Interpolation libre et opérateurs de Toeplitz

Andreas HARTMANN

Laboratoire Bordelais d'Analyse et Géométrie, UFR Mathématiques/Informatique, Université Bordeaux I, 351 cours de la Libération, 33405 Talence, France

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

Contenu

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

[section] [section]

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

CHAPITRE 1

Introduction

Le thème fédérateur des travaux présentés ici peut se résumer en un mot : interpolation. Le cas le plus classique consiste à déterminer la trace d'un ensemble de fonctions sur un sous ensemble du domaine de définition commun de notre ensemble de fonctions intial. En particulier les aspects suivants seront étudiés.

- Interpolation simple : interpolation des valeurs en des points ;
- Interpolation généralisée : p.ex. interpolation des dérivées, interpolation sur des points proches, interpolation tangentielle, etc. ;
- Interpolation classique : l'interpolation est définie à partir d'un espace des traces déterminé *a priori* ;
- Interpolation libre : l'interpolation est définie à partir d'une propriété de la trace (à savoir d'être un *idéal* d'ordre) ;
- Interpolation libre et fonctions extrémales : caractérisation de l'interpolation en termes de fonctions extrémales ;
- Interpolation libre et opérateurs de Toeplitz.

Le dernier point nous éloignera un peu des problèmes d'interpolation. Même s'il existe un lien étroit entre les problèmes d'interpolation libre (en particulier dans les espaces de type Paley-Wiener ou plus généralement les espaces modèles, voir Section 4.1), nous allons nous intéresser de plus près à certaines propriétés des opérateurs de Toeplitz qui se révèlent importantes dans le contexte de l'interpolation. Cependant, notre étude sera menée détachée du contexte de l'interpolation. Ce sera l'occasion de rencontrer à nouveau des fonctions extrémales. Nous allons en effet étudier les fonctions extrémales des noyaux d'opérateurs de Toeplitz (supposés non triviaux). Celles-ci s'avèrent posséder beaucoup de propriétés intéressantes.

Terminons cette introduction rapide avec quelques remarques concernant les techniques utilisées. Même si le thème de ce travail peut sembler très réduit — interpolation, et certains aspects liés — nous voudrons insister sur la diversité des outils en jeu. Ceci vient du fait que les problèmes d'interpolation sont abordés dans des situations très variées (espaces de Hilbert et de Banach comme par exemple Bergman et Hardy, algèbres de Fréchet, et même des espaces vectoriels qui ne sont pas topologiques ; interpolation classique, libre et généralisée) nécessitant des méthodes très différentes, et puis les problèmes connexes qui sont motivés par des problèmes d'interpolation mais qui sont considérés dans un contexte déconnectés de l'interpolation. Nous verrons ainsi de l'analyse complexe classique (espaces de Hardy, factorisation de Riesz-Nevanlinna, mesures de Carleson, majorantes harmoniques) et harmonique (toujours présente dans le contexte de l'interpolation et du sampling), de la géométrie des espaces de Banach (bases, bases inconditionnelles, espaces d'interpolation, indices de Boyd), de l'analyse fonctionnelle (principes variationnels, certains aspects topologiques) et convexe (Lemme de Minkowski-Farkas) en passant par la théorie des opérateurs (Théorème du relèvement du commutant, sous-espaces invariants), ainsi que de l'analyse complexe d'une et plusieurs variables (méthodes du $\bar{\partial}$) jusqu'aux espaces de de Branges-Rovnyak.

Nous donnerons ci-après un aperçu des différents thèmes développés dans les différentes parties de cet ouvrage. Les principaux résultats ainsi que les références complètes seront contenus dans les chapitres.

1.1. Interpolation libre

1.1.1. Interpolation libre et généralisée. Le résultat central de l'interpolation est sans doute celui de Carleson qui, en 1958, a caractérisé les suites Λ du disque unité $\mathbb{D}$ telles que l'ensemble des restrictions des fonctions holomorphes bornées sur $\mathbb{D}$ à Λ n'est rien d'autre que l^∞ [**Ca58**]. Concrètement, il a montré que $H^\infty|\Lambda = l^\infty$ si et seulement si $\inf_{\lambda\in\Lambda}|B_\lambda(\lambda)| > 0$, où $B_\lambda = B_{\Lambda\setminus\{\lambda\}}$ est le produit de Blaschke s'annulant précisément sur $\Lambda\setminus\lambda$. Nous appellerons cette dernière condition la *condition de Carleson*.

Au lieu de partir d'un espace des traces imposé à priori, Vasyunin et puis Nikolski sont partis, en 1978, d'une idée différente. Leur approche de l'interpolation est très étroitement liée à la géométrie des espaces de Banach. En effet ils établissent un lien entre le fait que l^∞ est l'espace des multiplicateurs des données d'un côté et les bases inconditionnelles de l'autre. Pour motiver cette approche, nous nous plaçons dans un premier temps dans le cadre de l'interpolation simple dans les espaces de Hilbert. On peut faire l'observation suivante. Soit H un espace de Hilbert de fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D}$ du plan complexe $\mathbb{C}$. Nous supposons que l'évaluation en tout point $\lambda\in\mathbb{D}$ est continue, et nous pouvons donc lui associer le *noyau reproduisant* $k_\lambda\in H$: $f(\lambda) = \langle f, k_\lambda\rangle$, $f\in H$, $\lambda\in\mathbb{D}$. L'espace H est alors un *espace de Hilbert à noyau reproduisant* ("reproducing kernel Hilbert space", RKHS, dans la terminologie anglaise). On dit (de façon équivalente) que la suite $(k_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ forme une *base inconditionnelle* pour une suite $\Lambda\subset\mathbb{D}$, si $(k_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est complète dans H et si pour toute suite bornée $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ on a $\|\sum_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda\mu_\lambda k_\lambda\| \le C\|\mu\|_{l^\infty}\|\sum_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda k_\lambda\|$ (convergence absolue). Soit $\Lambda\subset\mathbb{D}$. Si la suite $(k_\lambda)_\lambda$ est *minimale* (c'est-à-dire que k_λ n'est pas dans l'adhérence de l'espace engendré par les $(k_\mu)_{\mu\neq\lambda}$ quel que soit $\lambda\in\Lambda$) alors il existe une suite $(f_\lambda)_\lambda$, appelée *biorthogonale*, telle que $\langle f_\mu, k_\lambda\rangle = \delta_{\mu\lambda}$, où $\delta_{\mu\lambda}$ est le symbole de Kronecker. On sait que si la suite $(k_\lambda)_\lambda$ est une base inconditionnelle, ce sera aussi le cas pour $(f_\lambda)_\lambda$. Considérons maintenant une fonction $f\in H$. Si $(k_\lambda)_\lambda$ est une base inconditionnelle — et donc $(f_\lambda)_\lambda$ — alors $f = \sum a_\lambda f_\lambda$. Forcément $a_\lambda = \langle f, k_\lambda\rangle = f(\lambda)$. Donc, si $(k_\lambda)_\lambda$ est une base inconditionnelle, alors pour tout $\mu = (\mu_\lambda)_\lambda\in l^\infty$ nous aurons $\|\sum\mu_\lambda a_\lambda f_\lambda\| \le C\|\mu\|_{l^\infty}\|\sum a_\lambda f_\lambda\|$, autrement dit $g := \sum\mu_\lambda a_\lambda f_\lambda\in H$ et $g(\lambda) = \mu_\lambda f(\lambda)$. Cela veut dire que la trace $H|\Lambda$ est un *espace idéal* (pour l'ordre), c'est-à-dire que pour toute suite $(a_\lambda)_\lambda\in H|\Lambda$ et $(\mu_\lambda)_\lambda\in l^\infty$ nous aurons $(\mu_\lambda a_\lambda)_\lambda\in H|\Lambda$. Une autre façon d'énoncer ce résultat est de dire que l^∞ est dans l'espace des multiplicateurs de la trace $H|\Lambda$. Si $H|\Lambda$ est un espace idéal, nous dirons que Λ est d'*interpolation libre* pour H.

Ceci permet d'aborder les problèmes d'interpolation d'une manière différente. Premièrement, au lieu d'imposer une trace a priori, nous demanderons à la trace

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

$H|\Lambda$ d'être un idéal au sens précédent. On peut alors s'interroger sur le lien entre l'interpolation libre dans ce sens et l'interpolation classique (donc avec une trace définie a priori). Il s'avère que dans la plupart des espaces connus ces deux définitions sont équivalentes (par exemple Hardy, Hardy-Orlicz, Bergman etc.), mais l'exemple de la classe de Nevanlinna, comme nous le verrons plus loin, ne semble pas obéir à cette règle intuitive. Remarquons qu'avec cette nouvelle définition de l'interpolation le résultat de Carleson cité en introduction de cette section se traduit par le fait que Λ est une suite d'interpolation *libre* pour H^∞ si et seulement Λ vérifie la condition de Carleson.

Ensuite, cela permet de définir l'interpolation dans un cadre beaucoup plus général. En effet, nous allons remplacer les noyaux reproduisants k_{λ_n} — ou plutôt les sous-espaces unidimensionnels $\langle k_{\lambda_n}\rangle$, $n \in \mathbb{N}$ — par des sous-espaces plus généraux K_n. Ainsi nous pourrons aborder des problèmes du type interpolation multiple etc. dans un cadre unifié. Des résultats très complets sont maintenant disponibles dans les espaces de Hardy. Vasyunin a pu donner une condition nécessaire et suffisante pour l'interpolation libre généralisée (des constantes, le cas général a alors été réglé par Nikolski) et qui devient la condition de Carleson classique dans le cas $K_n = \langle k_{\lambda_n}\rangle$.

La méthode de Nikolski et Vasyunin [**Va79**], [**Nik78**] et [**Nik78a**] sera brièvement présentée et appliquée dans le cadre plus général des espaces admissibles. La méthode diffère entre autres par le choix des espaces K_n qui est aussi, comme nous le verrons dans la Section 2.3.6, adapté aux espaces de Bergman. Nous allons effectivement utiliser cette construction des sous-espaces K_n dans le contexte des espaces de Bergman pour mettre en évidence une suite d'interpolation multiple (donc généralisée) avec des multiplicités non-bornées. Ce résultat sera mis en relief avec un résultat récent de D. Luecking [**Lu05**].

Un élément dans cette méthode est la théorie de factorisation de Riesz-Smirnov. Un tel outil n'est malheureusement plus disponible dans beaucoup d'autres espaces (mis à part des espaces proches des espaces de Hardy(-Orlicz)). Par exemple la factorisation dans l'espace de Bergman qui a récemment connu des avancées ne peut pas être exploitée comme dans l'espace de Hardy. Il est néanmoins possible de considérer des problèmes d'interpolation généralisée dans ces espaces. Mentionnons aussi que l'exemple d'interpolation multiple dans l'espace de Bergman évoqué dans le paragraphe ci-dessus est basé sur l'interpolation dans H^∞ qui, lui, est l'espace des multiplicateurs de l'espace de Bergman.

Même si la motivation de l'interpolation libre (généralisée ou non) par le lien entre celle-ci et les bases ou suites inconditionnelles prend tout son sens dans le cadre des espaces de Hilbert (ou dans des espaces réflexifs), l'interpolation libre a sa place aussi dans le cadre d'espaces plus généraux. Les exemples qui nous intéressent plus particulièrement (dans le cadre de l'interpolation simple) sont les classes de Nevanlinna et de Smirnov. Remarquons que si la classe de Smirnov rentre encore dans le cadre des espaces vectoriels topologiques, ceci n'est plus le cas pour la classe de Nevanlinna. Cependant, l'interpolation libre montre toute sa puissance dans ces deux classes d'autant plus qu'il est difficile d'imaginer un espace des traces a priori. Naftalevič a proposé un tel espace des traces, et il a réussi a caractériser

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

les suites d'interpolation avec cette trace [**Naf56**]. Il s'avère cependant que son espace des traces est trop grand, et que l'interpolation libre n'implique pas que la trace de la classe de Nevanlinna sur une suite est égale à la trace de Naftalevič. Avec l'interpolation libre nous avons réussi de trouver le bon espace des traces.

1.2. Fonctions extrémales

Une percée importante dans la compréhension de la structure des *espaces de Bergman* était accomplie en 1991 par Hedenmalm [**He91**]. Il a en effet réussi à démontrer que la fonction extrémale associée au sous-espace des fonctions s'annulant sur une suite $\Lambda \subset \mathbb{D}$ est un diviseur contractant dans l'espace de Bergman. Ainsi, une propriété clé bien connue dans les espaces de Hardy, à savoir le fait de pouvoir diviser isométriquement par le produit de Blaschke — qui n'est autre que la fonction extrémale associée aux fonctions de l'espace de Hardy s'annulant sur les zéros du produit de Blaschke — se traduit dans une forme plus faible, certes, dans le contexte des espaces de Bergman.

Deux aspects seront développé dans le cadre de cette habilitation :

Premièrement on peut s'intéresser à d'autres situations où la fonction extrémale fournit un diviseur isométrique, contractant ou encore avec un contrôle de norme. Les noyaux d'opérateurs de Toeplitz seront notre terrain de jeu. La propriété forte de division isométrique valable dans le cas hilbertien $p = 2$ (Théorème de Hitt [**Hi88**]) n'est plus vraie pour $p \neq 2$. Curieusement on obtient des comportements différents selon si $p > 2$ ou $p < 2$.

Le deuxième aspect est à nouveau lié à l'interpolation. Sachant que les suites d'interpolation dans les espaces de Hardy sont caractérisées par la condition de Carleson — donc en termes de fonctions extrémales — on peut se demander si une telle caractérisation n'est pas possible dans d'autres espaces. En 1998, Schuster et Seip ont réussi à donner une caractérisation des suites d'interpolation de l'espace de Bergman [**SchS98**] à l'aide de la fonction extrémale de Hedenmalm — ou du diviseur canonique — un résultat qu'ils ont pu généraliser ensuite à d'autres espaces [**SchS00**]. L'idée est alors de généraliser la notion de fonction extrémale pour étudier des problèmes d'interpolation libre généralisée dans l'espace de Bergman. Ce travail sera présenté dans le chapitre sur l'interpolation généralisée dans l'espace de Bergman.

1.3. Opérateurs de Toeplitz

Une motiviation pour étudier les opérateurs de Toeplitz est le lien qu'ils entretiennent avec l'interpolation dans les espaces du type *Paley-Wiener* ou, plus généralement, dans les *espaces modèles*. Nous avons déjà mentionné les noyaux reproduisants dans la Section 1.1. Une question importante est de savoir quand une suite de noyaux reproduisants forme une suite minimale, uniformément minimale, inconditionnelle, complète etc. dans un espace modèle, c'est-à-dire dans un espace orthogonal à un espace invariant par l'opérateur du shift sur l'espace de Hardy. Ces espaces modèles sont donc de la forme $K_I^2 = H^2 \ominus IH^2$ avec I une fonction intérieure. Un noyau reproduisant k_λ^I, $\lambda \in \mathbb{D}$, d'un tel espace K_I^2 est donné par la projection orthogonale d'un noyau reproduisant k_λ de H^2 sur l'espace K_I^2. Par ailleurs, on sait que si $\Lambda \subset \mathbb{D}$ vérifie la condition de Carleson , alors $(k_\lambda)_\lambda$ est une base inconditionnelle de K_B^2 avec $B = \prod_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$. Il est alors clair que si on suppose la condition de Carleson pour Λ (qui s'avère nécessaire dans notre contexte), alors

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

les propriétés géométriques de la suite $(k_\lambda)_\lambda$ dépendent essentiellement de celles de la projection $P_B|K_I^2$. Nikolski, Pavlov et Khrushchev ont étudié ces liens (voir [**HNP81**] et aussi [**Ni02**]). On constate alors que la restriction de la projection orthogonale $H^2 \longrightarrow K_I^2$ à K_B^2 peut être étudiée à travers l'opérateur de Toeplitz $T_{I\overline{B}}$. Ce lien existe également dans les espaces H^p.

La discussion précédente montre en particulier l'intérêt que l'on peut avoir d'étudier des propriétés d'inversibilité de T_φ ou d'inversibilité à gauche et à droite. Ainsi, si $\Lambda \in (C)$, la suite $(k_\lambda^I)_\lambda$ est une base inconditionnelle si $T_{I\overline{B}}$ est inversible et $(k_\lambda^I)_\lambda$ est une suite inconditionnelle ou une suite complète si $T_{I\overline{B}}$ est respectivement inversible à gauche ou à droite. Concernant l'inversibilité, la caractérisation de celle-ci a été donnée en deux temps par Devinatz (1964) et Widom(1960) pour le cas $p = 2$ et par Rochberg [**Ro77**] pour $1 < p < \infty$. Concernant la surjectivité, on peut rapidement déduire un critère du théorème de Nehari (voir [**BöSi90**, pp. 58-59]), mais ce critère est implicite.

Il est bien connu que l'adjoint d'un opérateur de Toeplitz est l'opérateur de Toeplitz dont le symbole est le conjugué du symbole initial. Aussi suffit-il d'étudier par exemple l'inversibilité à gauche, c'est-à-dire la surjectivité d'un opérateur de Toeplitz. C'est pour ces raisons que nous nous sommes intéressés aux noyaux des opérateurs de Toeplitz et aux critères de surjectivité.

Les noyaux des opérateurs de Toeplitz admettent une description très simple grâce à un résultat de Hitt. En effet, en 1988 Hitt [**Hi88**] a donné une caractérisation des sous-espaces *presque invariants* par rapport à l'adjoint S^* du shift. Un sous-espace fermé $M \subset H^2$ est dit presque invariant si pour toute fonction $f \in M$ telle que $f(0) = 0$ on a $S^*f \in M$. Il est facile de vérifier que le noyau d'un opérateur de Toeplitz est un sous-espace presque invariant. La caractérisation de Hitt relie la fonction extrémale de M et un certain espace modèle à M. Concrètement, si g est la fonction extrémale d'un sous-espace presque invariant M alors il existe une fonction intérieure I telle que $M = gK_I^2$. De plus la fonction g agit comme un multiplicateur isométrique sur K_I^2 (ou elle divise isométriquement sur M). Ce résultat a ensuite été précisé par Sarason [**Sa88**] qui a caractérisé toutes les fonctions extérieures g multipliant isométriquement sur K_I^2 et telles que g est extrémale pour gK_I^2 (ce résultat fait appel aux paramètres a et b du paragraphe suivant). Le résultat de Hitt n'est plus valable dans la situation non hilbertienne (voir Section 4.2). Pour $p \leq 2$ nous pouvons toujours diviser par g avec un contrôle de la norme alors que pour $p \geq 2$ on peut multiplier sur $\operatorname{Ker} T_\varphi/g$ par g avec un contrôle de norme. Des exemples explicites montrent que l'on ne peut pas espérer un meilleur résultat dans aucun de ces deux cas.

Une étude plus approfondie de la fonction g permet d'obtenir davantage de renseignements sur les sous-espaces presque invariants d'un côté et les opérateurs de Toeplitz de l'autre. C'est cela qui va nous permettre de dégager un nouveau critère de surjectivité des opérateurs de Toeplitz (voir Section 4.3). En effet, on peut associer deux paramètres a et b à g tels que g s'écrive $g = a/(1 - Ib)$ et I est une fonction intérieure convenable. Hayashi [**Haya90**] a alors réussi à distinguer les noyaux d'opérateurs de Toeplitz des autres sous-espaces presque invariants à l'aide de a et b. Plus précisément, le sous-espace presque invariant M est un noyau d'un opérateur de Toeplitz si et seulement si les paramètres a et b associés à la fonction extrémale g de M vérifient $g_0^2 := (a/(1 - b))^2$ est *rigide* dans H^1. Une fonction f de H^1 est dite rigide si, à des multiples positifs près, c'est la seule fonction ayant

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

le même argument (ce qui est équivalent à dire que $f/\|f\|_1$ est *exposée* dans la boule de H^1). Sarason a redémontré ce résultat en utilisant les techniques des espaces de de Branges-Rovnyak [**Sa94b**]. Ces techniques permettent de démontrer un résultat de surjectivité des opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy et que nous allons présenter maintenant. Le fameux résultat de Devinatz (1964) et Widom (1960) caractérise l'inversibilité d'un opérateur de Toeplitz T_φ en fonction de son symbole φ. En effet, T_φ est inversible si et seulement s'il existe une fonction extérieure g dans H^2 telle que $\varphi = \overline{g}/g$ et $|g|^2$ vérifie la *condition de Helson-Szegő*. Mentionnons que le théorème de Nehari permet de donner une condition d'inversibilité en fonction des distances de φ et $\overline{\varphi}$ à H^∞, et si on se restreint à une seule de ces deux conditions de distance on obtient une caractérisation de la surjectivité (ou de l'inversibilité à gauche). Il s'avère que la fonction extrémale, et en particulier les paramètres a et b que l'on peut lui associer, contient suffisamment de renseignements pour caractériser la surjectivité de l'opérateur de Toeplitz (cette caractéristation nécessite l'existence d'une fonction extrémale, et donc que le noyau de T_φ n'est pas réduit à $\{0\}$ ce qui est une condition forte). Cette condition peut être comparée à celle de Hayashi. Rappelons qu'il a caractérisé les noyaux des opérateurs de Toeplitz parmi tous les sous-espaces presque invariants par la rigidité de g_0^2. Cette condition est en fait équivalente à l'injectivité de $T_{\overline{g_0}/g_0}$ (l'injectivité de $T_{f/\overline{f}}$ est toujours vraie quelle que soit f). Notre résultat dit que la surjectivité de T_φ est caractérisé par l'inversibilité de $T_{\overline{g_0}/g_0}$, autrement dit que $|g_0|^2$ vérifie la condition de Helson-Szegő. Remarquons que ce résultat peut aussi être montré en calculant des préimages des noyaux reproduisant par l'opérateur de Toeplitz en question.

1.4. Remarques concernant les notations

Nous nous autorisons quelques imprécisions de notations pour ne pas alourdir le texte. Quand nous parlons de suite $(\lambda_n)_n$, nous la considérons aussi comme l'ensemble de ses éléments, et nous écrirons par exemple $\Lambda = (\lambda_n)_n \subset E$. Ceci implique que pour un espace de fonctions X défini sur E nous utilisons $X|E$ pour désigner à la fois l'espace des restrictions (ou des traces) de X sur E et l'espace des suites $\{(f(\lambda_n))_n : f \in X\}$.

Si un objet mathématique A vérifie une propriété (P) nous écrirons $A \in (P)$ comme par exemple $\Lambda \in (C)$ ce qui veut dire que la suite Λ vérifie la condition de Carleson.

Nous écrirons $A(t) \lesssim B(t)$, ou encore $A \lesssim B$, s'il existe une constante c indépendante de t telle que $A(t) \leq cB(t)$ pour toutes les valeurs possibles pour t et $A(t) \sim B(t)$, ou encore $A \sim B$ si $A(t) \lesssim B(t)$ et $B(t) \lesssim A(t)$.

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

CHAPITRE 2

Interpolation libre et généralisée

Nous commençons ce chapitre par une discussion d'un cadre abstrait pour les problèmes d'interpolation libre généralisée. Pour cela nous mettons en évidence les liens entre ce type d'interpolation et les bases inconditionnelles. Pour une certaine classe d'espaces, proche des espaces de Hardy, nous exploitons ce lien pour caractériser les suites d'interpolation généralisée. La méthode utilisée ici est basée sur celle donnée par Vasyunin en 1978. Curieusement, dans ses premiers travaux, Vasyunin a considéré des données d'interpolation particulières alors que la méthode permet de traiter du cas général (voir Nikolski 1978). Les ingrédients clé de cette méthode sont le Théorème de Nehari et le Théorème du relèvement du commutant.

Nous allons aussi présenter quelques résultats sur l'interpolation libre généralisée dans le cadre des espaces de Bergman. Bien évidemment nous n'avons plus à notre disposition les outils tels que le théorème du relèvement du commutant. Mais l'interpolation libre généralisée peut être définie de la même manière dans les espaces de Bergman que dans les espaces de Hardy. Dans ce contexte nous obtenons quelques résultats partiels. Premièrement, on peut généraliser le théorème de Schuster et Seip qui ont caractérisé les suites d'interpolation pour l'espace de Bergman à l'aide de diviseurs canoniques. Cette condition est en sa formulation l'analogue de la condition de Carleson puisque les diviseurs canoniques de l'espace de Bergman correspondent aux produits de Blaschke dans l'espace de Hardy (ceux-ci étant comme nous l'avons déjà mentionné également des fonctions extrémales). Comme la condition de Carleson-Vasyunin peut être réécrite comme une condition de la couronne (cette réécriture évite les quotients de fonctions extrémales) on peut introduire une condition similaire basée sur les diviseurs canoniques ou leurs généralisations. Nous allons proposer de telles généralisations permettant de considérer des problèmes d'interpolation généralisée dans les espaces de Bergman. Nos résultats sont basés sur une généralisation de la méthode de Schuster et Seip. Il s'avère que le cas pour lequel on obtient des conditions nécessaires et suffisantes est celui où on interpole sur des réunions finies de suites d'interpolation pour l'espace de Bergman. Cette situation a été considéré par d'autres auteurs. Il semble intéressant de mentionner celui de Luecking qui introduit dans un preprint récent (non publié en 2005) une définition différente de l'interpolation généralisée. Sa définition force toute les "suites" d'interpolation en son sens d'être des réunions finies de suites d'interpolation pour l'espace de Bergman. Nous proposons ici une construction permettant d'obtenir des suites d'interpolation libre généralisée (selon notre définition) pour l'espace de Bergman qui ne sont pas des réunions finies de suites d'interpolation pour l'espace de Bergman. L'espace des traces est l'analogue de celui des espaces de Hardy. Notre construction est basée sur l'interpolation libre généralisée dans H^∞ et le fait que H^∞ est l'espace des multiplicateurs pour les espaces de Bergman. Ce résultat est non publié.

2.1. Historique

En 1958, Carleson [**Ca58**] a caractérisé les suites $\Lambda \subset \mathbb{D}$ telle que les restrictions de l'espace des fonctions holomorphes bornées sur le disque unité $\mathbb{D}$ à Λ, $H^\infty|\Lambda$, est égale à l'espace des suites bornées l^∞. Une telle suite Λ est appelé suite d'interpolation pour H^∞, ou suite de Carleson. Une caractérisation de ces suites peut être donnée en termes de produits de Blaschke. Si $B_E := \prod_{\lambda\in E} b_\lambda$ désigne le produit de Blaschke s'annulant exactement sur E (en comptant les multiplicités ; notons aussi que nécessairement $\sum_{\lambda\in E}(1-|\lambda|) < \infty$), alors Λ est une suite d'interpolation si et seulement si $\inf_{\lambda\in\Lambda} |B_{\Lambda\setminus\{\lambda\}}(\lambda)| > 0$. Shapiro et Shields ont montré que la même condition caractérise les suites d'interpolation pour H^p, $1 < p < \infty$, [**ShSh**]. Le cas H^p, $0 < p < 1$, ayant été traité par Kabaĭla [**Ka63**]. Concernant les espaces de Hardy, les recherches ont ensuite été orientées vers des problèmes d'interpolation plus généraux comme par exemple interpolation multiple ou interpolation sur des réunion de suites d'interpolation pouvant s'approcher. A titre d'exemple on peut citer le résultat de Vasyunin sur l'interpolation sur les réunions finies de suites de Carleson [**Va84**] dans H^∞, et le résultat sur l'interpolation multiple dans H^p par Vinogradov et Rukshin [**VR87**].

L'approche générale des problèmes d'interpolation libre dans H^∞ (et dans H^2) a été amorcée en 1978 par Vasyunin [**Va79**] qui s'est curieusement limité à l'interpolation des constantes par rapport à une suite de sous-espaces. C'est Nikolski qui, dans la suite, a observé que la méthode s'appliquait à des données plus générales dans H^∞ (et H^2) [**Nik78a**].

Ce travail a été prolongé dans [**Har96**] vers les espaces H^p. Le cas particulier de l'interpolation sur les réunion finie de suites de Carleson y est également discuté. Dans ce cas, la description abstraite de l'espace des données peut être exprimée explicitement comme espace de suites en termes de valeurs et différences divisées (dans la métrique pseudohyperbolique). Ce résultat a simultanément été étudié par Bruna, Nicolau et Øyma qui ont trouvé une description similaire par des méthodes différentes [**BNØ96**].

Beaucoup d'autres résultats d'interpolation généralisée sont maintenant connus dans différents espaces. Mais ces résultats et les méthodes utilisées n'ont pas le même caractère de généralité que celle donnée par Vasyunin et Nikolski pour les espaces de Hardy. Nous allons présenter dans ce chapitre la méthode de Vasyunin et Nikolski ainsi que son application à des espaces plus généraux, à savoir des espaces admissibles (voir plus loin pour la définition).

2.2. Interpolation généralisée dans des espaces de type Hardy

2.2.1. Interpolation généralisée et libre. Nous commençons par introduire un type d'interpolation général et l'interpolation libre valable a priori pour des espaces de fonctions arbitraires. Ces définitions sont basées sur les travaux de Nikolski et Vasyunin.

2.2.2. Définition. Soit X un espace de Banach et $\mathcal{Y} = (Y_n)_n$ une famille de sous-espaces fermés. Une suite $(y_n)_n$ d'éléments de X est dite interpolable par

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

rapport à $\mathcal{Y}$ s'il existe $y \in X$ tel que

$$y - y_n \in Y_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nous dirons aussi que y interpole la suite $(y_n)_n$ par rapport à la suite $\mathcal{Y}$.

2.2.3. Définition. La suite $(Y_n)_n$ est dite d'interpolation libre généralisée si pour toute suite interpolable $(y_n)_n$ et pour tout $\mu \in l^\infty$ la suite $(\mu_n y_n)_n$ est également interpolable.

Mentionnons que dans nos définitions nous n'avons pas besoin de la complétude de $\mathcal{Y}$.

Par abus de langage nous dirons qu'une suite $(y_n)_n$ de vecteurs dans X est d'interpolation libre généralisée si la suite des sous-espaces $(\langle y_n \rangle)_n$ est d'interpolation libre généralisée. Un autre cas qui aura un intérêt particulier pour nous est celui où les espaces Y_n sont donnés par les fonctions s'annulant en un point. Dans ce cas, la notion d'interpolation libre généralisée s'approche de la notion classique d'interpolation puisque l'on cherche à interpoler des valeurs en des points.

2.2.4. Définition. Supposons $X \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ et $\Lambda = (\lambda_n)_n \subset \mathbb{D}$. Soit $Y_n = \{f \in X : f(\lambda_n) = 0\}$ (que nous supposons non triviaux). Nous dirons que la suite Λ est d'interpolation libre si $(Y_n)_n$ est d'interpolation libre généralisée, et nous écrirons

$$\Lambda \in \mathrm{Int}_{l^\infty}(X).$$

On peut énoncer cette définition différemment en faisant appel à la trace de X sur Λ. Pour cela nous aurons besoin d'une autre définition.

2.2.5. Définition. Soit l un espace de suites. On dit que l est *idéal* (un idéal d'ordre) si pour tout $(a_n)_n \in l$ et pour tout $(\mu_n)_n \in l^\infty$ il existe $(b_n)_n \in l$ tel que $b_n = \mu_n a_n$.

Avec cette définition, nous avons

$$\Lambda \in \mathrm{Int}_{l^\infty}(X) \quad \Longleftrightarrow \quad X|\Lambda \text{ est idéal.}$$

On pourra dire que ceci motive le terme “libre” dans la définition. En fait, la suite est d'interpolation libre si la trace de X a perdu toute information sur l'analyticité des fonctions de X, autrement dit $f|\Lambda$ est libre (les valeurs $f(\lambda)$ et $f(\mu)$ sont indépendentes l'une de l'autre quels que soient $\lambda, \mu \in \Lambda$ avec $\lambda \neq \mu$). C'est pour cela que la notion d'interpolation libre a un sens pour des espaces très généraux, même si dans ce chapitre nous allons en particulier mettre en évidence le rôle joué par l^∞ dans le cas où X est un espace de Hilbert ou au moins réflexif.

Un cas nous paraît particulièrement intéressant même si c'est justement un espace qui n'est pas réflexif. C'est celui de l'espace H^∞. Comme nous avons mentionné dans la Section 2.1, Carleson a montré que $H^\infty|\Lambda = l^\infty$ si et seulement si Λ est une suite d'interpolation. Il a donc fixé l'espace l^∞ comme espace des traces a priori (tout autre choix pourrait paraître absurde... cela étant, le résultat de Garnett [**Gar77**] que nous utiliserons plus tard dans l'interpolation dans la classe de Nevanlinna montre que l'on peut par exemple s'intéresser à l'interpolation par des fonctions H^∞ de suites soumises à des conditions de décroissance). Mais il est évident que Carleson a en effet caractérisé avec sa condition les suites d'interpolation *libre* pour H^∞. Nous en profitons pour faire deux remarques importantes que nous allons utiliser plusieurs fois (dont la première doit sans doute se trouver quelque part dans [**Nik86**] et la deuxième *est* [**HMNT04**, Remark 1.1]).

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

2.2.6. Remarque. (1) Avec la définition de l'interpolation *libre* on obtient immédiatement une condition *suffisante* pour l'interpolation libre dans tous les espaces qui contiennent H^∞ dans leur espace des multiplicateurs. En effet si Λ est une suite de Carleson — et donc $H^\infty|\Lambda = l^\infty$ — alors pour toute fonction $f \in X$ et pour toute suite $\mu \in l^\infty$ — comme il existe une fonction $h \in H^\infty$ telle que $h|\Lambda = \mu$ — la fonction hf est dans X et interpole la suite $(\mu_\lambda f(\lambda))_\lambda$. Par conséquent $X|\Lambda$ est idéal. D'où $\Lambda \in (\mathrm{C}) \Longrightarrow \Lambda \in \mathrm{Int}_{l^\infty} X$.

(2) Nous pouvons donner une autre condition suffisante pour l'interpolation libre. Si X est une algèbre de fonctions à valeurs complexes et définies sur un ensemble D telle que X contient les constantes (ou au moins des fonctions constantes sur la suite $\Lambda \subset D$) alors $\Lambda \in \mathrm{Int}_{l^\infty}(X)$ si et seulement si

$$l^\infty \subset X|\Lambda.$$

La condition est clairement nécessaire. Pour voir qu'elle est suffisante, soit $\mu = (\mu_\lambda)_\lambda \in l^\infty$ et $f \in X$. Par hypothèse il existe $g \in X$ telle que $g|\Lambda = \mu$. Ainsi, $gf \in X$ interpole $(\mu_\lambda f(\lambda))_\lambda$.

L'avantage de nos définitions d'interpolation, et en particulier de la Définition 2.2.3 est bien sûr que l'on peut considérer des problèmes d'interpolation beaucoup plus généraux. Nous allons illustrer ceci à l'aide de deux exemples.

2.2.7. Exemple. Soit $X = H^p$ et $Y_n = b_{\lambda_n}^{k_n} H^p$ ou $k_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dire qu'une suite $(f_n)_n \subset H^p$ est interpolable par f par rapport à $\mathcal{Y}$ est équivalent à dire que f et f_n possèdent le même développement de Taylor jusqu'à l'ordre $k_n - 1$ en λ_n, $n \in \mathbb{N}$. En d'autres termes, l'interpolation généralisée avec cette suite particulière $\mathcal{Y}$ se traduit par l'interpolation non seulement des valeurs mais aussi des dérivées jusqu'à un certain ordre imposé par une fonction f (voir p.ex. [**Ni02**, C3.2.15(2)]).

Si $k_n = 1$ pour tout n nous retombons sur la Définition 2.2.4.

2.2.8. Exemple. Soit à nouveau $X = H^p$ et $Y_n = \exp(a_n(z+\zeta_n)/(z-\zeta_n))$ avec $a_n > 0$ et $\zeta_n \in \mathbb{T}$. Dans ce cas, dire que f interpole la suite $(f_n)_n \subset H^p$ par rapport à $\mathcal{Y}$ est équivalente à dire que f et f_n ont le même comportement radial sur les rayons $[0, \zeta_n)$ avec un certain contrôle de la vitesse : $f(r\zeta_n) - f_n(r\zeta_n) = O(e^{-2a_n/(1-r)})$ (voir [**Ni02**, C3.2.15(3)]).

La théorie de l'interpolation libre généralisée est très complète dans les espaces de Hardy H^p entre autre grâce à la factorisation de Riesz-Smirnov. Comme nous avons pu constater dans les deux exemples précédents, les problèmes d'interpolation ont un sens particulièrement transparents lorsqu'on les attache à des suites de fonctions intérieures. C'est ce que nous allons d'ailleurs toujours faire.

2.2.9. Bases inconditionnelles. Nous avons vu apparaître dans les définitions d'interpolation libre l'espace des suites l^∞. Le fait que Nikolski et Vasyunin aient introduit l'interpolation libre ainsi n'est pas une simple coïncidence. Comme nous l'avons déjà vu dans le cadre de l'interpolation simple (voir Paragraphe 1.1.1) que l'on peut établir un lien étroit entre l'interpolation libre et les bases inconditionnelles. C'est ce que nous allons faire maintenant.

Soit X un espace de Banach et $\mathcal{X} = (X_n)_n$ une suite de sous-espaces fermés de X (comme la famille $\mathcal{X}$ qui définira la base/suite inconditionnelle est en quelque sorte orthogonale à la famille $\mathcal{Y}$ par rapport à laquelle on interpole, nous avons

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

décidé de les distinguer dans les notations). La famille $\mathcal{X}$ est dite *complète* dans X, si $\mathrm{span}(X_n)_n = X$, où $\mathrm{span}(X_n)$ désigne l'adhérence de l'espace engendré par la famille $(X_n)_n$. Nous dirons que la famille $\mathcal{X}$ est faiblement topologiquement libre si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \cap \mathrm{span}(X_k)_{k\neq n} = \{0\}$. Elle est dite *minimale* si pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un δ_n tel que $\mathrm{dist}(x/\|x\|, \mathrm{span}(X_k)_{k\neq n}) \geq \delta_n$, pour tout $x \in X_n \setminus \{0\}$, et uniformément minimale si $\inf \delta_n = \delta > 0$. Lorsque la suite $\mathcal{X}$ est faiblement topologiquement libre il existe une suite $(\mathcal{E}_n)_n$ de "projections spectrales" tel que $\mathcal{E}_n|X_k = \delta_{nk} I|X_k$, où I est l'identité sur X. Ces projections seront bornées si la suite $\mathcal{X}$ est minimale et de normes uniformément bornées si $\mathcal{X}$ est uniformément minimale. En ces termes, nous pouvons définir une base comme une famille complète minimale. Nous utilisons également la notation suivante. Si $\sigma \subset \mathbb{N}$ est un sous ensemble fini, alors $\mathcal{E}_\sigma = \sum_{n\in\sigma} \mathcal{E}_n$. Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble dirigé de tous les sous ensembles finis de $\mathbb{N}$. La famille $\mathcal{X}$ est appelé une base inconditionnelle si pour tout $x \in X$, $x = \lim_{\sigma\in\mathcal{K}} \mathcal{E}_\sigma x$ (si $\mathcal{X}$ n'est pas complète nous dirons que la suite $\mathcal{X}$ est inconditionnelle si elle est une base inconditionnelle dans son enveloppe linéaire fermée). Pour une suite minimale $\mathcal{X}$, on définit $\mathcal{J}_{\mathcal{X}} x = \{\mathcal{E}_n x\}_n$, $x \in X$.

Par abus de langage, nous utiliserons ces mêmes notations pour des suites de vecteurs $(x_n)_n$ à la place de suites d'espaces ; on prendra alors $X_n = \langle x_n \rangle := \mathbb{C}x_n$.

Etroitement liés aux bases inconditionnelles sont les multiplicateurs (scalaires). Une suite $\mu = (\mu_n)_n$ de scalaires est appelée multiplicateur (scalaire) si l'opérateur M défini par $M|X_n = \mu_n \,\mathrm{Id}\,|X_n$ admet un prolongement par continuité à X. L'ensemble de tous les multiplicateurs de la suite $\mathcal{X}$ sera désigné par $M(\mathcal{X})$.

Le résultat qui nous permettra de reformuler le problème de l'interpolation libre est le théoème suivant qui est une compilation du Théorème des bases de Riesz et de [**Ni02**, Theorem 3.1.4 in Volume 1] (voir aussi le Théorème de Lorch-Grinblyum dans [**Nik86**]).

2.2.10. Théorème. *Soit X un espace de Banach et $\mathcal{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de X. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) *$\mathcal{X}$ est une base inconditionnelle ;*
2) $\sup_{\sigma\in\mathcal{K}} \|\mathcal{E}_\sigma\| < \infty$ *;*
3) $M(\mathcal{X}) = l^\infty$ *;*

Si X est de Hilbert, on peut rajouter la condition

4) $\mathcal{J}_{\mathcal{X}} X = l^2(\{X_n\})$.

Les ingrédients principaux de la preuve de ce théorème sont les Théorème du graphe fermé et de Banach-Steinhaus.

La condition à réinterpréter en termes d'interpolation est la condition 3). Pour cela nous énonçons un résultat auxiliaire dont la démonstration repose sur le théorème du graphe fermé.

2.2.11. Lemme. *Soit $\mathcal{X} = (X_n)_{n\geq 1}$ une base de l'espace de Banach X et $\mathcal{E}_n$ les projection spectrales correspondantes. Alors, $\mathcal{X}$ est une base inconditionnelle si et seulement si pour tout $x \in X$ et tout $\mu \in l^\infty$ il existe $y \in X$ tel que*

$$\mathcal{E}_n y = \mu_n \mathcal{E}_n x, \quad \text{pour tout } n \geq 1. \tag{2.2.1}$$

La condition 3) du Théorème de Lorch-Grinblyum peut donc être traduite par la condition suivante : pour tout $x \in X$ et pour tout $\mu \in l^\infty$ il existe $y \in X$ tel que

$$y - \mu_n x \in \ker \mathcal{E}_n.$$

Nous avons déjà rencontré une condition de ce type dans la Définition 2.2.2. Il suffira alors de choisir $\mathcal{X}$ convenablement pour que $\ker \mathcal{E}_n$ admette une interprétation simple en termes d'interpolation.

2.2.12. Un exemple (et quelques premiers éléments sur les espaces de Hardy...) Avant de continuer la discussion du cas général, examinons un exemple concret d'interpolation classique. Soit

$$H^p = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_p^p = \sup_{r<1} \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^p < \infty\}.$$

l'espace de Hardy, $0 < p < \infty$, et $H_0^p = zH^p = \{f \in H^p : f(0) = 0\}$. Nous aurons aussi besoin de l'espace H^∞ des fonctions holomorphes bornées sur $\mathbb{D}$ équipé de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|$.

Selon la Définition 2.2.4 la suite Λ est d'interpolation libre si pour toute fonction $f \in H^p$ et pour tout $\mu \in l^\infty$ il existe $g \in H^p$ telle que $g(\lambda_n) = \mu_n f(\lambda_n)$.

Soit maintenant $\Lambda = \{\lambda_n\}_n \subset \mathbb{D}$. La transformation de Möbius qui échange λ et 0 est donnée par

$$\varphi_\lambda(z) = \frac{\lambda - z}{1 - \overline{\lambda} z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

et le facteur de Blaschke élémentaire est une version normalisée de φ_λ :

$$b_\lambda(z) = \frac{|\lambda|}{\overline{\lambda}} \varphi_\lambda(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

On peut définir la métrique pseudohyperbolique à l'aide de la transformation de Möbius (ou du facteur élémentaire de Blaschke) :

$$\rho(\lambda, \mu) = |\varphi_\lambda(\mu)|, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{D},$$

et le voisinage pseudhyperbolique associé $K(\lambda, r) = \{z \in \mathbb{D} : \rho(\lambda, z) < r\}$, $\lambda \in \mathbb{D}$, $r < 1$.

Nous dirons que Λ vérifie la *condition de Blaschke* si $\sum_n (1 - |\lambda_n|^2) < \infty$. Cette condition est équivalente à la convergence uniforme sur tout compact du produit de Blaschke infini

$$B = B_\Lambda = \prod_n b_{\lambda_n}.$$

Elle est bien évidemment nécessaire pour avoir interpolation dans H^p. Supposons $1 < p < \infty$. Soit $k_\lambda = 1/(1 - \overline{\lambda} z)$ le noyau reproduisant de H^p et posons $X = \mathrm{span}(k_{\lambda_n})$ (adhérence dans H^p). Si on définit $K_B^p := H^p \cap B\overline{H_0^p}$, alors on vérifie aisément que $f \in K_B^p$ si et seulement si $f \perp BH^q$ $(1/p + 1/q = 1)$ par rapport à la dualité

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f\overline{g}\, dm.$$

Il est alors clair que $X = K_B^p$. Posons de plus $f_n = k_{\lambda_n} \prod_{l \neq n} b_{\lambda_l}$. A nouveau, en utilisant la dualité ci-dessus, on vérifie $\mathrm{span}(f_n)_n = K_B^p$. Si on introduit $X_n = \mathbb{C} f_n$, on obtient $\mathcal{E}_n f = c_n \langle f, k_{\lambda_n} \rangle f_n$ (avec $c_n = (1 - |\lambda_n|^2)/B_{\Lambda \setminus \lambda_n}(\lambda_n)$) pour tout $f \in K_B^p$

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

et $\ker \mathcal{E}_n = b_{\lambda_n} H^p \cap K_B^p =: Y_n$. Ainsi, dire que $\Lambda \in \mathrm{Int}_{l^\infty} K_B^p$ est équivalent à dire que $(f_n)_n$ est une base inconditionnelle.

Nous mentionnons que le supplément de l'espace K_B^p est BH^p ce qui implique que $\Lambda \in \mathrm{Int}_{l^\infty} K_B^p$ si et seulement si $\Lambda \in \mathrm{Int}_{l^\infty} H^p$. Finalement, Λ est d'interpolation dans H^p si et seulement si $(k_{\lambda_n})_n$ est une suite inconditionnelle dans H^p.

Cet exemple illustre donc le lien qui existe — à travers le théorème de Lorch-Grinblyum — entre l'interpolation au sens libre et les bases inconditionnelles. Ceci ramène donc le problème de l'interpolation à la recherche d'un critère permettant de caractériser les bases (ou suites) inconditionnelles.

2.2.13. Espaces de Hardy (suite...) Les résultats ce cette section sont bien classiques. On peut par exemple consulter [**Ga81**], [**RosRov85**] ou [**Ni02**].

Nous avons déjà donné une définition de l'espace de Hardy dans la Section 2.2.12 comme un espace de fonctions holomorphes sur le disque unité. Le Théorème de Fatou permet de montrer que les fonctions $f \in H^p$ admettent des limites non-tangentielles au bord presque partout sur $\mathbb{T}$. Rappelons que ces limites non-tangentielles sont dèfinies à l'aide de *l'angle de Stoltz*

$$\Gamma(\zeta) := \{z \in \mathbb{D} : |z-\zeta| \le \alpha(1-|z|^2)\}, \quad \zeta \in \mathbb{T},$$

où α détermine l'ouverture de l'angle. Comme pour nos problèmes α n'a pas d'incidence, nous sous-entendons dans tout ce qui suit que α est fixé.

On distingue deux types de fonctions dans H^p. Une fonction intérieure I est une fonction holomorphe bornée dans $\mathbb{D}$ dont les valeurs au bord sont de module 1 presque partout. Une fonction intérieure I se factorise en un produit de Blaschke B et une fonction intérieure singulière S :

$$I = BS.$$

Ici,

$$B = \prod_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$$

est le produit de Blaschke avec Λ l'ensemble des zéros de I (en comptant les multiplicités), $\sum(1-|\lambda|) < \infty$ (condition de Blaschke), et

$$S(z) = \exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\mu(\zeta)\right)$$

est la fonction intérieure singulière associée à μ. La mesure μ est positive et singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.

Soit $L^p = L^p(\mathbb{T})$. Le deuxième type de fonctions évoqué sont les fonctions extérieures. Une fonction h est dite extérieure si elle est de la forme

$$h(z) = h_w(z) := \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, w dm(\zeta)\right)$$

avec w une fonction à valeurs réelles et $w \in L^1$ (cas d'une fonction extérieure dans la classe de Smirnov définie plus loin). Si $w = \log|g|$ avec $g \in L^p$, $0 < p < \infty$, alors $h \in H^p$ et $|h| = |g|$ p.p. $\mathbb{T}$ (cas d'une fonction extérieure dans l'espace de Hardy H^p). Mentionnons aussi que toute fonction extérieure $h = h_w$ peut être écrit comme quotient de deux fonctions extérieures appartenant à H^∞ (il suffit de poser $w = w_1 + w_2$ avec w_i convenable).

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

2.2.14. Théorème (Factorisation de Riesz-Smirnov). *Soit $f \in H^p$, $0 < p < \infty$. Alors $|f| \in L^p$ et $\log|f| \in L^1$ et il existe une unique factorisation de f en*

$$f = \lambda B S h_{\log|f|},$$

où $\lambda \in \mathbb{T}$, B est le produit de Blaschke associé au zéros de f, $h_{\log|f|}$ est la fonction extérieure dont le module est égale à $|f|$ p.p. $\mathbb{T}$, et S est une fonction intérieure singulière.

Nous aurons aussi besoin plus tard des classes de Nevanlinna N et de Smirnov N^+, qui sont respectivement définies de la manière suivante.

$$N = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta < \infty \right\}$$

et

$$N^+ = \left\{ f \in N : \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(e^{i\theta})|\, d\theta \right\}.$$

Une autre façon de définir ces classes est basée sur la factorisation de Riesz-Smirnov. En effet, on a $f \in N^+$ si et seulement si

$$f = \alpha \frac{BSf_1}{f_2},$$

où f_1, f_2 sont des fonctions extérieures dans H^∞ avec $\|f_1\|_\infty, \|f_2\|_\infty \le 1$, S est intérieure singulière, B est un produit de Blaschke et $|\alpha| = 1$. De même, les fonctions $f \in N$ peuvent être représentées comme

$$f = \alpha \frac{BS_1 f_1}{S_2 f_2},$$

avec f_i extérieure, $\|f_i\|_\infty \le 1$, S_i intérieure singulière, B un produit de Blaschke et $|\alpha| = 1$.

Rappelons quelques autres résultats importants dans le contexte des espaces de Hardy.

La projection de Riesz

$$P_+ : \sum_{n=-N}^{N} a_n z^n \longmapsto \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$$

se prolonge en une application continue de $L^p \longrightarrow H^p$ pour $1 < p < \infty$. Notons aussi par P_- la projection complémentaire $I - P_+$.

Soit l'opérateur shift

$$\begin{aligned} S : H^p &\longrightarrow H^p, \\ f &\longmapsto zf. \end{aligned}$$

2.2.15. Théorème (Beurling). *Un sous-espace $M \subset H^p$ $(1 < p < \infty)$ fermé et non trivial $(M \neq H^p, \{0\})$ est invariant par rapport au shift*

$$SM \subset M$$

si et seulement s'il existe une fonction intérieure I telle que

$$M = IH^p.$$

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

On peut en déduire les sous-espaces invariants par rapport au shift adjoint sur H^p ($1 < p < \infty$; le cas $p \leq 1$ est plus délicat et a été traité par Aleksandrov, voir Cima & Ross [**CR00**] pour plus d'informations)

$$\begin{array}{rcl} S^* : H^p & \longrightarrow & H^p, \\ f & \longmapsto & \dfrac{f - f(0)}{z}. \end{array}$$

2.2.16. Théorème (Douglas-Shapiro-Shields, [**DSS70**]). *Un sous-espace $M \subset H^p$ ($1 < p < \infty$) fermé et non trivial ($M \neq H^p, \{0\}$) est invariant par rapport au shift adjoint*

$$S^* M \subset M$$

si et seulement s'il existe une fonction intérieure I telle que

$$M = K_I^p = H^p \cap I\overline{H_0^p}.$$

Dans le cas $p = 2$, les sous-espaces K_I^p sont appelés espaces modèles. Pour p arbitraire, $1 < p < \infty$, K_I^p possède un supplément, et il existe donc une projection dont l'image est K_I^p. On peut vérifier que cette projection est donnée par

$$\begin{array}{rcl} P_I : H^p & \longrightarrow & H^p, \\ f & \longmapsto & IP_-\overline{I}f. \end{array}$$

2.2.17. Espaces admissibles. Revenons aux problèmes d'interpolation libre généralisée. Soit $X \subset L^1(\mathbb{T})$ un espace de Banach vérifiant aux conditions suivantes.

(1) L'espace X est un idéal de Banach, i.e. X est un espace de Banach et il existe $C > 0$ tel que pour tout $g \in L^1(\mathbb{T})$ et $f \in X$, on a

$$|g| \leq |f| \quad p.p. \quad \text{implique} \quad g \in X \quad \text{et} \quad \|g\|_X \leq C\|f\|_X.$$

(2) Les polynômes trigonometriques $\mathcal{P}ol_{\text{trig}}$ sont denses dans X.

(3) La projection de Riesz est continue sur X.

La condition (1) implique que la multiplication par une fonction bornée est une opération continue. En particulier, l'espace IX où I est une fonction intérieure est un sous-espace fermé de X.

2.2.18. Définition. Un espace de Banach $X \subset L^1(\mathbb{T})$ vérifiant les conditions (1)-(3) est appelé admissible.

Supposons pour la suite que X est un espace admissible. Posons

$$X_+ = P_+ X, \quad X_- = P_- X,$$

et

$$K_I^X = X_+ \cap I X_-.$$

Comme dans le cas des espaces de Hardy, nous avons dans un espace admissible

$$K_I^X = P_I X_+.$$

En particulier, l'espace K_I^X possède comme supplément IX_+.

On obtient alors une généralisation du théorème de Beurling (voir [**Nik86**, p.27]).

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

2.2.19. Théorème. *Soit X admissible et $E \subset X$ un sous-espace fermé invariant par rapport au shift $zE \subset E$. Alors*

soit 1) $zE = E$ et il existe un ensemble mesurable $e \subset \mathbb{T}$ tel que $E = \chi_e E$,

soit 2) $zE \neq E$ et il existe une fonctione mesurable θ, $|\theta| = 1$ p.p. telle que $E = \theta X_+$.

Remarquons que dans le cas 2), si E est un sous-espace de fonctions holomorphes alors la fonction θ doit être, elle aussi, holomorphe et donc θ est intérieure.

2.2.20. Arithmétique des fonctions intérieures dans l'espace de Hardy. Dans le contexte de l'interpolation libre généralisée une certaine famille de sous-espaces X_n s'avère particulièrement pertinente. A celle-ci on pourra associer des fonctions intérieures, et l'interpolation libre sera exprimée en fonction du lien entre ces fonctions intérieures. Nous aurons alors besoin d'étudier les liens entre les fonctions intérieures d'un côté et les sous-espaces X_n de l'autre. Ce qui suit est une adaptation de [**Nik86**].

2.2.21. Définition. On dit qu'une fonction intérieure I_1 en divise une autre I_2 — ce que nous allons noter $I_1|I_2$ — s'il existe une fonction intérieure I telle que $I_1 I = I_2$.

Cette définition est équivalente à $I_2 H^\infty \subset I_1 H^\infty$ ou encore à $I_2 X_+ \subset I_1 X_+$.

Avec cette notion de divisibilité on peut introduire le pgcd ainsi que le ppcm de deux fonctions intérieures, ou même d'une famille de fonctions intérieures.

Le résultat suivant se montre à l'aide du Théorème 2.2.19.

2.2.22. Proposition. *Soient I_1, I_2 deux fonctions intérieures. Alors*

$$I_1 X_+ \cap I_2 X_+ = \operatorname{ppcm}(I_1, I_2) X_+,$$
$$\operatorname{clos}(I_1 X_+ + I_2 X_+) = \operatorname{pgcd}(I_1, I_2) X_+,$$

Nous pouvons maintenant introduire la suite de sous-espaces de X par rapport à laquelle nous allons interpoler. Soit $(I_n)_n$ une suite de fonctions intérieures telle que le produit $I = \prod_n I_n$ converge (par exemple dans H^2). Posons $I'_n = I/I_n$ et définissons

$$L_{I,I_n} = \frac{I}{I_n} X_+ \cap I X_-. = I'_n X_+ \cap I X_-.$$

Nous pouvons alors établir les liens suivants entre ces sous-espaces et les fonctions I_n que nous leur avons associées.

2.2.23. Lemme. *Soit X un espace admissible et I, I_n, $n \geq 1$, des fonctions intérieures telles que* $\operatorname{pgcd}(I_n : n \geq 1)|I$. *Alors*

(a) *$L_{I,I_1} \subset L_{I,I_2}$ si et seulement si $I_1|I_2$.*
(b) *$\bigcap_{n\geq 1} L_{I,I_n} = L_{I,J}$, where $J = \operatorname{pgcd}(I_n : n \geq 1)$.*
(c) *$\bigvee_{n\geq 1} L_{I,I_n} = L_{I,J}$, where $J = \operatorname{ppcm}(I_n : n \geq 1)$.*

La démonstration en est assez simple (voir [**Nik86**] où ces résultats ont été présentés pour les espaces $K^2_{I_n}$; pour les espaces L_{I,I_n} on le trouve dans [**Har97**]) et repose sur la description des sous-espaces invariants de la compression du shift sur K_I^X. En effet, on a pour $M \subset K_I^X$ (voir [**Har97**, Proposition 2.3] pour le cas où X est admissible)

$$P_I z M \subset M \iff \text{Il existe } \theta \text{ intérieure telle que } \theta|I \text{ et } M = \theta X_+ \cap I X_-.$$

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

2.2.24. Projections spectrales. Avant d'étudier le problème des bases inconditionnelles dans les espaces admissibles, faisons quelques remarques. Supposons désormais $I = \mathrm{ppcm}(I_n : n \geq 1)$ et posons

$$\begin{aligned} L_n &:= L_{I,I_n} = I'_n X_+ \cap I X_-, \\ X_n &:= L_{I,I'_n} = I_n X_+ \cap I X_-. \end{aligned}$$

D'après Lemme 2.2.23(c), les familles $\mathcal{Y} := (L_n)_n$ et $\mathcal{X} := (X_n)_n$ sont complètes dans $L_{I,I} = K_I^X$. De plus, le fait que $K_I^X + IX_+ = X_+$ permet de dire qu'interpoler par rapport à $\mathcal{X}$ dans K_I^X est équivalent à dire que l'on interpole par rapport à $I_n X_+$ dans X_+. Et, comme nous l'avons vu dans les exemples 2.2.7 et 2.2.8, c'est cette dernière forme d'interpolation qui permet une interprétation particulièrement claire.

On sait que si la suite $\mathcal{X}$ est d'interpolation libre alors $\mathrm{pgcd}(I_n : n \geq 1) = 1$, et donc en particulier $\mathcal{Y}$ doit être faiblement topologiquement libre (utiliser Lemme 2.2.23(b)) de sorte que les projections spectrales associées $\mathcal{E}_n$ sont définies sur l'enveloppe linéaire de $\mathcal{Y}$. Par construction (et avec Lemme 2.2.23(c))

$$\begin{aligned} \mathrm{Image}\, \mathcal{E}_n &= L_n \text{ et} \\ \ker \mathcal{E}_n &= \bigvee_{k \neq n} L_k = X_n, \end{aligned}$$

(notons que $\mathrm{span}(L_n, X_n) = K_I^X$).

2.2.25. Lemme (cf. [**Har97**, Lemma 2.5]). *Si $\mathcal{X}$ est d'interpolation libre généralisée, alors $\mathcal{E}_n$ admet un prolongement continu sur K_I^X.*

La démonstration de ce résultat est basée sur le théorème du graphe fermé.

2.2.26. La condition de Carleson généralisée ou de Carleson-Vasyunin. La famille $\mathcal{X} = (X_n)_n$ étant choisie pour avoir une interprétation simple de l'interpolation par rapport à cette famille, il suffit de déterminer une condition assurant que $\mathcal{Y}$ soit inconditionnelle dans K_I^X. La condition que nous allons exploiter est la condition 2) dans le Théorème de Lorch-Grinblyum (Théorème 2.2.10) avec la base $\mathcal{Y}$.

Avant de rentrer dans l'étude des bases inconditionnelles, nous devons préciser à quel type de condition pour l'interpolation nous pouvons nous attendre. Rappelons que nous allons utiliser la méthode introduite par Vasyunin et Nikolski pour traiter de l'interpolation libre généralisée dans les espaces de Hardy et dont les espaces admissibles représentent une généralisation naturelle. Comme dans les espaces de Hardy les suites d'interpolation sont caractérisées par la condition de Carleson, une condition d'interpolation généralisée devrait se réduire à cette condition de Carleson dans le cas de l'interpolation classique (c'est-à-dire interpolation par rapport à une suite de sous-espaces de fonction s'annulant en un seul point).

Soit donc $(I_n)_n$ la suite de fonctions intérieures associée à la suite de sous-espaces $\mathcal{X} = (X_n)_n = (I_n X_+ \cap I X_-)_n$, où $I = \prod_n I_n$ (que nous supposons convergeant).

2.2.27. Définition. Nous dirons que la suite $(I_n)_n$ vérifie la condition de Carleson généralisée, ou la condition de Carleson-Vasyunin, s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$|I(z)| \geq \delta \inf_n |I_n(z)|, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{2.2.2}$$

On peut se convaincre — à l'aide d'un résultat de Kerr-Lawson sur le comportement au voisinage pseudohyperbolique de ses zéros d'un produit de Blaschke interpolant et du principe du minimum — que cette condition se réduit effectivement à la condition de Carleson classique dans le cas $I_n = b_{\lambda_n}$, où $\Lambda = (\lambda_n)_n \subset \mathbb{D}$ vérifie la condition de Blaschke $\sum_n (1-|\lambda_n|) < \infty$.

Revenons au cas général. Nous aurons besoin d'une autre notion liée à l'utilisation du Théorème de Nehari. Un point clé dans la preuve de celui-ci est le fait de pouvoir factoriser une fonction $f \in H^1$ en $f = gh$ avec $g \in X_+$ et $h \in X_+^*$ (ce qui sous entend au demeurant que X_+^* peut également être identifié à un sous-espace de L^1). Nous allons remplacer X^+ par un espace convenable Y (p.ex. un sous-espace de X^* ou un espace isomorphe à X_+^*).

Soit donc $Y \subset H^1$ un espace normé tel que pour tout $x \in X_+$ et $y \in Y$ nous avons une *inégalité de Hölder*

$$\int_{\mathbb{T}} xy\, dm \leq \|x\|_X \|y\|_Y.$$

Soit $\mathcal{P}ol_+$ l'ensemble des polynômes analytiques ($\mathcal{P}ol_+ = P_+ \mathcal{P}ol_{\text{trig}}$).

2.2.28. Définition. Le couple (X_+, Y) possède la propriété de factorization (FP) s'il existe $c_0 \geq 1$ et pour tout $Q \in \mathcal{P}ol_+$, $\|Q\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq 1$, il existe $x, y \in \mathcal{A}(\mathbb{D}) = H^\infty \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ tels que

$$Q = xy, \quad \|x\|_X \|y\|_Y \leq c_0. \tag{2.2.3}$$

Nous allons également utiliser une notion de factorisation plus faible.

2.2.29. Définition. Le couple (X_+, Y) possède la propriété de factorisation approximative (AFP) s'il existe $c_0 \geq 1$ tel que pour tout $Q \in \mathcal{P}ol_+$, $\|Q\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq 1$, $0 < \varepsilon < 1$, il existe $Q_\varepsilon \in \mathcal{P}ol_+$, $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$, avec

$$Q_\varepsilon = x_\varepsilon y_\varepsilon, \quad \|x_\varepsilon\|_X \|y_\varepsilon\|_Y \leq c_0, \quad \|Q - Q_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{T})} < \varepsilon. \tag{2.2.4}$$

Nous dirons aussi qu'un espace X_+ possède la propriété (FP) (ou (AFP)) s'il existe un espace normé Y tel que (X_+, Y) possède la propriété (FP) (ou (AFP)).

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre.

2.2.30. Théorème ([**Har97**]). *Soit $(I_n)_{n\geq 1}$ une suite de functions intérieures telle que le produit $I = \prod_{n\geq 1} I_n$ converge et soit X un espace admissible verifiant (AFP). Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) $(I_n)_{n\geq 1} \in (CG)$,
(2) *Il existe $c < \infty$ tel que pour tout $\mu \in l^\infty$ avec $\mu_k \in \{0, 1\}$ il existe $f_\mu \in H^\infty$ telle que $f_\mu - \mu_n \in I_n H^\infty$ et $\|f_\mu\| \leq c$,*
(3) *$(X_n)_{n\geq 1}$ est d'interpolation libre dans X_+.*
(4) *$(L_{I,I_n})_{n\geq 1}$ est une base inconditionnelle dans K_θ^X.*

Nous allons démontrer ce résultat en guise de présentation de la méthode de Vasyunin et Nikolski. Un ingrédient majeur de celle-ci est le théorème de Nehari dont nous énonçons une version générale ici.

2.2.31. Théorème (Nehari généralisé, [**Har97**]). *Soit X un espace admissible vérifiant (AFP) avec constante correspondante $c_0 \geq 1$. Soit $\Gamma : X_+ \longrightarrow X_-$ un opérateur vérifiant l'équation de Hankel*

$$P_- z\Gamma = \Gamma z.$$

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

Alors Γ *est borné si et seulement s'il existe* $\psi \in L^\infty$ *tel que pour tout* $f \in X_+$

$$\Gamma f = P_-\psi f.$$

De plus, on peut choisir ψ *de manière à avoir*

$$\|\Gamma\| \geq \frac{1}{c_0}\,\mathrm{dist}\,(\psi, H^\infty).$$

Un opérateur vérifiant l'équation de Hankel (ou de la forme $Hf = P_-\psi f$) est appelé opérateur de Hankel.

Nous renvoyons le lecteur à l'article original [**Har97**] pour la preuve de ce théorème (voir aussi [**Nik86**, p.181] pour la preuve dans le cas $X = H^2$). Mentionnons qu'une autre généralisation du théorème de Nehari a été donnée dans [**Ka04**, Theorem 5.9] pour les espaces invariants par réarrangement et dont les indices de Boyd sont non-triviaux. Probablement on peut exploiter cette autre généralisation pour considérer l'interpolation généralisée dans cette classe d'espaces.

Le théorème de Nehari permet de démontrer le théorème du relèvement du commutant, un autre ingrédient clé dans la démonstration du théorème sur l'interpolation libre. Soit $M_I = P_I z\big|K_I^X$ la compression du shift sur X_+ à K_I^X.

2.2.32. Définition. Le commutant de M_I est défini par

$$\{M_I\}' = \{A : K_I^X \longrightarrow K_I^X : M_I A = A M_I\}.$$

2.2.33. Théorème (Théorème du relèvement du commutant généralisé, [**Har97**]). *Soient* X *un espace admissible vérifiant (AFP) avec constante correspondante* $c_0 \geq 1$ *et* I *une fonction intérieure. Si* $A \in \{M_I\}'$ *est borné, alors il existe* $\varphi_0 \in H^\infty$ *tel que*

$$\begin{aligned} A &= P_I\varphi_0\big|K_I^X \quad (= \varphi_0\,(M_I)) \\ \textit{et} \qquad \|A\| &\geq \frac{1}{c_0\|P_-\|}\|\varphi_0\|_{H^\infty} \end{aligned}$$

La preuve est analogue au cas H^2, surtout au début. La voici.

Preuve. Observons que $A \in \{M_I\}'$ est équivalent à dire que $P_I z A P_I = A P_I z$. Posons $A_* = \overline{I} A P_I$, alors l'équation précédente devient $IP_- z A_* = I A_* z$ ou encore $P_- z A_* = A_* z$. Nous reconnaissons là une équation de Hankel. Puisque X est admissible, A_* est borné, et nous pouvons appliquer la version du Théorème de Nehari 2.2.31 valable dans les espaces admissibles vérifiant (AFP). Il existera donc $\psi \in L^\infty$ tel que $A_* f = \overline{I} A P_I f = P_-\psi f$, $f \in X_+$, et $\|A_*\| \geq (1/c_0)\,\mathrm{dist}(\varphi, H^\infty)$. Puisque $A_*|IX_+ = 0$ nous pouvons écrire $\psi = \overline{I}\varphi$. Donc $A = AP_I = IA_* = IP_-\overline{I}\varphi = P_I\varphi$. De plus

$$\begin{aligned} \|A_*\| &\geq \frac{1}{c_0}\,\mathrm{dist}\,(\psi, H^\infty) = \frac{1}{c_0} dist\,(\overline{I}\varphi, H^\infty) = \frac{1}{c_0}\,\mathrm{dist}\,(\varphi, IH^\infty) \\ &= \frac{1}{c_0}\|\varphi\|_{H^\infty/IH^\infty}. \end{aligned}$$

Un argument de familles normales donne une fonction φ_0 vérifiant l'estimation de norme souhaitée. □

Donc si on a commutation avec l'operateur modele dans l'espace modele, notre operateur est une compression d'un operateur de multiplication par une fonction holomorphe bornée qui, elle, commute dans l'espace X_+ avec le shift (dont M_I est

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

la compression).

Nous avons maintenant tous les outils en main pour démontrer le théorème d'interpolation libre généralisée.

Preuve du Théorème 2.2.30. L'équivalence entre (3) et (4) est une conséquence immédiate du théorème de Lorch-Grinblyum. En effet, il suffit d'observer $\ker \mathcal{E}_n = X_n = I_n X_+ \cap I X_-$ et $\operatorname{Image} \mathcal{E}_n = I_n' X_+ \cap I X_-$.

Montrons que (3) implique (2). Soit $\sigma \subset \mathbb{N}$ de cardinal fini. On vérifie aisément que $M_I(JX_+ \cap IX_-) \subset JX_+ \cap IX_-$ pour une fonction intérieure $J|I$. Donc $\operatorname{span}_{n\in\sigma} L_{I,I_n} = \mathcal{E}_\sigma K_I^X$ est invariant par rapport à M_I et

$$\mathcal{E}_\sigma M_I = M_I \mathcal{E}_\sigma.$$

Grâce au théorème du relèvement du commutant il existe $\varphi_\sigma \in H^\infty$ tel que $\mathcal{E}_\sigma = P_I \varphi_\sigma | K_I^X$ et $\|\varphi_\sigma\|_{H^\infty} \le c_0 \|P_-\| \|\mathcal{E}_\sigma\|$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in L_{I,I_n} = I_n' X_+ \cap I X_- \subset K_I^X$. Si $n \in \sigma$ alors $P_I f = f = \mathcal{E}_\sigma f = P_I \varphi_\sigma f$ et $f(1-\varphi_\sigma) \in \ker P_I = IX_+$, ou encore $\overline{I_n'} f(1-\varphi_\sigma) \in I_n X_+$. Puisque $L_{I,I_n} = I_n' X_+ \cap IX_- = I_n'(X_+ \cap I_n X_-) = I_n' K_{I_n}^X$ on peut écrire $f = I_n' g$ avec $g = P_{I_n} h$, $h \in X_+$, et donc $g(1-\varphi_\sigma) = \overline{I_n'} f (1-\varphi_\sigma) \in I_n X_+$. Choisissons en particulier $h = 1$. alors $P_{I_n}(1-g) = 0$ et donc $(1-g) \in I_n X_+$. D'où

$$\begin{aligned} 1 - \varphi_\sigma &= (1-\varphi_\sigma) g + (1-\varphi_\sigma)(1-g) \\ &\in I_n X_+ + I_n X_+ = I_n X_+. \end{aligned}$$

Comme $1 - \varphi_\sigma$ est bornée nous pouvons remplacer X_+ par H^∞. On vérifie de même que $\varphi_\sigma \in I_n H^\infty$ si $n \notin \sigma$. Donc, φ_σ interpole la suite $(\mu_n)_{n\ge 1}$ avec $\mu_n = 1$ pour $n \in \sigma$ et $\mu_n = 0$ sinon.

Comme de plus $(L_{I,I_n})_{n\ge 1}$ est une base inconditionnelle nous obtenons $M = \sup_{\sigma\in\mathcal{K}} \|\mathcal{E}_\sigma\| < \infty$, d'où

$$\|\varphi_\sigma\|_{H^\infty} \le c_0 \|P_-\| \|\mathcal{E}_\sigma\| \le c_0 M \|P_-\|,$$

Réciproquement, la condition (2) implique que les opérateurs $\mathcal{E}_\sigma := P_I \varphi_\sigma$ sont uniformément bornées ($\varphi_\sigma := f_\mu$ avec $\mu_n = 1$ si $n \in \sigma$ et $\mu_n = 0$ sinon). Par ailleurs, on vérifie que $\ker \mathcal{E}_\sigma = \operatorname{span}(X_n)_{n\in\sigma}$ et $\operatorname{Image} \mathcal{E}_\sigma = \operatorname{span}(L_{I,I_n})_{n\in\sigma}$ ce qui entraîne que $(L_{I,I_n})_n$ est une base inconditionnelle dans K_I^2, d'où la condition (4) du théorème.

Concernant l'équivalence entre (1) et (2), celle-ci est complètement indépendante de l'espace X_+. C'est en fait l'interpolation des constantes idempotentes dans H^∞ qui a été décrite dans le travail originel de Vasyunin[**Va84**]. Nous donnons une esquisse de la preuve ici qui suit la présentation dans [**Ni02**]. On démontre d'abord par une méthode élémentaire (voir [**Ni02**, Lemma C.3.2.12]) que la condition de Carleson-Vasyunin est équivalente à la condition du théorème de la couronne

$$\inf_{\sigma\subset\mathbb{N}} \inf z \in \mathbb{D}(|I_\sigma(z)| + |I_{\sigma'}(z)|) > 0, \tag{2.2.5}$$

où $I_\sigma = \prod_{n\in\sigma} I_n$ et $\sigma' = \mathbb{N} \setminus \sigma$. Ensuite, la condition

$$\begin{cases} \varphi_\sigma - 1 \in I_n H^\infty & n \in \sigma \\ \varphi_\sigma \in I_n H^\infty & n \notin \sigma \end{cases}$$

avec $\|\varphi\|_\infty \le c$ est équivalente à

$$1 = \varphi_\sigma - (\varphi_\sigma - 1) = I_{\sigma'} v - I_\sigma u.$$

On reconnaît là une équation de Bezout qui admet des solutions u, v si et seulement si la condition 2.2.5 est vérifiée (l'uniformité de la constante dans cette condition est bien évidemment reliée à l'uniformité de la norme des fonctions interpolantes). □

Les exemples standards sont donnés par les espaces de Hardy pour lesquels on peut expliciter l'espace des traces généralisé si $(I_n) \in$ (CV) :

$$l^p(H^p/I_nH^p) \tag{2.2.6}$$

(voir [**Nik78**, Theorem 1.2] et les remarques qui suivent ainsi que [**Har96**, Théorme 2.4] pour le cas général).

Concernant uniquement la caractérisation de l'interpolation libre par la condition de Carleson-Vasyunin, et donc une autre application du Théorème 2.2.30, on peut considérer une classe plus générale que celle des espaces de Hardy, à savoir les espaces de Hardy-Orlicz (voir [**Har96**, pp. 257–258]).

Pour terminer cette section, nous voudrons juste donner un résultat de Nikolski et Volberg concernant la condition de Carleson-Vasyunin et que nous donnons dans le cas particulier des produits de Blaschke (pour le cas général nous référons à [**NV90**]).

2.2.34. Théorème ([**NV90**]). *Soient $\Lambda \subset \mathbb{D}$ une suite, $B = \prod_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$ le produit de Blaschke associé et $L(B,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{D} : |B(z)| < \varepsilon\}$ son ensemble de niveau. Soit $L(B,\varepsilon) = \bigcup_n \tau_n$ la décomposition en composantes connexes de $L(B,\varepsilon)$, et $\sigma_n = \Lambda \cap \tau_n$. Si on pose $B_n = B_{\sigma_n}$ alors*

$$(B_n)_n \in (\mathrm{CV}).$$

2.3. Interpolation libre et généralisée dans l'espace de Bergman

Dans cette section nous présentons quelques résultats que l'on peut transférer des espaces de Hardy vers les espaces de Bergman

$$B^{p,\alpha} = \{f \in Hol\,(\mathbb{D}) : \|f\|^p_{p,\alpha} = \int |f(z)|^p(1-|z|^2)^{\alpha p-1}\,dm(z) < \infty\},$$

$p > 0$, $\alpha > 0$. Un élément central dans les considérations à suivre sera la condition de Carleson-Vasyunin, et cela pour deux raisons.

La première est liée à la caractérisation des suites d'interpolation libre (généralisée ou non) basée sur les produits de Blaschke. Puisque les produits de Blaschke sont des fonctions extrémales dans l'espace de Hardy, on peut se poser la question si les fonctions extrémales — ou diviseurs canoniques — considérées pour la première fois par Hedenmalm au début des années 90 peuvent donner lieu à une caractérisation des suites d'interpolation dans l'espace de Bergman. Schuster et Seip ont démontré en 1998 que c'était effectivement le cas. Comment pourrait-on alors généraliser leur résultat pour considérer l'interpolation généralisée dans l'espace de Bergman? Rappelons la formulation (2.2.5) de la condition de Carleson-Vasyunin. Celle-ci peut alors donner une entrée possible pour une généralisation du résultat de Schuster et Seip. Nous allons présenter les résultats que nous avons obtenus dans ce contexte dans la Section 2.3.1.

La deuxième raison est que la condition de Carleson-Vasyunin nous permet d'interpoler de façon généralisée dans H^∞ qui est l'espace des multiplicateurs de B^2. Nous verrons dans la Section 2.3.6 que l'on peut effectivement exploiter ce fait pour construire des exemples de suites d'interpolation généralisée pour l'espace

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

de Bergman, et plus particulièrement des suites d'interpolation multiple avec des multiplicités non uniformément bornées. Il nous paraissait intéressant de rajouter cette construction en vue d'un préprint récent de Luecking où l'auteur introduit ce qu'il appelle les "schèmes d'interpolation", une notion d'interpolation généralisée. Il s'avère a posteriori que ce type d'interpolation implique nécessairement que la suite sousjacente au schème est une réunion finie de suites d'interpolation.

2.3.1. Interpolation généralisée dans l'espace de Bergman et fonctions extrémales. Dans l'espace de Hardy, les suites d'interpolation sont caractérisées par la condition de Carleson. Il s'avère que les produits de Blaschke sont au fait des fonctions extrémales : si $0 \notin \Lambda$, alors B_Λ est la solution du problème extrémal

$$\sup\{\operatorname{Re} f(0) : f|\Lambda = 0, \|f\| \leq 1\} \tag{2.3.7}$$

(ici $\|\cdot\|$ est la norme générique de l'espace sur lequel on considère le problème extrémal). Hedenmalm a démontré dans [**He91**] que les fonctions extrémales de l'espace Bergman sont des diviseurs contractants (ce qui est certes plus faible que la division isométrique des fonctions intérieures dans l'espace de Hardy, mais c'est quand même un résultat remarquable), un résultat qui a été généralisé plus tard dans différentes directions (p.ex. les cas $p \neq 2$ avec [**DKSS93**], etc.). Schuster et Seip ont alors eu l'idée de voir si ces diviseurs peuvent caractériser les suites d'interpolation dans l'espace de Bergman, et ils ont donné une réponse affirmative dans [**SchS98**].

2.3.2. Théorème (A. Schuster, K. Seip, [**SchS98**]). *Soit $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{D}$. Alors*

$$\Lambda \in Int\,(B^{p,\alpha}) \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{il existe } \delta > 0 \textit{ such that } G_k(0) \geq \delta,\ k \geq 1,$$

où $G_k = G_{\varphi_{\lambda_k}(\Lambda\setminus\{\lambda_k\})}$ est la fonction extrémale associée à l'ensemble $\varphi_{\lambda_k}(\Lambda\setminus\{\lambda_k\})$ (comme dans (2.3.7)*).*

Le fait de centrer la suite à chaque fois en zéro permet d'éliminer naturellement la croissance inhérente à l'espace de Bergman.

Nous avons déjà mentionné la formulation de Bezout (2.2.5) de la condition de Carleson-Vasyunin généralisée. Celle-ci motive l'approche suivante (voir aussi quelques précisions plus loin). Soit $\Lambda, \sigma \subset \mathbb{D}$ des suites de zéros dans $B^{p,\alpha}$ telles que $\Lambda \cap \sigma = \emptyset$, $0 \in \sigma$, et considérons le problème extrémal

$$\sup\{\operatorname{Re} g(0) : g\big|_\sigma \text{ constant}, g\big|_\Lambda = 0, \|g\|_{p,\alpha} = 1\}. \tag{2.3.8}$$

Pour $\sigma = \{0\}$, nous obtenons le diviseur canonique de Hedenmalm. Si σ est fini il existe toujours une fonction s'annulant sur Λ et qui est égale à une constante différente de zéro sur σ. L'existence et l'unicité (pour $p > 1$) de la solution se démontrent comme dans le cas classique. La solution de (2.3.8) sera notée $G_{\Lambda,\sigma}$.

2.3.3. Définition. Soit $\Lambda = \bigcup_{n\geq 1} \sigma_n$ sans point d'accumulation dans $\mathbb{D}$. S'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\tau \subset \mathbb{N}$, $|\tau| < \infty$, et $\lambda \in \sigma_\tau := \bigcup_{n\in\tau} \sigma_n$ nous avons

$$G_{\tau,\lambda}(0) \geq \delta,$$

où $G_{\tau,\lambda} = G_{\varphi_\lambda(\Lambda\setminus\sigma_\tau),\varphi_\lambda(\sigma_\tau)}$, alors nous écrirons $(G_{\tau,\lambda})_{\tau,\lambda} \in (SSG)$. Cette condition sera appelé la condition de Schuster-Seip généralisée.

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

Nous devrions commenter un peu plus l'origine de cette condition : remarquons que si $(B_{\sigma_n})_n$ vérifie la condition de Carleson-Vasyunin, alors avec la formulation (2.2.5) de cette conditon et le Théorème de la couronne on obtient deux fonctions $f, g \in H^\infty$ telles que $B_{\Lambda\setminus\sigma_\tau} f + B_{\sigma_\tau} g = 1$ avec un contrôle des normes de f et g. Donc la fonction $B_{\Lambda\setminus\sigma_\tau} f$ est constante (égale à 1) sur σ_τ, elle s'annule sur $\Lambda \setminus \sigma_\tau$, et sa norme est contrôlée, ce qui motive donc notre définition de $G_{\Lambda,\sigma}$.

Il s'avère alors que cette condition est nécessaire dans tous les cas.

2.3.4. THÉORÈME. *Soient* $0 < p < \infty$, $\alpha > 0$. *Supposons que* $\Lambda = \bigcup_{n\geq 1} \sigma_n$ *n'a pas de point d'accumulation dans* $\mathbb{D}$. *Alors*

$$(\sigma_n)_{n\geq 1} \in Int_g(B^{p,\alpha}) \quad \Longrightarrow \quad (G_{\tau,\lambda})_{\tau,\lambda} \in (SSG).$$

La preuve de ce résultat est essentiellement basée sur le fait que l'interpolation libre entraîne que si une suite (f_n) est interpolable par f et si $\mu \in l^\infty$ alors la nouvelle suite $(\mu_n f_n)_n$ est interpolable par une fonction dont la norme dépend uniquement de celle de f et de $\|\mu\|$. C'est un raisonnement classique dans le domaine utilisant les théorèmes du graphe fermé et de Banach-Steinhaus. Nous utilisons ce type de raisonnement d'ailleurs dans l'esquisse de la preuve du Théorème 3.1.2.

Posons $N_n := \{f \in B^{p,\alpha} : f|\sigma_n = 0\}$. Nous obtenons la condition suffisante suivante.

2.3.5. THÉORÈME. *Si* $(G_{\varphi_\lambda(\Lambda\setminus\sigma_n)})_{n,\lambda} \in (SSG)$ *et* $N = \sup_{n\geq 1} |\sigma_n| < \infty$, *alors* $(N_n)_n$ *est d'interpolation libre généralisée (dans le sens de la Définition 2.2.3).*

Au fait, ce théorème est valable sous une condition plus faible (ce que nous appelons la condition (wSSG) dans [**Har01**]). Par ailleurs, dans [**Har01**] nous montrons en fait que la condition (SSG) (ou (wSSG)) n'implique pas l'interpolation libre mais l'interpolation avec une trace convenable fixée a priori (c'est un espace l^p pondéré prenant en compte les différences divisées sur les points qui sont proches).

La preuve de ce théorème est basée sur la preuve de Schuster et Seip dans laquelle on incorpore un argument de perturbation. En effet, nous redistribuons équitablement les points $\lambda \in \sigma_n$ dans un voisinage pseudohyperbolique. Ensuite il faut assurer un bon contrôle des constantes (au fait des densités) lorsque la perturbation tend vers la suite initiale.

Nous avons considéré ici le problème de l'interpolation généralisée sur des points proches mais sans multiplicité ; le cas de l'interpolation avec multiplicités (uniformément bornées et sur des points uniformément séparés) a été considéré par [**KSch01**].

Notre parti pris était de trouver une caractérisation de l'interpolation généralisée basée sur les fonctions extrémales (mais la preuve passe en fait par la densité). Pour une caractérisation utilisant la densité on peut voir dans [**Mar**].

2.3.6. Un exemple explicite. Dans un préprint récent [**Lu05**], Luecking propose une notion d'interpolation généralisée ("interpolation scheme"). Avec cette notion d'interpolation on est nécessairement limité à des réunions finies de suites d'interpolation pour l'espace de Bergman. Nous discutons rapidement ce résultat et les raisons pour lesquelles on obtient cette restriction.

Comme ce résultat paraît peu naturel, nous allons proposer une construction basée sur les espaces L_n et X_n introduits dans la Section 2.2.24 dans le cadre des

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

espaces de Hardy et permettant de donner un exemple d'une suite d'interpolation multiple (donc généralisée) avec des multiplicités non uniformément bornées.

Ce résultat a été élaboré dans le contexte d'un travail en commun avec A. Borichev et qui ne fait pour l'instant pas partie d'une publication ou d'un travail en cours de publication.

Pour simplifier, nous nous plaçons pour tout ce qui suit dans la situation hilbertienne sans poid, c'est-à-dire nous considérons le problème de l'interpolation libre généralisée dans $B^2 := B^{2,1/2}$.

Le résultat de Luecking. Afin de considérer des problèmes d'interpolation généralisée, Luecking introduit des *schémas d'interpolation.* Pour les définir, il utilise des suites de domaines $(G_k)_k$ telles que $G_k \subset \mathbb{D}$ ($k \in \mathbb{N}$) et $G_i \cap G_j = \emptyset$, $i \neq j$ (Luecking n'impose pas vraiment cette condition, mais on peut se ramener à cette situation). Ces suites sont en quelque sorte les analogues des décompositions en composantes connexes de l'ensemble de niveau $L(B, \varepsilon)$ dans le contexte des espaces de Hardy (voir Théorème 2.2.34). Nous allons revenir sur cette décomposition à la fin de cette section.

Soit alors Λ une suite dans $\mathbb{D}$ et soit

$$\Lambda = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n$$

une partition telle que

(1) $\sigma_k \subset G_k$,
(2) il existe $\varepsilon > 0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $(\sigma_k)_\varepsilon := \bigcup_{\lambda\in\sigma_k} K(\lambda, \varepsilon) \subset G_k$, (rappelons que $K(\lambda, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{D} : \rho(\lambda, z) < \varepsilon\}$)
(3) $R := \sup R_k < 1$ où $R_k := \operatorname{diam} G_k$.

Les ensemble σ_k sont appelés *cluster*.

Pour la définition de l'espace des traces on introduit d'abord la trace locale

$$E_k := B^2(G_k)/N_k$$

où $B^2(G) = \{f \in \mathrm{Hol}(G) : \int_G |f|^2 < \infty\}$ pour un domaine $G \subset \mathbb{C}$, et $N_k := \{f \in B^2(G_k) : Z(f) \supset Z_k\}$ ($Z(f)$ est l'ensemble des zéros de f). On appelle alors $I = (G_k, Z_k, E_k)$ un schème d'interpolation.

2.3.7. Définition. La suite Λ est d'interpolation pour le schème I — ce que nous noterons $\Lambda \in \mathrm{Int}_I(B^2)$ — si pour toute suite $(w_k)_k$ avec $\sum_k \|w_k\|^p_{E_k} < \infty$ il existe $f \in B^2$ telle que

$$f|G_k - w_k \in N_k.$$

L'espace des traces généralisé est donc donné par $l^p(E_k)$.

On peut faire un certain nombre d'observations :

(1) $R_k < 1 \Longrightarrow \operatorname{card} \sigma_k < \infty$
(2) $\Lambda \in \mathrm{Int}_I(B^2) \Longrightarrow \Lambda$ est un ensemble de zéros pour B^2,
(3) on a une condition de séparation entre les clusters : $\inf_{k\neq l} \operatorname{dist}(\sigma_k, \sigma_l) =: \delta > 0$

Nous aurons besoin de deux autres conditions liées à la constante d'interpolation. Si I est un schème d'interpolation, alors la constante d'interpolation $C(I)$ est la

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

plus petite constante C telle que $\|f\|_p \leq C\|(w_k)_k\|_{l^p(E_k)}$ pour tout $(w_k)_k \in l^p(E_k)$; ici f est la fonction de norme minimale interpolant $(w_k)_k$ Alors on a de plus :

(4) Invariance par transformation de Möbis : Si I est un schème d'interpolation, $\Lambda \in \mathrm{Int}_I(B^2)$ et $\lambda \in \mathbb{D}$, alors $b_\lambda(\Lambda) \in \mathrm{Int}_{\text{“}b_\lambda(I)\text{”}} B^2$ avec la même constante d'interpolation,

(5) Prolongement : Si I est un schème d'interpolation, $\Lambda \in \mathrm{Int}_I(B^2)$, $\lambda \in \mathbb{D}$ tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{dist}(K(\lambda,\varepsilon), \bigcup_k G_k) > 0$, alors on peut rajouter le point λ au schème I et le nouveau schème possède une constante d'interpolation qui dépend de $C(I)$ et de ε. (la constante augmente lorsque ε diminue)

Le résultat de Luecking qui nous intéresse est le suivant :

2.3.8. Théorème (Luecking). *Si $\Lambda \in \mathrm{Int}_I(B^2)$ pour un schème I alors*
$$\sup_k \mathrm{card}(\sigma_k) < \infty.$$

Ce Théorème ramène donc l'interpolation par rapport à un schème à l'interpolation sur les réunions finies de suites d'interpolation.

Nous présentons rapidement l'idée de la preuve de ce résultat afin de mettra en évidence la condition $R < 1$ comme responsable de cette restriction forte.

Esquisse de la preuve. Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout cluster σ_k du schème, on peut trouver un point a_k à une distance pseudohyperbolique comparable à ε. D'après la remarque (5) le nouveau schème I' que l'on obtient en adjoignant a_k à I se fait avec un contrôle de la constante d'interpolation. Ramenons la situation en zéro : considérons "$b_{a_k}(I)$", la constante d'interpolation de ce schème est donc toujours contrôlé par $C(I)$. Il existe alors une fonction $f_k \in B^2$ qui vaut 1 en $b_{a_k}(a_k) = 0$ et 0 sur $b_{a_k}(\sigma_k)$, et la norme de f_k est uniformément bornée. Comme $\mathrm{diam}\,\sigma_k \leq R < 1$ et $\mathrm{dist}(\sigma_k, \{a_k\})$ est comparable à ε, il existe $\hat{R}$ tel que $b_{a_k}(\sigma_k)$ est contenu dans un disque euclidien centré en 0 et de rayon inférieur ou égal à $\hat{R}$. On en déduit — à la manière que l'on préfère (par exemple avec la formule de Jensen) — que le cardinal de l'ensemble $b_{a_k}(\sigma_k)$, et donc σ_k, doit être uniformément majoré. □

Notre exemple. Nous allons étudier un cas très particulier d'interpolation libre généralisée dans l'espace de Bergman, celui se ramenant à l'espace de Hardy H^∞. Le point clé est le fait que H^∞ soit l'espace des multiplicateurs de B^2 et que l'on maîtrise parfaitement l'interpolation généralisée dans H^∞. Le passage de l'interpolation libre vers l'interpolation avec une trace (naturelle) a priori, se fera comme d'habitude par le Théorème 2.2.10.

Soit alors Λ une suite dans $\mathbb{D}$ et $B = B_\Lambda$ le produit de Blaschke associé. Contrairement à la situation de Luecking nous n'allons pas fixer la décomposition $\Lambda = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n$ a priori mais nous allons utiliser un moyen intrinsèque de faire cette décomposition : le Théorème 2.2.34 (Nikolski-Volberg) basée sur la décomposition en composante connexe de l'ensemble de niveau $L(B,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{D} : |B(z)| \leq \varepsilon\}$. Cela sous-entend une première condition à imposer : dans toute cette section nous supposons que Λ vérifie la condition de Blaschke (autrement dit, le résultat d'interpolation que nous allons présenter ne marche que pour des suites Λ qui sont des ensembles de zéros pour les espaces de Hardy).

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

En imitant la construction des espaces L_n et X_n nous introduisons $N_\Lambda = \{f \in B^2 : f|\Lambda = 0\}$ (en comptant les multiplicités) et $K = B^2 \ominus N_\Lambda$. Ce dernier espace est évidemment un espace supplémenté, et nous allons désigner par P_K la projection orthogonale de B^2 sur K. Soit de plus $M_n = \{f \in K : f|(\Lambda \setminus \sigma_n) = 0\}$ (en comptant à nouveau les multiplicités), et $Y_n = \{f \in K : f|\sigma_n = 0\}$. Le tableau suivant résume l'analogie entre l'espace de Hardy et l'espace de Bergman

Espace de Hardy	Espace de Bergman
BH^2	N_Λ
K_B^2	K
$L_n = L_{I,I_n} = I_n' H^2 \cap IH^2_-$	M_n
$X_n = L_{I,I_n'} = I_n H^2 \cap IH^2_-$	Y_n

Nous obtenons le résultat d'interpolation libre généralisée suivant. L'espace des traces généralisé sera discuté plus loin.

2.3.9. Théorème. *Si $(B_n)_n$ vérifie la condition de Carleson-Vasyunin alors $(M_n)_n$ est une base inconditionelle dans K.*

Nous donnons la preuve de ce résultat non-publié.

Preuve. Etape 1 : Nous montrons que $(Y_n)_n$ est d'interpolation libre généralisée dans B^2. Pour cela, supposons que $(f_n)_n$ est une suite interpolable de fonctions dans B^2. Il existe donc $f \in B^2$ telle que

$$f - f_n \in Y_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Soit $\mu \in l^\infty$. Grâce à la condition de Carleson-Vasyunin (voir Théorème 2.2.30 et les commentaires qui le suivent pour le résultat originel), il existe $\varphi_\mu \in H^\infty$ telle que

$$\varphi_\mu - \mu_n \in B_n H^\infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Clairement $g_\mu := \varphi_\mu f \in B^2$ et

$$g_\mu - \mu_n f_n = (\varphi_\mu - \mu_n) f + \mu_n (f - f_n) \in Y_n$$

(noter que $B_n H^\infty \subset Y_n$).

Etape 2 : Nous montrons que $\mathcal{X} := (M_n)_n$ est une base inconditionelle dans K. Dans ce but nous allons utiliser l'équivalence 1)$\Longleftrightarrow$ 3) du Théorème 2.2.10. Nous devons donc vérifier que l'espace des multiplicateurs scalaires pour $(M_n)_n$ est égal à l^∞. L'inclusion $\mathrm{mult}(\mathcal{X}) \subset l^\infty$ est évidente. Considérons l'inclusion inverse. Nous allons utiliser l'argument que l'on trouve p.ex. dans [**Nik78**] en l'adaptant à notre choix de $(K_n)_n$. Prenons alors $\mu \in l^\infty$, et définissons

$$T_\mu : K \longrightarrow K$$

de la manière suivante. Si $f \in K$ alors clairement $f \in B^2$. La suite constante $(f)_n$ est évidemment interpolable par f par rapport à $(Y_n)_n$. Donc par l'étape 1, il existe $g_\mu^f \in B^2$ telle que

$$g_\mu^f - \mu_n f \in Y_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nous pouvons supposer $g_\mu^f \in K$ (la projection orthogonale de g_μ^f sur K ne change pas la relation ci-dessus). On pose alors $T_\mu f = g_\mu^f$. Il n'est pas difficile de vérifier

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

que T_μ définit alors un opérateur linéaire (on peut observer que les conditions $h \in Y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $h \in K$ impliquent $h = 0$, de sorte que par exemple $g_\mu^{f_1} + g_\mu^{f_2}$ et $g_\mu^{f_1+f_2}$ sont des fonctions de K qui coıncident sur tous les Y_n).

Afin de démontrer que T_μ est borné, nous vérifions qu'il est fermé. Soit donc $(f_n)_n$ une suite qui tend vers f dans K et telle que $(g_\mu^{f_n})_n$ converge vers une certaine fonction $g \in K$. Nous devons montrer que $g = T_\mu f$. Rappelons que $g_\mu^f = T_\mu f$ se traduit par le fait que pour for tout $\lambda \in \sigma_n$, $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$(g_\mu^f)^{(l)}(\lambda) = \mu_n f^{(l)}(\lambda), \quad l = 0, \dots, k_\lambda,$$

où k_λ est la multiplicité de $\lambda \in \Lambda$. Or, si $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ alors $\lim_{n\to\infty} f_n^{(l)}(\lambda) = f^{(l)}(\lambda)$ par la continuité de l'évaluation en un point et de ses dérivées dans B^2. De même nous obtenons $\lim_{n\to\infty}(g_\mu^{f_n})^{(l)}(\lambda) = g^{(l)}(\lambda)$. Puisque $(g_\mu^{f_n})^{(l)}(\lambda) = \mu_n f_n^{(l)}(\lambda)$ nous avons $g^{(l)}(\lambda) = \mu_n f^{(l)}(\lambda)$ autrement dit $T_\mu f = g$.

Pour finir vérifions que $T_\mu : \mathcal{L}\text{in}(M_n) \longrightarrow \mathcal{L}\text{in}(M_n)$ est effectivement donné par $\sum_{finite} f_n \longmapsto \sum_{finite} \mu_n f_n$. Soit $f = \sum_{finite} f_n$. Alors $T_\mu f = g_\mu \in K$ obéit à la relation $g_\mu - \mu_n f_n \in Y_n$. Par ailleurs $\sum_{finite} \mu_k f_k - \mu_n f_n = \sum_{finite, k\neq n} \mu_k f_k$, et puisque $f_k \in M_k = \{h \in K : h|(\Lambda \setminus \sigma_k) = 0\}$ implique $f_k|\sigma_n = 0$ $(k \neq n)$, nous obtenons $\sum_{finite,\, k\neq n} \mu_k f_k \in Y_n$. Le même argument d'unicité déjà évoqué plus haut fournit $g_\mu = \sum_{finite} \mu_k f_k$. □

L'espace des traces généralisé.

Posons $\mathcal{X} = (M_n)_n$. Si dans la preuve du Théorème 2.3.9 on choisit en particulier les suites $\mu^n = (\delta_{n,k})_k$, alors on obtient les projections obliques

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}_n = T_{\mu^n} : \mathcal{L}\text{in}\,\mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{L}\text{in}\,\mathcal{X}, \\ \displaystyle\sum_{finite} f_k & \longmapsto & f_n, \end{array}$$

qui sont donc continues. Observons que cette continuité se traduit par la minimalité du système $(M_n)_n$ (une condition plus faible que la condition établie par le théorème, à savoir que le système soit inconditionnel). Avec l'argument de Banach-Steinhaus que l'on utilise dans la preuve du Théorème 2.2.10 on obtient que $\sup_{\sigma\subset\mathbb{N}} \|\mathcal{E}_\sigma\| < \infty$ où $\mathcal{E}_\sigma = \sum_{n\in\sigma} \mathcal{E}_n$, ici donc à partir de l'interpolation libre généralisée. On conclut à nouveau avec le Théorème 2.2.10 que $(M_n)_n$ est une base inconditionnelle.

Exploitons la condition 4) du Théorème 2.2.10 pour définir la trace généralisée par $\mathcal{J}B^2$. Par ce théorème et le Théorème 2.3.9, nous obtenons sous l'hypothèse que $(B_n)_n$ vérifie la condition de Carleson-Vasyunin :

$$\mathcal{J}K = l^2(\{M_n\}).$$

Reformulons ce résultat d'une manière plus naturelle. Rappelons que $Y_n = \{f \in K : f|\sigma_n = 0\}$, et définissons $N_n = \{f \in B^2 : f|\sigma_n = 0\}$. On a $M_n = \mathcal{E}_n P_K B^2 \simeq B^2/\ker(\mathcal{E}_n P_K) = B^2/N_n$. Les constantes de l'équivalence dépendent des normes des projections $\mathcal{E}_n P_K$ qui d'après ce qui précède sont uniformément bornées. Etudions le noyau de $\mathcal{E}_n P_K$. On observe d'abord que le noyau de $\mathcal{E}_n$ sur K est donné par $\bigvee_{l\neq n} M_l = Y_n$. Nous pouvons en déduire $\ker \mathcal{E}_n P_K = N_n$: nous avons $f \in \ker \mathcal{E}_n P_K$ si et seulement si $P_K f \in \ker \mathcal{E}_n = Y_n$; et donc, comme $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in K$ et $f_2|\Lambda = 0$, $f_1|\sigma_n = P_K f|\sigma_n = 0$ si et seulement si $f|\sigma_n = (f_1 + f_2)|\sigma_n = 0$.

Enfin nous pouvons identifier la trace généralisée avec $l^2(B^2/N_n)$ (ce qui est complètement analogue à la situation dans les espaces de Hardy, voir (2.2.6)). Cette identification peut être obtenue en remplaçant $f \longmapsto \mathcal{J}_{(M_n)_n} f$ par $f \longmapsto f + N_n$. D'où si $f \in B^2$ alors $\sum_n \|f\|_{B^2/N_n} < \infty$, et réciproquement, si $\sum_n \|f_n\|_{B^2/N_n} < \infty$ alors il existe fonction $f \in B^2$ qui interpole $(f_n)_n$ par rapport à $(N_n)_n$. Nous résumons ceci dans le théorème suivant.

2.3.10. Théorème. *Soit $(B_n)_n$ une suite de produits de Blaschke telle que $B = \prod_n B_n$ converge et $(B_n)_n$ vérifie la condition de Carleson-Vasyunin. Une suite $(f_n)_n$ de fonctions dans B^2 est interpolable si et seulement si $\sum_n \|f_n\|_{B^2/N_n} < \infty$.*

On peut construire des exemples explicites à partir du Théorème 2.2.34.

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

CHAPITRE 3

Interpolation classique ou la quête de l'interpolation dans les classes de Nevanlinna et Smirnov

Le titre de ce chapitre peut paraître plus que curieux puisqu'il attache le thème général de l'interpolation classique (au sens de valeurs d'une fonction dans les points et non ses dérivées etc.) au cas très concret des classes de Nevanlinna et Smirnov.

Tout part du résultat de Naftalevič qui, en 1956, a étudié les suites d'interpolation pour la classe de Nevanlinna en partant d'un espace des traces fixé à priori. Avec cette trace a priori, il réussit de caractériser les suites d'interpolation. Cependant sa description ne paraît pas naturelle puisqu'elle exclut par exemple certaines suites de Carleson. Cela ouvre la voie à plusieurs questions :

- Quel est l'espace des traces convenable pour l'interpolation dans la classe de Nevanlinna (ou de Smirnov)?
- Celui-ci peut-il être obtenu en partant de la définition de l'interpolation libre?
- Quel est l'espace de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ adapté à la trace proposée par Naftalevič?

Nous allons répondre à toutes ces questions dans ce chapitre. On peut observer que la classe de Nevanlinna fournira ainsi un exemple (rare!) où l'interpolation avec la trace donnée a priori par Naftalevič et l'interpolation libre ne donnent pas le même résultat (l'interpolation libre n'implique pas que la trace de la classe de Nevanlinna soit la trace de Naftalevič).

Remarquons que nous avons rajouté la classe de Smirnov dans la première de ces questions. Ce choix n'est évidemment pas innocent, étant donné la proximité entre les classes de Nevanlinna et Smirnov. Comme nous le verrons d'ailleurs plus loin, les résultats d'interpolation pour ces deux classes s'avèrent *a posteriori* très proches. Néanmoins, une grande différence existe entre ces deux classes. En effet, la classe de Nevanlinna n'est pas un espace vectoriel topologique, puisque la multiplication n'est pas continue dans la topologie ad hoc. Pour cette raison, il pourrait paraître plus facile d'aborder dans un premier temps l'interpolation dans la classe de Smirnov puisqu'on y dispose de plus de structure. Nous nous intéressons aussi pour une autre raison de plus près à la classe de Smirnov, et c'est ici que rentrent en jeu les espaces de *Hardy-Orlicz*. Il est connu que la classe de Smirnov peut être considérée comme la réunion de tous les espaces de Hardy-Orlicz associés à des fonctions *fortement convexes*. Ainsi la connaissance des résultats d'interpolation dans les espaces de Hardy-Orlicz peut donner des indications sur l'interpolation dans la classe de Smirnov. Dans la première section de ce chapitre nous allons montrer que sous certaines conditions imposées à la fonction définissante (les fameuses conditions Δ_2 et V_2), les suites d'interpolation pour les espaces de Hardy-Orlicz sont à nouveau caractérisées par la condition de Carleson. Ces conditions forcent nos espaces de Hardy-Orlicz à rester dans l'échelle des espaces de Hardy classiques (il existe $0 < p < q \leq \infty$ tel que $H^q \subset \mathcal{H}_\varphi \subset H^p$). La question de l'interpolation dans les espaces de Hardy au-dela des H^p, $p > 0$, reste dans toute sa généralité ouverte. Cependant, avec les techniques développées ultérieurement dans le contexte de l'interpolation dans les classes de Nevanlinna et Smirnov, nous pouvons construire des suites d'interpolation (libre) pour de grands espaces de Hardy-Orlicz $\mathcal{H}_\varphi \supsetneqq \bigcup_{p>0} H^p$ qui ne sont pas de Carleson.

Nous allons ensuite, dans la Section 3.2, introduire l'espace de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ qui a pour trace naturelle la trace proposée par Naftalevič. La description des suites d'interpolation pour cet espace sera donnée en fonction de certaines conditions de densité. Comme cet espace est beaucoup plus grand que la classe de Nevanlinna, on ne peut pas utiliser des techniques basées sur la factorisation de Riesz-Smirnov, techniques que nous utilisons entre autre dans le cadre des espaces de Hardy-Orlicz. A la place nous utilisons des techniques du $\overline{\partial}$ que nous avions appliquées dans un autre contexte, à savoir celui des limites inductives d'espaces de Fock (c'est la situation analogue dans le plan). Nous allons brièvement décrire ces résultats. Comme souvent, les techniques utilisées dans le disque et dans le plan sont proches et se déduisent mutuellement par une adaptation des métriques.

Le problème des suites d'interpolation pour les classes de Nevanlinna et de Smirnov sera éludé dans la Section 3.3. La factorisation y jouera un rôle important ainsi qu'un vieux résultat de Garnett sur l'interpolation par des fonctions H^∞ avec une condition de décroissance. Celui-ci montre que l'on peut interpoler sur des suites qui sont plus denses que celles de Carleson par des fonctions H^∞. L'interpolation dans les classes de Nevanlinna et Smirnov est très étroitement liée aux majorantes harmoniques et nous allons nous attarder sur le problème de caractérisation des fonctions admettant un majorant harmonique.

Sans rentrer dans le détail des résultats que nous allons présenter dans la Section 3.3, il paraît intéressant de remarquer que nous obtenons comme corollaire que toute suite de Blaschke séparée est une suite d'interpolation pour les classes de Nevanlinna et de Smirnov.

3.1. Interpolation dans les espaces de Hardy-Orlicz

Dans cette section nous allons rapidement résumer les résultats d'interpolation dans les classes de Hardy-Orlicz, et qui généralisent les résultat classique de Carleson [**Ca58**], Shapiro-Shields [**ShSh**] et Kabaĭla [**Kab58**]. Sous les conditions imposées aux fonctions fortement convexes nous restons dans l'échelle des espaces de Hardy classiques, i.e. il existe $0 < p < q \leq \infty$ tels que $H^q \subset \mathcal{H}_\varphi \subset H^p$. Il s'avère que c'est à nouveau la condition de Carleson qui caractérise les suites d'interpolation. Nous insistons sur les quatre points suivants.

- L'inclusion d'un espace X entre deux espaces pour lesquels on connaît les suites d'interpolation n'implique pas la connaissance des suites d'interpolation pour X ;
- Entre H^p et $\bigcup_{r<p} H^r$ il y a toute une panoplie d'espaces de Hardy-Orlicz ;

- Comme pour les espaces de Hardy classiques, nos résultats fonctionnent aussi dans le cas quasi banachique ;
- Pour les espaces de Hardy-Orlicz, l'interpolation libre et l'interpolation avec la trace naturelle imposée a priori donnent les mêmes suites d'interpolation.

Une question s'impose alors : que se passe-t-il en-dehors de l'échelle des espaces H^p, $p > 0$? Nous ne connaissons pas de caractérisation des suites d'interpolation dans ces cas. En revanche, avec les techniques que nous allons développer dans 3.3 nous sommes en mesure de construire des suites d'interpolation pour certains grands espaces de Hardy-Orlicz, et qui ne sont pas des suites de Carleson.

Nous définissons les espaces de Hardy-Orlicz à partir de fonctions fortement convexes (voir [**RosRov85**]).

3.1.1. Définition. Une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est fortement convexe si

(i) φ est convexe ;
(ii) φ est croissante ;
(iii) $\varphi \geq 0$;
(iv) $\lim_{t\longrightarrow\infty} \varphi(t)/t = \infty$;
(v) pour tout $c > 0$ il existe $M, K \geq 0$ tels que $\varphi(t + c) \leq M\varphi(t) + K$, $t \in \mathbb{R}$.

Nous verrons que la condition (v) est liée à la fameuse condition Δ_2. Il est clair que cette condition limite la croissance de φ à une croissance exponentielle. Pour une fonction fortement convexe φ on définit l'espace de Hardy-Orlicz comme suit

$$\mathcal{H}_\varphi := \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : z \longmapsto \varphi(\log^+ |f(z)|) \text{ admet une majorante harmonique sur } \mathbb{D}\}.$$

Ici $\log^+ x := \max(0, \log x)$. En utilisant la description des fonctions sousharmoniques admettant une majorante harmonique on obtient la définition suivante de $\mathcal{H}_\varphi$ (voir [**RosRov85**])

$$\mathcal{H}_\varphi = \{f \in N^+ : \int_{\mathbb{T}} \varphi(\log |f(e^{it})|)\, dt < \infty\}.$$

Nous introduisons aussi la fonction $\Phi := \varphi \circ \log$ (définie sur $[0, \infty)$ par prolongement par continuité en 0). Ainsi on reconnaît que $H^p = \mathcal{H}_\varphi$ si $\varphi(t) = e^{pt}$. Par ailleurs, la condition (v) se traduit en termes de Φ par : il existe $d > 1$ et $t_0 \geq 0$ tels que

$$\Phi(2t) \leq d\Phi(t), \quad t \geq t_0,$$

et c'est cette condition qu'on appelle la condition Δ_2.

On introduit deux applications.

$$f \longmapsto |f|_\Phi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \Phi(|f(e^{it})|)\, dt$$

et

$$f \longmapsto \|f\|_\Phi = \inf\{k > 0 : |f/k|_\Phi \leq k\}.$$

Alors $\mathcal{H}_\varphi$ équippé de $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\varphi} := \|\cdot\|_{\varphi\circ\log}$ est un espace métrique complet (voir p.ex. [**Leś73**] ou [**RaoRen91**]), et lorsque $\varphi \circ \log$ est convexe c'est en fait un espace de Banach.

L'espace de Lebesgue correspondant — appelé tout simplement espace de Orlicz — est défini de la manière suivante

$$L_\Phi = \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{T}) : |f|_\Phi < \infty\},$$

où $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ est l'espace des fonctions mesurables sur $\mathbb{T}$. Nous nous restreignons pour les espaces de Orlicz au cas où φ est fortement convexe et $\Phi = \varphi \circ \log$ est convexe. Ainsi, puisque Φ vérifie la condition Δ_2, nous n'avons pas de difficulté pour définir l'espace de Orlicz comme proposé (voir [**Leś73**] pour plus de détails sur les espaces et les classes de Orlicz). Dans ce cas

$$\mathcal{H}_\varphi = L_\Phi \cap N^+. \tag{3.1.9}$$

Dans la suite nous utilisons aussi la notation $\mathcal{H}_\Phi := \mathcal{H}_\varphi$.

Nous introduisons deux autres conditions que nous formulons pour Φ :

(vi) La fonction Φ vérifie la condition V_2 (voir [**Leś73**]), s'il existe $d > 1$ et $t_0 \geq 0$ tels que

$$2\Phi(t) \leq \Phi(dt), \quad t \geq t_0.$$

(vii) La fonction Φ vérifie la condition ∇_2 (cf. [**RaoRen91**] or [**Leś73**]) s'il existe $d > 1$ et $t_0 \geq 0$ tels que

$$2\Phi(t) \leq \frac{1}{d}\Phi(dt), \quad t \geq t_0.$$

En utilisant les fonctions presque croissantes ($f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ est dite *presque croissante* s'il existe $C > 0$, $t_0 \geq 0$, tels que $f(t_2) \geq Cf(t_1)$ pour tout $t_2 \geq t_1 \geq t_0$) on peut montrer que $\Phi \in V_2$ si et seulement si Φ est comparable à une fonction Ψ, $\Psi \sim \Phi$, s-convexe, i.e. il existe $s > 0$ et une fonction convexe ψ tels que $\Psi(t) = \psi(t^s)$. Dans ce cas

$$\mathcal{H}_\Phi = \mathcal{H}_\Psi.$$

Les exemples qui rentreront dans le cadre de nos résultats sont les suivants :

(1) $\Phi(x) = (1+x)\log(1+x) - x$ vérifie Δ_2 mais pas ∇_2 (voir [**RaoRen91**]). En revanche, par convexité, $t \to \Phi(t^2) \in (\nabla_2)$. L'espace L_Φ est la classe de Zygmund.

(2) $\Phi(t) = t^p$, $t \geq 0$, $0 < p < \infty$ vérifient (i)-(vi). On obtient alors l'échelle des espaces de Hardy classiques.

(3) $\Phi(t) = t^p(\log t)^{r_1} \cdots (\underbrace{\log\log\ldots\log t}_{n \text{ fois}})^{r_n}$, $t \geq t_0$, $0 < p < \infty$, $r_i > 0$ (pour au moins un $i \in \{1,\ldots,n\}$), vérifie (i)-(vi) On peut voir que pour deux suites différentes $p, r_1, \ldots, r_n$ et $\tilde{p}, \tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_m$ on obtient deux espaces de Orlicz différents.

(4) On peut construire une fonction Φ qui vérifie aussi (i)-(vi), et telle que l'espace de Orlicz correspondant L_Φ est strictement contenu entre $L^1 = L_{\Phi_1}$ ($\Phi_1(t) = t$) et tous les espaces L_{Φ_2} où Φ_2 est comme dans (3) avec $p = 1$ et $r_1, \ldots, r_n$, $n \in \mathbb{N}$, est une suite arbitraire non triviale.

Nous commençons par caractériser les suites d'interpolation libre (au sens de la Définition 2.2.4) pour l'espace de Hardy-Orlicz.

3.1.2. Théorème. *Soit* $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$. *Soit* φ *une fonction vérifiant (i)-(vi). Alors* $\mathcal{H}_\Phi|\Lambda$ *est un espace idéal* ($\Lambda \in \mathrm{Int}_{l^\infty}(\mathcal{H}_\Phi)$) *si et seulement si* $\Lambda \in (C)$.

Esquisse de la preuve. Nous remarquons que la condition V_2 est équivalente au fait que les ensembles bornés en topologie sont exactement les ensembles bornés dans la métrique (voir [**Leś73**]). Par ailleurs, nous avons déjà vu que si $\Phi \in V_2$ alors on peut supposer Φ s-convexe. A partir de ce moment, tous les outils de l'analyse fonctionnelle (graphe fermé, Banach-Steinhaus) que l'on utilise pour

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

le cas banachique H^p, $p \geq 1$, peuvent être utilisés dans $\mathcal{H}_\Phi$. En particulier si $\Lambda \in \mathrm{Int}_{l^\infty}(\mathcal{H}_\Phi)$, alors il existe une constante $c > 0$ tel que quelles que soient deux fonctions $u, v \in \mathcal{H}_\Phi$ avec $|u(\lambda)| \leq |v(\lambda)|$, $\lambda \in \Lambda$, on a $\|u\|_\Phi \leq c\|v\|_\Phi$ (pour les détails de la preuve, on peut voir dans [**Har99**] ou dans les travaux originaux dans [**Nik78**] ; ceci est légèrement plus complexe que la preuve du résultat similaire lorsqu'on dispose d'un espace des traces fixé a priori et où on fait uniquement appel au théorème de l'application ouverte).

L'évaluation en un point $\lambda \in \mathbb{D}$ est continue et $0 < \gamma(\lambda) := \sup\{|f(\lambda)| : f \in \mathcal{H}_\Phi$ et $\|f\|_\Phi \leq 1\} < \infty$ (Montel). Il existe donc f_λ telle que $|f_\lambda(\lambda)| \geq \gamma/2$ et $\|f\|_\Phi \leq 1$. Comme $\Lambda \in \mathrm{Int}_{l^\infty}(\mathcal{H}_\Phi)$ il existe une fonction $g_\lambda \in \mathcal{H}_\Phi$ telle que $g_\lambda(\mu) = 0$, $\mu \neq \lambda$, $g_\lambda(\lambda) = f_\lambda(\lambda)$, et d'après la remarque ci-dessus $\|g\|_\Phi \leq c$. Soit $B_\lambda := \prod_{\mu \neq \lambda} b_\lambda$, alors $g_\lambda = B_\lambda h_\lambda$. On obtient

$$\frac{1}{2}\gamma(\lambda) \leq |f_\lambda(\lambda)| = |g_\lambda(\lambda)| = |B_\lambda(\lambda) h_\lambda(\lambda)|$$

Or $\|h_\lambda\|_\Phi = \|g_\lambda\|_\Phi \leq c$, et par s-convexité on obtient $\|(1/c^{1/s})h_\lambda\|_\Phi \leq 1$ d'où $|h_\lambda(\lambda)| \leq c^{1/s}\gamma(\lambda)$, d'où

$$|B_\lambda(\lambda)| \geq \frac{1}{2c^{1/s}}.$$

La condition suffisante est une conséquence immédiate de la Remarque 2.2.6 si on observe que la condition Δ_2 implique $H^\infty \mathcal{H}_\Phi \subset \mathcal{H}_\Phi$ (c'est clair, mais on peut aussi consulter [**HaKa88**]). □

Les conditions imposées à notre fonction φ réduisent le champ d'application de nos résultats. Ainsi, comme déjà signalé plus haut, nous ne pouvons atteindre avec ces techniques que les espaces de Hardy-Orlicz qui se laissent coincer entre deux espaces de Hardy classiques. Il paraît alors naturel de se demander ce qui se passe dans de grands espaces de Hardy-Orlicz. Les techniques développées dans [**HMNT04**], on peut donner des réponses partielles. Nous avons au fait le résultat suivant.

3.1.3. Théorème. *Soit $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ une fonction fortement convexe (donc avec notre définition elle vérifie la condition Δ_2) telle qu'il existe une constante $c > 0$ avec*

$$\phi(a + b) \leq c(\phi(a) + \phi(b)), \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{3.1.10}$$

Alors, il existe un poid positif $w \in L^1(\mathbb{T})$ tel que $\phi \circ w \in L^1(\mathbb{T})$ et $\varphi_\Lambda \leq P[w]$ si et seulement si $\Lambda \in \mathrm{Int}_{l^\infty} \mathcal{H}_\varphi$.

Dans [**HMNT04**] nous avons montré que la condition de l'existence du poid w entraîne l'interpolation libre dans la classe de Hardy-Orlicz. Mais il s'avère que cette condition est également nécessaire.

La condition (3.1.10) qui apparaît dans ce théorème implique en particulier que nos $\mathcal{H}_\varphi$ sont des algèbres (c'est pour cela que les méthodes de [**HMNT04**] marchent aussi dans ce contexte). Cela nous restreint à nouveau à une certaine classe de poids. En particulier, nos fonctions ϕ admissibles ont une croissance au plus polynomiale. Cela induit bien sûr une nouvelle question : que se passe-t-il pour des espaces de Hardy-Orlicz entre la situation quasi-banachique (croissance exponentielle de ϕ) et la situation algébrique (croissance polynomiale de ϕ), autrement dit pour des croissances sous-exponentielles? Comment se produit alors le passage de la condition de Carleson (minoration de $|B_\lambda(\lambda)|$ par une constante) vers des conditions

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

de type d'existence de majorantes harmoniques (minoration de $|B_\lambda(\lambda)|$ par une fonction extérieure avec conditions de croissance).

3.1.4. L'espace des traces. Le candidat naturel pour la trace de $\mathcal{H}_\Phi$ sur Λ est l'espace

$$l_\Phi = \{a \in \mathbb{C}^\Lambda : |a|_\Phi = \sum_{\lambda\in\Lambda}(1-|\lambda^2|)\Phi(|a(\lambda)|) < \infty\}, \tag{3.1.11}$$

qui est en fait l'espace de Orlicz pour la mesure $\mu = \sum_{\lambda\in\Lambda}(1-|\lambda|^2)\delta_\lambda$ sur $\mathbb{D}$. Nous obtenons alors comme résultat que l'interpolation avec la trace a priori (3.1.11) et interpolation libre sont équivalentes (toutes les deux sont caractérisées par la condition de Carleson) :

3.1.5. Théorème. *Soit φ une fonction vérifiant (i)-(vi) et $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$. Alors*

$$\mathcal{H}_\varphi|\Lambda = \mathcal{H}_\Phi|\Lambda = l_\Phi$$

si et seulement si $\Lambda \in (C)$.

Esquisse de la preuve. Que la condition est nécessaire est une conséquence immédiate du théorème précédent. En effet, comme la trace l_Φ est un espace idéal, on a $\Lambda \in \mathrm{Int}_{l^\infty}(\mathcal{H}_\Phi)$, et on conclut par le Théorème 3.1.2.

Pour la condition suffisante, on se ramène d'abord au cas banachique ce qui est possible puisque la fonction Φ peut être supposée s-convexe et en utilisant la factorisation de Riesz-Smirnov. Ensuite par nos conditions on peut s'arranger pour qu'il existe $1 < p_0 \leq p_1 < \infty$ tels que $H^{p_1} \subset \mathcal{H}_\Phi \subset H^{p_0}$. D'après [**FeGa91**, Theorem 4.1] $\mathcal{H}_\Phi$ est un espace d'interpolation entre ces deux espaces de Hardy, et, de même, l_Φ sera un espace d'interpolation entre les espaces de suites pondérés correspondants. Enfin, il suffit d'utiliser les opérateurs d'interpolation et de restriction connus pour les espaces de Hardy sous la condition $\Lambda \in$ (C) pour conclure. □

3.1.6. Remarque. Dans l'article d'origine [**Har99**] nous avons déduit (à l'aide du résultat de [**Har99**], basé lui-même sur une généralisation de l'opérateur d'interpolation de Jones-Vinogradov) un résultat d'interpolation généralisée sur les réunions finies de suites de Carleson. Probablement avec l'espace des traces ad hoc l (un espace l_Φ pour les différences divisées jusqu'à un ordre maximale N fixé a priori) on peut montrer que $\mathcal{H}_\Phi|\Lambda = l$ implique que Λ est une réunion finie de suites de Carleson (en appliquant les méthodes de [**BNØ96**]).

3.2. L'espace adapté à la trace de Naftalevič

Dans cette section, nous allons d'abord discuter l'espace des traces proposé par Naftalevič pour la classe de Nevanlinna. Comme celui-ci s'avère trop grand, on peut étudier le problème d'interpolation dans l'espace adapté à la trace de Naftalevič (nous sommes donc plutôt dans un cadre d'interpolation classique que d'interpolation libre ; la question si l'interpolation libre entraîne l'interpolation avec la trace donnée a priori est bien sûr admise). L'étude du problème d'interpolation dans cet espace sera le deuxième — et plus important — point de cette section.

Rappelons le résultat de Naftalevič. Il définit les suites d'interpolation pour N de la manière suivante : $\Lambda \in \mathrm{Int}_{\mathrm{Naft}}(\mathrm{N})$ si et seulement si pour toute suite

$$(v_k)_k \in l_{\mathrm{Naft}} := \{(u_k) : \sup_{k\in\mathbb{N}}(1-|\lambda_k|)\log^+|u_k| < \infty\} \tag{3.2.12}$$

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

il existe $f \in N$ telle que $f(\lambda_k) = v_k$, $k \in \mathbb{N}$. Il est clair que pour toute fonction $f \in N$, on a $(f(\lambda_k))_k \in l_{\mathrm{Naft}}$.

3.2.1. THÉORÈME (Naftalevič [**Naf56**]). *Une suite $\{\lambda_k\}_k$ est d'interpolation pour la classe de Nevanlinna $\mathcal{N}$ si et seulement si*

(a) $\sum_k (1 - |\lambda_k|) < \infty$;

(b) $\{\lambda_k\}_k$ *est contenu dans un polygone incrit dans* $\overline{\mathbb{D}}$;

(c) $\displaystyle\prod_{j \neq k} \left|\frac{\lambda_j - \lambda_k}{1 - \bar{\lambda}_k \lambda_j}\right| \geq \delta \, \exp\bigl(-\frac{c}{1 - |\lambda_k|}\bigr)$ *pour un $c, \delta > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$.*

La condition (c) est une condition de type Carleson.

Il est clair que l'espace des traces proposé par Naftalevič est trop grand puisqu'il admet la croissance maximale admissible dans la classe de Nevanlinna — à savoir une croissance du type $\exp(1/(1-|z|))$ — sur tout le disque alors que les fonctions de la classe de Nevanlinna ne peuvent atteindre cette croissance maximale que dans une portion de $\mathbb{D}$. Au fait, ce sont les réciproques des fonctions intérieures singulières qui atteignent la plus grande croissance (on peut déduire ce résultat de la définition des fonctions intérieures ; voir aussi [**Naf56**]). Ainsi, si on prend une suite de Carleson qui tend tangentiellement vers un point du cercle alors aucune fonction de la classe de Nevanlinna ne va atteindre la croissance imposée par (3.2.12) : par exemple si on prend le point $1 \in \mathbb{T}$ et si la suite $(\lambda_k)_k$ vérifie $1 - |\lambda_k|^2 = |1 - \lambda_k|^2$, alors la fonction avec la plus grande croissance non-tangentielle en 1 à savoir $1/S(z) = e^{(1-z)/(1+z)}$ vérifie $|1/S(\lambda_k)| = e^{(1-|\lambda_k|^2)/|1-\lambda_k|^2} = e$. Sachant que par ailleurs H^∞ est dans l'espace des multiplicateurs de N (bien évidemment, N est une algèbre et en tant que telle ses multiplicateurs sont N) on pourrait s'attendre à ce que toutes les suites de Carleson soient d'interpolation pour N (voir aussi Remarque 2.2.6).

Puisque les fonctions de la classe de Nevanlinna atteignent la croissance imposée par l_{Naft} seulement dans une petite partie du disque, nous allons maintenant introduire une classe d'espaces qui, dans le cas particulier $\alpha = 1$, donne l'espace qui convient le mieux à la trace de Naftalevič.

Soit donc

$$A_\alpha = \{f \in H(\mathbb{D}) : \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|)^\alpha \log^+ |f(z)| < \infty\}$$

l'algèbre des fonction d'ordre au plus $\alpha > 0$. Nous allons caractériser les suites d'interpolation (classique) de A_α, c'est-à-dire les suites $\Lambda \subset \mathbb{D}$ telles que

$$A_\alpha | \Lambda = l_\alpha := \{(v_n)_n : (1 - |\lambda_n|) \log^+ |v_n| < \infty\}.$$

On a donc en particulier $l_1 = l_{\mathrm{Naft}}$. Nous introduisons des densités :

$$\begin{aligned} n(z,\delta) &= \sharp \, \{a_k\}_k \cap \overline{K(z,\delta)} \\ N(z,\delta) &= \int_0^\delta \frac{n(z,t) - n(z,0)}{t} \, dt + n(z,0) \log \delta, \end{aligned}$$

et nous obtenons :

3.2.2. THÉORÈME ([**HaMa01**]). *Une suite $\{\lambda_k\}_k \subset \mathbb{D}$ est d'interpolation pour A_α si et seulement si*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{N(\lambda_k, 1/2)}{(1 - |\lambda_k|)^{-\alpha}} < \infty \; . \qquad (3.2.13)$$

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

3.2.3. Remarque. La condition de densité de ce théorème n'est pas complètement déconnectée du Théorème de Naftalevič. On peut en effet montrer que lorsque Λ est une suite de Blaschke et $\alpha = 1$, la condition (3.2.13) est équivalente à la condition (c) du Théorème de Naftalevič : puisque $\log(1/x) \simeq 1 - x$ pour $x \to 1$ et $1 - |\varphi_\lambda(z)|^2 = \frac{(1-|\lambda|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{\lambda}z|^2}$ on obtient

$$\sum_{j:|\varphi_{\lambda_k}(\lambda_j)|>1/2} \log \frac{1}{|\varphi_{\lambda_k}(\lambda_j)|} \simeq \sum_{j:|\varphi_{\lambda_k}(\lambda_j)|>1/2} \frac{(1-|\lambda_k|^2)(1-|\lambda_j|^2)}{|1-\bar{\lambda}_k\lambda_j|^2} \lesssim \frac{\sum_j 1-|\lambda_j|}{1-|\lambda_k|},$$

ce qui ramène la condition (c) de Naftalevič à

$$\sum_{j:0<|\varphi_{\lambda_k}(\lambda_j)|\leq 1/2} \log \frac{1}{|\varphi_{\lambda_k}(\lambda_j)|} \lesssim \frac{1}{1-|\lambda_k|}.$$

La somme à gauche dans cette inégalité correspond (à une constante additive près) à $N(\lambda_k, 1/2)$.

Esquisse de la preuve. La condition *suffisante* est basée sur la technique standard du $\bar{\partial}$. Celle-ci consiste à interpoler d'abord les valeurs par une fonction lisse et puis de corriger cette fonction pour obtenir une fonction holomorphe avec estimation de norme et sans changer les valeurs sur Λ. Ces deux contraintes nécessitent un choix judicieux du poids dans l'application du théorème de Hörmander.

Nous commençons par écrire A_α comme limite inductive d'espaces de Bergman pondérés (et hilbertiens). Soit

$$L_{\alpha,p} := \{f \text{ mesurable sur } \mathbb{D} : \|f\|^2_{\alpha,p} := \int |f|^2 \, e^{-p\,\Phi_\alpha} \, dm < \infty\}.$$

Alors

$$A_\alpha = \bigcup_{p>0} B_{\alpha,p} \ ,$$

où

$$B_{\alpha,p} = \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \cap L_{\alpha,p}.$$

Le fait de travailler avec cette réunion nous permettra d'adapter le paramètre p dans le choix du poid.

On peut déduire de la condition de densité (3.2.13) une condition de séparation faible : il existe $\varepsilon, q > 0$ tels que les boules pseudohyperboliques $K_k(\lambda_k, \delta_k)$, $\delta_k = \varepsilon e^{-q\Phi_\alpha(\lambda_k)}$, sont disjointes, ce qui permet d'introduire une fonction lisse interpolant les valeurs v_k :

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \, \mathcal{X}\left(\frac{|\phi_z(\lambda_k)|^2}{\delta_k^2}\right),$$

où $\chi : [0,\infty) \longrightarrow [0,1]$ est une fonction C^∞ qui vaut 1 sur $[0,1/2]$ et 0 sur $[1,\infty)$. On vérifie que $F, \bar{\partial}F \in L_{\alpha,s}$ pour s assez grand. On résoud alors le problème du $\bar{\partial}$ suivant

$$\bar{\partial}u = \bar{\partial}F.$$

Pour ceci on utilise le théorème de Hörmander qui donne une solution u dans $L_{\alpha,s}$ (pour un s suffisamment grand). Si notre solution u vérifie $u|\Lambda = 0$ alors $f = F - u$ est une fonction holomorphe dans $L_{\alpha,s}$ donc $f \in B_{\alpha,s}$.

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

En l'occurrence, nous allons utiliser la version suivante du Théorème de Hörmander (voir [**Hör66**, Theorem 4.2.1]) qui implique que pour une fonction sous-harmonique ψ donnée il existe une fonction u telle que

$$2\int |u|^2 \frac{e^{-\psi}}{(1+|z|^2)^2} \leq \int |\bar{\partial} F|^2 \, e^{-\psi}.$$

Il s'agit donc de choisir un poid ψ qui soit premièrement dans un sens comparable à Φ_α afin que la solution u appartienne à $L_{\alpha,s}$ (pour un s convenable) et deuxièmement il doit assurer l'annulation de la solution u sur Λ. Le poid doit donc être une perturbation d'un multiple de Φ_α, donc de la forme

$$\psi(z) = \psi_\beta(z) := \beta \, \Phi_\alpha(z) + v(z).$$

La perturbation v doit avoir un comportement logarithmique près des points $\lambda \in \Lambda$ ce qui entraînera un pôle en λ pour $e^{-\psi}$. Ainsi la fonction u devra nécessairement s'annuler en λ. Par ailleurs il faut que le poid ait une certaine régularité et qu'il ne mette pas la sous-harmonicité de ψ_β en danger. Le poid qui convient est le suivant

$$v(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\log |\phi_z(\lambda_k)|^2 - \frac{1}{\pi/8^2} \int_{D(0,1/8)} \log |\phi_{\phi_z(\lambda_k)}(\zeta)|^2 dm(\zeta) \Big].$$

On peut vérifier que l'intégrale devient le développement de Taylor à l'ordre 1 autour de chaque point λ_k de sorte que le poid v est lisse en dehors de Λ. La condition de densité permet de contrôler le laplacien de v tel qu'avec un choix de β suffisamment grand le poid ψ_β sera effectivement sous-harmonique ce qui permettra conclure.

Pour la condition *nécessaire* on fait appel à une version de l'application ouverte valable dans le contexte des limites inductives (voir par exemple [**Gro73**, Theorem 2, p.148]) puis on applique la formule de Jensen. Concrètement, si Λ est d'interpolation pour A_α alors pour tout $q > 0$ il existe $p, C > 0$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $g_k \in A_\alpha^{-p}$ tel que $g_k(\lambda_j) = \delta_{j,k} e^{q\Phi_\alpha(\lambda_j)}$. Avec $f_k = g_k \circ \varphi_{\lambda_k}$ on obtient d'abord

$$\log |f_k(z)| \lesssim \Phi_\alpha(z) \Phi_\alpha(\lambda_k)$$

car $\Phi_\alpha(\varphi_{\lambda_k}(z)) \leq C_\alpha \Phi_\alpha(z) \Phi_\alpha(\lambda_k)$ et puis grâce à la formule de Jensen

$$\int_0^r \frac{n(a_k, t) - 1}{t} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f_k(re^{i\theta})| \, d\theta \leq C_\alpha \; \Phi_\alpha(r) \; \Phi_\alpha(a_k)$$

$\square$

3.2.4. Quelques généralisations. Dans le Théorème 3.2.2, nous pouvons remplacer $(1 - |a_k|)^{-\alpha}$ par $\int_{K(\lambda_k, 1/2)} \Delta \Phi_\alpha$ où $\Phi_\alpha(z) = (1 - |z|^2)^{-\alpha}$ ce qui suggère une possiblité de généralisation de ce résultat.

3.2.5. Définition. Une fonction sousharmonique radiale croissante $\Phi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est un poid s'il existe des constantes $C, D > 0$ telles que :

(i) $\Phi(\phi_a(z)) \leq C \; \Phi(a) \Phi(z)$ pour tout $z, a \in \mathbb{D}$.
(ii) $(1 - |z|^2)^{-2} \Phi(z) \lesssim \Delta \Phi(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

Nous pouvons alors introduire les espaces suivants

$$A_\Phi := \{f \in H(\mathbb{D}) : \sup_{z\in\mathbb{D}} \Phi^{-1}(z) \log^+ |f(z)| < \infty\}.$$

Quitte à remplacer Φ par la moyenne $\tilde{\Phi}(z) := \frac{1}{m(K(z,1/2))} \int_{K(z,1/2)} \Phi\, dm$ (ce qui ne change pas l'espace A_Φ) on peut supposer $\Phi \in \mathcal{C}^2$.

Voici quelques Example

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= (1-|z|^2)^{-\alpha} \log^\beta\big(\frac{1}{1-|z|^2}\big) \qquad \alpha, \beta > 0 \\ \Phi(z) &= (1-|z|^2)^{-\alpha} \log \overset{n}{\cdots} \log\big(\frac{1}{1-|z|^2}\big) \qquad \alpha > 0, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Nous pouvons même considérer le problème d'interpolation généralisée suivant. Soit $m \in \mathbb{N}$, et considérons $X = \{(\lambda_k, m)\}_k$, où nous associons avec chaque λ la multiplicité finie m.

3.2.6. Définition. Nous dirons que $X = \{(a_k, m)\}_k$ est d'interpolation généralisée (avec multiplicités uniformément bornées par m) pour A_Φ si pour toute suite de valeurs $\{v_k^l\}_{k,l}$, $k \in \mathbb{N}$, $l = 0, \dots, m-1$, vérifiant

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \Phi^{-1}(a_k) \log^+\big(\sum_{l=0}^{m-1} |v_k^l|\big) < \infty$$

il existe $f \in A_\Phi$ avec

$$\frac{f^{(l)}(a_k)}{l!} = v_k^l \qquad k \in \mathbb{N}\ ; \quad l = 0, \dots, m-1\ .$$

Avec ces définition nous obtenons la généralisation immédiate suivante du Théorème 3.2.2.

3.2.7. Théorème ([**HaMa01**]). *Soit Φ un poid et $X = \{(\lambda_k, m)\}$. Alors, X est d'interpolation généralisée pour A_Φ si et seulement si*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{N(a_k, 1/2)}{\Phi(a_k)} < \infty\ .$$

Comme la méthode du $\overline{\partial}$ se généralise en plusieurs variables, nous obtenons une condition suffisante pour l'interpolation dans A_α de la boule $\mathbb{B}_n$. On ne peut pas espérer obtenir une meilleure condition sur la croissance radiale de $N(\lambda_k, 1/2)$ (il suffit de considérer des suites dans des hyperplans et de se ramener à une dimension).

3.2.8. Quelques remarques. Un résultat similaire peut être donné dans le contexte du plan $\mathbb{C}$. En effet, dans [**HaMa00**] nous proposons une méthode $\overline{\partial}$ similaire à celle utilisée ici pour montrer que la condition (3.2.13) est suffisante pour l'interpolation dans A_α ou A_Φ. En effet on peut introduire des poids sur $\mathbb{C}$ et définir l'analogue de A_Φ sur $\mathbb{C}$ qui sera cette fois-ci une limite inductive d'espaces de Fock (que l'on peut considérer comme l'analogue dans le plan des espaces de Bergman — mentionnons à titre de remarque que les techniques utilisées pour interpoler dans les espaces de Bergman et dans les espaces de Fock sont similaires comme on peut constater dans les travaux de Seip et plus récemment de Borichev, Dhuez & Kellay [**BDK05**]). L'interpolation dans ces espaces a été considéré par Berenstein et Li dans [**BrLi95**]. Leur méthode donne une condition analytique

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

(basée sur le jacobien d'une fonction f adaptée à la variété d'interpolation). Notre but était de donner une méthode directe basée explicitement sur l'utilisation du $\bar{\partial}$. Cette méthode est inspirée de [**BeOr95**] . Mentionnons pour finir que nos résultats et les résultats dans [**BrLi95**] ne sont pas équivalentes en ce sens que l'on peut construire des exemples qui rentrent soit dans le cadre de [**BrLi95**] soit dans le cadre de [**HaMa00**] mais pas dans les deux en même temps. D'autres résultats peuvent être trouvés dans [**Ou98**].

3.3. Interpolation dans les classes de Nevanlinna et Smirnov

Après les discussions autour des problèmes d'interpolation que l'on peut assimilier à l'interpolation dans les classes de Nevanlinna et Smirnov, il est maintenant grand temps de considérer l'interpolation dans les classes de Nevanlinna et Smirnov.

Notre première observation est celle faite au début de la section précédente : la trace de Naftalevič est trop grande pour être la trace de la classe de Nevanlinna. Pour les raisons qui doivent maintenant être claires, on ne peut pas espérer trouver un poid radial pour la trace de la classe de Nevanlinna. Et même un poid *fixé* non radial ne pourra jamais convenir. La situation est similaire dans la classe de Smirnov. Yanagihara (voir [**Ya74**]) y a considéré le problème d'interpolation avec une trace donnée a priori : $l_{\mathrm{Ya}} = \{(a_\lambda)_\lambda : \sum_\lambda (1-|\lambda|)\log^+|a_\lambda| < \infty\}$. Cet espace des traces est construit sur le même principe que les traces que nous avons suggérées pour les espaces de Hardy-Orlicz. Mentionnons que la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \to \max(0,x)$ n'est pas une fonction fortement convexe, et nous ne sommes donc pas dans le cadre des espaces de Orlicz. Yanagihara montre alors que si Λ est une suite de Carleson alors $l_{\mathrm{Ya}} \subset N^+|\Lambda$, mais il existe des suites de Carleson pour lesquelles l'inclusion inverse n'est pas vérifiée. La trace de Yanagihara est donc trop petite pour la classe de Smirnov.

Il faut donc trouver un espace des traces qui soit plus souple. Il paraît difficile d'imaginer cet espace a priori. Voilà une raison de plutôt considérer le problème d'interpolation libre dans la classe de Nevanlinna que le problème d'interpolation avec une trace fixée a priori. Une autre raison est celle donnée dans la Section 2.2.1 : dire qu'une suite est d'interpolation libre pour un espace de fonction holomorphes X sur un domaine D veut dire que les restrictions des fonctions de X sur $\Lambda \subset D$ ont perdu toute trace d'holomorphie. Ceci paraît une approche tout à fait convenable pour les classes de Nevanlinna et Smirnov. Nous pouvons aussi rajouter que la Remarque 2.2.6(2) montre que l'interpolation libre simplifie le problème d'interpolation dans les algèbres de fonctions dont les classes de Nevanlinna et Smirnov sont bien sûr des exemples. Nous allons donc considérer dans cette section l'interpolation *libre* dans les classes de Nevanlinna et de Smirnov. Les espaces des traces que l'on obtient sous la condition de l'interpolation libre seront précisés. Comme ces espaces sont idéaux on obtient alors un problème d'interpolation *classique* si on impose ces espaces comme espaces des traces a priori.

Nous obtenons des descriptions analytiques des suites d'interpolation libre pour les classes de Nevanlinna et Smirnov qui sont exprimées par l'existence de majorantes harmoniques, ou, ce qui est équivalent grâce à la factorisation de Riesz-Smirnov, par l'existence de certaines fonctions qui minorent les $|B_\lambda(\lambda)|$.

Il s'avère que le problème d'existence de majorantes sous-harmoniques n'est pas spécifique au problème d'interpolation, et nos techniques proposent une réponse pour ce problème en général. Nos réponses seront liées au balayage de Poisson d'une mesure μ.

Nous allons discuter un certain nombre de cas particuliers où on peut obtenir une description plus explicite, les cas extrêmes étant en quelque sorte ceux de Naftalevič et de Yanagihara (voir Corollaire 3.3.5, Proposition 3.3.7 et Proposition 3.3.8).

Rappelons qu'une fonction de Borel φ sur $\mathbb{D}$ admet une majorante harmonique positive s'il existe une fonction harmonique positive h sur $\mathbb{D}$ telle que $\varphi(z) \leq h(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ (surprenant...). Rappelons aussi que toute fonction harmonique positive est donnée par

$$h(z) = P[\mu](z) := \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|]^2}{|\zeta - z|^2}\, d\mu(\zeta),$$

où μ est une mesure positive sur $\mathbb{T}$ et

$$P(z,\zeta) = P_z(\zeta) = \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right) = \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}$$

est le noyau de Poisson. Nous écrirons $\mathrm{Har}(\mathbb{D})$ pour l'ensemble de toutes les fonctions harmoniques dans $\mathbb{D}$ et $\mathrm{Har}_+(\mathbb{D})$ pour les fonctions harmoniques positives dans $\mathbb{D}$.

Nous obtenons alors la description suivante des suites d'interpolation. Il est à noter que les majorantes harmoniques apparaissent par deux fois. D'abord pour caractériser les suites d'interpolation (condition de décroissance de $|B_\lambda(\lambda)|$) et puis dans la définition de l'espace de traces. Nous utiliserons la notation suivante

$$\varphi_\Lambda(z) := \begin{cases} \log|B_\lambda(\lambda)|^{-1} & \text{if } z = \lambda \in \Lambda \\ 0 & \text{if } z \notin \Lambda \end{cases}$$

3.3.1. Théorème ([**HMNT04**]). *Soit* Λ *une suite dans* $\mathbb{D}$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) Λ *est d'interpolation libre pour la classe de Nevanlinna* N.

(b) *L'espace des traces est donné par :*

$$N|\Lambda = l_N := \{(a_\lambda)_\lambda :\ \exists\, h \in \mathrm{Har}_+(\mathbb{D}) \text{ telle que } h(\lambda) \geq \log^+|a_\lambda|,\ \lambda \in \Lambda\}.$$

(c) φ_Λ *admet une majorant harmonique.*

(d) *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour toute suite de nombres nonnegatifs* $\{c_\lambda\}$,

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda \varphi_\Lambda(\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda \log|B_\lambda(\lambda)|^{-1} \leq C \sup_{\zeta\in\partial\mathbb{D}} \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda P_\lambda(\zeta).$$

Nous obtenons également un résultat analogue pour la classe de Smirnov. Comme nous avons vu dans 2.2.13 la différence entre la classe de Nevanlinna et la classe de Smirnov est la présence en plus des fonctions intérieures singulières dans le dénominateur des fonctions de la classe de Nevanlinna alors que dans la classe de Smirnov le dénominateur est tout au plus une fonction extérieure. Si on se rappelle que les fonctions singulières et extérieures sont des exponentielles de représentations de Herglotz associées à des mesures respectivement singulières et absolument continues, on peut s'attendre à ce que ceci ait une incidence sur la caractérisation des suites d'interpolation et sur l'espace des traces. Nous introduisons

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

la notion suivante. Une fonction $h \in \mathrm{Har}(\mathbb{D})$ est dite *quasi-bornée* si la mesure associée μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$ (pour les raisons de cette terminologie voir [**He69**]).

Nous aurons aussi besoin de la *fonction maximale non-tangentielle* associée à une fonction φ sur $\mathbb{D}$ par $M\varphi(\zeta) = \sup_{z\in\Gamma_\zeta} |\varphi(z)|$, où Γ_ζ est l'angle de Stoltz.

3.3.2. Théorème ([**HMNT04**]). *Soit Λ une suite dans $\mathbb{D}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Λ est d'interpolation libre pour la classe de Smirnov N^+.*

(b) *L'espace des trace est donné par*

$$N^+|\Lambda = l_{N^+} := \{(a_\lambda)_\lambda :\ \exists\, h \in \mathrm{Har}_+(\mathbb{D}) \ \textit{ quasi-bornée } \ : \ h(\lambda) \geq \log^+ |a_\lambda|,\ \lambda \in \Lambda\}.$$

(c) *φ_Λ admet une majorante quasi-bornée.*

(d) $\lim_{n\to\infty} \sup_{\{c_\lambda\}\in\mathcal{B}(\Lambda)} \sum_{\lambda:\varphi_\Lambda(\lambda)\geq n} c_\lambda \varphi_\Lambda(\lambda) = 0$, *où $\mathcal{B}(\Lambda)$ désigne l'ensemble des suites non-négatives $\{c_\lambda\}$ telles que* $\sup_{\zeta\in\partial} \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda P_\lambda(\zeta) \leq 1$.

(e) *(i)* $\sup_{t>0} t\sigma(\{\zeta \in \partial : M\varphi_\Lambda(\zeta) \geq t\}) < \infty$, *et*

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda^{(n)} \varphi_\Lambda(\lambda) = 0$ *pour toute suite de nombres non-négatifs* $\{c_\lambda^{(n)}\} \in \mathcal{B}(\Lambda)$ *telle que* $\lim_{n\to\infty} \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda^{(n)} P_\lambda(\zeta) = 0$ *presque partout sur ∂.*

Nous avons déjà mentionné dans l'introduction à cette section que par la factorisation de Riesz-Smirnov les conditions sur l'existence d'une majorante harmonique (quasi-bornée ou pas) est étroitement liée à une condition de type Carleson sur $(B_\lambda(\lambda))_\lambda$. En effet, comme $\exp(-\varphi_\Lambda(\lambda)) = |B_\lambda(\lambda)|$ les conditions (c) dans ces deux théorèmes deviennent

$$|B_\lambda(\lambda)| \geq |\exp\left\{\int \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\mu\right\}|, \tag{3.3.14}$$

où, selon les cas, μ est absolument continue et l'intégrale de Herglotz qui apparaît dans cette formule devient une fonction extérieure F (cas de la classe de Smirnov) : $|B_\lambda(\lambda)| \geq |F(z)|$, ou μ est une mesure positive quelconque (cas de la classe de Nevanlinna) et l'intégrale de Herglotz devient le produit d'une fonction extérieure et d'une fonction intérieure singulière S : $|B_\lambda(\lambda)| \geq |F(z)| \cdot |S(z)|$. La condition de Carleson correspond donc au cas où μ est un multiple scalaire de la mesure de Lebesgue ou autrement dit lorsque $F \equiv cste$ (et $S \equiv 1$).

Nos preuves ne sont pas constructives. Aussi ne disposons-nous pas de moyens de construire les mesures μ qui apparaissent dans nos conditions (c). Nous verrons cependant que l'on peut écarter les mesures canoniques telles que $\sum(1-|\lambda|^2)\delta_{\lambda/|\lambda|}$ ou la mesure de balayage de Poisson $\sum(1-|\lambda|^2)P_\lambda(\zeta)dm(\zeta)$.

3.3.3. Quelques critères géométriques. Nous pouvons déduire des conditions d'existence de majorantes harmoniques (quasi-bornées ou non) des conditions plus géométriques et qui se rapprochent des conditions de Naftalevič d'un côté et de Yanagihara de l'autre.

Nous avons vu dans les Théorèmes 3.3.1 et 3.3.2 que l'interpolation dans la classe de Nevanlinna (Smirnov) est équivalente à l'existe d'une majorante harmonique (quasi-bornée). Par ailleurs, il est bien connu que la fonction maximale non-tangentielle d'une intégrale de Poisson est dans L^1-faible, que nous notons L^1_w,

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

(voir [**Ga81**, Theorem 5.1, p. 28]). Une analyse plus fine de ce résultat montre que si la mesure μ est absolument continue, alors son l'intégrale de Poisson est dans $L^1_{w,0}$ que nous définissons par

$$L^1_{w,0}(\mathbb{T}) = \{f \text{ measurable} : \lim_{t\to\infty} t\sigma(\{\zeta : |f(\zeta)| > t\}) = 0\}.$$

Ceci et quelques estimations évidentes donnent le résultat suivant.

3.3.4. Proposition. (a) *Si φ admet une majorante harmonique, alors $M\varphi \in L^1_w(\mathbb{T})$.*

(b) *Si φ admet une majorante harmonique positive quasi-bornée, alors $M\varphi \in L^1_{w,0}(\mathbb{T})$.*

(c) *Si $M\varphi \in L^1(\mathbb{T})$, alors la fonction φ admet $P[M\varphi] := P[M\varphi d\sigma]$ comme majorante harmonique quasi-bornée.*

Nous pouvons en déduire les conditions géométriques suivantes

3.3.5. Corollaire. (a) *Si $\Lambda \in \operatorname{Int}_{l^\infty} N^+$, alors*

$$\lim_{|\lambda|\to 1}(1 - |\lambda|)\log|B_\lambda(\lambda)|^{-1} = 0. \tag{3.3.15}$$

(b) *Si $\Lambda \in \operatorname{Int}_{l^\infty} N$, alors*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}(1 - |\lambda|)\log|B_\lambda(\lambda)|^{-1} < \infty. \tag{3.3.16}$$

(c) *Si Λ est une suite de Blaschke et*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}(1 - |\lambda|)\log|B_\lambda(\lambda)|^{-1} < \infty, \tag{3.3.17}$$

alors $\Lambda \in \operatorname{Int}_{l^\infty} N^+$ (et donc $\Lambda \in \operatorname{Int}_{l^\infty} N$).

Quelques idées de la preuve de ce corollaire. Puisque $\Lambda \in \operatorname{Int}_{l^\infty} N$ implique l'existence d'une majorante harmonique positive h de φ_Λ (Théorème 3.3.1) la condition (b) est une conséquence immédiate de $h(\lambda) \le c/(1-|\lambda|)$, $\lambda \in \mathbb{D}$ (mais on aurait pu aussi utiliser la Proposition 3.3.4 comme ci-dessous).

Pour l'assertion (a), nous faisons appel à la Proposition 3.3.4. En effet, d'après le Théorème 3.3.2, $\Lambda \in N^+$ entraîne l'existence d'une majorante harmonique positive quasi-bornée h de φ_Λ. Définissons l'ombre de Privalov $I_\lambda = \{\zeta \in \mathbb{T} : z \in \Gamma(\zeta)\}$. Supposons qu'il existe $(\lambda_n)_n \subset \Lambda$ et une constante $c > 0$ telles que $(1 - |\lambda_n|)\log(1/|B_{\lambda_n}(\lambda_n)|) \ge c$, $n \in \mathbb{N}$. Clairement pour $\zeta \in I_{\lambda_n}$ on a $M\varphi(\zeta) \ge c$. Nous obtenons donc avec la proposition citée

$$(1 - |\lambda_n|) \simeq |I_{\lambda_n}| \le |\underbrace{\{\zeta \in \mathbb{T} : \sup_{z\in\Gamma_\zeta}|\varphi_\Lambda(z)| \ge c/(1 - |\lambda_n|)\}}_{\supset I_{\lambda_n}}| \le c_n(1 - |\lambda_n|),$$

où $c_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, ce qui est une contradiction.

Considérons l'assertion (c). Soit $u = \sum_\lambda \varphi_\Lambda(\lambda)\chi_{I_\lambda}$, alors $u \in L^1(\mathbb{T})$ par hypothèse. On vérifie aisément que $M\varphi_\Lambda \le u$, et donc $M\varphi_\Lambda \in L^1(\mathbb{T})$. D'après Proposition 3.3.4(c) la fonction φ_Λ admet donc une majorante harmonique positive quasi-bornée, ce qui, par le Théorème 3.3.2, implique que $\Lambda \in \operatorname{Int}_{l^\infty} N^+$ (et donc $\Lambda \in \operatorname{Int}_{l^\infty} N$). □

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

Nous signalons que la Proposition 3.3.4 possède une version plus forte en remplaçant la fonction maximale non-tangentielle par la fonction maximale de Hardy-Littlewood :

$$f^*(x) = \sup_{I \text{ arc } : I \supset x} \frac{1}{|I|} \int_I f,$$

puis

$$\varphi^H(\zeta) := \sup_{z\in} \varphi(z)\chi^*_{I_z}(\zeta) = \sup_{z\in} \varphi(z) \sup_{I:\zeta\in I} \frac{\sigma(I \cap I_z)}{\sigma(I)}.$$

Nous ne rentrerons pas dans le détail de ces résultats et référons le lecteur à [**HMNT04**]. Mentionnons que dans cet article nous donnons des exemples qui montrent que les résultats faisant intervenir la fonction maximale de Hardy-Littlewood sont strictement plus forts que ceux avec la fonction maximale non-tangentielle (noter : $\varphi_\Lambda^H \geq M\varphi_\Lambda$).

3.3.6. Remarque. La condition (3.3.16) du corollaire est exactement la condition (c) de Naftalevič. La condition (3.3.15) est déjà parue dans [**Ya74**, Theorem 1] comme condition nécessaire pour que la trace de $N^+|\Lambda$ contienne l_{Ya}.

Dans certaines situations, les conditions évoquées dans le corollaire caractérisent en effet les suites d'interpolation. Ces situations correspondent à un comportement au bord de la suite Λ dans un certain sens extrémal. Nous discuterons les deux cas d'une approche non-tangentielle et d'une approche tangentielle.

Commençons par l'approche non-tangentielle.

3.3.7. Proposition. *Soit $\Lambda \subset \mathbb{D}$ une suite située dans une réunion finie d'angles de Stoltz.*

(a) $\Lambda \in \mathrm{Int}_{l^\infty} N^+$ *si et seulement si* (3.3.15).
(b) $\Lambda \in \mathrm{Int}_{l^\infty} N$ *si et seulement si* (3.3.16).

Comme dans le cas (b) de cette proposition on a $l_{\mathrm{Naft}} = l_N$ on obtient l'équivalence entre l'interpolation libre et l'interpolation avec la trace de Naftalevič, et ainsi la condition suffisante du Théorème de Naftalevič.

Etudions maintenant l'autre cas extrême, celui d'une approche tangentielle. Nous allons introduire le balayage de Poisson qui jouera un rôle clé dans tout le reste de ce chapitre. Pour une mesure finie positive μ sur le disque, au lieu d'intégrer le noyau de Poisson sur le cercle, on l'intègre sur le disque et on considère $\zeta \in \mathbb{T}$ comme la variable indépendante :

$$B(\mu)(\zeta) := \int_{\mathbb{D}} P_z(\zeta)\, d\mu(z), \quad \zeta \in \mathbb{T}.$$

Soit

$$\mu_\Lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} (1 - |\lambda|)\delta_\lambda.$$

3.3.8. Proposition. *Si la balayée de μ_Λ est bornée, alors $\Lambda \in \mathrm{Int}\, N$ si et seulement si $\Lambda \in \mathrm{Int}\, N^+$, et si et seulement si* (3.3.17) *est vérifiée.*

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

Précisons que la condition $\zeta \longmapsto B(\mu_\Lambda)(\zeta) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{1-|\lambda|^2}{|\zeta-\lambda|^2} \in L^\infty$ implique que Λ tend tangentiellement vers $\mathbb{T}$.

Voici une recette pour construire des suites Λ telles que la balayée de μ_Λ est bornée. Soit $g : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ telle que $x \longmapsto g(x)/x$ est croissante et

$$\int_0 \frac{g(x)}{x^2} dx < \infty.$$

Si Λ vérifie

$$\left|\frac{\lambda}{|\lambda|} - \frac{\lambda'}{|\lambda'|}\right| \geq g^{-1}(1-|\lambda|), \quad \forall \lambda' \neq \lambda,$$

alors la balayée de μ_Λ est bornée (voir [**HMNT04**, Lemma 8.4]). Les exemples canoniques pour le choix de g sont les fonctions de la forme $g(x) = x^{1+\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$. On peut trouver des exemples plus sophistiqués après le Lemma 8.4 dans [**HMNT04**]. La suite $\Lambda = (\lambda_k)_k$ définie par $\lambda_k = r_k e^{i\theta_k}$ avec $\theta_k = 2^{-k}$ et r_k tel que $(1-r_k)^{1/(1+\varepsilon)} \leq 2^{-(k+1)}$ rentre dans cette catégorie d'exemples. On peut observer que cet exemple n'a pas un grand intérêt a priori puisque la suite Λ est déjà de Carleson. Mais on peut éventuellement s'amuser à rajouter une deuxième suite $\Lambda' = (\lambda'_k)_k = (r_k e^{i\theta'_k})_k$ construite sur le même principe mais légèrement perturbée par rapport à la première : $\theta'_k = \theta_k + \delta_k$ avec $0 < \delta_k << \theta_k$ et $\delta_k \to 0$ très vite de sorte que $\rho(\lambda_k, \lambda'_k) \to 0$ et donc $\Lambda \cup \Lambda'$ n'est plus de Carleson. Par ailleurs en ajustant la vitesse de $\delta_k \to 0$ on peut assurer la condition (3.3.17) ce qui fournit une suite d'interpolation pour N ou N^+ qui ne soit pas de Carleson.

On peut montrer que si la balayée de μ_Λ est bornée, alors la trace de N (ou de N^+) sur Λ est contenue dans l_{Ya} (et réciproquement si $N|\Lambda \subset l_{\text{Ya}}$ — ou $N^+|\Lambda \subset l_{\text{Ya}}$ — alors $B(\mu_\Lambda) \in L^\infty$), voir [**HMNT04**, Proposition 1.14].

Preuve de la proposition. D'après le Corollaire 3.3.5, la condition (3.3.17) est déjà suffisante pour l'interpolation dans N et N^+ indépendamment des conditions sur μ_Λ.

Montrons qu'elle est aussi nécessaire si $\|B(\mu)\|_{L^\infty} = c < \infty$. Supposons que $\Lambda \in \text{Int}_{l^\infty} N$ (la preuve est analogue dans le cas de la classe de Smirnov). Par le Théorème 3.3.2, φ_Λ possède une majorante harmonique h donnée par $h = P[\nu]$ pour une mesure finie positive ν sur $\mathbb{T}$. Ainsi, avec le Théorème de Fubini

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{\lambda\in\Lambda} (1-|\lambda|)\log\frac{1}{|B_\lambda(\lambda)|} = \int_{\mathbb{D}} \varphi_\Lambda d\mu_\Lambda \leq \int_{\mathbb{D}} h d\mu_\Lambda \\ &= \int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{T}} P_z(\zeta) d\nu(\zeta) d\mu_\Lambda(z) = \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{D}} P_z(\zeta) d\mu_\Lambda(z) d\nu(\zeta) \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} c d\nu(\zeta) = c\|\nu\| = ch(0). \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

□

Donnons un autre résultat surprenant : toutes les suites de Blaschke uniformément séparées dans la métrique pseudohyperbolique sont d'interpolation pour N^+ et N. Pour cela — mais pas uniquement pour cela — nous avons besoin de la proposition suivante.

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

3.3.9. Proposition. *Soit Λ une suite de Blaschke. Pour tout $\delta \in (0,1)$, il existe une fonction harmonique positive quasi-bornée $h = P[w]$, $w \in L^1(\partial)$, telle que*

$$-\log \prod_{\lambda:\rho(\lambda,z)\geq\delta} |b_\lambda(z)| \leq h(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Par conséquent, il existe une fonction extérieure $G \in N^+$, où $G = \exp(-g)$,

$$g(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} w(\zeta) dm(\zeta)$$

telle que

$$\prod_{\lambda:\rho(\lambda,z)\geq\delta} |b_\lambda(z)| \geq |G(z)|, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Ce résultat est assez classique. On peut trouver une démonstration dans [**NPT**, p.124, lignes 3–17]. La fonction $w(\zeta) = c_0 \sum_{\lambda\in\Lambda} \chi_{I_\lambda}(\zeta)$ convient. (Il est à noter que les conditions particulières de [**NPT**, Lemma 4] ne sont pas nécessaires dans notre situation.)

On obtient immédiatement le corollaire suivant.

3.3.10. Corollaire. *Si Λ est une suite de Blaschke uniformément séparée dans la métrique pseudohyperbolique, alors $\Lambda \in \mathrm{Int}_{l^\infty} N^+$ (et donc $\Lambda \in \mathrm{Int}_{l^\infty} N$.*

3.3.11. Quelques commentaires à propos des preuves des Théorèmes 3.3.2 et 3.3.1. *Conditions suffisantes.* Pour montrer que les conditions (c) des Théorèmes 3.3.2 et 3.3.1 sont suffisantes on se sert d'un résultat de Garnett qui montre que l'on peut interpoler par des fonctions H^∞ sur des suites qui ne sont pas de Carleson sous une condition de décroissance des valeurs à interpoler.

3.3.12. Théorème ([**Gar77**]). *Soient Λ une suite dans $\mathbb{D}$ et $\delta_\lambda := |B_\lambda(\lambda)|$, $\lambda \in \Lambda$. Soit $\psi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ une fonction décroissante telle que $\int_0^\infty \psi(t)\, dt < \infty$. Si la suite $v = (v_\lambda)_\lambda$ vérifie*

$$|v_\lambda| \leq \delta_\lambda \psi(\log \frac{e}{\delta_\lambda}), \quad \lambda \in \Lambda,$$

alors il existe une fonction $f \in H^\infty$ telle que $f|\Lambda = v$.

On peut observer que $\log(e/\delta_\lambda) = 1 + \varphi_\Lambda(\lambda)$.

Pour la preuve, grâce à la Remarque 2.2.6, il suffira d'interpoler les suites $\mu \in l^\infty$. Comme le Théorème de Garnett nous dit que l'on peut interpoler des suites qui décroissent d'une certaine manière, il s'agira donc d'arranger cette décroissance en multipliant par une fonction convenable pour atteindre tout l'espace l^∞.

Regardons donc l'interpolation dans la classe de Nevanlinna (le cas de la classe de Smirnov étant analogue). Comme nous l'avons déjà vu dans (3.3.14), la condition (c) du Théorème 3.3.1 se traduit par l'existence d'une mesure positive μ telle que

$$|B_\lambda(\lambda)| \geq |\exp\left\{\int \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\mu\right\}|$$

(la partie absolument continue de μ correspondant à une fonction extérieure dans N^+ et la partie singulière à une fonction intérieure singulière). Soit

$$g(z) = \int \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\mu,$$

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

alors, par le Théorème de Smirnov, g est extérieure dans N^+. En plus $\exp(g)$ est dans la classe de Nevanlinna. Ainsi nous avons $\log(1/\delta_\lambda) \le \operatorname{Re} g(\lambda)$.

La fonction $\psi(t) = (1+t)^{-2}$ vérifie la condition du Théorème de Garnett, et la fonction $H = (2+g)^2$ est toujours extérieure dans N^+. On obtient alors

$$|H(\lambda)| = |2+g(\lambda)|^2 \ge (2 + \operatorname{Re}\, g(\lambda))^2 \ge (1+\log\frac{e}{\delta_\lambda})^2 = \frac{1}{\psi(\log(e/\delta_\lambda))},$$

de sorte que la suite $(\gamma_\lambda)_\lambda$ définie par

$$\gamma_\lambda = \frac{1}{H(\lambda)\psi(\log(e/\delta_\lambda))}, \quad \lambda \in \Lambda,$$

est bornée par 1.

Soit alors $\omega = (\omega_\lambda)_\lambda \in l^\infty$ une suite arbitraire que nous factorisons par

$$\omega_\lambda = \big(\frac{\omega_\lambda\gamma_\lambda \exp(-g(\lambda))}{\delta_\lambda}\delta_\lambda\psi(\log\frac{e}{\delta_\lambda})\big)\cdot\frac{H(\lambda)}{\exp(-g(\lambda))}.$$

Puisque $(\omega_\lambda\gamma_\lambda\exp(-g(\lambda))/\delta_\lambda)_\lambda$ est bornée, nous pouvons utiliser le Théorème de Garnett pour interpoler la suite

$$a_\lambda = \frac{\omega_\lambda\gamma_\lambda \exp(-g(\lambda))}{\delta_\lambda}\delta_\lambda\psi(\log\frac{e}{\delta_\lambda}), \quad \lambda\in\Lambda,$$

par une fonction $f \in H^\infty$. Clairement, $F = fH\exp(g)$ est une fonction de la classe de Nevanlinna qui interpole ω.

Conditions nécessaires. L'astuce est de découper le disque en des "cubes" de Whitney qui partagent la suite Λ en quatre morceaux Λ_i, $i = 1, \ldots, 4$ qui sont uniformément séparés les uns des autres :

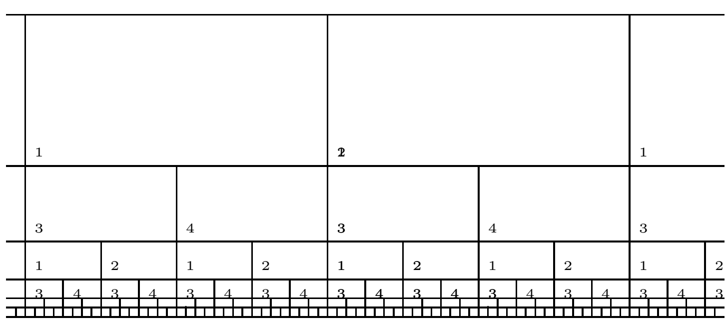

Figure : Partition dyadique

Soit donc $Q^{(l)}$ la famille des cubes correspondant à l'indice l dans la figure ci-dessus, et $\Lambda_l = \Lambda \cap Q^{(l)}$. Pour ce qui suit nous fixerons une sous suite, disons $l = 1$. Soit alors $Q = (Q_j)_j$ la suite des cubes associés (on ne comptera pas les cubes qui ne rencontrent pas Λ). Par construction :

$$\rho(K, L) := \inf_{z\in K, w\in L} \rho(z, w) \ge \delta > 0,$$

pour un δ fixé et pour tous $K, L \in Q$. On a

$$0 < m_j := \min_{\lambda\in\Lambda_1\cap Q_j} |B_\lambda(\lambda)|$$

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

(nous considérons ici le produit Blaschke associé à la suite Λ entière privé du seul point λ). Soit $\lambda_j^1 \in Q_j$ tel que $m_j = |B_{\lambda_j^1}(\lambda_j^1)|$. Comme $\Lambda \in \mathrm{Int}_{l^\infty} N$ et donc $l^\infty \subset N|\Lambda$ il existe $f_1 \in N$ telle que

$$f_1(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \lambda \in \{\lambda_j^1\}_j \\ 0 & \text{if} \quad \lambda \notin \{\lambda_j^1\}_j. \end{cases}$$

(f_1 est 1 sur la *suite* des λ_j^1 où $|B_{\lambda_j}|$ est minimal sur Q_j). Par la factorisation de Riesz-Smirnov nous obtenons

$$f_1 = B_{\Lambda \setminus \{\lambda_j^1\}_j} \frac{h_1}{h_2 T_2}, \tag{3.3.19}$$

où T_2 est une fonction intérieure singluière, h_1 est une fonction dans H^∞ et h_2 est une fonction extérieure dans H^∞. Nous pouvons supposer $\|h_i\|_\infty \leq 1$, $i = 1, 2$. D'où

$$1 = |f_1(\lambda_k^1)| \leq |B_{\Lambda \setminus \{\lambda_j^1\}_j}(\lambda_k^1)| \cdot \frac{1}{|h_2(\lambda_k^1) T_2(\lambda_k^1)|},$$

et

$$|B_{\Lambda \setminus \{\lambda_j^1\}_j}(\lambda_k^1)| \geq |h_2(\lambda_k^1) T_2(\lambda_k^1)|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Le suite de la preuve consiste en une application de l'inégalité de Harnack pour vérifier que dans cette minoration on peut remplacer λ_k^1 par n'importe quel $\lambda \in \Lambda_1$.

Afin d'obtenir la minoration souhaitée pour la première suite il nous faut connaître le comportement du produit de Blaschke $B_{\{\lambda_j^1\}_j \setminus \{\lambda_k\}}$. Pour cela nous exploitons la Proposition 3.3.9 qui nous donne une fonction extérieure dans la classe de Smirnov G_1 telle que

$$|B_{\{\lambda_j^1\}_j \setminus \{\lambda_k^1\}}(\lambda_k^1)| \geq |G_1(\lambda_k^1)|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

L'inégalité de Harnack permet à nouveau de remplacer λ_k^1 dans le membre droit de cette inégalité par tout $\lambda' \in \Lambda_1 \cap Q_k$. Finalement, en se rappelant la définition de λ_k^1,

$$\begin{aligned} |B_{\Lambda \setminus \{\lambda'\}}(\lambda')| &\geq |B_{\Lambda \setminus \{\lambda_k^1\}}(\lambda_k^1)| = |B_{\Lambda \setminus \{\lambda_j^1\}_j}(\lambda_k^1)| \cdot |B_{\{\lambda_j^1\}_j \setminus \{\lambda_k^1\}}(\lambda_k^1)| \\ &\geq |(h_2 T_2)^c(\lambda')| \cdot |G_1^c(\lambda')| \end{aligned}$$

pour tout $\lambda' \in Q_k \cap \Lambda_1$.

Comme les arguments sont indépendants du choix de la suite Λ_l, $l = 1, \ldots, 4$, on obtient des estimations du même type pour les autres sous suites. En multipliant les membre droits de l'inégalité ci-dessus (noter que N est une algèbre) on obtient alors la minoration souhaitée. $\square$

3.4. Majorantes harmoniques

Nous avons vu dans la section précédent que le problème de l'interpolation libre dans les classes de Nevanlinna et de Smirnov est étroitement lié au problème de l'existence d'une majorante harmonique (quasi-bornée ou pas). A l'occasion nous avons déjà vu quelques conditions qui assurent l'existence d'une telle majorante (entraînant ainsi une solution au problème d'interpolation).

Au lieu de considérer l'existence de majorantes harmoniques dans le cadre particulier de l'interpolation libre, nous nous y sommes intéressés dans le cadre général, c'est-à-dire quelles fonction $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ admettent des majorantes harmoniques (quasi-bornées ou pas).

Les caractérisations que nous obtenons dans le cadre général sont à la base des conditions (d), respectivment (d) et (e) des Théorèmes 3.3.1 et 3.3.2.

Nous aurons besoin de la notation suivante :

$$\mathcal{B} := \{\mu \text{ mesure de Borel positive sur } \mathbb{D} : \ \sup_{\zeta\in\mathbb{T}} B(\mu)(\zeta) \leq 1\},$$

où $B(\mu)$ désigne à nouveau la balayée de μ. Nous obtenons alors les deux résultats suivants.

3.4.1. Théorème. *Soit φ une fonction de Borel positive sur $\mathbb{D}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Il existe une fonction harmonique (positive) h telle que $\varphi(z) \leq h(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.*
(b) *Il existe une constante $C = C(\varphi)$ telle que*

$$M_\varphi := \sup_{\mu\in\mathcal{B}} \int_{\mathbb{D}} \varphi(z)\, d\mu(z) \leq C. \tag{3.4.20}$$

Ce résultat peut aussi être appliqué à l'étude de la vitesse de décroissance admissible pour les fonctions H^∞ sur des suites qui ne sont pas de Blaschke, voir [**HMNT04**, Corollary 1.5]. Pour plus d'informations concernant ce type de résultats, nous référons le lecteur à [**Hay98**], [**LySe97**], [**PaTh03**], et aussi [**EiEs02**] pour un survey.

Nous obtenons l'analogue pour le cas quasi-borné.

3.4.2. Théorème. *Soit φ une fonction de Borel positive sur $\mathbb{D}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) *Il existe une fonction harmonique quasi-bornée (positive) h telle que $\varphi(z) \leq h(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.*
(b) *Il existe une fonction croissante convexe $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ avec $\lim_{t\to\infty} \psi(t)/t = +\infty$ telle que $\psi \circ \varphi$ admet une majorante harmonique sur $\mathbb{D}$;*
(c) $\lim_{n\to\infty} \sup_{\mu\in\mathcal{B}} \int_{\{\varphi\geq n\}} \varphi\, d\mu = 0.$
(d) *(i)* $\sup_{t>0} t\sigma(\{\zeta \in \mathbb{T} : M\varphi(\zeta) \geq t\}) < \infty$, *et*
(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{D}} \varphi d\mu_n = 0$ *pour toute suite* $\{\mu_n\} \subset \mathcal{B}$ *telle que* $\lim_{n\to\infty} B(\mu_n)(\zeta) = 0$ *presque partout sur* $\mathbb{T}$,

La condition (b) est inspirée par une caractérisation de fonctions harmoniques quasi-bornées dans le livre de Armitage et Gardiner [**ArGa01**, Theorem 1.3.9, p.10].

Des conditions plus explicites et plus géométriques pour la nécessité ou la suffisance de l'existence de majorantes harmoniques ont déjà été évoquées dans la section sur l'interpolation libre dans les classes de Nevanlinna et Smirnov dans la Proposition 3.3.4.

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

3.4.3. Quelques idées de la preuve du Théorème 3.4.1. Que la condition est nécessaire se voit rapidement comme dans (3.3.18).

Considérons la condition suffisante.

L'idée centrale pour la condition suffisante est de découper le disque $\mathbb{D}$ en des "cubes" de Whitney, et de discrétiser l'intégrale $\int_{\mathbb{D}} \varphi d\mu$ par rapport à ce recouvrement de Whitney. Par troncature du problème discret infini, la fonctionnelle $\mu \longmapsto \int_{\mathbb{D}} \varphi d\mu$ devient une fonctionnelle sur un espace de dimension finie. Ensuite on utilisera le Lemme de Minkowski-Farkas— un résultat bien connu en analyse convexe — pour obtenir une suite de mesures discrètes de norme uniformément bornée. On conclut par un passage à une limite faible*.

Soit donc

$$z(Q_{n,k}) = z_{n,k} := (1-2^{-n})\exp(2\pi k 2^{-n})$$

(les $Q_{n,k}$ correspondent aux cubes que nous avons déjà rencontrés plus haut dans la figure "Partition dyadique" pour montrer la nécessité des conditions (c) des Théorèmes 3.3.1 et 3.3.2 — ici nous avons changé l'indexation).

On vérifie d'abord que le passage vers le problème discret ne pose aucun problème :

3.4.4. Lemme (Lemma 6.3 de [**HMNT04**]). *La fonction φ vérifie* (3.4.20)*si et seulement si il existe une constante M'_φ telle que pour tout suite positive $\{c_{n,k}\}$ avec*

$$\sup_{\zeta\in\mathbb{T}} \sum_{n,k} c_{n,k} P_{z_{n,k}}(\zeta) \le 1, \tag{3.4.21}$$

on a

$$\sum_{n,k} c_{n,k} \sup_{Q_{n,k}} \varphi \le M'_\varphi. \tag{3.4.22}$$

De plus, $C^{-1}M_\varphi \le M'_\varphi \le CM_\varphi$, où $C>1$ est une constante absolue.

La condition (3.4.21) correspond à $\mu_c \in \mathcal{B}$ pour $\mu_c := \sum_{n,k} c_{n,k}\delta_{z_{n,k}}$ et $c = \{c_{n,k}\}_{n,k}$, et la condition (3.4.22) signifie $\int_{\mathbb{D}} \varphi d\mu_c \le M'_\varphi$.

La preuve de ce résultat n'est pas très difficile (elle utilise essentiellement le fait que le noyau de Poisson ne change pas trop dans un voisinage pseudohyperbolique).

Le passage à une version discrète de (3.4.20) nous permet de nous ramener à un problème d'analyse convexe. Pour cela nous devons introduire quelques notations (voir [**HULL93**]).

Pour un ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$ nous définissons l'*enveloppe convexe* Conv(A) par

$$\mathrm{Conv}(A) := \Big\{\sum_{i=1}^N \alpha_i a_i : a_i \in A, \alpha_i \ge 0, \sum_i \alpha_i = 1\Big\}.$$

Si nous écrivons $\mathbb{R}_+ A := \{\lambda x : \lambda \ge 0, x \in A\}$, alors le *cone convexe* engendré par A est

$$\mathrm{Cone}(A) := \mathrm{Conv}(\mathbb{R}_+ A) = \Big\{\sum_{i=1}^N \alpha_i a_i : a_i \in A, \alpha_i \ge 0\Big\}.$$

Lorsque A est fini, le cone convexe est fermé. Le résultat clé pour nous est une version généralisée du Lemme de Minkowski-Farkas (voir [**HULL93**, Chapter III,

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

Theorem 4.3.4]). Nous l'énonçons ici seulement pour le cas qui nous intéresse c'est-à-dire le cas où A est finie. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^d$.

3.4.5. Théorème (Lemme de Minkowski-Farkas). *Soit $(a_j, b_j) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq N$, tel que $X := \{x \in \mathbb{R}^d : \langle a_j, x\rangle \leq b_j\} \neq \emptyset$. Posons $A := \{(a_j, b_j), 1 \leq j \leq N\} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes : $(v, r) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$:*

(a) *For any $x \in X$, $\langle v, x\rangle \leq r$.*
(b) *$(v, r) \in \mathrm{Cone}(A)$.*

Nous allons utiliser une version particulière de ce résultat. Soit $v = (v^1, \ldots, v^d) \in \mathbb{R}^d$ et désignons par $\mathbb{R}^d_+$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^d$ dont les coordonnées sont positives.

3.4.6. Corollaire. *Soient $a_j \in \mathbb{R}^d$, $1 \leq j \leq N$, et $X_+ := \{x \in \mathbb{R}^d_+ : \langle a_j, x\rangle \leq 1\}$. Supposons que $X_+ \neq \emptyset$. Les assertions suivantes sont équivalentes pour $v \in \mathbb{R}^d_+$:*

(a) *Pour tout $x \in X_+$, $\langle v, x\rangle \leq 1$.*
(b) *Il existe $\alpha_j \geq 0, 1 \leq j \leq N$ tels que $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$ et pour tout $i = 1, \ldots, d$,*

$$v^i \leq \sum_{j=1}^{N} \alpha_j a_j^i.$$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que la condition (3.4.20) est suffisante. Posons pour un $m \in \mathbb{N}$ fixé soient

$$a_j := \big(P_{z_{n,k}}(\exp(ij \cdot 2^{-m} 2\pi))\big)_{\substack{0\leq n\leq m \\ 0\leq k\leq 2^n-1}} \quad \text{pour } 0 \leq j \leq 2^m - 1,$$

$d := \sum_{n=0}^m 2^n$ et

$$X_+ := \Big\{\{c_{n,k}\}_{\substack{0\leq n\leq m \\ 0\leq k\leq 2^n-1}} \in \mathbb{R}^d_+ : \\ \sum_{\substack{0\leq n\leq m \\ 0\leq k\leq 2^n-1}} c_{n,k} P_{z_{n,k}}(\exp(ij \cdot 2^{-m} 2\pi)) \leq 1, \text{ for } 1 \leq j \leq 2^m - 1\Big\}.$$

Puisque la suite $\{c_{n,k}\}_{n,k}$ qui vaut 1 en $(0,0)$ et 0 ailleurs est dans X_+, ce dernier ensemble n'est pas vide. On peut se convaincre que toute suite $c = \{c_{n,k}\}_{n,k} \in X_+$ vérifie (3.4.21) (à une constante multiplicative près) : en faisant à nouveau appel à l'inégalité de Harnack on peut estimer $P_z(e^{i\theta})$, quel que soit θ, en fonction de $P_z(\exp(ij \cdot 2\pi/2^m))$ (pour un j convenable). Ainsi, par le Lemme 3.4.4, la fonction φ et les suites $c \in X$ vérifient (3.4.22) (à une constante multiplicative près), ce qui se traduit par la condition (a) du Corollaire 3.4.6. Par conséquent, ce corollaire nous fournit un vecteur $\alpha^m := (\alpha_j^m)_{j=0}^{2^m-1}$ contrôlé en norme et tel que

$$\sup_{Q_{n,k}} \varphi \leq \sum_{j=0}^{2^m-1} \alpha_j^m P_{z_{n,k}}(\exp(ij \cdot 2\pi/2^m)) = \int_{\mathbb{T}} P_{z_{n,k}} d\nu^m,$$

où ν^m est la mesure discrète donnée par le vecteur α^m :

$$\nu^m = \sum_{j=0}^{2^m-1} \alpha_j^m \delta_{\exp(ij \cdot 2^{-m} 2\pi)}.$$

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

Comme on contrôle la masse totale de ν^m on trouve une limite faible* ν de cette suite de mesures $(\nu^m)_m$. Ainsi, pour tout (n,k),

$$\sup_{Q_{n,k}} \varphi \leq \int_{\partial\mathbb{D}} P_{z_{n,k}} d\nu = h(z_{n,k}),$$

où $h := P[\nu]$. Par l'inégalité de Harnack on a une constante absolue C_1 telle que $C_1 h(z) \geq \varphi(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, ce qui prouve la condition suffisante. $\square$

On peut en fait montrer

$$M_\varphi = \inf\{h(0) : h \in \mathrm{Har}(\mathbb{D}), h \geq \varphi\}.$$

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

CHAPITRE 4

Opérateurs de Toeplitz

On rencontre les opérateurs de Toeplitz dans beaucoup de domaines des mathématiques comme par exemple dans les processus stochastiques, dans les problèmes de moments ou encore dans les problèmes d'interpolation. C'est par les liens avec l'interpolation que nous nous sommes intéressés aux propriétés des opérateurs de Toeplitz. En guise de motivation, et avant de présenter nos résultats, nous allons brièvement décrire ces liens dans la Section 4.1. Remarquons qu'il reste très difficile d'exploiter ces liens en vue d'une application des résultats qui seront présentés dans les Sections 4.2 et 4.3. Pour plus de détails concernant l'interpolation dans les espaces modèles, nous référons au Volume 2 de l'ouvrage [**Ni02**].

Comme nous le verrons donc dans la Section 4.1 les propriétés clés que l'on utilise des opérateurs de Toeplitz dans les problèmes d'interpolation sont la surjectivité (l'inversibilité à gauche en découle immédiatement par $(T_\varphi)^* = T_{\overline{\varphi}}$) et l'inversibilité tout court. Un critère d'inversibilité a été donné par Devinatz et Widom. Si on s'intéresse alors à la surjectivité dans la situation où l'opérateur n'est pas inversibile on peut supposer $\ker T_\varphi$ non trivial. Cela nous amène vers l'étude du noyau. Il s'avère que les noyaux d'opérateurs de Toeplitz représentent un terrain très riche de résultats. En effet, les fonctions extrémales associées à ces noyaux portent beaucoup d'information sur l'opérateur de Toeplitz. Mentionnons l'importance des fonctions extrémales qui a déjà été évoquée dans le contexte de l'interpolation libre. On connaît aussi le rôle qu'elles jouent dans la factorisation dans les espaces de Bergman et d'ailleurs aussi dans les espaces de Hardy. Plus précisément, on obtient une propriété de division (qui est isométrique dans le cas des diviseurs canoniques dans l'espace de Hardy et contractant dans l'espace de Bergman). Hitt a caractérisé les sous-espaces presque invariants M — dont les noyaux des opérateurs de Toeplitz forment une sous classe — à l'aide de la fonction extrémale g et une fonction intérieure I associées à M. Plus précisément, si g est la fonction extrémale de M, il existe une fonction intérieure I telles que $M = gK_I^2$ où K_I^2 est l'espace modèle que nous avons déjà rencontré plusieurs fois. La propriété remarquable que l'on a de plus est que g est un multiplicateur isométrique sur K_I^2 ou encore que la fonction extrémale divise isométriquement sur M. Les résultats principaux que nous avons obtenus dans ce domaine seront présontés dans la Section 4.2. Nous allons voir que cette propriété de division isométrique de la fonction extrémale n'est plus valable si $p \neq 2$ même si on se restreint aux noyaux d'opérateurs de Toeplitz. Par des méthodes variationnelles qui ont déjà été mises à l'épreuve dans le contexte des diviseurs canoniques dans les espaces de Bergman, nous pouvons montrer que l'on peut néanmoins obtenir une division ou une multiplication par la fonction extrémale avec contrôle de norme selon la valeur de p. Le contrôle de norme dans le cas de la multiplication est étroitement lié au problème difficile des *mesures de Carleson* pour les espaces K_I^p.

Nous avons évoqué ci-dessus la surjectivité des opérateurs de Toeplitz. Pour l'étude de celle-ci nous allons nous replacer dans le cas $p = 2$. Dans cette situation, un critère pour la surjectivité peut être donné à partir des travaux de Devinatz et Widom (voir aussi [**HNP81**]). Si nous supposons à nouveau que l'opérateur de Toeplitz possède un noyau non trivial, nous pouvons lui associer sa fonction extrémale. Le point clé est que cette fonction extrémale — à part le fait qu'elle soit un diviseur isométrique du noyau — contient beaucoup plus d'information. En effet, les paramètres a et b que l'on peut associer à g permettent de donner un nouveau critère de la surjectivité de l'opérateur de Toeplitz. Nous allons développer les outils nécessaires basés sur les espaces de de Branges-Rovnyak. Une partie de ces outils nous sera utile aussi dans la Section 4.2.

Définissons maintenant *l'opérateur de Toeplitz*. Soient $\varphi \in L^\infty(T)$ et $1 < p < \infty$. Alors

$$\begin{array}{rcl} T_\varphi : H^p & \longrightarrow & H^p \\ f & \longmapsto & P_+(\varphi f), \end{array}$$

où P_+ est la projection de Riesz. Une autre façon de définir l'opérateur de Toeplitz est l'équation opératorielle $T = S^*TS$ (Check for H^p).

Les résultats sur les noyaux d'opérateurs de Toeplitz ont été obtenus en collaboration avec Kristian Seip, ceux concernant la surjectivité des opérateurs de Toeplitz avec Donald Sarason et Kristian Seip.

4.1. Opérateurs de Toeplitz et interpolation

Le lien entre l'interpolation (libre) et les opérateurs de Toeplitz se fait à partir de l'interpolation dans les espaces modèles. Mentionnons qu'un cas particulier des espaces modèles est donné via la transformée de Fourier par l'espace de Paley-Wiener (si on considère K_I^2 dans le demi-plan supérieur et la fonction intérieure singulière $I(z) = e^{iaz}$).

Soit alors I une fonction intérieure sur $\mathbb{D}$. Comme nous l'avons vu au Chapitre 2, une suite $\Lambda = (\lambda_n)_n$ est d'interpolation libre pour l'espace K_I^2 si et seulement si la suite des noyaux reproduisants $(k_{\lambda_n}^I)_n$ est une suite inconditionnelle (ou de Riesz) dans K_I^2. Il est clair que $k_\lambda^I = P_I k_\lambda$ où $P_I = IP_-\overline{I}$ est comme avant la projection orthogonale de H^2 sur K_I^2 et $k_\lambda(z) = 1/(1-\overline{\lambda}z)$ est le noyau reproduisant de H^2. Un calcul montre que

$$k_\lambda^I(z) = \frac{1 - \overline{I(\lambda)}I(z)}{1-\overline{\lambda}z}.$$

Dans la situation $\sup_{n\in\mathbb{N}} |I(z)| < 1$, c'est-à-dire que les points de la suite Λ ne sont pas trop loin des "zéros" de I, on obtient la caractérisation suivante des suites d'interpolation pour K_I^2:

4.1.1. Théorème (voir Lemma C4.4.3 de [**Ni02**]). *Soient I une fonction intérieure et supposons que $\Lambda \subset \mathbb{D}$ vérifie $\sup_{n\in\mathbb{N}} |I(\lambda_n)| < 1$. Soit $B = \prod_n b_{\lambda_n}$ le produit de Blaschke associé à la suite Λ. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *La suite $(k_{\lambda_n}^I)_n$ est une suite inconditionnelle ;*

(ii) *Les deux conditions suivantes sont vérifiées*

  (1) *La suite $(\lambda_n)_n$ vérifie la condition de Carleson;*

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

(2) *La restriction* $P_I : K_B^2 \longrightarrow K_I^2$ *est inversible à gauche.*

On peut remplacer dans (i) *suite inconditionnelle* par *base inconditionnelle* si (et seulement si) on remplace dans (ii)(2) *inversibilité à gauche* par *inversibilité*.

Nous avons déjà justifié la réciproque de ce résultat dans le chapitre d'introduction (voir Section 1.3). Ce sont donc les propriétés géométriques de la restriction de la projection $P_I|K_B^2$ qui déterminent les propriétés de la suite $(k_\lambda^I)_\lambda$ si Λ est une suite de Carleson.

Le résultat qui permet d'introduire les opérateurs de Toeplitz est le suivant

4.1.2. THÉORÈME (voir Lemma C4.4.4 de [**Ni02**]). *Sur* $BH_-^2 = H_-^2 \oplus K_B^2 \subset L^2(\mathbb{T})$, *nous avons l'identité opératorielle*

$$IJT_{I\overline{B}}J\overline{B} = I_{H_-^2} \oplus P_I|K_B^2,$$

où $Jg(z) = \overline{z}\overline{g(z)}$ *pour* $g \in L^2(\mathbb{T})$.

Et donc l'inversibilité ou l'inversibilité à gauche de $P_I|K_B^2$ est équivalente à celle de $T_{I\overline{B}}$. Mentionnons que ces deux résultats peuvent être adaptés à la situation $p \in (1, \infty)$.

Nous n'insistons pas plus sur ces motivations puisqu'à ce jour nous ne connaissons pas d'exemples permettant de lier les deux fonctions intérieures I et B à la fonction extrémale g et la fonction intérieure J associées au noyau de $T_{I\overline{B}}$ comme décrit dans la section suivante.

4.2. Noyaux d'opérateurs de Toeplitz

Nous avons vu dans la section précédente comment les opérateurs de Toeplitz apparaissent dans le contexte de l'interpolation libre. Une autre raison pour laquelle on peut s'intéresser aux opérateurs de Toeplitz est la théorie très riche autour des noyaux de ces opérateurs. On connait en effet grâce aux travaux de Hitt et Hayashi une description très explicite de ces noyaux. Cette description est basée sur la fonction extrémale. Ce sont en particulier les résultats de Hedenmalm (1991) et puis de Duren, Khavinson, Shapiro et Sundberg (1993-1994)) sur les diviseurs canoniques dans l'espace de Bergman qui ont montré l'importance des fonctions extrémales. Nous avons par ailleurs déjà présenté des résultats mettant en évidence l'utilité des fonctions extrémales dans le contexte de l'interpolation et de l'interpolation généralisée dans la Section 2.3.1.

Le résultat clé dans ce contexte est celui de Hitt qui décrit les sous-espaces presque invariants par rapport à l'adjoint du shift. Rappelons qu'un sous-espace fermé non trivial $\{0\} \neq M \subset H^2$ est dit *presque invariant par rapport à* S^* ou tout simplement presque invariant si pour toute fonction $f \in M$ avec $f(0) = 0$ on a $S^*f \in M$. On peut facilement voir que les noyaux des opérateurs de Toeplitz sont presque invariants (par exemple à partir de l'identité $T = S^*TS$).

Définissons aussi la fonction extrémale d'un sous-espace fermé en général $M \subset H^p$, $1 < p < \infty$. C'est la solution unique G (on supposera que M contient des fonctions qui ne s'annulent pas en 0) de

$$\sup\{\operatorname{Re}\gamma(0) : \gamma \in M, \|\gamma\|_p \leq 1\},$$

Si en particulier $M = \ker_p T_\varphi$, où $\ker_p T_\varphi$ désigne le noyau de l'opérateur de Toeplitz T_φ sur H^p, alors G doit être extérieure.

Nous avons le résultat suivant.

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

4.2.1. THÉORÈME ([**Hi88**]). *Soit M un sous-espace presque invariant dans H^2 et g sa fonction extrémale. Alors il existe une fonction intérieure I telle que $I(0) = 0$ et*

$$M = gK_I^2$$

et g est un diviseur isométrique sur M (ou multiplicateur isométrique sur K_I^2) : $\|f/g\|_2 = \|f\|_2$ pour toute fonction $f \in M$.

Mentionnons que Sarason a décrit dans [**Sa88**] toutes les fonctions extérieures multipliant isométriquement sur K_I^2 à l'aide de deux paramètres a et b associé à g. Nous discuterons ce résultat plus tard. Ces mêmes paramètres ont permis à Hayashi (voir [**Haya90**]) de caractériser les noyaux d'opérateurs de Toeplitz parmi tous les sous-espaces presque invariants.

Plusieurs questions se posent alors : quelle est la situation pour le résultat de Hitt pour $p \neq 2$, et peut-on espérer de distinguer les noyaux d'opérateurs de Toeplitz de tous les sous-espaces presque invariants également pour $p \neq 2$?

Nous allons présenter une réponse complète à la première question dans le cas des noyaux d'opérateurs de Toeplitz. Concernant la deuxième nous n'avons à ce jour pas trouvé une condition convenable. On verra plus loin que notre réponse à la première question (et en particulier le Théorème 4.2.3 en conjonction avec le résultat de Hayashi) fournit une condition nécessaire pour $p < 2$ en se ramenant à la situation $p = 2$.

Les noyaux d'opérateurs de Toeplitz ont également été étudiés par Dyakonov dans [**Dy00**] en utilisant le théorème de factorisation de Bourgain. Il obtient la caractérisation suivante.

4.2.2. THÉORÈME ([**Dy00**]). *Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Alors il existe une fonction g inversible dans l'algèbre H^∞ et deux produits de Blaschke B_1, B_2, tels que*

$$\ker_p T_\varphi = (g/B_1)(K_{B_2}^p \cap B_1 H^p).$$

Les paramètres g et B_i dans cette représentation ne sont pas uniques. On peut remarquer que la division par g fournit une équivalence des normes, mais dans cette représentation on fait intervenir un quotient de produits de Blaschke.

Avant de présenter rapidement nos principaux résultats, observons que l'on peut associer — même dans la situation $p \neq 2$ — de façon naturelle une fonction intérieure au noyau de T_φ. En effet, comme $g \in \ker T_\varphi$, c'est-à-dire $\varphi g \in H^p_-$ alors il existe une fonction intérieure I avec $I(0) = 0$ et une fonction extérieure $u \in H^p$ telles que $\varphi g = \overline{Iu}$ ou encore $\varphi = \overline{Iu}/g$.

Nous pouvons de plus constater que $\ker T_\varphi = \ker T_\psi$ où $\psi := \overline{Ig}/g$. En effet, si $f \in \ker T_\varphi$ alors

$$\frac{\overline{Iu}}{g} f = \overline{I_1 v},$$

avec une fonction intérieure I_1, $I_1(0) = 0$, et une fonction extérieure $v \in H^p$. D'où

$$\psi f = \frac{\overline{Ig}}{g} f = \frac{\overline{Iu}}{g} f \frac{\overline{g}}{\overline{u}} = \overline{I_1 v} \frac{\overline{g}}{\overline{u}}.$$

Comme $|vg/u| = |\psi f| = |f| \in L^p$ la fonction vg/u est une fonction extérieure de H^p, et donc $P_+(\psi f) = 0$, i.e. $f \in \ker T_\psi$. L'inclusion inverse se montre de la même

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

manière. Ainsi, comme dans la discussion de la surjectivité (mais pour d'autres raisons), nous pouvons à nouveau supposer $|\varphi| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$ et

$$\varphi = \frac{\overline{Ig}}{g}.$$

Nous obtenons le résultat suivant qui relie le cas $p \neq 2$ au cas $p = 2$.

4.2.3. Théorème ([**HS03**]). *Soit T_φ un opérateur de Toeplitz sur H^p et G la fonction extrémale de $\operatorname{Ker}_p(T_\varphi)$. Soit I la fonction intérieure associée. Alors $g = G^{p/2}$ est la fonction extrémale du sous-espace presque invariant gK_I^2.*

Plus précisément nous verrons que pour $p \leq 2$, l'espace gK_I^2 qui apparaît dans le théorème précédent est le noyau d'un opérateur de Toeplitz, et donc le théorème de Hayashi permet de donner une condition nécessaire sur les paramètres a et b associés à $g = G^{p/2}$, alors que pour $p > 2$, l'espace gK_I^2 n'est en général pas le noyau d'un opérateur de Toeplitz.

Par rapport à la propriété de division de la fonction extrémale nous obtenons le résultat suivant.

4.2.4. Théorème ([**HS03**]). *Soit T_φ un opérateur de Toeplitz sur H^p et G la fonction extrémale de $\operatorname{Ker}_p(T_\varphi)$.*

(1) Si $p \leq 2$, alors $\|f/G\|_p \leq c_p\|f\|_p$ pour tout fonction $f \in \operatorname{Ker}_p(T_\varphi)$.

(2) Si $p \geq 2$, alors $\|f\|_p \leq c_q\|f/G\|_p$ pour toute fonction $f \in \operatorname{Ker}_p(T_\varphi)$ $(1/p + 1/q = 1)$.

En général, aucune de ces majorations peut être inversée si $p \neq 2$.

Ainsi, comme les majorations ne peuvent pas être inversées nous ne pouvons pas obtenir une version équivalente au théorème de Hitt. On peut obtenir une caractérisation analogue de celle de Hitt si on remplace l'espace modèle K_I^p par une version pondérée (voir Section 4.2.6), mais la norme de cet espace pondéré n'est en général plus équivalente à celle de H^p. Le résultat le plus proche d'une caractérisation des noyaux des opérateurs de Toeplitz à la Hitt est le suivant.

4.2.5. Corollaire ([**HS03**]). *Soit T_φ un opérateur de Toeplitz sur H^p et G la fonction extrémale de $\operatorname{Ker}_p(T_\varphi)$ avec sa fonction intérieure associée I.*

(1) Si $p \leq 2$, alors $GK_I^2 \subset \operatorname{Ker}_p(T_\varphi) \subset GK_I^p$.

(2) Si $p \geq 2$, alors $GK_I^p \subset \operatorname{Ker}_p(T_\varphi) \subset GK_I^2$.

En général, toutes ces inclusions sont strictes sauf pour $p = 2$.

En particulier si $p < 2$, afin d'avoir l'inclusion inverse $GK_I^p \subset \operatorname{Ker}_p(T_\varphi)$ (et de façon équivalente l'estimation inverse dans le Théorème 4.2.4), il faut (et il suffit) que pour toute fonction $f \in K_I^p$, $Gf \in \operatorname{Ker}_p(T_\varphi)$, autrement dit pour toute fonction $f \in K_I^p$

$$\int |f|^p |g|^2 \, dm \leq c \int |f|^p \, dm.$$

Ceci est équivalent à dire que la mesure $|g|^2 \, dm$ est une mesure de Carleson pour K_I^p. Ce problème de plongement a été étudié par un certain nombre d'auteurs, voir par exemple [**Al94**], [**TV86**], et [**Ni02**, Vol. 2, pp 335-336] pour plus de références. Le problème de décrire les mesures de Carleson pour K_I^p pour une fonction intérieure I est particulièrement difficile et seulement des résultats partiels sont connus. Un résultat intéressant dans notre situation est le suivant. Aleksandrov

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

a montré (see [**Al94**]) que la projection $P_I P_+$ est de type faible (1,1) de L^1 sur $L^1(\mu)$ si et seulement si μ est ce que l'on appelle une I-mesure de Carleson, i.e. il existe $\varepsilon > 0$ et $\mu(S(E)) \leq Cm(E)$ pour tout intervalle E avec $S(E) \cap L(I, \varepsilon) \neq \emptyset$. Ici $S(E) = \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{D} : e^{i\varphi} \in E, 1 - |z| \leq |E|\}$ est la fenêtre de Carleson, et $L(I, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{D} : |I(z)| < \varepsilon\}$ est l'ensemble de niveau que nous avons déjà rencontré dans l'interpolation généralisée. Comme par ailleurs $V^* = P_I$ si on considère $P_I P_+ : L^2 \longrightarrow L^2(\mu)$, on obtient le plongement inverse lorsque $|g|^2\, dm$ est une I-mesure de Carleson (voir [**TV86**]). Ceci est par exemple le cas lorsque I est une fonction intérieure à une composante ("one component inner function" dans la terminologie anglaise), c'est-à-dire qu'il existe un $\varepsilon \in (0, 1)$ tel que $L(I, \varepsilon)$ est connexe.

Les contre exemples que nous allons donner dans la Section 4.2.9 pour montrer que l'on ne peut pas espérer inverser les estimations ou inclusions du Théoreme 4.2.4 et de son corollaire seront donc bâtis sur des fonctions intérieures avec un ensemble de niveau extrémement déconnexe.

4.2.6. Quelques éléments de preuve. Les preuves de nos résultats sont basées sur un principe variationnel général. Réécrivons d'abord le noyau $\mathrm{Ker}_p(T_\varphi)$. Soit G la fonction extrémale de $\mathrm{Ker}_p(T_\varphi)$. Comme nous avons déjà vu

$$\varphi = \frac{\overline{IG}}{G}$$

avec une fonction intérieure convenable I telle que $I(0) = 0$. Ainsi, si $f = Gh$ où $h \in H^p(|G|^p) = \{u \in N^+ : \|u\|^p_{p,|G|^p} = \int |u|^p |G|^p dm < \infty\}$ tel que $I\overline{h} \in H^p_0(|G|^p) = zH^p(|G|^p)$ alors $f \in \mathrm{Ker}_p(T_\varphi)$. Et si $f \in \mathrm{Ker}_p(T_\varphi)$, alors f est de la forme que nous venons juste de décrire. Autrement dit

$$\mathrm{Ker}_p(T_\varphi) = G(H^p(|G|^p) \cap I\overline{H^p_0(|G|^p)}).$$

Par analogie aux espaces modèles, nous écrivons

$$K^p_I(|G|^p) := H^p(|G|^p) \cap I\overline{H^p_0(|G|^p)},$$

d'où

$$\mathrm{Ker}_p(T_\varphi) = GK^p_I(|G|^p).$$

Ceci rappelle la forme de la caractérisation de Hitt, mais la norme sur $K^p_I(|G|^p)$ n'est pas celle de H^p (et comme indique le Théorème 4.2.4 ces normes ne sont en général pas équivalentes). On peut aussi observer que $GK^p_I(|G|^p)$ est *toujours* le noyau d'un opérateur de Toeplitz, à savoir de $T_{\overline{IG}/G}$.

Rappelons que G est une fonction extérieure, nous pouvons donc introduire la fonction $g := G^{p/2}$ qui sera une fonction extérieure de H^2. Ceci nous permet de remplacer partout le poid $|G|^p$ par $|g|^2$, le cas $p = 2$ nous servant de cas "modèle".

Le *principe variationnel* suivant généralise la relation d'orthogonalité du cadre hilbertien L^2 au cas L^p, $p \neq 2$. On parle aussi de presque orthogonalité. Nous réferons à [**Sh71**, Théorème 4.2.1] pour une preuve.

4.2.7. LEMME. *Soit Y un sous-espace fermé de L^p et supposons $h \in L^p$. Alors $\|h\|_p \leq \|h + f\|_p$ pour toute fonction $f \in Y$ si et seulement si*

$$\int |h|^{p-2}\overline{h} f\, dm = 0, \quad f \in Y.$$

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

En posant $Y = \{f \in \mathrm{Ker}_p(T_\varphi) : f(0) = 0\}$ et $h = G$, nous obtenons comme conséquence directe :

4.2.8. LEMME ([**HS03**]). *Soit I une fonction intérieure. La fonction $G = g^{2/p}$ est extrémale pour $\mathrm{Ker}_p(T_\varphi) = GK_I^p(|g|^2)$ si et seulement si*

$$\int |g|^2 f\, dm = f(0)$$

pour toute fonction $f \in K_I^p(|g|^2)$.

Ce principe variationnel implique par l'inclusion $K_I^{p'}(|g|^2) \subset K_I^p(|g|^2)$ si $p' > p$ que la fonction $g^{2/p'}$ est extrémale pour le noyau de l'opérateur $T_{\varphi'_p}$ avec $\varphi'_p = \overline{Ig^{2/p'}}/g^{2/p'}$. Ceci démontre déjà le Théorème 4.2.3 dans le cas $p > 2$. Pour le cas $p < 2$. On introduit l'espace K^2 comme l'adhérence de $K_I^p(|g|^2)$ dans $L^2(|g|^2)$. On vérifie que g est extrémale pour $M = gK^2$, ensuite que M est presque invariant et donc $M = gK^2_{\tilde{I}}$ pour une fonction intérieure $\tilde{I}$ avec $\tilde{I}(0) = 0$. Par construction $K_I^2 \subset K^2_{\tilde{I}}$. Si cette inclusion était stricte, on aurait $k \in K^2_{\tilde{I}} \ominus K_I^2$. Par densité, il existe $(f_n)_n$ qui converge dans $L^2(|g|^2)$ vers k. Puis par Hitt cette convergence est aussi valable dans H^2. Par construction $f_n = I\overline{\psi_n}$ avec $\psi_n \in H_0^2$. Et donc $(\psi_n)_n$ converge vers une fonction $\psi_0 \in H_0^2$. On en déduit $k = I\overline{\psi_0}$, d'où $k \in K_I^2$ ce qui contredit notre hypothèse. Donc $\tilde{I} = I$.

Ceci démontre donc le Théorème 4.2.3 aussi dans le cas $p < 2$.

Afin de voir les propriétés de division on introduit la projection de $L^2(|g|^2)$ sur K_I^2 (que l'on peut considérer grâce au théorème de Hitt comme sous-espace fermé de $L^2(|g|^2)$) et on vérifie par l'interpolation entre les espaces de Banach que celle-ci est continue aussi pour $p \in (1, 2)$. Un résultat plus subtil montre que V est l'identité si on la restreint à $K_I^p(|g|^2)$ (pour tout p!). Ceci montrera le Théorème 4.2.4 pour le cas $p \in (1, 2)$. Finalement, par dualité, on obtient le cas $p > 2$. Pour montrer que les majorations ne peuvent en général par être inversées on construit des contre exemples.

Soit donc pour $1 \le p' \le \infty$

$$\begin{aligned} V : L^{p'}(|g|^2) &\longrightarrow \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \\ f &\longmapsto \{\lambda \longmapsto Vf(\lambda) = \int f(z)\frac{1 - \overline{I(z)}I(\lambda)}{1 - \overline{z}\lambda}|g(z)|^2 dm(z)\}. \end{aligned}$$

Remarquons que sans le poid $|g|^2$ ce serait tout simplement la projection (orthogonale si $p' = 2$) de $L^{p'}$ sur $K_I^{p'}$.

On vérifie à l'aide du théorème de Hitt que si $f \in K_I^2$ alors $Vf = f$, et si $f \in L^2(|g|^2) \ominus K_I^2$ alors clairement $Vf = 0$ ce qui démontre que V est la projection orthogonle de $L^2(|g|^2)$ sur K_I^2 considéré comme sous-espace de $L^2(|g|^2)$. Le théorème de Hitt permet de déduire que V est continue de $L^2(|g|^2)$ dans K_I^2 considéré comme sous-espace de H^2. Par ailleurs, on vérifie que V est de type faible $(1, 1)$ de $L^1(|g|^2)$ dans L^1_w. Il suffit d'appliquer le Théorème de Marcinkiewicz pour conclure que V est continue de $L^{p'}(|g|^2)$ dans $L^{p'}$ si $p' \in (1, 2]$.

Pour montrer que V est l'identité sur $K_I^{p'}(|g|^2)$, $1 < p' < \infty$ (il suffit de le faire pour $p' < 2$) on utilise à nouveau le principe variationnel vu dans le Lemme 4.2.8 et un autre que l'on peut en déduire:

La fonction G est extrémale pour $\mathrm{Ker}_p(T_\varphi) = GK_I^p(|G|^p)$ *si et seulement si*

$$\int \overline{z}u|G|^p\,dm = 0$$

pour tout fonction u telle que $\overline{u} \in \overline{I}K_I^p(|G|^p)$.

Nous n'allons pas présenter des détails de la preuve que V est l'identité sur $K_I^{p'}(|g|^2)$. Elle consiste à établir un lien de récurrence entre les coefficients de Fourier $f_n(z)$ de $k_\lambda^I(z)$ développé en une série de Taylor en $\overline{\lambda}$. Puis on obtiendra $\int f\overline{f_n}|g|^2dm = b_n$ si b_n est le n-ième coefficient de Taylor de la fonction $f \in K_I^{p'}(|g|^2)$. Ainsi

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n} b_j\lambda^j = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\int f\overline{f_j(z)}|g(z)|^2\lambda^j\,dm(z) \\ &= \lim_{n\to\infty}\int f\left(\sum_{j=0}^{n}\overline{f_j(z)}\lambda^j\right)|g(z)|^2dm(z), \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure par le théorème de convergence dominée. Pour plus de détails, nous réferons à [**HS03**].

Après avoir établi la continuité de V pour $p \in (1, 2]$ et le fait que $Vf = f$ pour $f \in K_I^{p'}(|g|^2)$, $1 < p' < \infty$, nous pouvons en déduire le Théorème 4.2.4.

Cas $p \leq 2$. Si $f \in \mathrm{Ker}_p(T_\varphi)$ alors $f = Gh$ avec $h \in K_I^p(|g|^2)$ et $h = Vh$. D'où

$$\|f/G\|_p = \|h\|_p = \|Vh\|_p \leq c_p\|h\|_{p,|g|^2} = c_p\|hG\|_p = c_p\|f\|_p.$$

Pour $p \geq 2$, on calcule la norme $\|h\|_{p,|g|^2} = \|Vh\|_{p,|g|^2}$ par dualité. On prendra le sup sur $L^2(|g|^2)$ qui est dense dans $L^p(|g|^2)$, puis utilise le fait que sur $L^2(|g|^2)$, V est autoadjoint. Enfin on utilisera la continuité de V sur $L^q(|g|^2)$, $1/p + 1/q = 1$.

Ceci montre les estimations et inclusions du Théorème 4.2.4 et son corollaire. Que ces estimations et inclusions ne peuvent pas être inversées sera illustré dans la section suivante.

4.2.9. Les contre exemples. Comme nous l'avons déjà commenté après le Corollaire 4.2.5 afin d'obtenir des contre exemples il faut construire des fonctions intérieures avec des ensembles de niveau très déconnexes.

Remarquons que le contre exemple que nous proposons dans le cas $p < 2$ est très proche de la construction de Böttcher et Grudsky (voir [**BöGr98**]) pour montrer que les poids de Muckenhoupt ne sont pas stables par rapport à la composition avec une fonction intérieure lorsque $p \neq 2$ (alors que cette stabilité est vraie pour $p = 2$).

Cas $p < 2$**.** Nous allons construire une fonction extrémale G et une fonction intérieure I telle que la fonction

$$f(z) := \frac{1 - I(z)}{1 - z}$$

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

est dans $K_I^p \setminus K_I^p(|g|^2)$, ce qui montrera l'assertion dans ce cas.

Nous commençons par donner un exemple de construction de fonctions G extrémales pour $GK_I^p(|g|^2)$ si I est une fonction intérieure donnée.

Soit donc $0 < \alpha < 1$ et I une fonction intérieure arbitraire. Alors la fonction $(1-I)^{-\alpha}$ est dans H^1 et la fonction harmonique $\mathrm{Re}(1-I)^{-\alpha}$ est de norme 1 (dans L^1). Il existe donc une fonction extérieure $g \in H^2$ telle que $\|g\|_2 = 1$ et

$$|g|^2 = \mathrm{Re}(1-I)^{-\alpha}.$$

Mentionnons que le choix $\alpha \in (0,1)$ entraîne

$$|g|^2 \simeq |1-I|^{-\alpha}.$$

Comme $|g|$ est minorée par une constante strictement positive sur $\mathbb{T}$ nous avons $K_I^p(|g|^2) \subset K_I^p \subset L^1$. Afin de montrer que $G = g^{2/p}$ est extrémale pour $GK_I^p(|g|^2)$ il suffit de vérifier le principe variationnel

$$\int f|g|^2\, dm = 0$$

pour toute fonction $f \in K_I^p(|g|^2)$ avec $f(0) = 0$. Or, si on pose $w = (1-I)^{-\alpha}$ alors $fw \in H^1$ avec $f(0) = 0$ et donc $\int fw\, dm = 0$. Par ailleurs

$$\int \overline{f} w\, dm = \int \overline{f}\, dm + \int \overline{f}(w-1)\, dm.$$

On peut vérifier que $w-1 \in IH^1$, et donc comme $f \in K_I^p$ on obtient $\overline{f}(w-1) \in H_0^1$. Ainsi on a également $\int \overline{f} w\, dm = 0$ ce qui montre le principe variationnel.

Nous savons maintenant, dans le cas $p < 2$, comment construire des fonctions extrémales. Nous devons désormais trouver une fonction intérieure avec un ensemble de niveau très déconnexe. Nous achevons ceci avec un produit de Blaschke dont les zéros sont de "plus en plus éloignés".

Soit donc

$$\theta_k = 2^{-k}, \quad 1 - r_k = \theta_k^p / k^2, \quad z_k = r_k e^{i\theta_k}$$

et $z_0 = 0$. La suite $(z_k)_{k\geq 1}$ s'approche donc de façon très tangentielle du point 1. Posons

$$b_k(z) := \frac{z - z_k}{1 - \overline{z}_k z} \frac{1 - \overline{z}_k}{1 - z_k}$$

et

$$I(z) = z \prod_{k \geq 1} b_k$$

de sorte que $I(1) = 1$ (c'est donc un produit de Blaschke normalisé différemment). Remarquons que I est continue sur $\mathbb{T} \setminus \{1\}$ et continue "à gauche" en 1.

Afin de montrer que $f \in K_I^p \setminus K_I^p(|g|^2)$, on est amené à montrer que

$$\int \frac{|1 - I(z)|^p}{|1-z|^p}\, dm(z) < \infty, \quad \text{et} \quad \int \frac{|1 - I(z)|^{p-\alpha}}{|1-z|^p}\, dm(z) = \infty. \tag{4.2.23}$$

La démonstration de ces deux conditions se fait en décomposant le cercle unité en des intervalles $A_k := [\frac{\theta_k + \theta_{k+1}}{2}, \frac{\theta_k + \theta_{k-1}}{2}]$. Même si ces intervalles ne recouvrent pas le cercle tout entier il est clair qu'il suffit d'estimer les intégrales données dans

(4.2.23) sur $\bigcup_{k\geq 1} A_k$. Sur A_k on a clairement $|1-z| \simeq \theta_k$, et donc on doit estimer les numérateurs. Pour cela on estime l'argument du produit de Blaschke I sur A_k. Il s'avère que par construction la contribution des facteurs b_j pour $j \neq k$ à l'argument de I est négligeable. Et on obtient donc

$$\int_{A_k} |1-I|^\beta \, dm \simeq \int_{A_k} |1-b_k|^\beta \, dm,$$

où β prend soit la valeur p soit la valeur $p-\alpha$. Sur les sous intervalles $A_k^0 := \{e^{i\theta} \in A_k : |1-b_k(e^{i\theta})| > \theta_k^{p-1}\} \subset A_k$ on obtient ensuite

$$\begin{aligned} \int_{A_k} |1-I|^\beta \, dm &\simeq \int_{1-r_k}^{(1-r_k)/\theta_k^{p-1}} \left(\frac{1-r_k}{\theta}\right)^\beta d\theta \\ &\simeq \begin{cases} 1-r_k & \beta > 1, \\ (1-r_k)\theta_k^{-(1-\beta)(p-1)}, & \beta > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi si on choisit α tel que $p-\alpha < 1$ ce qui est bien sûr possible, alors la deuxième intégrale dans (4.2.23) diverge.

Comme par ailleurs $|A_k| \simeq \theta_k$ et $|1-I| \lesssim \theta_k^{p-1}$ sur A_k^1 on obtient

$$\theta_k^{-p} \int_{A_k^1} |1-I|^\beta \, dm \lesssim \theta_k^{(p-1)(\beta-1)}$$

ce qui permet d'affirmer la convergence de la première intégrale.

Cas $p > 2$. Afin de construire le contre exemple dans ce cas nous avons besoin des paramètres a et b que l'on peut associer à g, et du théorème de Hayashi. Nous allons anticiper sur des définitions et résultats que nous présenterons dans la Section 4.3. D'après le Théorème 4.3.6 et les commentaires qui s'ensuivent, si $b \in \mathrm{Ball}(H^\infty)$ est non extrême, i.e. $\log(1-|b|^2) \in L^1$, alors il existe une fonction extérieure $a \in \mathrm{Ball}(H^\infty)$ telle que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ p.p. sur $\mathbb{T}$, et pour toute fonction intérieure I avec $I(0) = 0$, la fonction extérieure

$$g = \frac{a}{1-Ib}$$

est un multiplicateur isométrique sur K_I^2. De plus g est la fonction extrémale de gK_I^2. Le Théorème de Hayashi 4.3.7 précise que gK_I^2 est un noyau d'un opérateur de Toeplitz si et seulement si la fonction $g_0^2 = (a/(1-b))^2$ est rigide dans H^1. Même si on ne dispose pas d'une caractérisation utile de la rigidité dans H^1, on dispose de conditions suffisantes. En particulier, on sait que si $f \in H^1$ telle que $1/f \in H^1$ alors f est rigide dans H^1 (voir [**Sa94a**, p.70–71]). Ainsi il suffit de trouver $a, b \in \mathrm{Ball}(H^\infty)$ telles que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ p.p. sur $\mathbb{T}$ et telle que $(1-b)/a \in H^2$. Avec un tel couple (a, b), et quelle que soit la fonction intérieure I avec $I(0) = 0$, $g = a/(1-Ib)$ sera la fonction extrémale du noyau de l'opérateur de Toeplitz $T_{\overline{Ig}/g}$. Grâce au principe variationnel du Lemme 4.2.8 (voir aussi les commentaires qui s'ensuivent), la fonction $g^{2/p}$, $p > 2$, sera la fonction extrémale du noyau de l'opérateur de Toeplitz avec le symbole

$$\varphi_p := \overline{Ig^{2/p}}/g^{2/p}.$$

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

Notre choix pour a est en quelque sorte canonique : pour $\beta \in (0,1)$ on prendra la fonction extérieure a déterminée par

$$|a(z)|^2 = \frac{1}{2}|1-z|^\beta.$$

Ainsi, $|b(z)|^2 = 1 - \frac{1}{2}|1-z|^\beta$ pour $|z|=1$, ce qui implique

$$b(z) = (1 - \frac{1}{2}|1-z|^\beta)^{1/2} e^{i\widetilde{\log|b|}},$$

où $\tilde{u}$ est la conjuguée harmonique de u. Remarquons que la régularité de $\log|b|$ implique

$$\widetilde{\log|b|}(e^{it}) = O(|t|^\beta).$$

D'après les commentaires ci-dessus, la fonction $g = a/(1-b)$ sera alors rigide et donc $g^{2/p}$ sera la fonction extrémale de $g^{2/p}K_I^p(|g|^2)$.

Nous devons à nouveau construire une fonction intérieure I avec un ensemble de niveau très disconnexe. Nous allons utiliser une construction similaire à celle pour le cas $p<2$. Nous choisissons donc pour I un produit de Blaschke dont l'ensemble des zéros est très rare et qui converge très tangentiellement vers 1. Plus précisément

$$\theta_k = 2^{-k}, \quad 1 - r_k = \theta_k^p/k, \quad z_k = r^k e^{i\theta_k}.$$

La seule différence avec la construction précédente est donc la puissance dans le dénominateur de $1-r_k$.

Cette fois-ci nous montrons que la fonction f,

$$f(z) = \frac{1-I(z)}{1-z},$$

est dans $K_I^p(|g|^2) \setminus K_I^p$.

Pour montrer que $f \notin K_I^p$ on peut utiliser un résultat d'interpolation. Puisque $(z_k)_k$ est une suite d'interpolation, on aurait si f était dans K_I^p :

$$\|f\|_p^p \simeq \sum (1-|z_k|^2)|f(z_k)|^p = \sum \frac{1-r_k^2}{|1-z_k|^2} \simeq \sum \frac{1-r_k}{\theta_k^p} = \infty.$$

Afin de vérifier que $f \in K_I^p(|g|^2)$, on considère à nouveau les intégrales sur les intervalles A_k. Cette fois-ci nous décomposons A_k en trois intervalles : $A_k = A_k^0 \cup A_k^1 \cup A_k^2$ où $A_k^0 = \{\theta \in A_k : |\theta - \theta_k| < (1-r_k)/\theta_k^\beta\}$, $A_k^1 = \{\theta \in A_k : (1-r_k)/\theta_k^\beta < |\theta-\theta_k| < (1-r_k)/\theta_k\}$ et $A_k^2 = A_k \setminus (A_k^0 \cup A_k^1)\}$. On vérifie que sur A_k^0 on a $|1-I| \lesssim |1-Ib|$. Par ailleurs, si $\theta \in A_k \setminus A_k^0$ alors

$$|g(e^{i\theta})|^2 \quad = \quad \frac{|a(e^{i\theta})|^2}{|1-I(e^{i\theta})b(e^{i\theta})|^2} \le \frac{1}{1-|b(e^{i\theta})|^2} = \frac{1}{|a(e^{i\theta})|^2} \simeq \theta_k^{-\beta}.$$

Nous obtenons donc une estimation pour le poid :

$$|g(e^{i\theta})|^2 = \frac{|a(e^{i\theta})|^2}{|1-I(e^{i\theta})b(e^{i\theta})|^2} \lesssim \begin{cases} \dfrac{\theta_k^\beta}{|1-I(e^{i\theta})|^2}, & \theta \in A_k^0, \\ \theta_k^{-\beta}, & \theta \in A_k \setminus A_k^0. \end{cases}$$

On estimera ensuite $|f|^p$ sur chacun des trois intervalles A_k^0, A_k^1, A_k^2 avec des méthodes un peu similaires au cas $p<2$ pour obtenir une suite sommable $(\int_{A_k} |f|^p|g|^2\,dm)_k$ ce qui montrera que $f \in K_I^p(|g|^2)$.

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

4.3. Surjectivité d'opérateurs de Toeplitz

Comme nous avons vu dans la Section 4.1, une propriété importante des opérateurs de Toeplitz est l'inversibilité à gauche, ou, en exploitant l'identité $(T_\varphi)^* = T_{\overline{\varphi}}$, la surjectivité. L'inversibilité des opérateurs de Toeplitz a été étudiée par Devinatz et Widom. Leur résultat jouera un rôle important dans cette section pour deux raisons. Premièrement, nous allons ramener la surjectivité d'un opérateur de Toeplitz à l'inversibilité d'un autre opérateur de Toeplitz que l'on peut lui associer. De part-là, et ce sera notre deuxième observation, le critère de surjectivité est exprimé de façon proche du critère d'inversibilité de Devinatz et Widom en ce qu'il fait intervenir la fameuse condition de Helson-Szegő.

Pour toute cette section nous allons nous placer dans le cas $p = 2$. Un critère d'inversibilité existe aussi pour le cas $p \neq 2$ et a été donnée par Rochberg (voir [**Ro77**]). Comme on peut s'y attendre, ce critère est donné par la condition de Muckenhoupt. Nos méthodes étant basées sur les espaces de de Branges-Rovnyak il paraît plus que délicat de les transférer dans la situation non hilbertienne.

Avant d'énoncer le théorème de Devinatz et Widom, nous devons donc définir la condition de Helson-Szegő. Celle-ci a été introduite dans [**HeSz60**] et est étroitement lié aux processus stochastiques ("l'angle entre le passé et le futur"). Une fonction $w : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie la condition de Helson-Szegő (HS) si $w = e^{u+\tilde{v}}$ où $u, v \in L^\infty$, $\tilde{v}$ est la conjuguée harmonique de v, et $\|v\|_\infty < \pi/2$.

4.3.1. Théorème (Devinatz-Widom, Voir p.ex. p. 58-59 de [**BöSi90**] ou Vol. 1, p. 25 de [**Ni02**]). *Soit φ une fonction unimodulaire sur $\mathbb{T}$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *T_φ est inversible.*
(ii) $\mathrm{dist}(\varphi, H^\infty) < 1$ *et* $\mathrm{dist}(\overline{\varphi}, H^\infty) < 1$.
(iii) *Il existe une fonction extérieure $h \in H^\infty$ telle que $\|\varphi - h\|_\infty < 1$.*
(iv) *Il existe une fonction extérieure $G \in H^2$ telle que $\varphi = \overline{G}/G$ et $|G|^2$ vérifie la condition de Helson–Szegő.*

Avant de continuer notre discussion, justifions que la condition de l'unimodularité de φ ne représente pas une restriction pour le problème de surjectivité. Observons d'abord que si $\varphi, \psi \in L^\infty$ telles qu'au moins une des deux est dans H^∞ alors

$$T_{\overline{\psi}} T_\varphi = T_{\overline{\psi}\varphi}.$$

Le théorème qui nous permet de nous ramener à la situation $|\varphi| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$ est le suivant

4.3.2. Théorème (Hartman-Wintner). *Si $\varphi \in L^\infty$ mais $1/\varphi \notin L^\infty$ alors T_φ n'est pas inversible à gauche.*

Ainsi, si T_φ est surjectif, alors $T_{\overline{\varphi}}$ est inversible à gauche. Donc, d'après le théorème de Hartman-Wintner, φ est inversible dans l'algèbre L^∞, autrement dit $0 < \delta = \mathrm{ess\,inf}_{\mathbb{T}} |\varphi| \leq \mathrm{ess\,sup}_{\mathbb{T}} |\varphi| < \infty$. Il existe alors une fonction extérieure $h \in H^\infty$ telle que $|h| = |\varphi|$ p.p. sur $\mathbb{T}$, et l'on obtient une fonction unidmodulaire $\psi = \varphi/\overline{h}$. Clairement $T_{\overline{h}}$ est inversible, de sorte que $T_\varphi = T_{\overline{h}} T_\psi$ et T_ψ ont le même noyau.

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

Continuons maintenant la discussion du critère de surjectivité. L'équivalence entre (i) et (ii) du Théorème de Devinatz-Widom se montre à l'aide du théorème de Nehari en observant que $\|f\|_2^2 = \|T_\varphi f\|_2^2 + \|H_\varphi f\|_2^2$ où H_φ est l'opérateur de Hankel (voir p.ex. [**Ni02**, Vol. 1, p. 250]). On peut ainsi facilement obtenir un critère d'inversiblité à gauche (voir p.ex. [**BöSi90**]) :

4.3.3. Observation. Soit φ unimodulaire. L'opérateur T_φ est inversible à gauche si et seulement si $\mathrm{dist}(\varphi, H^\infty) < 1$.

En conjuguant l'équivalence entre (i) et (iii) du théorème de Devinatz-Widom et l'observation précédente, Nakazi a mentionné la conséquence suivante (que l'on peut trouver dans [**Nak93**]) :

4.3.4. Observation. Soit φ unimodulaire. L'opérateur T_φ est inversible à gauche si et seulement s'il existe une fonction intérieure J telle que $T_{\overline{J}\varphi}$ est inversible.

Il est clair que la condition est suffisante puisque $T_\varphi = T_{\overline{J}\varphi} T_J$. Réciproquement, si T_φ est inversible à gauche, alors d'après l'Observation 4.3.3 il existe une fonction $h \in H^\infty$ telle que $\|\varphi - h\|_\infty < 1$. Soit $h = Jh_0$ la factorisation intérieure-extérieure de h alors $\|\overline{J}\varphi - h_0\|_\infty < 1$ et h_0 est extérieure, ce qui par le Théorème de Devinatz-Widom implique que $T_{\overline{J}\varphi}$ est inversible. Si T_φ est déjà inversible, alors J doit être la fonction 1, sinon J n'est pas unique.

On peut reformuler la remarque de Nakazi en utilisant la propriété (iv) du Théorème de Devinatz-Widom. En effet, celle-ci et l'Observation 4.3.4 donnent :

4.3.5. Observation. Soit φ unimodulaire. L'opérateur T_φ est inversible à gauche si et seulement si il existe une fonction intérieure J et une fonction extérieure $G \in H^2$ telles que

$$\varphi = \frac{\overline{JG}}{G}$$

et $|G|^2$ vérifie la condition de Helson-Szegő.

Ces observations permettent de soulever deux questions :

- Existe-t-il une façon canonique de construire la fonction intérieure J (et la fonction extérieure G)?
- Dans le cas $p \neq 2$, si T_φ est surjectif, peut-on trouver une fonction intérieure J telle que $T_{\overline{J}\varphi}$ est inversible? (Conjecture de Nakazi, [**Nak93**].)

Notre critère de surjectivité nous permet de montrer que la fonction intérieure que l'on peut associer de façon "canonique" à la fonction extrémale du noyau de l'opérateur de Toeplitz (si celui-ci possède un noyau non trivial) n'est pas le bon candidat en général (il existe un opérateur de Toeplitz T_φ tel que $T_{\overline{J}\varphi}$ n'est pas inversible où J est ladite fonction intérieure "canonique").

La deuxième question a été soulevée par Nakazi. Comme nous n'avons plus le Théorème de Pythagore pour $p \neq 2$, la méthode esquissée plus haut ne marche plus. A ce jour, aucune réponse à cette question est connue.

Digressons vers les problèmes d'interpolation. Rappelons que si l'opérateur $T_{I\overline{B}}$ est inversible à gauche, et si l'ensemble Λ des zéros de B vérifie la condition de Carleson, alors $(k_\lambda^I)_\lambda$ est une suite inconditionnelle dans K_2^I. Par nos observations précédentes, il existe une fonction intérieure J telle que $T_{I\overline{JB}}$ est inversible. Si J

est un produit de Blaschke cela signifie que $\Lambda \cup \Lambda'$, où Λ' est l'ensemble des zéros de J, détermine une base inconditionnelle dans K_I^2, i.e. $(k_\lambda^I)_{\lambda\in\Lambda\cup\Lambda'}$ est une base inconditionnelle dans K_I^2. On peut donc dans ce cas de figure compléter la suite inconditionnelle $(k_\lambda^I)_{\lambda\in\Lambda}$ en une base inconditionnelle.

Dans le domaine de l'interpolation on peut aussi donner un sens à la condition que l'opérateur de Toeplitz doit avoir un noyau non trivial. Rappelons que nous nous intéressons à l'inversibilité à gauche de $T_{I\overline{B}}$, autrement dit à la surjectivité de $T_{\overline{I}B}$. Dire que ce dernier opérateur possède un noyau non trivial se traduit par le fait que l'adhérence de l'image de $T_{I\overline{B}}$ est un sous-espace non trivial de H^2. Ceci entraîne que la suite $(k_\lambda^I)_\lambda$ n'est pas complète dans K_I^2.

Revenons au problème de surjectivité. Supposons donc que $\ker T_\varphi \neq \{0\}$. On peut donc lui associer sa fonction extrémale g déjà introduite dans la Section 4.2. Nous y avons aussi vu qu'il existe alors une fonction intérieure et une fonction extérieure telles que $\varphi = \overline{Iu}/g$ et puisque $|\varphi| = 1$ p.p. sur $\mathbb{T}$ on obtient

$$\varphi = \frac{\overline{Ig}}{g}.$$

Nous obtenons donc de façon intrinsèque — ou canonique — les fonctions $J = I$ et $G = g$ évoquées dans l'Observation 4.3.5.

Dans la Section 4.2, nous avons vu que le noyau $\ker T_\varphi$ était un sous-espace presque invariant, qui pouvait s'écrire

$$\ker T_\varphi = gK_I^2 \tag{4.3.24}$$

(on peut vérifier que c'est effectivement la même fonction intérieure I que l'on a associée précédemment à g).

Nous pouvons alors dégager une première propriété sur g, à savoir que g^2 doit être une fonction rigide, ce qui veut dire qu'à multiples scalaires positifs près, g^2 est la seule fonction ayant le même argument presque partout sur $\mathbb{T}$ que g^2 (ou de façon équivalente $g^2/\|g^2\|_1$ est exposée dans la boule de H^1). En effet, on sait que $T_{\overline{g}/g}$ est injectif si et seulement si g^2 est rigide (voir [**Sa94a**, p.70]). Or il est clair que (4.3.24) implique que $\ker T_{\overline{g}/g}$ est trivial. Nous profitons de cette observation pour faire une autre remarque. La propriété (iv) du Théorème de Devinatz-Widom ne mentionne pas explicitement si la fonction G est unique. Or la condition de Helson-Szegő sur G^2 entraîne en particulier $1/G^2 \in H^1$. Il est connu qu'une fonction $f \in H^1$ avec $1/f \in H^1$ est déjà rigide (voir [**Sa94a**, p.70–71]). Donc si on avait $\overline{G}/G = \overline{G}_1/G_1$ alors G et G_1 aurait le même argument ce qui par la rigidité de G entraînerait $G_1 = rG$ avec $r > 0$. Faisons aussi une remarque qui paraît maintenant triviale : la rigidité est une propriété strictement plus faible que la condition de Helson-Szegő.

Au fait on peut dire plus sur la rigidité de la fonction g, et c'est le Théorème de Hayashi qui nous donnera cette information. Pour cela nous devons introduire les paramètres a et b associés à g et tels que

$$g = \frac{a}{1-b}.$$

Puisque g est normalisé, l'intégrale de Herglotz

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}|g(\zeta)|^2\,dm(\zeta)$$

définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ prenant des valeurs dans le demi-plan à droite $\mathbb{C}^+$ et valant 1 en 0. Avec la transformation conforme qui transforme $\mathbb{C}^+$ en

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

$\mathbb{D}$ en peut en déduire une fonction b dans la boule de H^∞ :

$$\frac{1+b(z)}{1-b(z)} = \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} |g(\zeta)|^2 \, dm(\zeta).$$

Comme l'intégrale de Herglotz vaut 1 en 0 on a $b(0) = 0$. Si on pose alors

$$a = 2g/...?$$

on obtient $g = a/(1-b)$ et en plus $|a|^2 + |b|^2 = 1$ p.p. sur $\mathbb{T}$. Sarason montre par les méthodes des espaces de de Branges-Rovnyak que $I|b$ c'est-à-dire $b = Ib_0$ avec $b_0 \in H^\infty$ ([**Sa88**]).

Un autre résultat de Sarason doit être mentionné ici

4.3.6. Théorème (Sarason [**Sa88**]). *Soit I une fonction intérieure avec $I(0) = 0$. Alors une fonction extérieure g de H^2 multiplie isométriquement sur K_I^2 si et seulement si $I|b$.*

Ceci donne en fait la recette intrinsèque pour construire des sous-espaces presque invariants et leur fonction extrémale associée : pour une fonction intérieure arbitraire I avec $I(0) = 0$, on peut prendre toute fonction $b_0 \in \mathrm{Ball}(H^\infty)$ telle que $\log(1 - |b_0|^2) \in L^1$ (le cas extrême ne peut pas apparaître dans ce contexte). On choisit alors la fonction extérieure $a \in \mathrm{Ball}(H^\infty)$ telle que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ p.p. sur $\mathbb{T}$ et on pose $g = a/(1 - Ib_0)$.

Hayashi obtient en 1990 la caractérisation suivante ([**Haya90**]).

4.3.7. Théorème (Hayashi). *Soit $\{0\} \subsetneq M \subsetneq H^2$ un sous-espace presque invariant par rapport à l'adjoint du shift. Soient g la fonction extrémale de M et I la fonction intérieure associée selon le Théorème de Hitt. Alors M est le noyau d'un opérateur de Toeplitz si et seulement si*

$$g_0^2 := \left(\frac{a}{1-b_0}\right)^2$$

est rigide.

Avec les notations ci-dessus, nous obtenons le théorème suivant.

4.3.8. Théorème ([**HSS04**]). *Supposons que* $\ker T_\varphi$ *n'est pas trivial. Alors T_φ est surjectif si et seulement si $|g_0|^2$ vérifie la condition de Helson-Szegő.*

Donc, si g_0^2 est rigide, alors gK_I^2 est le noyau d'un opérateur de Toeplitz et $T_{\overline{g_0}/g_0}$ est injectif ; si de plus $|g_0|^2 \in (\mathrm{HS})$ alors non seulement $T_{\overline{g_0}/g_0}$ est inversible mais on peut affirmer que T_φ est surjectif.

4.3.9. Quelques éléments de preuve. La preuve du Théorème 4.3.8 est basée sur les espaces de de Branges-Rovnyak qui ont été étudiés pour la première fois dans [**dBrRo66**]. On peut aussi consulter l'ouvrage de Sarason [**Sa94a**]. Nous commençons par introduire la terminologie et les résultats nécessaires.

Soit $A : H^2 \longrightarrow H^2$. Alors $\mathcal{M}(A) := \mathrm{Image}\, A$ équippé de la norme qui rend l'opérateur A co-isométrique de H^2 sur $\mathcal{M}(A)$, i.e. $\|Af\|_{\mathcal{M}(A)} := \|P_{(\ker A)^\perp} f\|_2$. Si $\|A\| \le 1$, alors on définit $\mathcal{H}(A) = \mathcal{M}(1 - AA^*)^{1/2}$. En particulier si $A = T_\varphi$, on pose $\mathcal{M}(\varphi) := \mathcal{M}(T_\varphi)$ et $\mathcal{H}(\varphi) := \mathcal{H}(T_\varphi)$. Si I est une fonction intérieure, alors $\mathcal{H}(I) = K_I^2$.

Si a et b sont reliés comme décrit ci-dessus, on a $\mathcal{M}(a) \subset \mathcal{H}(b)$.

Nous aurons besoin des quatre propositions suivantes que l'on trouve dans [**Sa94a**] respectivement sur les pages 10, 30, 161 et 66.

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

4.3.10. Proposition. *Soit $b = Ib_0$. Alors*

$$\mathcal{H}(b) = \mathcal{H}(I) \oplus I\mathcal{H}(b_0) = K_I^2 \oplus I\mathcal{H}(b_0).$$

De plus I agit comme une isométrie de $\mathcal{H}(b_0)$ dans $\mathcal{H}(b)$.

4.3.11. Proposition. *L'opérateur $T_{1-b}T_{\overline{g}}$ est une isométrie de H^2 sur $\mathcal{H}(b)$ et l'opérateur $T_{1-b_0}T_{\overline{g_0}}$ est une isométrie de H^2 sur $\mathcal{H}(b_0)$*

4.3.12. Proposition. *L'opérateur $T_{1-b}T_{\overline{g}}$ envoie $\ker T_\varphi$ sur $\mathcal{H}(I)$ et y agit comme la division par g.*

Une paire (u,v) est appelée paire de couronne si $\inf_{z\in\mathbb{D}} \sup(|u(z)|, |v(z)|) > 0$.

4.3.13. Proposition. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) $\mathcal{H}(b) = \mathcal{M}(a)$
(ii) $T_{\overline{g}/g}$ *est inversible*
(iii) $T_{\overline{a}/a}$ *est invertible, et les fonctions a et b forment une paire de couronne.*

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 4.3.8. Pour cela nous allons d'abord vérifier l'identité suivante

$$T_{\varphi_0}T_{\overline{\varphi_0}} = T_\varphi T_{\overline{\varphi}}, \tag{4.3.25}$$

où $\varphi_0 = \overline{g_0}/g_0$. Pour cela il suffit d'établir que $\|T_{\overline{\varphi_0}}f\|_2 = \|T_{\overline{\varphi}}f\|_2$ pour toute fonction $f \in H^2$. Or, par la Proposition 4.3.11, on a

$$\|T_{\overline{\varphi}}f\| = \|T_{1-b}T_{\overline{g}}T_{\overline{\varphi}}f\|_b.$$

Par ailleurs

$$T_{1-b}T_{\overline{g}}T_{\overline{\varphi}} = T_{1-b}T_{\overline{g}}T_{Ig/\overline{g}} = T_{1-b}T_{Ig} = T_{Ia}.$$

D'où $\|T_{\overline{\varphi}}f\| = \|Iaf\|_b$, ce qui par la Proposition 4.3.10 est égal à $\|af\|_{b_0}$ (rappel : $\mathcal{M}(a) \subset \mathcal{H}(b)$). Exactement le même raisonnement avec g_0 et b_0 au lieu de g et b, donne $\|T_{\overline{\varphi_0}}f\| = \|af\|_{b_0}$. D'où l'identité souhaitée (4.3.25).

Une conséquence immédiate de (4.3.25) est que T_φ et T_{φ_0} sont surjectifs simultanément. Par le Théorème de Hayashi la fonction $|g_0|^2$ est rigide de sorte que le noyau de $T_{\overline{g_0}/g_0} = T_{\varphi_0}$ est trivial. Ainsi la surjectivité de T_{φ_0} est équivalente à son inversibilité, autrement dit à $|g_0|^2 \in$ (HS), ce qui achève la preuve. □

Nous pouvons observer que cette preuve a beaucoup de similarité avec celle utilisée dans [**Sa94b**] pour redémontrer le Théorème de Hayashi.

Revenons à nos deux questions plus haut, plus particulièrement à la première. Nous nous demandions s'il existait une façon canonique de construire une fonction intérieure J telle que $T_{\overline{J}\psi}$ était inversible si T_ψ était inversible à gauche. Autrement dit, si $T_{\overline{\psi}}$ est surjectif, existe-t-il une façon canonique de construire une fonction intérieure J telle que $T_{J\overline{\psi}}$ est inversible? Soit $\varphi = \overline{\psi}$. Puisque la fonction extrémale du noyau de T_φ (supposé non trivial) possède plein d'informations comme par exemple sur la surjectivité de T_φ, il paraît naturel de considérer la fonction intérieure qu'elle nous fournit comme candidat canonique. Rappelons que $\varphi = \overline{Ig}/g$, donc $T_{I\varphi} = T_{\overline{g}/g}$. Si la fonction I était le bon candidat en général, alors, d'après notre théorème, la condition de Helson-Szegő pour $|g|^2$ et $|g_0|^2$ serait équivalente. Que ceci n'est pas le cas, et que de part-là la fonction intérieure I n'est pas le bon

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

candidat, sera mis en évidence maintenant. Bien évidemment, si $|g|^2 \in$ (HS), alors $T_{\overline{g}/g}$ est inversible et donc $T_\varphi = T_{\overline{I}} T_{\overline{g}/g}$ est surjectif. Notre résultat permet de déduire $|g_0|^2 \in$ (HS). Nous devons donc construire une fonction extérieure $g \in H^2$ telle que $|g_0|^2 \in$ (HS) mais $|g|^2 \notin$ (HS).

Nous commençons par un autre théorème.

4.3.14. Théorème ([**HSS04**]). *Soit T_φ un opérateur de Toeplitz avec noyau non trivial. Alors $|g|^2$ vérifie la condition de Helson-Szegő si et seulement si les fonctions a et I forment une paire de couronne.*

Donnons la preuve rapide.

Preuve. Si $|g|^2 \in$ (HS), alors d'après la Proposition 4.3.13 la paire (a, b) est une paire de couronne. Donc pour tout $z \in \mathbb{D}$ on obtient

$$\begin{aligned} |a(z)|^2 + |I(z)|^2 &= |a(z)|^2 + |Ib_0(z)|^2 - |Ib_0(z)|^2 + |I(z)|^2 \\ &= |a(z)|^2 + |b(z)|^2 + |I(z)|^2(1 - |b_0(z)|^2) \geq |a(z)|^2 + |b(z)|^2 \\ &\geq \delta > 0. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que (a, I) est une paire de couronne telle que $|a(z)|^2 + |I(z)|^2 \geq \delta > 0$. Nous savons déjà que T_φ est surjectif. Donc d'après la Proposition 4.3.13 nous savons que (a, b_0) est une paire de couronne (nous pouvons supposer sans perte de généralité que $|a(z)|^2 + |b_0(z)|^2$ est minoré par le même δ), et que $T_{\overline{a}/a}$ est inversible. Ainsi, pour conclure à nouveau à l'aide de la Proposition 4.3.13 il suffit d'établir que (a, b) est une paire de couronne.

Nous distinguons deux cas. Si $|a(z)|^2 \geq \delta/2$ alors clairement $|a(z)|^2 + |b(z)|^2 \geq \delta$. Sinon, par hypothèse, $|I(z)|^2 \geq \delta/2$ et $|b_0(z)|^2 \geq \delta/2$ de sorte que dans ce deuxième cas $|a(z)|^2 + |b(z)|^2 = |a(z)|^2 + |Ib_0(z)|^2 \geq |Ib_0(z)|^2 \geq (\delta/2)^2 > 0$. □

4.3.15. L'exemple. Nous utilisons les résultats précédents pour construire un opérateur de Toeplitz surjectif avec symbole φ tel que la fonction intérieure canonique I associée au noyau (noyau qui sera non-trivial par construction) ne fournit pas le symbole $I\varphi$ d'un opérateur inversible. Autrement dit $T_\varphi = T_{\overline{Ig}/g}$ est surjectif mais $T_{\overline{g}/g}$ n'est pas inversible (i.e. $|g|^2 \notin$ (HS)). D'après nos résultats, pour cela il suffit de trouver une fonction extérieure g_0 telle que $|g_0|^2 = |a/(1-b)|^2$ vérifie la condition de Helson-Szegő (elle est donc a fortiori rigide ce qui implique grâce au Théorème de Hayashi que $g = a/(1 - Ib)$ est la fonction extrémale du noyau d'un opérateur de Toeplitz et ceci quelle que soit la fonction intérieure I), et une fonction intérieure I tel que $|g|^2 = |a/(1 - Ib)|^2$ n'est pas Helson-Szegő.

Soit donc $a \in \mathrm{Ball}(H^\infty)$ extérieure telle que

(1) $|a|^2 \in (HS)$;
(2) $\|a\|_\infty < 1$;
(3) $a \notin (H^\infty)^{-1}$.

On pourra par exemple prendre la fonction $a(z) = (1 - z)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}/4$ avec $\varepsilon \in (0, 1/2)$.

Soit ensuite b_0 la fonction extérieure telle que $|b_0| = (1 - |a|)^{1/2}$ p.p. sur $\mathbb{T}$. Alors : $b_0 \in (H^\infty)^{-1}$, et (a, b_0) est une paire de couronne. Donc, puisque $T_{\overline{a}/a}$ est inversible, $T_{\overline{g_0}/g_0}$ le sera et $|g_0|^2 \in (HS)$. Par Théorème 4.3.8, T_φ est surjectif dès que $\varphi = \overline{J}\overline{g}/g$ pour une fonction J intérieure, $J(0) = 0$, et $g = a/(1 - Jb_0)$.

Si on choisit $I = B = \prod_n b_{\lambda_n}$ avec $\sum(1 - |\lambda_n|) < \infty$ et $\lambda_n \in (0, 1)$ qui tend vers 1 ($\lambda_1 = 0$), alors $|a(\lambda_n)| + |I(\lambda_n)| \to 0$ de sorte que (a, I) n'est pas une paire de couronne. Nous concluons par le Théorème 4.3.14 que $|g|^2 \notin (HS)$ où $g = a/(1 - Ib_0)$ et $\varphi = \overline{I}\overline{g}/g$.

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

Bibliographie

[Al94] A. Aleksandrov, *A simple proof of the Volberg-Treil theorem on the embedding of coinvariant subspaces of the shift operator*, (Russian) Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **217** (1994), Issled. po Linein. Oper. i Teor. Funktsii. 22, 26–35, 218; translation in J. Math. Sci. (New York) **85** (1997), no. 2, 1773–1778.

[ArGa01] D. H. Armitage & S.J. Gardiner, *Classical Potential Theory*, Springer, London, 2001.

[BeOr95] B. Berndtsson & J. Ortega Cerdà, *On interpolation and sampling in Hilbert spaces of analytic functions*, J. reine angew. Math. **464** (1995), 109-128.

[BrGa95] C.A. Berenstein & R. Gay, *Complex Analysis and Special Topics in Harmonic Analysis*, Springer Verlag, Berline, 1995.

[BGVY] C.A. Berenstein, R. Gay, A. Vidras & A. Yger, *Residue currents and Bézout identities*, Progr. Math. Vol 114. Birkhäuser Boston, MA 1993.

[BrLi95] C.A. Berenstein & B.Q. Li, *Interpolating varieties for spaces of meromorphic functions*, J. Geom. Anal., **5** (1995), 1-48.

[BeOr95] B. Berndtsson & J. Ortega Cerdà, *On interpolation and sampling in Hilbert spaces of analytic functions*, J. Reine Angew. Math. **464** (1995), 109–128.

[BDK05] A. Borichev, R. Dhuez & K. Kellay, *Sampling and interpolation in radial weighted spaces of analytic functions*, preprint.

[BNØ96] J. Bruna, A. Nicolau & K. Øyma, *A note on interpolation in the Hardy spaces of the unit disc*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), no. 4, 1197–1204.

[BNT] A. Borichev, A. Nicolau & P.J. Thomas, *Harmonic and superharmonic majorants on the disk*, to appear in Bull. London Math. Soc., electronically available from math arXiv: http://arXiv.org/abs/math.CV/0304482 .

[BöGr98] A. Böttcher & S. Grudsky, *On the composition of Muckenhoupt weights and inner functions*, J. London Math. Soc. (2) **58** (1), 1998, pp. 172-184.

[BöSi90] A. Böttcher & B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz Operators*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[dBrRo66] L. de Branges & J. Rovnyak, *Square Summable Power Series*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

[Ca58] L. Carleson, *An interpolation problem for analytic functions*, Amer. J. Math. **80**, 1958, pp. 921-930.

[CR00] J.A. Cima & W.T. Ross, *The Backward Shift on the Hardy Space*, Math. Surveys Monographs **79**, Amer. Math. Soc., Providence R.I., 2000.

[DSS70] R.G. Douglas, H.S. Shapiro, & A.L. Shields, *Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **20** (1970), 37–76.

[DKSS93] P. Duren, D. Khavinson, H.S. Shapiro & C. Sundberg, *Contractive zero-divisors in Bergman spaces*, Pacific J. Math. **157** (1993), no. 1, 37–56.

[Dy00] K.M. Dyakonov, *Kernels of Toeplitz operators via Bourgain's factorization theorem*, J. Funct. Anal. **170** (2000), no. 1, 93–106.

[EiEs02] V.Ya. Eiderman & M. Essén, *Uniqueness theorems for analytic and subharmonic functions* (Russian), Algebra i Analiz **14** (2002), no. 6, 1–88 ; English translation in St. Petersburg Math. J. **14** (2002), no. 6.

[FeGa91] D.L. Fernandez & J.B. Garcia, *Interpolation of Orlicz-valued function spaces and U.M.D. property*, Studia Math. **99** (1991), pp. 23-40.

[Gar77] J.B. Garnett, *Two remarks on interpolation by bounded analytic functions*, Banach spaces of analytic functions (Proc. Pelczynski Conf., Kent State Univ., Kent, Ohio, 1976), pp. 32–40. Lecture Notes in Math., Vol. 604, Springer, Berlin, 1977.

[Ga81] ——— *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New York, 1981.

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

[Gro73] Grothendieck. *Topological Vector Spaces*, Gordon & Breach, London (1973).

[Gr77] L. Gruman, *The area of analytic varieties in* $\mathbb{C}^n$, Math. Scand. **41** (1977), 365–397.

[Har96] A. Hartmann, *Une approche de l'interpolation libre généralisée par la théorie des opérateurs et caractérisation des traces* $H^p|\Lambda$, J. Operator Theory **35** (1996), no. 2, 218–316.

[Har99] ——— *Traces of certain classes of holomorphic functions on finite unions of Carleson sequences*, Glasg. Math. J. **41** (1999), no. 1, 103–114.

[Har99] ——— *Free interpolation in Hardy-Orlicz spaces*, Studia Math. **135** (1999), no. 2, 179–190.

[Har97] ——— *The generalized Carleson condition in certain spaces of analytic functions*, Banach algebras '97 (Blaubeuren), pp. 245–260, de Gruyter, Berlin, 1998.

[Har01] ——— *Generalized interpolation in Bergman spaces and extremal functions*, Math. Nachr. **224** (2001), 123–144.

[HaMa00] A. Hartmann & X. Massaneda, *On interpolating varieties for weighted spaces of entire functions*, J. Geom. Anal. **10(4)** (2000), 683–696.

[HaMa01] ——— *Interpolating sequences for holomorphic functions of restricted growth*, Ill. J. Math. **46** (2002), no.3, 929–945.

[HMNT04] A. Hartmann, X. Massaneda, P.T. Thomas & A. Nicolau, *Interpolation in the Nevanlinna and Smirnov classes and harmonic majorants*, J. Funct. Anal. **217** (2004), 1–37.

[HS03] A. Hartmann & K. Seip, *Extremal functions as divisors for kernels of Toeplitz operators*, J. Funct. Anal. **202** (2003), 342–362.

[HSS04] A. Hartmann, D. Sarason & K. Seip, *Surjective Toeplitz operators*, Acta Sci. Math. (Szeged) **70** (2004), 609–621.

[HaKa88] M. Hasumi M. & S. Kataoka, *Remarks on Hardy-Orlicz-classes*, Arch. Math. **51** (1988), pp. 455–463.

[Haya85] E. Hayashi, *The solution sets of extremal problems in* H^1, Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), 690–696.

[Haya86] ——— *The kernel of a Toeplitz operator*, Integral Equations Operator Theory **9** (1986), 588–591.

[Haya90] ——— *Classification of nearly invariant subspaces of the backward shift*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 441–448.

[Hay98] W.K. Hayman, *Identity theorems for functions of bounded characteristic*, J. London Math. Soc. **58** (1998), no. 2, 127–140.

[He91] H. Hedenmalm, *A factorization theorem for square area-integrable analytic functions*, J. Reine Angew. Math. **422** (1991), 45–68.

[HKZ00] H. Hedenmalm, B. Korenblum & K. Zhu, *Theory of Bergman Spaces*, Graduate Texts in Math. **199**, Springer Verlag, New York, 2000.

[He69] M. Heins, *Hardy Classes on Riemann Surfaces*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Lectures Notes in Mathematics no. 98, 1969.

[HeSz60] H. Helson & G. Szegő, *A problem in prediction theory*, Ann. Mat. Pura Appl. **51** (1960), 107–138.

[HULL93] J.-B. Hiriart-Urruty & C. Lemaréchal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 305, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1993.

[Hi88] D. Hitt, *Invariant subspaces of* $\mathcal{H}^2$ *of an annulus*, Pacific J. Math. **134** (1988), 101–120.

[Hör66] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Van Nostrand, 1966.

[Hör94] ——— *Notions of convexity*, Birkhäuser, Berlin, 1994.

[HNP81] S.V. Hruschev, N.K. Nikolski & B.S. Pavlov, *Unconditional bases of exponentials and reproducing kernels*, Lect. Notes Math., **864** (1981), 214–335.

[IN87] J. Inoue & T. Nakazi, *Polynomials of an inner function which are exposed points in* H^1, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), no. 3, 454–456.

[JeMaTh96] M. Jevtić, X. Massaneda & P.J. Thomas, *Interpolating sequences for weighted Bergman spaces of the ball*, Michigan Math. J., **43** (1996), 495–517.

[Ka63] V. Kabaila, *Interpolation sequences for the* H_p *classes in the case* $p < 1$, Litovsk. Mat. Sb. **3** (1963), no. 1, 141–147.

[Kab58] V. Kabaĭla, *On interpolation of functions of class H_δ*, (Russian) Uspehi Mat. Nauk (N.S.) **13** (1958), no. 1(79), 181–188.

[Ka04] A.Yu. Karlovich, *Norms of Toeplitz and Hankel operators on Hardy type subspaces of rearrangement-invariant spaces*, Integral Equations Operator Theory **49** (2004), no. 1, 43–64

[KL69] A. Kerr-Lawson, Some lemmas on interpolating Blaschke products and correction, Canad. J. Math. **21** (1969), pp. 531-534.

[Kh95] A. Kheifets, *On regularization of γ-generating pairs*, J. Funct. Anal. **130** (1995), no. 2, 310–333.

[KSch01] M. Krosky & A. Schuster, *Multiple interpolation and extremal functions in Bergman spaces*, J. Anal. Math. **85** (2001), 141–156.

[Leś73] R. Leśniewicz, *On linear functionals in Hardy-Orlicz spaces, I*, Studia Math., **46** (1973), pp. 53-77.

[LiTa96] B.Q. Li & B.A. Taylor, *On the Bézout problem and area of interpolating varieties in $\mathbb{C}^n$*, Amer. J. Math., **118** (1996), 989-1010.

[LiVi01] B.Q. Li & E. Villamor, *Interpolation in the unit ball of $\mathbb{C}^n$*, Israel J. of Mathematics **123** (2001), 341–358.

[Ln00] N. Lindholm, *Sampling in weighted L^p spaces of entire functions in $\mathbb{C}^n$ and estimates of the Bergman kernel*, Preprint Göteborg University (2000).

[Lu96] D. Luecking, *Zero sequences for Bergman spaces*, Complex Variables Theory Appl. **30** (1996), no. 4, 345–362.

[Lu05] D. Luecking, *Generalized interpolating sequences for Bergman spaces*, preprint.

[LySe97] Yu. Lyubarskii & K. Seip, *A uniqueness theorem for bounded analytic functions*, Bull. London Math. Soc. **29** (1997), 49–52.

[Mar] N. Marco, *Generalized interpolation in bergman spaces and finite unions of separated sequences*, preprint (disponible sur http://picard.ups-tlse.fr/~nmarco/)

[Ma97] X. Massaneda, *Interpolation by holomorphic functions in the unit ball with polynomial growth*, Ann. Fac. Sci. Toulouse **VI** (1997), 277–296.

[Ma98] ——— *$A^{-\infty}$ interpolation in the ball*, Proc. Edinburgh. Math. Soc. **41** (1998), 359–367.

[MaTh98] X. Massaneda & P.J. Thomas, *Interpolating sequences for Bargmann-Fock spaces in $\mathbb{C}^n$*, Indag. Math., N.S. **11** (1998), no. 1, 115–127.

[McC92] J. McCarthy, *Topologies on the Smirnov class*, J. Funct. Anal. **104** (1992), no. 1, 229–241.

[Naf56] A.G. Naftalevič, *On interpolation by functions of bounded characteristic (Russian)*, Vilniaus Valst. Univ. Mokslų Darbai. Mat. Fiz. Chem. Mokslų **Ser. 5** (1956), 5–27.

[Nak93] T. Nakazi, *Toeplitz operators and weighted norm inequalities*, Acta Sci. Math. (Szeged) **58** (1993), 443–452.

[NPT] A. Nicolau, J. Pau & P.J. Thomas, *Smallness sets for bounded holomorphic functions*, Journal d'Analyse Mathématique **82** (2000), 119–148.

[Nik78] N.K. Nikolski [Nikol'skiĭ], *Bases of invariant subspaces and operator interpolation*, Proc. Steklov Inst. Math. **130** (1979), issue 4, pp. 55–132.

[Nik78a] N.K. Nikolski [Nikol'skiĭ], *What problems do spectral theory and complex analysis solve for each other*, Proc. Intern. Congress Math., Helsinki, 1978, vol. 2, pp. 631-638.

[Nik86] ——— *Treatise on the shift operator*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1986.

[Ni02] ——— *Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading. Vol. 1, Hardy, Hankel, and Toeplitz; Vol.2, Model Operators and Systems*, Math. Surveys Monographs **92** and **93**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[NV90] N.K. Nikolsiki & A.L. Volberg, *Tangential and approximate free interpolation*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **122**, Dekker, New York, 1990.

[OrSe] J. Ortega-Cerdà & K. Seip, *Beurling-type density theorems for weighted L^p spaces of entire functions*, J. Anal. Math ???.

[Ou98] M. Ounaies, *On interpolating discrete varieties for weighted spaces of entire functions*, Anal. Math. **29** (2003), no. 1, 59–74.

[PaTh03] J. Pau & P.J. Thomas, *Decrease of bounded holomorphic functions along discrete sets*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **46** (2003), 703–718.

[RaoRen91] M.M. Rao & Z.D. Ren, *Theory of Orlicz-spaces*, Pure and Applied Mathematics, Dekker, New York, 1991.

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

[Ro77] R. Rochberg, *Toeplitz operators on weighted H^p spaces.* Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), no. 2, 291–298.

[RosRov85] M. Rosenblum & J. Rovnyak, *Hardy classes and operator theory*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1985.

[Sa88] D. Sarason, *Nearly invariant subspaces of the backward shift*, Contributions to Operator Theory and Its Applications (Mesa, AZ, 1987), 481–493, Oper. Theory Adv. Appl., **35**, Birkhäuser, Basel, 1988.

[Sa89] ——— *Exposed points in H^1, I*, The Gohberg Anniversary Collection, Vol. II (Calgary, AB, 1988) 485–496, Oper. Theory Adv. Appl., **41**, Birkhäuser, Basel, 1989.

[Sa94a] ——— *Sub-Hardy Hilbert Spaces in the Unit Disk*, University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences **10**, John Wiley & Sons Inc., New York, 1994.

[Sa94b] ——— *Kernels of Toeplitz operators*, Toeplitz Operators and Related Topics (Santa Cruz, CA, 1992), 153–164, Oper. Theory Adv. Appl., **71**, Birkhäuser, Basel, 1994.

[SchS98] A. Schuster & K. Seip, *A Carleson-type condition for interpolation in Bergman spaces*, J. Reine Angew. Math. **497** (1998), pp. 223-233.

[SchS00] ——— *Weak conditions for interpolation in holomorphic spaces*, Publ. Math. **44** (2000), 277–293.

[Se92] K. Seip, *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space I*, J. reine angew. Math., **429** (1992), 91-106.

[Se93] ———Beurling type density theorems in the unit disk, Invent. Math., **113** (1993), 21–39.

[SeWa92] K. Seip & R. Wallstén, *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space II*, J. reine angew. Math. **429** (1992), 107-113.

[Sh71] H.S. Shapiro, *Topics in Approximation Theory*, with appendices by J. Boman and T. Hedberg, Lecture Notes in Math. **187**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[ShSh] H.S. Shapiro & A.L. Shields, *On some interpolation problems for analytic functions*, Amer. J. Math., **83** (1961), 513–532.

[ShJSh] J. Shapiro & A.L. Shields, *Unusual topological properties of the Nevanlinna class*, Amer. J. Math. **97** (1975), 915–936.

[TV86] S.R. Treil & A.L. Volberg, *Embedding theorems for invariant subspaces of the inverse shift operator*, (Russian) Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI) **149** (1986), 38-51; translation in J. Soviet Math. **42** (1988), 1562-1572.

[Va79] V.I. Vasyunin, *Unconditional convergent spectral decompositions and interpolation problems*, Proc. Steklov Inst. Math. **130** (1979), issue 3.

[Va84] ——— *Traces of bounded analytic functions on finite unions of Carleson sets*, J. Sov. Math. **27** (1984), issue 1, pp. 2448-2450.

[Vi81] S.A. Vinogradov, *On free interpolation in Bergman spaces*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI) **113** (1981), 208–211, traduction anglaise dans J. Sov. Math. **22** (1983), issue 6, pp. 1835–1837.

[VR87] S.A. Vinogradov & S.E. Rukshin, *Free interpolation of germs of analytic functions in Hardy spaces*, J. Sov. Math. **36** (1987), issue 3, pp. 319–325.

[Ya74] N. Yanagihara, *Interpolation theorems for the class N^+*, Illinois J. Math., **18** (1974), 427–435.

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

Auteurs

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008

Index

tel-00281652, version 1 - 23 May 2008