THESE

DE DOCTORAT DE TROISIEME CYCLE DE MATHEMATIQUES PURES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

par

Jacques VEY

" SUR UNE NOTION D'HYPERBOLICITE DES VARIETES LOCALEMENT PLATES "

Soutenue le 27 mai 1969 devant la Commission d'examen

C. CHABAUTY	Président
A. BERNARD J.L. KOSZUL	Examinateurs

THESE

DE DOCTORAT DE TROISIEME CYCLE DE MATHEMATIQUES PURES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

par

Jacques VEY

" SUR UNE NOTION D'HYPERBOLICITE DES VARIETES LOCALEMENT PLATES "

Soutenue le 27 mai 1969 devant la Commission d'examen

C. CHABAUTY	Président
A. BERNARD J.L. KOSZUL	Examinateurs

L I S T E des P R O F E S S E U R S

DOYEN HONORAIRE : M. MORET

DOYEN : M. BONNIER

PROFESSEURS TITULAIRES :

MM.	NEEL Louis	Physique Expérimentale
	HEILMANN René	Chimie Organique
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique Rationnelle
	CHABAUTY Claude	Calcul différentiel et intégral
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	CHENE Marcel	Chimie Papetière
	FELICI Noël	Electrostatique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	BARBIER Reynold	Géologie Appliquées
	SANTON Lucien	Mécanique des Fluides
	OZENDA Paul	Botanique
	FALLOT Maurice	Physique Industrielle
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques
	GALVANI O.	Mathématiques
	MOUSSA André	Chimie Nucléaire
	TRAYNARD Philippe	Chimie Générale
	SOUTIF Michel	Physique Générale
	CRAYA Antoine	Hydrodynamique
	REULOS René	Théorie des Champs
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	AYANT Yves	Physique Approfondie
	GALLISSOT François	Mathématiques
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques
	BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	BONNIER Etienne	Electrochimie et Electrométallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie Animale
	PILLET E.	Physique Industrielle & Electrotechnique
	YOCCOZ Jean	Physique Nucléaire Théorique
	DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
	GERBER Robert	Mathématiques
	PAUTHENET R.	Electrotechnique
	VAUQUOIS Bernard	Calcul Electronique
	BARJON Robert	Physique Nucléaire
	BARBIER Jean-Claude	Physique
	SILBER R.	Mécanique des Fluides
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	KLEIN Joseph	Mathématiques

PROFESSEUR TITULAIRES (suite) :

MM.	VAILLANT François	Zoologie et Hydrobiologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	SENGEL Philippe	Zoologie
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la Cellulose
	BRISSONNEAU P.	Physique
	GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
Mme	KOFLER Lucie	Botanique
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	PEBAY-PEROULA Jean-C.	Physique
	RASSAT André	Chimie systématique
	DUCROS Pierre	Cristallographie Physique
	DODU Jacques	Mécanique Appliquée I.U.T.
	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des Fluides
	LACAZE Albert	Thermodynamique

PROFESSEURS SANS CHAIRE :

MM.	GIDON P.	Géologie et Minéralogie
	GIRAUD P.	Géologie
	PERRET R.	Servomécanisme
Mme	BARBIER M.J.	Electrochimie
Mme	SOUTIF J.	Physique
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	DEPASSEL R.	Mécanique des Fluides
	GASTINEL Noël	Mathématiques Appliquées
	GLENAT René	Chimie
	BARRA Jean	Mathématiques Appliquées
	COUMES André	Electronique
	PERRIAUX Jacques	Géologie et Minéralogie
	ROBERT André	Chimie Papetière
	BIAREZ Jean	Mécanique Physique
	BONNET Georges	Electronique
	CAUQUIS Georges	Chimie Générale
	BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
	DEPOMMIER Pierre	Physique Nucléaire et Génie Atomique
	HACQUES Gérard	Calcul Numérique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
Mme	KAHANE Josette	Physique
Mme	BONNIER J.M.	Chimie
	VALENTIN Jacques	Physique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques

PROFESSEURS ASSOCIES :

MM.	NAPP-ZINN	Botanique
	RODRIGUES Alexandre	Mathématiques Pures
	STANDING Kenneth	Physique Nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES :

MM. LANCIA Roland	Physique Atomique
DEPORTES C.	Chimie
Mme BOUCHE Liane	Mathématiques
SARROT-REYNAULD J.	Géologie Propédeutique
KAHANE André	Physique Générale
DOLIQUE Jean-Michel	Electronique
BRIERE Georges	Physique
DESRE Georges	Chimie
LAJZEROWICZ	Physique
BERTRANDIAS J.P.	Mathématiques Appliquées
LAURENT P.	Mathématiques Appliquées
Mme BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
LONGEQUEUE J.P.	Physique
SOHM Jean-Claude	Electrochimie
ZADWORNY François	Electronique
DURAND F.	Chimie Physique
CARLIER Georges	Biologie végétale
AUBERT Georges	Physique
DELPUECH Jean-Jacques	Chimie Organique
PFISTER Jean-Claude	Physique
CHIBON P.	Biologie Animale
IDELMAN S.	Physiologie Animale
BOUVARD Maurice	Hydrologie
RICHARD Lucien	Botanique
PELMONT Jean	Physiologie Animale
BLOCH Daniel	Electrotechnique I. P.
BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées I. P.
MOREAU René	Hydraulique I. P.
BRUGEL L.	Energétique I. U. T.
SIBILLE R.	Construction Mécanique I. U. T.
ARMAND Yves	Chimie I. U. T.
BOLLIET Louis	Informatique I. U. T.
KUHN Gérard	Energétique I. U. T.
GERMAIN Jean-Pierre	Construction Mécanique I. U. T.
CONTE René	Thermodynamique
JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
Mle PIERY Yvette	Biologie Animale
BERNARD Alain	Mathématiques Pures

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES :

MM. SAWCZUK A.	Mécanique des Fluides
CHEEKE John	Thermodynamique
YAMADA O.	Physique du Solide
NATR Lubomir	Biologie Végétale
NAYLOR Arch	Physique industrielle
SILBER Léo	Radioélectricité
NOZAKI Akihiro	Mathématiques Appliquées
RUTLEDGE Joseph	Mathématiques Appliquées
DONOHO Paul	Physique Générale
EGGER Kurt	Biologie Végétale

TABLE DES MATIERES

* * *

L'idée de ce travail est dûe à Monsieur J.L. KOSZUL, et je n'aurai pu l'amener à l'état où il se trouve sans ses précieux conseils et les très nombreux entretiens qu'il m'a accordés.

Monsieur C. CHABAUTY a bien voulu présider le Jury, et Monsieur A. BERNARD en faire partie : qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude.

Enfin mes remerciements vont à Mademoiselle E. JOURDANET et à Monsieur C. GAUDE qui se sont chargés de l'impression de ce travail avec leur amabilité et leur diligence coutumières.

* * *

INTRODUCTION

Dans une série de travaux récents, W. KAUP est arrivé à la généralisation suivante de la classique notion, d'hyperbolicité pour les surfaces de Riemann : X et Y désignant deux espaces analystiques complexes, notons Mor(X,Y) l'espace des applications holomorphes de X dans Y, muni de la topologie "compacts-ouverts" ; l'espace Y sera dit hyperbolique si, quel que soit l'espace analytique connexe X, l'application naturelle

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}(X,Y) \times X &\longrightarrow Y \times X \\ (f,x) &\longmapsto (f(x),x) \end{aligned}$$

est propre. La classe d'espaces ainsi distinguée contient évidemment les surfaces de Riemann hyperboliques au sens classique, ainsi que les quotients compacts de domaines bornés de $\mathbb{C}^n$, les domaines bornés homogènes, etc. (cf. KAUP [1]) ; elle semble être un cadre naturel pour certains théorèmes de finitude , comme le théorème de H. Cartan sur les domaines bornés, le théorème de Borel et Narasimhan (cf. [3]), le théorème de Bochner.

Le but de ce travail a été de transplanter la notion dans la catégorie des variétés différentiables à connexion linéaire plate (variétés localement plates). Il s'avère que la notion d'hyperbolicité ainsi transposée permet de caractériser complètement les variétés localement plates admettant comme revêtement universel un ouvert convexe saillant de R^n , lesquelles avaient déjà fait l'objet de plusieurs travaux (cf. [2]). Elle permet d'obtenir des résultats analogues aux théorèmes de Borel-Narasimhan et de Bochner.

CHAPITRE I

DISTANCE DE CARATHEODORY

Notations :

Une application affine d'une variété localement plate dans une autre est une application qui, à l'aide d'atlas affines, s'exprime localement par des applications affines. Le rang d'une telle application est localement constant. On notera $Aff(X,Y)$ l'espace des applications affines d'une variété localement plate X dans une autre Y ; et on le munira de la topologie "compacts ouverts", engendrée par les ouverts

$$\mathfrak{O}(K,U) = \{f \in Aff(X,Y) \mid fK \subset U\}$$

où K est un compact de X et U un ouvert de Y. On appellera en particulier forme affine sur X toute application affine de X dans R.

Proposition 1 :

Soit X une variété localement plate connexe de dimension n : il existe un étalement affine de son revêtement universel $\tilde{X}$ au-dessus d'un ouvert de R^n .

En effet, soit a un point de $\tilde{X}$. On peut définir au voisinage un isomorphisme local π de X et R^n . Soit $\gamma(t)$ une courbe issue de a et $\gamma(t)$ un point dessus tel qu'on ait pu prolonger π au voisinage des points $\gamma(t)$ pour $t < \tau$. Il existe un voisinage ouvert V de $\gamma(t)$ et un isomorphisme affine π' de V sur l'ouvert $\pi'V$ de R^n . Soit $\gamma(t)$ un point de la courbe dans V, et W un voisinage de ce point, inclus dans V et assez petit pour qu'on ait pu y prolonger π. L'application $\pi \circ \pi'^{-1}$, définie sur $\pi'W$, y est affine donc se prolonge à R^n entier, ce qui permet d'étendre π à V. Ainsi π se définit sur X entier par simple connexité et est un isomorphisme local de X et de l'ouvert $\pi(X)$.

Inversement, un espace étalé au-dessus d'un ouvert de R^n se munit facilement d'une connexion plate.

Il résulte en particulier de cette proposition que toute variété localement plate connexe est à base dénombrable (par le théorème de Poincaré-Volterra).

Proposition 2 :

Si les formes affines séparent les points sur une variété localement plate connexe X de dimension n, elle est isomorphe à un ouvert de R^n.

Soit $p : \tilde{X} \to X$ le revêtement universel de X, $\pi = \tilde{X} \to \Omega$ un étalement de X au-dessus d'un ouvert Ω de R^n. Soit φ une forme affine sur $\tilde{X}$, et U un ouvert de $\tilde{X}$ restreint auquel π soit un isomorphisme. L'application $\varphi\pi^{-1}$ est une forme affine sur l'ouvert $\pi(U)$ de R^n, elle se prolonge en une forme affine ψ sur R^n entier. On a $\varphi = \psi\pi$ sur U, donc sur $\tilde{X}$ entier, c'est-à-dire que toute forme affine sur $\tilde{X}$ se factorise par π.

Soient maintenant x et y dans $\tilde{X}$, et supposons que $\pi x = \pi y$. Quelle que soit φ dans $Aff(X,R)$, φp est une forme affine sur $\tilde{X}$ prenant la même valeur en x et y. Les formes affines séparant les points sur X, $px = py$. Ceci permet de définir un étalement $q : \Omega \to X$ tel que $p = q\pi$. On va montrer que q est injectif.

En effet, supposons qu'on ait deux points distincts x et y dans Ω tels que $qx = qy$. Quelle que soit φ dans $Aff(X,R)$, la forme affine φq sur Ω est constante sur D, intersection de Ω et de la droite de R^n joignant x et y. Par suite φ est constante sur $q(D)$, qui se réduit à un point. Ceci implique que le rang de q est inférieur à n, d'où une contradiction.

Définition 1 :

Une variété localement plate est dite positivement séparable si les formes affines positives y séparent les points.

Proposition 3 :

Une variété localement plate connexe est positivement séparable si et seulement si elle est isomorphe à un ouvert de R^n d'enveloppe convexe saillante (ie. ne contenant pas de droite entière).

Une telle variété est isomorphe à un ouvert Ω de R^n. Considérons les différentielles des formes affines positives sur Ω : si elles annulaient toutes un même vecteur $u \neq 0$, on ne pourrait séparer les points a et $a + u$, supposés dans Ω. On peut donc trouver n formes affines φ_i indépendantes telles que Ω soit contenu dans le cône convexe saillant

$$\{x \in R^n \mid \varphi_i(x) > 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n\} .$$

Proposition 4 :

Soit Ω un ouvert de R^n positivement séparable, x et y deux de ses points.

1) La famille des nombres $\left|\log \frac{\varphi x}{\varphi y}\right|$, où φ décrit l'ensemble des formes affines positives sur Ω, est bornée et atteint son maximum ; si on appelle $C_\Omega(xy)$ ce maximum,

2) $C_\Omega(xy)$ est une distance sur Ω, définissant la topologie usuelle,

3) Si Ω' est un autre ouvert borné séparable dans un R^p, et $F : \Omega \to \Omega'$ une application affine,

$$C_{\Omega'}(Fx,Fy) \leq C_\Omega(x,y)$$

en particulier C_Ω est invariante par automorphisme.

4) La distance C_Ω est complète si et seulement si l'ouvert Ω est convexe. La distance C_Ω est appelée distance de Carathéodory sur Ω.

Commençons par observer qu'une forme affine positive sur Ω l'est encore sur l'enveloppe convexe $\hat{\Omega}$. Soit H_φ l'hyperplan des zéros de φ et c son intersection avec la droite xy, rejetée à l'infini éventuellement : $\frac{\varphi x}{\varphi y} = \frac{cx}{cy}$. Le point c est extérieur à Ω donc au segment xy ; par suite si a et b désignent les intersections de la droite xy et de $\partial\hat{\Omega}$ (l'un au plus étant rejeté à l'infini),

$$\left|\log \frac{\varphi x}{\varphi y}\right| \leq \sup\left(\left|\log \frac{ax}{ay}\right|, \left|\log \frac{bx}{by}\right|\right)$$

majorant qui est atteint par un hyperplan d'appui à $\hat{\Omega}$ en a ou b. Ceci établit le 1). Il est immédiat que C_Ω est une distance et qu'elle a la propriété du 3) ; en outre

$$C_\Omega = C_{\hat{\Omega}}|\Omega \quad .$$

Montrons que C_Ω est continue : il suffit de voir que si x tend vers $a \in \Omega$, $C_\Omega(x,a) \to 0$. On équipe R^n d'une métrique euclidienne telle que la boule unité U centrée en a soit contenue dans Ω. Alors

$$C_\Omega(x,a) \leq C_U(x,a)$$

et on voit facilement que cette dernière quantité tend vers 0.

Supposons maintenant Ω convexe. On vérifie alors que si x tend vers l'infini, $C_\Omega(x,a) \to \infty$, ce qui montre que les boules

$$B(a,r) = \{x \in \Omega \mid C_\Omega(x,a) \leq r\} \qquad (r \geq 0)$$

sont bornées ; et que $C_\Omega(x,a) \to \infty$ si x tend vers un point du bord, ce qui montre qu'elles sont fermées dans R^n , donc compactes. Par suite C_Ω est complète et elle définit la topologie usuelle : cette dernière propriété reste valable pour tout ouvert d'enveloppe convexe Ω ce qui achève la démonstration du 2).

Il reste à voir que C_Ω n'est pas complète si Ω n'est pas convexe. Dans ce cas, en effet, on prend un point $b \in \hat{\Omega} \cap \partial\Omega$ et une suite $x_n \in \Omega$ tendant vers b. Par continuité, $C_{\hat{\Omega}}(x_n,b)$ tend vers 0 et x_n est de Cauchy pour $C_{\hat{\Omega}}$. Or $C_{\hat{\Omega}}|\Omega$ donc

x_n est une suite de Cauchy pour C_Ω qui diverge dans Ω,
c.q.f.d.

Dans le cas particulier où $\Omega = R^+$, la demi-droite positive,

$$C_{R^+}(x,y) = \left|\log \frac{x}{y}\right|$$

et si Ω est un intervalle ouvert borné $]a,b[$ de R,

$$C_{]a,b[}(x,y) = \sup\left(\left|\log \frac{x-a}{y-a}\right|, \left|\log \frac{x-b}{y-b}\right|\right).$$

Corollaire :

Soit Ω un ouvert positivement séparable de $\mathbb{R}^n$, et G un groupe d'automorphismes affines de Ω. Si l'espace des orbites $G\backslash\Omega$ est quasi-compact, Ω est convexe.

D'après la proposition précédente, il suffit de voir que C_Ω est complète. Soit donc x_n une suite de Cauchy dans Ω. Par hypothèse, il existe un compact K de Ω tel que $GK = \Omega$; on peut en outre trouver un nombre réel positif δ tel que

$$L = \{x \in \Omega \mid C_\Omega(x,K) \leq \delta\}$$

constitue un voisinage compact de K inclus dans Ω. Soit alors $g \in G$ tel que $gx_1 \in K$; comme la suite x_n est de Cauchy, il est permis de supposer $C_\Omega(x_n,x_m) < \delta$ quels que soient n et m, auquel cas la suite gx_n est une suite de points de L. Elle converge donc vers un point c de L, et x_n tend vers $g^{-1}c \in \Omega$.

La distance de Carathéodory sur un ouvert Ω positivement séparable de R^n possède entre autres la propriété suivante :

(H) Si $f \in \mathrm{Aff}(]0,1[,\Omega)$

$$C_\Omega(fs,ft) \leq C_{]0,1[}(s,t)$$

quels que soient s et t dans $]0,1[$.

La généralisation suivante sera utile dans la suite :

Définition 2 :

Soit X une variété localement plate. Une distance hyperbolique d sur X est une distance complète sur X telle que si $f \in \mathrm{Aff}(]0,1[,X)$,

$$d(fs,ft) \leq C_{]0,1[}(s,t)$$

quels que soient s et t dans $]0,1[$.

Tous les intervalles bornés de R étant isomorphes, on peut remplacer $]0,1[$ par n'importe lequel d'entre eux ; et la majoration sur les géodésiques implique comme pour la distance de Carathéodory la continuité de d. Une distance hyperbolique, étant continue et complète (au sens que toute d-suite de Cauchy converge dans la topologie de la variété), définit la topologie de X.

Théorème :

Soit Y une variété localement plate de dimension n, connexe. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1) Y est hyperbolique.

2) Y admet comme revêtement universel un ouvert convexe saillant de R^n.

3) Il existe une distance hyperbolique sur Y.

Ce théorème va résulter des propositions qui suivent :

Proposition 2 :

Soit I un intervalle ouvert borné de R, et Y une variété localement plate connexe de dimension n, telle que l'application canonique

$$\mathrm{Aff}(I,Y) \times I \to Y \times I$$

soit propre. Le revêtement universel $\tilde{Y}$ de Y est alors isomorphe à un ouvert convexe saillant de R^n.

(Tous les intervalles ouverts bornés de R étant isomorphes, l'intervalle I est en fait quelconque).

A) On va commencer par établir que deux points quelconques de Y peuvent être joints par une géodésique. Soient a et b dans Y : il existe une suite

$$a = a_0, a_1, \dots, a_n = b$$

dont deux points consécutifs puissent être joints par une géodésique. Si l'on montre, sans hypothèse supplémentaire, que a et a_2 peuvent être joints, en itérant la démonstration on montrera que a et b peuvent l'être. On est finalement ramené au lemme suivant : on a trois points a, b, c dans Y, a et b sont joints par une géodésique ab, b et c par une géodésique bc, et il s'agit de trouver une géodésique joignant a et c.

CHAPITRE II

HYPERBOLICITE

Définition :

La variété localement plate Y est dite hyperbolique si, quelle que soit la variété localement plate connexe X, l'application canonique

$$\begin{aligned} \mathrm{Aff}(X,Y) \times X &\to Y \times X \\ (f,x) &\longmapsto (fx,x) \end{aligned}$$

est propre.

Il revient au même de dire que si K et L sont deux compacts inclus dans X et Y respectivement, l'ensemble

$$\{f \in \mathrm{Aff}(X,Y) \mid fK \cap L \neq \emptyset\}$$

est compact. (La condition de connexité sur X est évidemment essentielle).

Proposition 1 :

Les produits et les sommes de variétés localement plates hyperboliques sont hyperboliques. Une variété localement plate est hyperbolique si et seulement si toutes ses composantes connexes le sont.

Montrons par exemple la première assertion : soit (Y_i) une famille de variétés localement plates, finie pour qu'on puisse considérer le produit $Y = \Pi Y_i$. Si X est une autre variété localement plate, connexe, $\mathrm{Aff}(X,Y)$ est isomorphe à $\Pi\ \mathrm{Aff}(X,Y_i)$ et chaque application

$$\mathrm{Aff}(X,Y_i) \times X \to Y_i \times X$$

étant propre, leur produit est propre. De même, si (Y_i) est une famille quelconque, $\mathrm{Aff}(X,\Sigma Y_i)$ est isomorphe à $\Sigma\ \mathrm{Aff}(X,Y_i)$ à cause de la connexité de X, et on conclut par des raisonnements analogues.

Soit, dans R^2, S le segment $\{(t,0) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ et S' le segment $\{(1,t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$. L'existence des géodésiques ab et bc permet de définir une application affine F d'un voisinage V de $S \cup S'$ dans Y, qui envoie la géodésique S sur la géodésique ab, et S' sur bc (la définition de F au voisinage de (1,0) (envoyé sur b) est facile, et on la prolonge à un voisinage de S (resp. S') en transportant parallèlement le long de ba (resp. bc) un vecteur assez petit tangent en b à bc (resp. ba)).

Soit E l'ensemble des points u de $[0,1]$ tels que F se prolonge à un voisinage de l'ensemble

$$A_u = S' \cup \{(x,y) \in R^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq ux\}$$

E est un intervalle ouvert et non vide. Soit τ sa borne supérieure : on va voir que τ est dans E, ce qui établira que $\tau = 1$, et qu'on peut joindre a à c par la géodésique de Y image par F du segment de R^2 joignant $(0,0)$ à $(1,1)$. Soit

$$f_u(t) = F(t,ut) \qquad (u \in E\ ,\quad 0 \leq t \leq 1)\ .$$

C'est une géodésique paramétrée par $[0,1]$, joignant a à $F((1,u))$. Il existe un réel positif α tels que les points (t,ut) restent dans V pour u dans $[0,1]$ et $|t| < \alpha$ ou $|1-t| < \alpha$. Toutes les géodésiques f_u se prolongent à l'intervalle $]-\alpha,1+\alpha[\ = I$. En vertu de l'hypothèse faite sur Y, l'ensemble

$$\{f \in \mathrm{Aff}(I,Y) \mid f(0) = a,\ f(1) \in bc\}$$

est compact. Les géodésiques f_u forment un ensemble relativement compact, et on peut trouver une suite u_n tendant vers τ telle que les f_{u_n} convergent vers une application g de $\mathrm{Aff}(I,Y)$. En fait, pour t fixé dans $[0,1]$, $f_u(t)$ décrit une géodésique paramétrée par $[0,\tau[$ et on voit que la convergence de $f_{u_n}(t)$ implique la convergence de $f_u(t)$ vers $g(t)$ quand u tend vers τ ; ceci uniformément sur tout compact. Il s'ensuit que f_u tend vers g quand u tend vers τ.

L'image du triangle

$$\{(x,y) \in R^2 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < \tau x\}$$

est une variété totalement géodésique admettant la géodésique g comme morceau du bord (les autres morceaux étant ab et bc). Il est maintenant facile de prolonger F à un voisinage de A_τ

$$A_\tau = S' \cup \{(x,y) \in R^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \tau x\}$$

ce qui achève la démonstration.

B. Soit $p : \tilde{Y} \to Y$ le revêtement universel de Y. Soient a, b, c trois points de $\tilde{Y}$, a et b étant joints par une géodésique ab, b et c par une géodésique bc. Dans Y, $p(a)$ et $p(b)$ sont joints par la géodésique $p(ab)$, $p(b)$ et $p(c)$ par $p(bc)$; la démonstration faite en (A) a permis de construire une famille f_u $(0 \leq u \leq 1)$ de géodésiques joignant $p(a)$ au point de paramètre u sur $p(bc)$: en relevant ces géodésiques, on obtiendra une géodésique dans $\tilde{Y}$ joignant a à c. Il s'ensuit comme en (A) que deux points de $\tilde{Y}$ peuvent être joints par une géodésique.

Soit alors $\pi : \tilde{Y} \to \Omega$ un étalement de $\tilde{Y}$ au-dessus d'un ouvert Ω de R^n. Supposons qu'on ait deux points distincts a et b de Y projetés par π sur le même point c de Ω. Soit α une géodésique joignant a à b paramétrée par $[0,1]$; $\pi\alpha$ est une géodésique de $\Omega \subset R^n$, non constante, et passant deux fois par c ce qui est absurde. Il s'ensuit que π est un isomorphisme de $\tilde{Y}$ et Ω. En outre deux points quelconques de Ω peuvent être joints par une géodésique, ce qui montre que Ω est convexe.

C. Reste à montrer que Ω est saillant. Soit D l'ensemble

$$\{f \in \mathrm{Aff}(]-1,+1[,Y) \mid f(0) = a\}$$

où a est un point de Y. L'application

$$v : D \longrightarrow T_aY$$

$$f \longmapsto \frac{df}{dt}(0)$$

est continue : en effet, si $f_0 \in D$, soit U un ouvert de coordonnées affines contenant a, où l'application exponentielle centrée en a soit bijective, et δ un réel positif tel que $f_0[0,\delta]$ reste inclus dans U. Pour f assez voisine de f_0 dans D, $f[0,\delta]$ reste inclus dans U, et

$$\exp \delta v(f) = \exp \delta \frac{df}{dt}(0) = f(\delta)$$

ce qui montre la continuité de v.

Supposons alors que Ω contienne une droite entière. On en déduit une application f non constante de R dans Y. Les applications f_r de $\mathrm{Aff}(]-1,+1[,Y)$ (r réel) définies par

$$f_r(t) = f(rt)$$

sont dans D, qui est compact en vertu de l'hypothèse sur Y. Les f_r doivent former un ensemble relativement compact. Or

$$v(f_r) = r\frac{df}{dt}(0) \neq 0$$

ensemble non borné de vecteurs : de là une contradiction.

Proposition 3 :

Soit Ω un ouvert convexe saillant dans R^n, et Γ un sous-groupe discret du groupe des automorphismes de Ω, opérant librement et proprement sur Ω. Il existe une distance hyperbolique sur la variété $\Gamma\backslash\Omega$.

Sur $\Gamma\backslash\Omega$, on définit la fonction $d : \Gamma\backslash\Omega \to [0,+\infty[$

$$d(\Gamma x,\Gamma y) = \inf_{\gamma \in \Gamma} C_\Omega(x,\gamma y) \qquad (x,\ y \in \Gamma) .$$

Comme C_Ω est invariante par Γ, d est symétrique. Si $d(\Gamma x,\Gamma y) = 0$, on a une suite $\gamma_n \in \Gamma$ telle que $C_\Omega(x,\gamma_n y)$ tende vers 0, donc que $\gamma_n y$ tende vers x ; d'où $x \in \Gamma y$ et $\Gamma x = \Gamma y$. Enfin

$$d(\Gamma x,\Gamma y) \leq C_\Omega(x,\gamma y) \leq C_\Omega(x,\gamma' z) + C_\Omega(\gamma' z,\gamma y)$$

quels que soient γ et γ', ce qui permet au deuxième membre d'approcher $d(\Gamma x,\Gamma z) + d(\Gamma z,\Gamma y)$ et de démontrer l'inégalité du triangle.

D'autre part, soit I un intervalle de R et $F : I \to \Gamma\backslash\Omega$. L'application F possède un relèvement $\tilde{F} : I \to \Omega$; et si $s, t \in I$

$$d(Fs,Ft) \leq C_\Omega(\tilde{F}s,\tilde{F}t) \leq C_I(s,t)$$

ce qui établit la propriété (H) pour la distance d (donc sa continuité).

Pour établir la complétude de d, on va montrer que les boules fermées sont compactes. On sait déjà qu'elles sont fermées ; et elles sont contenues dans les compacts ΓK, où

$$K = \{x \in \Omega \mid C_\Omega(x,a) \leq 2r\}$$

ce qui termine la démonstration.

<u>Lemme</u> :

<u>Soient X et Y deux variétés localement plates, d une distance hyperbolique sur Y. Tout point a de X admet un voisinage $U(a,\varepsilon)$ dont l'image par toute application de $Aff(X,Y)$ a un diamètre inférieur à ε dans la distance d.</u>

En effet, soit U un ouvert de coordonnées contenant a ; on l'équipe avec une quelconque métrique euclidienne, la boule unité B étant contenue dans U. Sur B, la topologie est définie par C_B, la distance de Carathéodory. Soit x, y dans B et f dans $Aff(X,Y)$. La géodésique α joignant x à y (supposés distincts) recoupe ∂B en z et z' ; et si on la paramètre de façon que z et z' aient les paramètres 0 et 1, x et y correspondent aux paramètres s et t, et

$$C_B(x,y) = C_{]0,1[}(s,t) .$$

Par suite,

$$d(fx,fy) = d(f\alpha s,f\alpha t) \leq C_{]0,1[}(s,t) = C_B(x,y)$$

et il suffit de prendre pour $U(a,\varepsilon)$ la boule de centre a et de rayon $\varepsilon/2$.

Proposition 4 :

Soient X et Y deux variétés localement plates, la première connexe, la deuxième munie d'une distance hyperbolique d. *L'application canonique de* $Aff(X,Y) \times X$ *dans* $Y \times X$ *est propre*.

Soient K et L deux compacts de X et Y respectivement. Il s'agit de montrer la compacité de l'ensemble C

$$C = \{f \in Aff(X,Y) \mid fK \cap L \neq \emptyset\}$$

A. Soit ϵ un réel positif tel que

$$L' = \{y \in Y \mid d(y,L) \leq \epsilon\}$$

soit compact. Il existe un recouvrement fini de K par des ouverts U_i relativement compacts dont les images par toute application affine aient un diamètre inférieur à ϵ. Si $f \in C$, il existe un point x de K tel que $f(x) \in L$; le point x appartient à un des U_i, dont l'image de l'adhérence $f\overline{U_i}$ coupe L et est inclus dans L'. Il s'ensuit que

$$C \subset C' = \cup \{f \in Aff(X,Y) \mid f\overline{U_i} \subset L'\}$$

et comme C est visiblement fermé, il suffit de montrer la compacité de chaque terme de la réunion. En d'autres termes, on est ramené à montrer la compacité de

$$D = \{f \in Aff(X,Y) \mid fK \subset L\} .$$

B. Soit donc $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur D. Si $F \in \mathfrak{U}$ et $x \in X$, on notera

$$F(x) = \{fx \mid f \in F\}$$

$$\mathfrak{U}(x) = \{F(x) \mid F \in \mathfrak{U}\} .$$

Quel que soit x dans X, $\mathfrak{U}(x)$ est une base d'ultrafiltre sur Y. Soit Ω l'ensemble des points x tels que $\mathfrak{U}(x)$ soit convergent. Pour x dans K, $\mathfrak{U}(x)$ est une base d'ultrafiltre sur L, donc converge, ce qui montre que Ω n'est pas vide. Soit $a \in \overline{\Omega}$: on va montrer qu'un voisinage de a est contenu dans Ω, ce qui montrera par connexité que $\Omega = X$.

1°) Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe a' dans Ω tel que $a' \in U(a,\varepsilon)$. La base de filtre $\mathfrak{U}(a')$ converge vers un point b de Y ; il existe donc une partie F de $\mathfrak{U}$ telle que $F(a') \subset B(b,\varepsilon)$ boule de centre b et de rayon ε. Par suite, $F(a) \subset B(b,2\varepsilon)$ ce qui, ε étant arbitraire, montre que $\mathfrak{U}(a)$ est une base de filtre de Cauchy. Il converge donc vers un point c de Y.

2°) Soit $\eta > 0$ tel que la boule $\overline{B(c,\eta)}$ soit compacte, et $F \in \mathfrak{U}$ tel que $F(a) \subset B(c,\eta/2)$. Si $x \in U(a,\eta/2)$, $F(x)$ est contenue dans $B(c,\eta)$ et donc la base de filtre $\mathfrak{U}(x)$ converge. Ainsi $U(a,\eta/2) \subset \Omega$ et $\Omega = X$.

On voit en outre que la convergence est uniforme dans un voisinage de tout point de X, ce qui montre que $\mathfrak{U}$ converge dans la topologie des compacts ouverts, c.q.f.d.

Démonstration du théorème :

Par la Proposition 2 (avec $X = I$), le 1°/ implique le 2°/ ; par la Proposition 3, le 2°/ implique le 3°/, car, le groupe discret Γ des automorphismes du revêtement opère librement et proprement ; enfin la Proposition 4 ramène du 3°/ au 1°/.

On sait d'autre part [2] que les variétés localement plates hyperboliques sont caractérisées par l'existence d'une 1-forme différentielle fermée α dont la différentielle covariante $D\alpha$ soit définie positive.

CHAPITRE III

ESPACES DE MORPHISMES

Pour étudier l'espace des applications affines entre deux variétés localement plates, on a besoin du lemme technique suivant :

Lemme :

Soient X et Y deux variétés localement plates, la première connexe, de dimensions respectives m et n. Soient U et V deux ouverts de coordonnées affines sur X et Y, et

$$h : U \to \mathfrak{U} \subset R^m$$

$$k : V \to \mathfrak{V} \subset R^n$$

les cartes locales affines ; on suppose en outre que $\overline{U}$ est compact et que h se prolonge à un voisinage de $\overline{U}$. Soit

$$\Omega = \{f \in \mathrm{Aff}(X,Y) \mid f\overline{U} \subset V\}$$

et

$$c : \Omega \to \mathrm{Aff}(R^m,R^n)$$
$$f \longmapsto kfh^{-1} \quad .$$

Alors c réalise un homéomorphisme de l'ouvert Ω sur l'image $c(\Omega)$.

1°) Par connexité de X, c est injective.

2°) Elle est continue. En effet si $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$ sont $m + 1$ points de U tels que les $h(a_i)$ soient indépendants dans l'espace affine R^m , les ouverts

$$G_W^i = \left\{h \in \mathrm{Aff}(R^m,R^n) \mid h(\{a_i\}) \subset W\right\}$$

où W est un ouvert de R^n , forment une base de la topologie de $Aff(R^m,R^n)$, et

$$c^{-1}(G^i_W) = \left\{f \in \Omega \mid f(\{a_1\}) \subset k^{-1}(W\cap\mathfrak{B})\right\} .$$

3°) Reste à vérifier qu'elle est ouverte. Une base d'ouverts de $Aff(X,Y)$ est formée par les intersections finies d'ouverts

$$\mathfrak{D}(\overline{U}',V') = \{g \in Aff(X,Y) \mid g : \overline{U'} \to V'\}$$

où U' et V' sont des ouverts de coordonnées sur X et Y, $\overline{U}'$ étant compact et les coordonnées sur U' se prolongeant à un voisinage de $\overline{U}'$. Il suffit de montrer que $c(\mathfrak{D}(\overline{U}',V') \cap \Omega)$ est ouvert dans $c(\Omega)$. Soit $g \in \mathfrak{D}(\overline{U}',V') \cap \Omega$: on va voir que si $f \in \Omega$ et si $c(f)$ est assez voisin de $c(g)$, f appartient à $\mathfrak{D}(\overline{U}',V')$.

Pour cela soit $U = U_0,U_1,\ldots,U_n = U'$ une chaîne d'ouverts de coordonnées sur X, U_i coupant U_{i+1} , $\overline{U_i}$ compact et $g\overline{U_i}$ inclus dans un ouvert de coordonnées V_i sur Y ; on peut prendre $V_0 = V$, $V_n = V'$. Soient $h_i : U_i \to \mathfrak{U}_i \subset R^m$ et $k_i : V_i \to \mathfrak{B}_i \subset R^n$ les coordonnées locales ; on suppose aussi que h_i se prolonge à un voisinage de $\overline{U_i}$. Les changements de cartes $h_{i+1}\, h_i^{-1}$, $k_{i+1}\, k_i^{-1}$ se prolongent en des automorphismes de R^m et R^n respectivement. Soit

$$c_i(g) = k_i g h_i^{-1} : \overline{\mathfrak{U}}_i \to \mathfrak{B}_i$$

$$\Phi_{01} : Aff(R^m,R^n) \to Aff(R^m,R^n)$$

$$F \longmapsto k_1 k_0^{-1}\, F\, h_0 h_0^{-1} .$$

Si $c(f)$ est assez proche de $c(g)$, $\Phi_{01}c(f)$ est proche de $\Phi_{01}c(g) = c_1(g)$ dans $Aff(R^m,R^n)$. Or $c_1(g)$ envoie $\overline{\mathfrak{U}_1}$ dans $\mathfrak{B}_1$, donc aussi $\Phi_{01}c(f)$, ce qui montre que f envoie $\overline{U_1}$ dans V_1 . De proche en proche, on peut obtenir que f envoie $\overline{U_i}$ dans V_i pour tout i, et pour $i = n$, on exprime que f est dans $\mathfrak{D}(\overline{U}', V')$, c.q.f.d.

Théorème 1 :

Soient X et Y deux variétés localement plates. Si X est compacte, il existe sur Aff(X,Y) une unique structure de variété localement plate rendant l'application naturelle de Aff(X,Y) x X dans Y affine en chacune des variables.

Les composantes connexes de X étant en nombre fini, soit $X_1, \dots, X_r$, et l'espace Aff(X,Y) étant isomorphe à $\pi \, \mathrm{Aff}(X_i,Y)$, on peut supposer X connexe.

A. On commence par construire un voisinage ouvert D de la diagonale dans X x Y ayant la propriété suivante : si $(y,y') \in D$, y et y' peuvent être joints par un unique arc de géodésique y_t $(0 \leq t \leq 1,\ y_0 = y,\ y_1 = y')$, (y,y_t) restant dans D pour tout $t \in [0\ 1]$.

Il suffit pour cela de construire un premier recouvrement de Y par des ouverts W_k géodésiquement convexes ; puis un deuxième recouvrement par des ouverts V_j géodésiquement convexes dont les réunions deux à deux, quand ils se coupent, soient contenues dans des ouverts du premier recouvrement. L'ouvert D est alors l'ensemble des couples (x,y) où x et y sont deux points de Y appartenant à un même V_j. Les V_j sont alors des ouverts de coordonnées.

B. Soit F un élément de Aff(X,Y). Il existe un recouvrement fini de X par des ouverts de coordonnées U_i, tel que chaque compact $F(\overline{U}_i)$ soit contenu dans un ouvert V_j, qu'on notera $V_{j(i)}$. On peut en outre supposer que les coordonnées sur U_i se prolongent à un voisinage de $\overline{U}_i$. Considérons alors le voisinage ouvert Ω de F défini par

$$\Omega = \{f \in \mathrm{Aff}(X,Y) \mid \text{pour tout } i,\ f(\overline{U}_i) \subset V_{j(i)}\} .$$

Soient f et g dans Ω. Quel que soit x dans X, x appartient à un ouvert U_i, donc fx et gx appartiennent à $V_{j(i)}$, c'est-à-dire que le couple (fx,gx) est dans D. On peut alors définir pour $0 \leq t \leq 1$ les applications $f_t : X \to Y$ envoyant x au point de paramètre t sur la géodésique joignant fx à gx. En coordonnées locales, on voit que les f_t sont affines, et il est clair qu'elles appartiennent à Ω. Toute structure localement plate sur $\mathrm{Aff}(X,Y)$ rendant affine en chaque variable l'application naturelle $\mathrm{Aff}(X,Y) \times X \to Y$ admettra les arcs $t \longmapsto f_t$ comme géodésiques, ce qui établit l'unicité d'une telle structure.

De plus, pour tout $x \in X$, la géodésique joignant fx à gx dans Y et paramétrée par $[0,1]$ se laisse prolonger à un voisinage ouvert de $[0,1]$; et comme X est compact, ceci peut se faire uniformément en x. Par suite l'application $t \longmapsto f_t$ se prolonge à un intervalle ouvert I contenant $[0,1]$.

C. Toute application de Ω envoyant $\overline{U}_1$ dans $V_{j(1)}$, on définit l'application

$$c : \Omega \to \mathrm{Aff}(R^m, R^n)$$

associant à $f \in \Omega$ son expression dans les cartes de domaines U_1 et $V_{j(1)}$. D'après le lemme, Ω et $c(\Omega)$ sont homéomorphes.

Soient f et g dans Ω et f_t l'application définie en (B) : $c(f_t)$ est l'application affine de R^m dans R^n qui envoie $x \in R^m$ au barycentre de $c(f)x$ et $c(g)x$ affectés des masses t et $1-t$, c'est-à-dire le barycentre de $c(f)$ et $c(g)$ dans la structure plate naturelle sur $\mathrm{Aff}(R^m,R^n)$. Par suite, $c(\Omega)$ est convexe, et du fait que f_t est définie sur un voisinage de $[0,1]$, $c(\Omega)$ est ouvert dans la sous-variété affine de $\mathrm{Aff}(R^m,R^n)$ qu'il engendre. L'application c réalise donc un homéomorphisme de Ω sur un ouvert convexe d'un espace affine R^p.

D. A chaque application F de $\mathrm{Aff}(X,Y)$ peut ainsi s'associer un voisinage ouvert Ω_F de F, et un homéomorphisme c_F de Ω_F sur un ouvert convexe U_F d'un espace R^P, avec les propriétés suivantes :

1°) Si f et g appartiennent à Ω_F , et x à X, le couple (fx,gx) appartient à D ce qui définit pour $0 \leq t \leq 1$ les applications f_t envoyant $x \in X$ au point de paramètre t sur la géodésique joignant fx à gx ;

2°) $c_F(f_t)$ est le barycentre de $c_F(f)$ et $c_{F(g)}$ affectés des masses t et 1 - t .

Considérons les changements de cartes de cet atlas : si F et G sont telles que Ω_F et Ω_G se coupent, soient U'_F et U'_G les ouverts images de $\Omega_F \cap \Omega_G$ dans U_F et U_G respectivement. La bijection $c_F c_G^{-1}$ conserve les barycentres de deux points : elle est affine.

Ainsi l'atlas est affine ; l'application naturelle de Aff(X,Y) x X dans Y est manifestement affine en chacune des variables ; et la structure ainsi définie est la seule à remplir cette condition, d'après (B).

<u>Théorème 2</u> :

<u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux variétés localement plates, la première compacte, la deuxième hyperbolique. Muni de sa structure localement plate canonique</u>, Aff(X,Y) <u>est une variété hyperbolique</u>.

On peut supposer X connexe (cf. la remarque au début de la démonstration du théorème 1, et II. Prop. 1). Dans ce cas, Aff(X,Y) est la somme des espaces $\mathrm{Aff}(X,Y_i)$, où les Y_i sont les composantes connexes de Y ; et toujours par la Prop. 1 du chapitre II, on est ramené au cas où X et Y sont connexes.

Soit alors d une distance hyperbolique sur Y, et f et g dans Aff(X,Y) . On pose

$$D(f,g) = \sup_{x \in X} d(fx,gx) \quad .$$

On vérifie aussitôt que D est une distance, et qu'elle est complète. Enfin soit α une application de l'intervalle ouvert borné I dans $Aff(X,Y)$. Si x est dans X, l'application

$$t \mapsto \alpha(t)x \qquad\qquad (t \in I)$$

est affine de I dans X ; donc si s et t sont dans I,

$$d(\alpha(t)x,\alpha(s \quad \leq C_I(s,t)$$

d'où en passant à la borne supérieure.

$$D(\alpha(t),\alpha(s)) \leq C_I(s,t) \quad .$$

La distance D est hyperbolique et $Aff(X,Y)$ est hyperbolique d'après le théorème du chapitre II.

Dans la suite, pour tout point x dans X, on notera τ_x l'application

$$\tau_x : Aff(X,Y) \to Y$$
$$f \longmapsto f(x) \quad .$$

<u>Théorème</u> :

<u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux variétés localement plates, la première compacte et connexe, la deuxième hyperbolique</u> ; <u>et</u> a <u>un point de</u> X, b <u>un point de</u> Y. <u>Il n'y a qu'un nombre fini d'applications affines de</u> X <u>dans</u> Y <u>envoyant</u> a <u>sur</u> b.

Puisque X est compact, on munit l'espace $Aff(X,Y)$ de sa structure canonique de variété localement plate ; et soit C l'ensemble des $f \in Aff(X,Y)$ telles que $fa = b$:

$$C = \{f \in Aff(X,Y) \mid \tau_a f = b\} \quad .$$

L'application affine τ_a a un rang localement constant, et C est une sous-variété plate de $Aff(X,Y)$. Cette sous-variété est compacte en vertu de l'hyperbolicité de Y, elle n'a donc qu'un nombre fini de composantes connexes C_i. Il suffit de constater que celles-ci sont réduites à un point.

Soit alors u un vecteur de T_aX, espace tangent en a à X, et ρ l'application de C_i dans T_bY qui à $f \in C_i$ associe $f'u$. Cette application est affine, comme on le voit par exemple en coordonnées locales, donc constante, C_i étant compacte et connexe. Toutes les applications de C_i ont même différentielle en a et X est connexe : C_i se réduit à un point.

Il résulte en particulier du théorème que si Y est une variété localement plate compacte connexe et hyperbolique, et Aut(Y) son groupe d'automorphismes, le sous-groupe de stabilité de chaque point est fini.

Théorème 4 : (cf.[3])

Soient X et Y deux variétés localement plates, la première compacte et connexe, la deuxième ayant un revêtement universel $\tilde{Y}$ positivement séparable.

Deux applications f et g de Aff(X,Y) coïncident si (et seulement si) elles coïncident en un point c de X, et définissent le même homomorphisme des groupes fondamentaux $\pi_1(c,X)$ et $\pi_1(c',Y)$, en appelant c' le point $fc = gc$.

Démonstration :

On va noter $p : \tilde{X} \to X$ et $q : \tilde{Y} \to Y$ les revêtements universels de X et Y, Γ et Γ' leurs groupes d'automorphismes. L'application $fp : \tilde{X} \to Y$ se relève en $F : \tilde{X} \to \tilde{Y}$, et gp en $G : \tilde{X} \to \tilde{Y}$. Le point a étant fixé une fois pour toutes dans la fibre de c, on peut supposer que $Fa = Ga$.

1°) On va montrer d'abord que F et G coïncident sur la fibre Γa. Soit en effet γ dans Γ et α une courbe joignant a et γa dans $\tilde{X}$. La courbe $p\alpha$ est un lacet dans X d'origine c. Les lacets $fp\alpha$ et $gp\alpha$ sont homotopes dans Y, et en les relevant à partir de $Fa = Ga$ dans $\tilde{Y}$, on aboutit respectivement à $F(\gamma a)$ et $G(\gamma a)$ dans la fibre de c'. Il s'ensuit que $F(\gamma a) = G(\gamma a)$, c.q.f.d.

2°) On a donc un homomorphisme $\gamma \longmapsto \bar{\gamma}$ de $\Gamma \to \Gamma'$ tel que $F(\gamma a) = \bar{\gamma}F(a)$. La condition $fp = qF$ implique que $F(\gamma x) = \bar{\gamma}F(x)$ sur un voisinage de a donc, par le principe du prolongement analytique (et la connexité de X) partout. Combinant avec le 1°) on voit que quel que soit x dans X, et γ dans Γ

$$F(\gamma x) = \bar{\gamma}F(x) \quad \text{et} \quad G(\gamma x) = \bar{\gamma}G(x) \quad .$$

3°) Considérons à présent la fonction $\delta : X \to [0,+\infty[$ définie par

$$\delta(x) = C_{\tilde{Y}}(Fx,Gx) \quad .$$

Cette fonction est continue, et Γ-périodique. Comme $X = \Gamma\backslash\tilde{X}$ est compact, elle atteint son maximum : soit $b \in \tilde{X}$ un tel point.

$$\delta(b) = C_{\tilde{Y}}(Fb,Gb) = \sup_{\psi} \left|\log \frac{\psi Fb}{\psi Gb}\right|$$

où ψ décrit l'ensemble des formes affines positives sur Y. Cette borne supérieure est atteinte (I., prop. 3, 1°) par une forme φ : pour fixer les idées, $\varphi Fb \geq \varphi Gb$. Quel que soit x dans $\tilde{X}$, on a les inégalités

$$(1) \quad \log \frac{\varphi Fx}{\varphi Gx} \leq \left|\log \frac{\varphi Fx}{\varphi Gx}\right| \leq \delta(x) \leq \delta(b) = \log \frac{\varphi Fb}{\varphi Gb}$$

en d'autres termes la fonction $\log \frac{\varphi Fx}{\varphi Gx}$ atteint son maximum en b ; il est de même de la fonction $\frac{\varphi Fx}{\varphi Gx}$. Or par restriction de cette fonction à un segment de droite contenant b (ie. un arc de géodésique), on obtient une fonction homographique réelle, qui ne peut atteindre son maximum que si elle est constante. Il en résulte que $\frac{\varphi Fx}{\varphi Gx}$ est elle-même constante et en reportant dans (1) que $\delta(x) = \delta(b)$.

Ainsi la fonction δ est constante ; comme elle est nulle en a, on conclut que $Fx = Gx$, quel que soit x dans $\tilde{X}$, et par projection que $f = g$; c.q.f.d.

Corollaire :

Soit X et Y deux variétés localement plates, X compacte connexe, Y compacte et hyperbolique. Les applications affines de X dans Y définissent sur X un nombre fini de relations d'équivalence.

Puisque X et Y sont compactes, $Aff(X,Y)$ est une variété localement plate compacte. On va montrer que les applications d'une même composante connexe de $Aff(X,Y)$ définissent la même relation d'équivalence ; ce qui entraînera le théorème puisque ces composantes connexes sont en nombre fini.

Soit donc $f \in \mathrm{Aff}(X,Y)$ et A_f sa composante connexe ; soit x et x' dans X tels que $fx = fx'$: il faut montrer que si $g \in A_f$, $gx = gx'$. Considérons les applications τ_x et $\tau_{x'}$ de A_f dans Y : ces deux applications sont affines, elles coïncident en f, A_f est compact connexe, $\tilde{Y}$ positivement séparable ; elles seront donc égales, et $gx = gx'$, si l'on vérifie que les homomorphismes :

$$\tau_x^*, \tau_{x'}^* : \pi_1(f,A_f) \to \pi_1(y,Y) \qquad (y = fx = fx')$$

sont égaux. Or X est connexe : soit x_u $(0 \leq u \leq 1)$ un chemin joignant x et x' ; l'application $u \longmapsto \tau_{x(u)}$ donne une homotopie des applications τ_x et $\tau_{x'}$, ce qui achève la démonstration.

Proposition :

Soit X une variété localement plate, connexe, compacte, hyperbolique. Toute surjection affine de X sur elle-même est un automorphisme.

Le revêtement universel de X est un ouvert convexe saillant Ω de R^n ; soit F un relèvement de la surjection $f \in \mathrm{Aff}(X,Y)$: $F \in \mathrm{Aff}(\Omega,\Omega)$ et

$$C_\Omega(Fx,Fy) \leq C_\Omega(x,y)$$

quels que soient x et y dans Ω. En appelant d la distance hyperbolique naturelle sur X (cf. II, prop. 3),

$$d(fx,fy) \leq d(x,y)$$

quels que soient x et y dans X : la surjection est contractante. On va voir que c'est une isométrie, ce qui établira la proposition.

Soient donc x et y dans X et x_n, y_n deux suites de points telles que

$$fx_{n+1} = x_n \ , \qquad fy_{n+1} = y_n \ .$$

Pour une suite d'entiers (ν) convenable, x_ν et y_ν convergent, vers deux points a et b respectivement. Soit δ un nombre réel positif inférieur à $d(x,y)/100$, U et V les boules centrées en a et b de rayon δ. Il existe deux entiers μ et ν, $\mu > \nu$, tels que x_μ et x_ν soient dans U, y_μ et y_ν dans V. On a alors

$$f^\mu x_\mu = x \quad \text{et} \quad f^\mu x_\nu = f^{\mu-\nu} x$$

par suite

$$d(x, f^{\mu-\nu} x) \leq 2\delta \;, \quad d(y, f^{\mu-\nu} y) \leq 2\delta$$

et

$$d(f^{\mu-\nu} x, f^{\mu-\nu} y) \geq d(x,y) - 4\delta \;.$$

Or $\mu - \nu \geq 1$:

$$d(f^{\mu-\nu} x, f^{\mu-\nu} y) \leq d(fx, fy) \;.$$

En combinant,

$$d(x,y) - 4\delta \leq d(fx,fy) \leq d(x,y)$$

et δ étant arbitrairement petit, ceci prouve que f est une isométrie. (Cette démonstration est dûe à J.C. DUTIGNY).

CHAPITRE IV

GROUPES D'AUTOMORPHISMES

Définition 1 :

Un champ de vecteurs A sur une variété différentiable X munie d'une connexion affine D est dit affine si les groupes locaux obtenus par intégration du champ conservent la connexion.

Cette condition peut s'exprimer par la relation :

$$[A,D_BC] = D_{[A,B]}C + D_B[A,C]$$

quels que soient les champs B et C sur X. Dans le cas où la connexion est sans courbure ni torsion, c'est-à-dire si la variété est localement plate, on voit que si $x^1,\ldots,x^n$ sont des coordonnées locales affines, et si

$$A = \sum A^i(x^1,\ldots,x^n)\,\frac{\partial}{\partial x^i}$$

les fonctions A^i sont des formes affines en $x^1,\ldots,x^n$.

Les difféomorphismes conservant la connexion formant un pseudo-groupe, les champs affines forment une algèbre de Lie, qui sera désormais notée $\mathfrak{a}(X)$.

Proposition 1 :

Soit X une variété localement plate. Il existe sur $\mathfrak{a}(X)$ un produit bilinéaire associatif dont le commutateur est le crochet de Lie.

En effet si A et B appartiennent à $\mathfrak{a}(X)$, le produit

$$AB = D_AB$$

est à valeurs dans $\mathfrak{a}(X)$, comme on le vérifie aisément, par exemple en utilisant des coordonnées affines ; et il a pour commutateur le crochet de Lie puisque la torsion est nulle. D'autre part,

$$
\begin{aligned}
(AB)C &= D_{D_A B}C = D_C D_A B + [D_A B, C] && (T(D_A B, C) = 0)\\
&= D_C D_A B - D_{[C,A]}B - D_A[C,B] && (C \text{ affine})\\
&= D_A D_C B - D_A[C,B] && (R(A,C) = 0)\\
&= D_A D_C B - D_A D_C B + D_A D_B C && (T(C,B) = 0)\\
&= A(BC)
\end{aligned}
$$

ce produit est associatif ; ce qui pourrait aussi facilement se vérifier avec des expressions en coordonnées affines.

Définition 2 :

Une connexion plate sur une algèbre de Lie est un produit bilinéaire et associatif dont le commutateur soit le crochet.

Remarque 1 :

De tels produits, à supposer qu'il en existe, ne sont pas forcément uniques, comme le montrent les algèbres abéliennes.

Remarque 2 :

Sur une algèbre de Lie semi-simple, il n'y a pas de connexion plate. En effet soit A une algèbre associative unitaire où l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ soit plongée comme idéal bilatère (associatif) de codimension 1. Le radical associatif R de A est nilpotent, donc contenu dans $\mathfrak{g}$, où il constitue un idéal de Lie nilpotent, donc nul. Par suite A est semi-simple, et l'idéal $\mathfrak{g}$ est une algèbre associative unitaire : ceci contredit l'absence de centre.

Définition 3 :

Un groupe localement plat est un groupe de Lie muni d'une connexion plate invariante à gauche et à droite.

Par exemple, R^n avec l'addition, R^+ avec la multiplication, leurs quotients par des sous-groupes discrets, $GL(n,R)$, et en général, les éléments inversibles de toute algèbre associative unitaire de dimension finie sur R.

Un groupe localement plat sera dit hyperbolique si la variété localement plate sous-jacente est hyperbolique.

Proposition 2 :

Soit G un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie :

1) Si D est une connexion plate invariante à droite et à gauche sur G, le produit

$$XY = D_X Y \qquad (X,\ Y \in \mathfrak{g})$$

est une connexion plate sur $\mathfrak{g}$.

2) Réciproquement, s'il existe une connexion plate sur $\mathfrak{g}$,

$$D_X Y = XY \qquad (X,\ Y \in \mathfrak{g})$$

définit une connexion plate bi-invariante sur G.

Pour le 1), il suffit d'observer que par invariance à gauche de D, $D_X Y$ est invariant à gauche quand X et Y le sont, et que les champs invariants à gauche sont affines.

Pour le 2), la connexion invariante à gauche D ainsi définie est évidemment sans torsion ; la nullité de la courbure

$$R(X,Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]}$$

résulte de l'associativité, ainsi que l'identité

$$adX \circ D_Y Z = D_{adX.Y} Z + D_Y adX \circ Z$$

qui exprime l'invariance de D par les automorphismes intérieurs, donc par les translations à droite.

Théorème 1 :

Les automorphismes d'une variété localement plate compacte et connexe X forment un ensemble Aut(X) ouvert et fermé dans Aff(X,X) . La structure canonique de variété localement plate sur Aff(X,X) induit sur Aut(X) une structure de groupe localement plat. L'algèbre de Lie de Aut(X) est $\mathfrak{a}(X)$; si de plus X est hyperbolique, Aut(X) est compact et hyperbolique.

Toutes les assertions résultent aisément de la première, une fois observé que si $g \in \mathrm{Aff}(X,X)$, les applications

$$L_g, R_g : \mathrm{Aff}(X,X) \to \mathrm{Aff}(X,X)$$
$$L_g(f) = gf$$
$$R_g(f) = fg$$

sont affines : en effet, soit $f, f' \in \mathrm{Aff}(X,X)$ situées dans un même ouvert de coordonnées affines V, et f_t la géodésique paramétrée par $[0,1]$ qui les joint dans V ; la courbe gf_t constitue une géodésique dans $\mathrm{Aff}(X,X)$ joignant gf à gf' (puisque quel que soit $x \in X$, $gf_t(x)$ est une géodésique dans X).

Pour démontrer la première assertion, on considère l'ensemble $\mathrm{Sur}(X)$ des surjections affines de X sur X.

A. Si $f \notin \mathrm{Sur}(X)$, $f(X)$ est un compact de X, distinct de X : soit U un voisinage ouvert de $f(X)$, distinct de X. Le voisinage de f

$$\{f' \in \mathrm{Aff}(X,X) \mid f'(X) \subset U \neq X\}$$

ne contient aucune surjection, et on conclut que $\mathrm{Sur}(X)$ est fermé.

D'autre part, si $f \in \mathrm{Sur}(X)$, la sous-variété fermée $f(X)$ est égale à X, ce qui exige que le rang de f, qui est de toute façon constant, soit maximum. Inversement, si $f \in \mathrm{Aff}(X,X)$ est de rang maximum, $f(X)$ est une sous-variété ouverte et compacte de X, donc $f \in \mathrm{Sur}(X)$. L'ensemble des applications de rang maximum étant visiblement ouvert, $\mathrm{Sur}(X)$ est ouvert et fermé dans $\mathrm{Aff}(X,X)$.

Si X est hyperbolique, la proposition du chapitre III. termine la démonstration. Dans le cas général,

B. Soit Ω la composante connexe de l'identité I dans $\mathrm{Aff}(X,X)$: Ω est incluse dans $\mathrm{Sur}(X)$. Chaque application de Ω définit un revêtement de X sur lui-même ; et comme Ω est connexe, ce revêtement est homotope à l'identité, et par suite trivial. Il en résulte que $\Omega \subset \mathrm{Aut}(X)$.

Il est clair que si $g \in \mathrm{Aut}(X)$, $g\Omega$, sa composante connexe dans $\mathrm{Aff}(X,X)$, est contenue dans $\mathrm{Aut}(X)$, ce qui achève la démonstration.

Théorème 2 :

Pour qu'un groupe localement plat connexe G de dimension n soit hyperbolique, il faut et il suffit qu'il ne contienne aucune géodésique paramétrée par R entier ; auquel cas c'est un quotient du groupe localement plat $(R^+)^n$ par un sous-groupe discret.

A. Si G ne contient aucune géodésique paramétrée par R entier, il en va de même pour son revêtement universel, et donc pour tout groupe localement plat localement isomorphe à G.

B. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, munie de sa connexion plate. Tout d'abord, $\mathfrak{g}$ ne contient pas de nilpotent non nul. En effet, si tel était le cas, on aurait un élément $u \in \mathfrak{g}$, $u \neq u^2 = 0$. Sur la courbe exp. tu , paramétrée par R entier, l'accélération est nulle pour $t = 0$ (c'est $D_u u = u^2$) , donc en tout point : exp. tu est donc une géodésique paramétrée par R entier, ce qui est exclu.

C. Considérée comme algèbre associative sur R, $\mathfrak{g}$, qui est de dimension finie et sans nilpotents non nuls, est semi-simple. Elle est somme d'algèbres simples sur R : chaque facteur est une algèbre de matrices sur son centre, qui est un corps isomorphe à R, C, ou H (corps des quaternions). Toujours à cause de l'abscence de nilpotents non nuls, ces algèbres de matrices sont d'ordre 1, et

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_1^r \mathfrak{g}_i$$

où chaque $\mathfrak{g}_i$ est isomorphe en tant qu'algèbre associative à R, C ou H. Soit C* le groupe multiplicatif des complexes,

H^* le groupe multiplicatif des quaternions, et

$$G_0 = \prod_1^r G_i$$

où G_i est égal à R^+, C^* ou H^* selon que $\mathfrak{g}_i$ est isomorphe à R, C ou H. Les groupes localement plats G et G_0 sont isomorphes localement. Or si l'un des G_i n'est pas R^+, G_0 contient des droites entières. Par suite $G_0 = (R^+)^n$, et c'est le revêtement universel de G, c.q.f.d.

Proposition 3 :

Soit C un cône ouvert convexe saillant de R^n, Γ un groupe discret d'automorphismes de C opérant librement et proprement. Si $\Gamma\backslash C$ est compacte, ses automorphismes forment un groupe localement plat compact hyperbolique de dimension comprise entre 1 et le nombre de composantes irréductibles de C.

Soit $C(\Gamma)$ le commutant de Γ dans $\mathrm{End}(R^n)$, algèbre associative des endomorphismes linéaires de R^n. Si $a \in C(\Gamma)$, le champ

$$E_a(x) = ax$$

est Γ-périodique et définit un champ affine sur $\Gamma\backslash C$; cette dernière variété étant compacte, le champ obtenu est intégrable. On vérifie qu'on a ainsi un isomorphisme de $C(\Gamma)$ et de $\mathfrak{a}(\Gamma\backslash C)$. Il s'ensuit que $\mathrm{Aut}_0(\Gamma\backslash C)$, composante neutre de $\mathrm{Aut}(\Gamma\backslash C)$, est isomorphe à $C_0(\Gamma)/C_0(\Gamma) \cap \Gamma$, où $C_0(\Gamma)$ est la composante neutre du centralisateur de Γ dans $GL(R^n)$.

D'après le théorème 2, $C(\Gamma)$ est un produit de corps isomorphes à R, ce qui permet de l'écrire

$$C(\Gamma) = \sum_1^d R.P_i$$

où les P_i sont d projecteurs orthogonaux (d, dimension de $\mathrm{Aut}(\Gamma\backslash C)$), de somme 1 puisque l'opérateur identique appartient trivialement à $C(\Gamma)$ (ce qui prouve que $d \geq 1$).

Il est évident que $\overline{C}$ est inclus dans $\Pi\, P_i\overline{C}$; inversement, quel que soit x dans R^n ,

$$P_i x = \lim_{t \to -\infty} \exp\left(t \sum_{j \neq i} P_j\right) x$$

les opérateurs $\exp t \sum_{j\neq i} P_j$ conservent $\overline{C}$ et donc $P_i\overline{C} \subset C$; par convexité,

$$\overline{C} \supset \Pi\, P_i\overline{C}$$

et finalement $C = \Pi\, P_i C$ possède au moins d composantes irréductibles. (Pour la théorie des composantes irréductibles d'un cône, on se reportera à [4]).

La dimension de $\mathrm{Aut}(\Gamma\backslash C)$ peut être strictement inférieure au nombre de composantes de C irréductibles. Par exemple, soit dans R^3 le cône $C = (R^+)^3$ et Γ le groupe engendré par

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Γ opère librement et proprement dans C et $\dim \mathrm{Aut}(\Gamma\backslash C) = 2 < 3$.

Corollaire :

Soit C un cône ouvert convexe saillant irréductible de R^n ; Γ un groupe discret d'automorphismes de C opérant librement et proprement en sorte que $\Gamma\backslash C$ soit compact. Alors Γ contient un groupe discret d'homothéties positives.

En effet, $\mathrm{Aut}(\Gamma\backslash C)$ est de dimension 1. Le centralisateur $C_0(\Gamma)$ (notations de la proposition 3) se réduit aux homothéties positives et comme $\mathrm{Aut}_0(\Gamma\backslash C)$, qui est compact, est isomorphe à

$$C_0(\Gamma)/C_0(\Gamma) \cap \Gamma$$

il faut que $C_0(\Gamma) \cap \Gamma$ ne se réduise pas à l'identité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. KAUP : "Hyperbolische komplexe Räume" - Annales de l'Institut Fourier, t. XVIII, fasc. 2 (1968) p. 303-330.

[2] J.L. KOSZUL : "Variétés localement plates et convexité" Osaka, Journal of Mathematics, 1965, p. 285-290.

[3] A. BOREL et R. NARASIMHAN : "Inventiones Mathematicae" - Osaka, Journal of Mathematics, 1965, p. 247-255.

[4] E.B. VINBERG : "Homogeneous Cones" - Translations of the Moscow Mathematical Society n° 12 (1963) p. 340-403.

VU,

Grenoble, le 30 avril 1969

Le Président de la Thèse

C. CHABAUTY

VU,

Grenoble, le 2 mai 1969

Le Doyen de la Faculté des Sciences

E. BONNIER