_\sigma \cap L_0$ . Relativement à ces germes, on peut faire bouger la sous-variété lisse  $L_0$  (en une variété  $L_u$  du même type) en perturbant les coefficients  $u_j^{(0)}$  en des coefficients  $u = (u_1, \dots, u_{n-1})$ , déterminer (grâce au théorème des fonctions implicites) les points d'intersection  $p_1(u), \dots, p_d(u)$  de  $L_u$  et de  $d$  représentants des  $d$  germes d'hypersurfaces. Pour chaque  $j = 1, \dots, n$ , on définit la trace de  $x_j$  comme

$$\mathrm{Tr}_{V_1, \dots, V_d}(x_j) = \sum_{k=1}^d x_j(p_k(u)).$$

On peut alors énoncer le résultat suivant :

**Theorem 3 (Théorème de Wood, version torique, M. Weimann [25])** *Une condition nécessaire est suffisante pour qu'il existe une hypersurface algébrique  $V \subset X$ , de  $(L(S_1), \dots, L(S_{n-1}))$ -degré  $[V] \cdot \alpha = d$  ( $\alpha$  désignant la classe de  $S_1 \cap \dots \cap S_{n-1}$  dans le groupe de Chow  $A_1(X)$ ) interpolant les germes  $V_j$  et ne coupant  $L_0$  qu'aux  $d$  points  $p_1(u_0), \dots, p_d(u_0)$  est que toutes les traces*

$$\mathrm{Tr}_{V_1, \dots, V_d}(x_j), \quad j = 1, \dots, n,$$

dépendent de manière au plus affine en les coefficients  $u_{1,0}, \dots, u_{n-1,0}$ .

Ce résultat peut être précisé si l'on exige (comme on l'a fait dans la section 3 dans la configuration d'un produit d'espaces projectifs) que  $V$  soit un représentant d'une certaine classe de diviseurs  $[D]$  du groupe de Chow  $A_{n-1}(X)$ . Ces contraintes, beaucoup plus drastiques, peuvent être exprimées en forme de calculs de normes (donc de traces si l'on pense aux formules de Newton permettant

d'exprimer en termes de traces les fonctions symétriques des racines d'une équation) si l'on travaille avec une base  $(E_1, \dots, E_r)$  de diviseurs très amples, tous de supports dans  $X \setminus U_\sigma$ , pour  $A_{n-1}(X) \otimes \mathbb{Q}$ . Les contraintes s'expriment alors en disant que pour tout  $j = 1, \dots, r$ , il existe  $f_j \in \mathcal{O}(L(E_j))$ , avec

$$\deg_{u_{1,0}} \left( \prod_{k=1}^d f_j(p_k(u)) \right) = [D \cdot E_j] \cdot \alpha_1,$$

où  $\alpha_1$  désigne la classe dans  $A_2(X)$  de  $S_2 \cap \dots \cap S_{n-1}$ . Ce résultat précisé est aussi dû à M. Weimann ([25], théorème 4.1) et complète le résultat du théorème 3.

## 6 Conclusion

En conclusion, nous avons tenté de faire apparaître dans cet exposé la nécessité de “penser” dans le cadre torique la notion de concavité de manière si possible intrinsèque, ce afin de coller au plus près des applications potentielles, qu'elles relèvent (pour ce qui est par exemple des questions d'élimination “creuse”) de la géométrie algébrique effective, ou (pour ce qui est de questions relatives à la dualité, aux transformées de Radon, Abel ou Martineau, voire à la dynamique complexe) du champ de l'analyse pluricomplexe. Il s'agissait là de poser les premiers jalons d'un travail technique restant à débroussailler. Un certain nombre de résultats annoncés dans la section 4 font l'objet d'une publication en préparation.

## Références

- [1] L. A. Aizenberg, A. P. Yuzhakov, *Integral representation in Multidimensional Complex Analysis*, Translations of Amer. Math. Soc. 58, 1980.
- [2] A. Andreotti, F. Norguet, Cycles of algebraic manifolds and  $\partial\bar{\partial}$  cohomology, *Ann. Scuola Norm. Super. Pisa* 25 (1971), 1, 59-114.
- [3] B. Berndtsson, Integral formulas on projective space and the Radon transform of Gindikin-Henkin-Polyakov, *Publicacions matemàtiques*, 32 (1988), 1-41.
- [4] J. E. Björk, Residues and  $\mathcal{D}$ -modules, dans *The legacy of Niels-Henryk Abel*, The Abel bicentennial, Oslo, Springer, 2002, 605-651.
- [5] E. Cattani, D. Cox, A. Dickenstein, Residues in toric varieties. *Compositio Math.* 108 (1997), 35-76.
- [6] N. R. Coleff, M. Herrera, *Les courants résiduels associés à une forme méromorphe*, Lecture Notes in Math. 633, Springer-Verlag, 1978.
- [7] D. A. Cox, Recent developments in toric geometry, *Proc. Sympos. Pure Math.* 62. Part 2. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [8] D. A. Cox, The homogeneous coordinate ring of a toric variety. *J. Algebraic Geom.* 4 (1995), no. 1, 17-50.
- [9] D. A. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Using algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 185. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [10] V.I Danilov, The geometry of toric varieties, *Russian Math. Surveys*, vol 33, no 2 (1978) 97-154.
- [11] F. Ehlers, Eine Klasse komplexer Mannigfaltigkeiten und die Auflösung einiger isolierter Singularitäten, *Math. Ann.* 218 (1975), no. 2, 127-156.

- [12] B. Fabre, Sur la transformation d'Abel-Radon des courants localement résiduels, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. IV* (2005), 27-57.
- [13] G. Gindikin, G. Henkin, Integral geometry for  $\bar{\partial}$  cohomology in  $q$ -linear concave domains in  $\mathbb{C}P^n$ , *Funkst. Anal. i Pril.* 12 (1978), 6-23.
- [14] P. A. Griffiths, Variations on a Theorem of Abel, *Inventiones math.* 35 (1976), 321-390.
- [15] G. Henkin, Abel Radon transform and applications, *Proceedings of the conference in honor of Gunning and Kohn*, Princeton, 1992, *Ann. of Math. Studies*, 137 (1995), 223-275.
- [16] G. Henkin, The Abel-Radon transform and several complex variables, dans *The legacy of Niels-Henryk Abel*, The Abel bicentennial, Oslo, Springer, 2002, 477-494.
- [17] G. Henkin, M. Passare, Holomorphic forms on singular varieties and variations on a theorem of Lie-Griffiths, *Invent. math.* 135, 1999, 297-328.
- [18] J. Leray, Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy III), *Bull. Soc. math. France* 87 (1959), 81-180.
- [19] M. Passare, G. Henkin, Abelian differentials on singular varieties and variations on a theorem of Lie-Griffiths, *Inventiones math.* 135, 1999, 297-328.
- [20] J. P. Serre, Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier*, 6, 1955-56, 1-42.
- [21] A. Shchuplev, A. Tsikh, A. Yger, Residual kernels with singularities on coordinate planes, *à paraître*, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, Vol. 253, 2006.
- [22] A. Tsikh, A. Yger, Residue currents, *Journal of Mathematical Sciences*, 120 (6), 2004, 1916-1971.
- [23] J.A. Wood, A simple criterion for local hypersurfaces to be algebraic, *Duke Math. J.* 51 (1), 1984, 235-237.
- [24] M. Weimann, La trace *via* le calcul résiduel : une nouvelle version du théorème d'Abel-inverse, formes abéliennes, *à paraître*.
- [25] M. Weimann, La trace en géométrie projective et torique, Thèse Université Bordeaux 1, Juin 2006.