

Symétrie des grandes solutions d'équations elliptiques semi linéaires ¹

Alessio Porretta ²

Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata", Via della Ricerca Scientifica 1, 00133 Roma, Italia

Email: porretta@mat.uniroma2.it

Laurent Véron

Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique, CNRS UMR 6083, Faculté des Sciences, 37200 Tours, France.

Email: veronl@univ-tours.fr

Résumé. Soit g une fonction localement lipschitzienne de la variable réelle. On suppose que g vérifie la condition de Keller et Osserman et qu'il existe un réel $a > 0$ tel que g est convexe sur $[a, +\infty[$. Alors toute solution u de $-\Delta u + g(u) = 0$ dans une boule B de \mathbb{R}^N , $N \geq 2$, qui tend vers l'infini au bord de B , est une fonction radiale.

Symmetry of large solutions of semilinear elliptic equations

Abstract. Let g be a locally Lipschitz continuous function defined on \mathbb{R} . We assume that g satisfies the Keller-Osserman condition and there exists a positive real number a such that g is convex on $[a, \infty)$. Then any solution u of $-\Delta u + g(u) = 0$ in a ball B of \mathbb{R}^N , $N \geq 2$, which tends to infinity on ∂B , is spherically symmetric.

Abridged English version

Let $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ be a locally Lipschitz continuous function and $B_R(0)$ the open N -ball ($N \geq 2$) of center 0 and radius $R > 0$. A classical result due to Gidas, Ni and Nirenberg [4] asserts that any positive solution u of

$$(1) \quad -\Delta u + g(u) = 0$$

in $B_R(0)$ which vanishes on $\partial B_R(0)$ is radial. A conjecture proposed by H. Brezis is that any *large solution* of (1), that is a solution which verifies

$$(2) \quad \lim_{|x| \rightarrow R} u(x) = \infty,$$

is radial. The existence of such solution is ensured by the Keller-Osserman condition: there exists some $a > 0$ such that g is nondecreasing on $[a, \infty)$

¹A paraître dans *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.*

²L'auteur a bénéficié du support du projet européen RTN: FRONTS-SINGULARITIES, RTN contract: HPRN-CT-2002-00274.

and

$$(3) \quad \int_a^\infty \frac{ds}{\sqrt{G(s)}} < \infty \quad \text{where } G(s) = \int_a^s g(\sigma) d\sigma.$$

We prove two symmetry results dealing with this conjecture.

Theorem 1. *Assume g is locally Lipschitz continuous and let u be a large solution of (1) in a ball $B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. If there holds*

$$(4) \quad \begin{aligned} (i) \quad & \lim_{|x| \rightarrow R} \frac{\partial u}{\partial r}(x) = \infty \\ (ii) \quad & |\nabla_\tau u(x)| = o\left(\frac{\partial u}{\partial r}(x)\right) \quad \text{as } |x| \rightarrow R, \end{aligned}$$

then u is radial and $\frac{\partial u}{\partial r}(x) > 0$ on $B_R(0) \setminus \{0\}$.

In this statement $\frac{\partial u}{\partial r}(x) = \langle Du(x), x/|x| \rangle$ is the radial derivative and $\nabla_\tau u(x) = Du(x) - |x|^{-2} \langle Du(x), x \rangle x$ is the tangential gradient. This result is settled upon an adaption of the key lemma of [4] in the framework of large solutions. Next we give a sufficient condition in order (4) to hold.

Theorem 2. *Assume g is locally Lipschitz continuous, convex on $[a, +\infty)$ for some $a > 0$ and satisfies (3). Then any large solution of (1) in a ball is a radial function.*

Remark. It is important to notice that this result is not related with uniqueness. For example, if $g(x) = x^2$ it is known that uniqueness may not hold if the radius of the ball is large enough. As a striking example, if g is any polynomial of degree larger than one with positive coefficient of higher order, any large solution of (1) in a ball is radial.

Résultats principaux

Soit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne et $B_R(0)$ la boule de centre 0 et de rayon R dans \mathbb{R}^N , $N \geq 2$. Un résultat classique du à Gidas, Ni et Nirenberg [4] affirme que si u est une solution positive de

$$(1) \quad -\Delta u + g(u) = 0$$

dans $B_R(0)$ qui s'annule sur $\partial B_R(0)$ alors elle est radiale. Si u prend la valeur k au bord le résultat reste valable pourvu que $u - k$ ne change pas de signe dans $B_R(0)$. Partant de cette observation, H. Brezis a conjecturé que si u est une *grande solution*, c'est à dire une solution qui vérifie

$$(2) \quad \lim_{|x| \rightarrow R} u(x) = \infty,$$

alors elle est radiale. L'existence de grandes solutions est associée à la condition de Keller et Osserman qui est satisfaite si g est positive et croissante

sur $[a, +\infty[$ pour un $a > 0$ et y vérifie

$$(3) \quad \int_a^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{G(s)}} < +\infty \quad \text{où } G(s) = \int_a^s g(\sigma) d\sigma.$$

Nous donnons deux résultats qui confirment la validité de la conjecture de Brezis.

Théorème 1 *Supposons que g est localement lipschitzienne et soit u une grande solution de (1) dans la boule $B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Si on a*

$$(4) \quad \begin{aligned} (i) \quad & \lim_{|x| \rightarrow R} \frac{\partial u}{\partial r}(x) = \infty \\ (ii) \quad & |\nabla_\tau u(x)| = o\left(\frac{\partial u}{\partial r}(x)\right) \quad \text{as } |x| \rightarrow R, \end{aligned}$$

alors u est radiale et $\frac{\partial u}{\partial r}(x) > 0$ dans $B_R(0) \setminus \{0\}$.

Dans cet énoncé $\frac{\partial u}{\partial r}(x) = \langle Du(x), x/|x| \rangle$ est la dérivée radiale de u et $\nabla_\tau u(x) = Du(x) - |x|^{-2} \langle Du(x), x \rangle x$ son gradient tangentiel.

Théorème 2 *Supposons que g est localement lipschitzienne et qu'il existe $a > 0$ tel que g est convexe sur $[a, +\infty[$ et y vérifie (3). Alors toute grande solution de (1) dans une boule est radiale.*

Remarque. Il est important de noter que ce résultat n'augure en rien de l'unicité des grandes solutions de (1). Ainsi, si $g(x) = x^2$, il est classique [10] que si le rayon de la boule est assez grand, il existe plusieurs grandes solutions, dont une seule positive. Par exemple, si g est un polynôme de degré > 1 dont le coefficient du terme de plus haut degré est positif, alors le résultat du Théorème 2 s'applique.

Le résultat suivant étend aussi un autre théorème de [4].

Corollaire 1 *Supposons que g vérifie les hypothèses du Théorème 2. Si u est une solution de (1) dans $\Gamma_{R,r} = \{x \in \mathbb{R}^N : r < |x| < R\}$ qui vérifie (2), alors $\frac{\partial u}{\partial r}(x) > 0$ pour tout $x \in \Gamma_{R,(r+R)/2}$.*

Principe de la démonstration du Théorème 1. On commence par noter que pour tout $P \in \partial B^+ = \partial B_R(0) \cap \{x_1 > 0\}$, il existe $\delta \in]0, R[$ tel que

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) > 0 \quad \forall x \in B_R(0) \cap B_\delta(P).$$

Ceci découle immédiatement de (4). La suite de la démonstration du Théorème 1 repose sur la méthode des plans mobiles comme dans [4]. Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N\}$ une base orthonormée de \mathbb{R}^N et (x_1, \dots, x_N) les coordonnées d'un

point x dans cette base. Pour $0 < \lambda < R$ on désigne par T_λ l'hyperplan $\{x : x_1 = \lambda\}$, $\Sigma_\lambda = \{x \in B_R(0) : \lambda < x_1 < R\}$, $\Sigma'_\lambda = \{x \in B_R(0) : 2\lambda - R < x_1 < \lambda\}$, par x_λ le symétrique de x , par rapport à T_λ , de coordonnées $(2\lambda - x_1, x_2, \dots, x_N)$ et par u_λ la fonction réfléchie de u , définie par $u_\lambda(x) = u(x_\lambda)$. On applique (5) avec $P = P_0 = R\mathbf{e}_1$, $\delta_0 = \delta(P_0)$. On en déduit que pour tout $\lambda \in [\lambda_0, R[$ (où $\lambda_0 = R - \delta_0^2/2R$) on a

$$(6) \quad u(x_\lambda) < u(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) > 0 \quad \forall x \in \Sigma_\lambda.$$

Soit $\mu = \inf\{\lambda > 0 : \text{t. q. (6) soit vérifiée}\}$. On suppose $\mu > 0$. Par définition $u \geq u_\mu$ dans Σ_μ . Soit $K_\mu = T_\mu \cap \partial B_R(0)$. Comme K_μ est compact, grace à (5) il existe un ϵ -voisinage U_ϵ de K_μ tel que

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) > 0 \quad \forall x \in U_\epsilon \cap B_R(0).$$

On pose $D_\epsilon = B_{R-\epsilon/2}(0) \cap \Sigma_\mu$ et $a(x) = (g(u) - g(u_\mu))/(u - u_\mu)$. Comme $w = u - u_\mu$ vérifie

$$(8) \quad \Delta w - aw = 0 \quad \text{dans } D_\epsilon, \quad w \geq 0, \quad w \not\equiv 0,$$

on en déduit $w > 0$ par le principe du maximum fort, et $\partial u/\partial x_1 > 0$ sur $T_\mu \cap \partial D_\epsilon$ par le lemme de Hopf. La continuité de Du à l'intérieur et (7) impliquent qu'il existe $\sigma > 0$ tel que

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) > 0 \quad \forall x \in B_R(0) \cap \{x : \mu - \sigma < x_1 < \mu + \sigma\}.$$

De plus, comme ϵ est arbitrairement petit, $u > u_\mu$ dans Σ_μ . La définition de μ implique qu'il existe une suite positive croissante $\{\lambda_n\}$ convergeant vers μ et une suite de points $\{x_n\}$ convergeant vers $\bar{x} \in \overline{\Sigma_\mu}$ telles que $u(x_n) \leq u((x_n)_{\lambda_n})$. Comme $u > u_\mu$ dans Σ_μ , \bar{x} ne peut appartenir à Σ_μ . Le théorème des accroissement fini et (9) impliquent que \bar{x} ne peut appartenir non plus à T_μ . Enfin \bar{x} ne peut appartenir à $\Sigma_\mu \setminus T_\mu$ puisque cela impliquerait que $u(x_n) - u((x_n)_{\lambda_n})$ tende vers $+\infty$. Par contradiction il s'ensuit que $\mu = 0$. Changeant x_1 en $-x_1$ puis permutant les directions, on en déduit que u est radiale.

Principe de la démonstration du Théorème 2. La clef est le résultat suivant.

Lemme 1 *Supposons que g vérifie les hypothèses du Théorème 2, et que u est une grande solution de (1) dans $B_R(0)$. Alors*

$$(10) \quad \begin{aligned} (i) \quad & \lim_{|x| \rightarrow R} \nabla_\tau u(x) = 0 \\ (ii) \quad & \lim_{|x| \rightarrow R} \frac{\partial u}{\partial r}(x) = \infty, \end{aligned}$$

et les deux limites ont lieu uniformément par rapport à $\{x : |x| = r\}$.

Démonstration. Soient $(r, \sigma) \in \mathbb{R}_+ \times S^{N-1}$ les coordonnées sphériques dans \mathbb{R}^N , $\tilde{\sigma} \in S^{N-1}$ et $\{\gamma_j\}_{j=1}^{N-1}$ un ensemble de géodésiques de S^{N-1} se coupant

orthogonalement en $\tilde{\sigma}$, par exemple $\gamma_j(t) = e^{tA_j}(\tilde{\sigma})$ où les matrices $\{A_j\}_{j=1}^{N-1}$ sont anti-symétriques et vérifient $\langle A_j \tilde{\sigma}, A_k \tilde{\sigma} \rangle = \delta_j^k$. Si Δ_S est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur S^{N-1} , on a

$$(11) \quad \Delta_S u(r, \tilde{\sigma}) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{d^2 u(r, \gamma_j(t))}{dt^2} \Big|_{t=0}.$$

Par hypothèse $g = g_\infty + \tilde{g}$ où g_∞ est convexe et vérifie (3) et \tilde{g} est localement lipschitzien et identiquement nul sur $[M, +\infty[$ pour un $M > 0$. Sans restriction on peut supposer g_∞ croissante. Il existe $r_0 \in]0, R[$ tel que $u(x) \geq M$ pour tout $|x| \geq r_0$. Ainsi

$$(12) \quad |\Delta u - g_\infty(u)| = |\tilde{g}(u)| = |\tilde{g}(u)\chi_{B_{r_0}(0)}| \leq K_0.$$

Soit $\phi(x) = (2N)^{-1}(R^2 - |x|^2)$. Comme $\Delta\phi = -1$ on déduit de (12)

$$\Delta(u - K_0\phi) \geq g_\infty(u) \geq g_\infty(u - K_0\phi),$$

et donc $u - K_0\phi$ est une sous-solution du problème

$$(13) \quad \begin{cases} -\Delta v + g_\infty(v) = 0 & \text{in } B_R(0) \\ \lim_{|x| \rightarrow R} v(x) = \infty. \end{cases}$$

Par convexité (voir par exemple [6], [7], même si il existe une démonstration plus directe dans le cas radial) ce problème admet une unique solution $v = U_R$. Comme $u + K_0\phi$ est une sur-solution, on en déduit

$$(14) \quad U_R - K_0\phi \leq u \leq U_R + K_0\phi.$$

Soit $h > 0$, $j = 1, \dots, N-1$ et $u^h(x) = u(e^{hA_j}(x)) = u(r, e^{hA_j}\sigma)$, où $x = (r, \sigma)$. Comme le problème est invariant par rotation, u^h vérifie aussi (14). Par suite

$$(15) \quad \lim_{|x| \rightarrow R} u(x) - u^h(x) = 0.$$

De plus $\Delta u^h = g_\infty(u^h)$ dans $\Gamma_{R, r_0} = B_R(0) \setminus B_{r_0}(0)$ et il existe $L > 0$, indépendant de h , tel que $|(u - u^h)(x)| \leq L|h|$ pour $|x| = r_0$. Si Ψ est la fonction harmonique dans Γ_{R, r_0} , nulle sur $\partial B_R(0)$ et valant 1 sur $\partial B_{r_0}(0)$, et $v^h = u^h + |h|L\Psi$, alors

$$(16) \quad \Delta(v^h - u) \leq g_\infty(v^h) - g_\infty(u) \quad \text{dans } \Gamma_{R, r_0}.$$

La relation (15) implique que $v^h(x) - u(x) \rightarrow 0$ si $|x| \rightarrow R$. Par monotonie $v^h = u^h + |h|L\Psi \geq u$. Si on définit la dérivée de Lie selon le champ de vecteurs $\sigma \mapsto A_j\sigma$ par

$$L_{A_j} u(r, \sigma) = \frac{du(r, e^{tA_j}\sigma)}{dt} \Big|_{t=0},$$

alors

$$(17) \quad |L_{A_j} u(r, \tilde{\sigma})| \leq L\Psi(x) \leq C(R - r).$$

Cette relation implique (10)-i.

Pour démontrer (10)-ii, on pose $w^h = h^{-2}(u^h + u^{-h} - 2u)$. La convexité de g_∞ implique que w^h vérifie $\Delta w^h \geq \xi(x)w^h$ dans Γ_{R,r_0} , où $\xi(x) \geq 0$, et donc que w^h_+ est sous-harmonique dans Γ_{R,r_0} . Comme u est de classe C^2 , il existe $\tilde{L} > 0$, indépendant de h , tel que $w^h \leq \tilde{L}$ sur $\partial B_{r_0}(0)$. Comme w^h et Ψ s'annulent sur $\partial B_R(0)$, $w^h_+ \leq \tilde{L}\Psi$ dans Γ_{R,r_0} et donc

$$(18) \quad \frac{d^2 u(r, \gamma_j(t))}{dt^2} \Big|_{t=0} \leq \tilde{L}\Psi.$$

On déduit de (11) que $(\Delta_S u)_+(x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow R$. En écrivant l'équation (1) en coordonnées sphériques, on obtient donc

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{N-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \geq r^{N-1} g_\infty(u) + o(1) \quad \text{uniformément quand } |x| \rightarrow R.$$

Clairement $u \geq z$ où z est la solution de

$$(20) \quad \begin{cases} -\Delta z + g_\infty(z) = 0 & \text{dans } \Gamma_{R,r_0} \\ \lim_{|x| \rightarrow R} z(x) = \infty \\ z = \min_{\partial B_{r_0}(0)} u & \text{sur } \partial B_{r_0}(0). \end{cases}$$

Donc $g_\infty(u) \geq g_\infty(z)$. Comme $g_\infty(z) \notin L^1(\Gamma_{R,r_0})$, on a

$$\lim_{r \rightarrow R} \int_{r_0}^r g_\infty(u(s, \sigma)) s^{N-1} ds = +\infty \quad \text{uniformément pour } \sigma \in S^{N-1}.$$

Ceci implique

$$\lim_{r \rightarrow R} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \sigma) = +\infty \quad \text{uniformément pour } \sigma \in S^{N-1},$$

et donc (10)-ii et le Lemme 1. Le théorème 2 en découle.

REFERENCES

- [1] Aftalion A., del Pino M. and Letelier R.: *Multiple boundary blow-up solutions for nonlinear elliptic equations* Proc. Roy. Soc. Edinburgh A **133** (2003), no. 2, 225–235.
- [2] Du, Y., Guo, Z.: *Boundary blow-up solutions and their applications in quasilinear elliptic equations*, J. Anal. Math. **89**, 277–302 (2003).
- [3] Du, Y., Guo, Z.: *Uniqueness and layer analysis for boundary blow-up solutions*, J. Math. Pures Appl. **83**, n. 6, 739–763 (2004).
- [4] Gidas B., Ni W. M. et Nirenberg L.: *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68**, 209–243 (1979).
- [5] Keller J.B.: *On solutions of $\Delta u = f(u)$* , Comm. Pure Appl. Math. **10**, 503–510 (1957).
- [6] Marcus M. et Veron L.: *Uniqueness and asymptotic behaviour of solutions with boundary blow-up for a class of nonlinear elliptic equations*, Ann. Inst. H. Poincaré **14** (1997), 237–274.
- [7] Marcus M. et Véron L.: *Existence and uniqueness results for large solutions of general nonlinear elliptic equations*, J. Evolution Equ. **3** (2003), 637–652.
- [8] McKenna, P. J., Reichel, W., Walter, W.: *Symmetry and multiplicity for nonlinear elliptic differential equations with boundary blow-up*, Nonlinear Anal. **28**, n. 7, 1213–1225 (1997).
- [9] Osserman R.: *On the inequality $\Delta u \geq f(u)$* , Pacific J. Math. **7** (1957), 1641–1647.

- [10] Pohožaev, S. I. : *The boundary value problem for equation $\Delta U = U^2$* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR **138**, 305-308 (1961).