



T H E S E S

Présentées à la Faculté des Sciences  
de l'Université de Grenoble

pour obtenir le Grade de  
Docteur ès-Sciences Mathématiques

par

Mounir HAJAL

Ingénieur E.C.L.

Licencié ès-Sciences

-----

2ème Thèse

"CONTRIBUTION A L'ETUDE DES MILIEUX PULVERULENTS"

-----

Soutenues le  $\frac{1}{2}$  Septembre 1967, devant la Commission d'Examen

M. J. KRAVTCHENKO

Président

MM. P. ANGLES d'AURIAC

)

Examineurs

A. GASTINEL

)

-----



CONTRIBUTION A L'ETUDE DES  
MILIEUX PULVERULENTS

- : - : -



## INTRODUCTION

Les milieux pulvérulents ont souvent été assimilés à des milieux continus ; et, par application des théories de l'"Elasticité" ou de la "Plasticité", il a été possible de résoudre de nombreux problèmes pratiques. Cependant, ces théories ne peuvent rendre compte du comportement réel des milieux pulvérulents. Il était donc nécessaire d'établir une théorie tenant compte de la nature granulaire du milieu.

Les premières études, en ce sens, ont été entreprises par "THURSTON et DERESIEWICZ" [1], "DANTU" [2] et "RENNIE" [3]. Bien que très intéressantes, elles sont cependant très limitatives quand au mécanisme de déformation supposé, et se bornent au calcul de la résistance limite des milieux pulvérulents formés de sphères égales rigides. D'autre part BIAREZ [4] entrepris une étude qualitative du comportement de ces milieux et étudia tout particulièrement les variations d'anisotropie durant la déformation (écrouissage).

La première tentative pour relier les contraintes aux déformations est due à ROWE [5]. ROWE étudie des empilements réguliers de sphères égales et trouve, pour tous ces systèmes, une même loi de comportement, reliant le rapport des contraintes principales au rapport des vitesses de déformations principales, par l'intermédiaire de l'angle de frottement  $\varphi_\mu$  du matériau constituant les sphères et, de l'angle  $\beta$  des plans de contacts entre sphères avec la direction de la contrainte majeure, soit :

$$\dot{\epsilon} = \frac{\sigma_1 \dot{\epsilon}_1}{2 \sigma_2 \dot{\epsilon}_2} = \frac{\operatorname{tg} (\beta + \varphi_\mu)}{\operatorname{tg} \beta}$$

Cette loi étant valable pour divers empilements, ROWE la suppose encore valable pour un milieu granulaire quelconque. Pour ces derniers, ROWE suppose de plus, que la déformation se fera par glissement sur les contacts  $\beta_c$  qui rendent  $\dot{E}$  minimum, soit :

$$\beta_c = \frac{\pi}{4} - \frac{\mu_p}{2}$$

d'où :

$$\frac{\sigma_1 \dot{\epsilon}_1}{2 \sigma_2 \dot{\epsilon}_2} = \text{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\mu_p}{2} \right)$$

La validité de cette loi fut discutée par de nombreux auteurs dont : GIBSON, MORGENSTERN, TROLLOPE, PARKIN, ROSCOE, SCHOFIELD et SCOTT. Bien que controversée quant au mécanisme de déformation qu'elle suppose, cette loi est en assez bonne concordance, avec les résultats expérimentaux, pour les milieux denses, pour de petites déformations (faible remaniement), et, si les axes principaux des contraintes et déformations coïncident, entre eux, et avec les axes de l'anisotropie.

Cette loi fut, par ailleurs, démontrée par HORNE [6] pour un milieu quelconque mais en supposant encore  $\dot{E}$  minimum.

Elle présente le défaut de ne pas faire intervenir les caractéristiques statistiques de l'empilement de grains, et ne permet donc pas une étude plus détaillée de la déformation. De ce fait elle ne peut être généralisée à des milieux quelconques.

HORNE [6], le premier, a tenté de décrire statistiquement la géométrie d'un milieu granulaire et d'en déduire la

déformation. HORNE considère un milieu formé de sphères rigides et, à partir de la loi de répartition des contacts, déduit trois paramètres  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  qui représentent le nombre de sphères, que l'on traverse, pour parcourir une distance unité, dans trois directions orthogonales 1, 2, 3. En négligeant les rotations des grains et en supposant que les glissements se font toujours suivant la ligne de plus grande pente des plans de contact, HORNE déduit l'expression des vitesses de déformation  $\dot{\epsilon}_1$ ,  $\dot{\epsilon}_2$ ,  $\dot{\epsilon}_3$ .

Ces hypothèses font que l'on ne peut se satisfaire tout à fait de cette théorie. Il nous a donc paru utile de reprendre cette étude sous des hypothèses moins restrictives.

---



## CHAPITRE I

### Hypothèses.

a) Le milieu est formé de grains rigides. Cette hypothèse ne sera valable que si les déformations, dues à l'élasticité des grains ou à leur effritement, peuvent être négligées comparées à celles dues aux mouvements entre grains.

b) L'angle de frottement  $\varphi_{\mu}$  entre grains est constant. En fait cet angle dépend de la nature du minéral constituant les grains, des propriétés de surface ainsi que l'intensité des contraintes intergranulaires. Cependant  $\varphi_{\mu}$  varie lentement en fonction des contraintes intergranulaires. Pour un matériau donné, nous pourrions donc supposer  $\varphi_{\mu}$  constant, si les contraintes de contact ne varient pas fortement durant l'expérience ; ce qui suppose que les contraintes appliquées ne varient pas fortement et n'entraînent pas de modifications sensibles dans la forme des grains (émoussement des pointes des grains anguleux sous fortes pressions).

c) Il ne peut y avoir glissement entre deux grains en contact que si le rapport de la composante tangentielle à la composante normale, de la force de contact, est égale à  $\text{tg } \varphi_{\mu}$ .

d) L'orientation des contacts ne dépend, statistiquement, que des contraintes et déformations imposées, ainsi que de

l'histoire du matériau. Ceci suppose que les grains, de par leur forme, n'auront pas tendance à former des contacts dans une direction privilégiée. Cette hypothèse sera donc valable pour des grains de forme massive, ou, pour des grains plats dans une structure "floculée".

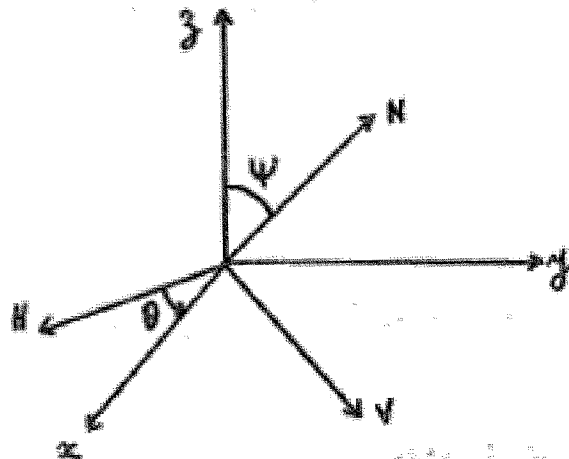
---

CHAPITRE II

DESCRIPTION STATISTIQUE DU MILIEU

Soit un cube unité dont les cotés sont parallèles aux axes  $Ox, y, z$ , formé de  $P$  grains ayant entre eux  $C$  contacts.

En un point de contact menons le plan tangent et repérons ce plan : par la ligne de plus grande pente orientée vers les  $z$  décroissants, par la normale et l'horizontale ;



ces trois directions formant un repère direct  $\vec{OH}, \vec{VN}$  (voir figure).

Ce repéré sera fixé par les angles  $\psi$  et  $\theta$ .

$\psi$  = angle de  $N$  avec  $Oz$ .

$\theta$  = angle de l'horizontale  $H$  avec  $Ox$ .

Les  $C$  contacts seront répartis selon une loi  $C(\psi, \theta)$ , avec

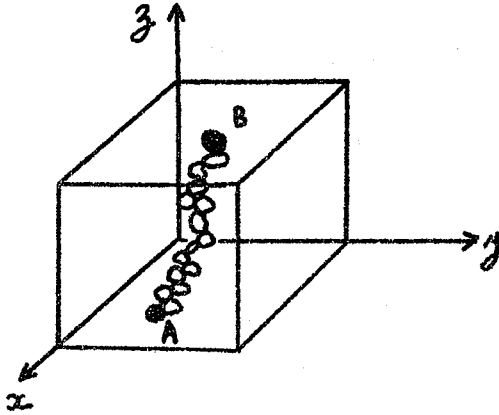
$$0 \leq \psi \leq \pi \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$C(\psi, \theta)$  = nombre de contacts repérés par des angles  $\psi$  et  $\theta$  donnés.

Un même plan de contact pouvant être repéré de deux façons différentes suivant l'orientation de  $\vec{N}$ , nous aurons :

$$(1) \quad C(\psi, \theta) = C(\pi - \psi, \theta + \pi) \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Considérons deux grains A et B, situés dans les plans  $z = 0$  et  $z = 1$ . Si l'hypothèse (d) est satisfaite, il



sera, en général, possible de relier ces deux grains par une chaîne de grains, chaque grain n'ayant que deux contacts avec les autres grains de la chaîne. Désignons par  $Ch_{p,z}$  cette chaîne. Elle contiendra  $m_{p,z}$  grains et  $(m_{p,z} - 1)$  contacts. Le nombre de grains étant très supérieur à l'unité, nous pourrions parler

de  $m_{p,z}$  contacts dans la dite chaîne.

Ces contacts seront repérés par des angles  $\psi$  et  $\theta$  que nous choisirons tels que :

$$\begin{cases} 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

de sorte que la chaîne progressera constamment dans le sens des  $z$  croissants.

Il est toujours possible de tracer une ligne brisée reliant A à B, joignant les grains adjacents entre eux, et telle que chaque segment, reliant deux grains, soit parallèle à la normale au contact entre ces grains. Cette ligne brisée, représentative des contacts, de  $Ch_{p,z}$ , sera formée de  $m_{p,z}$  segments orientés selon une loi de répartition  $m_{p,z}(\psi, \theta)$ .

Désignons par  $l_m(\psi, \theta)$  la longueur moyenne des segments ayant une orientation  $\psi, \theta$ .  $l_m(\psi, \theta)$  dépend de la dimension moyenne et de la forme des grains. Si l'hypothèse (d) est satisfaite,  $l_m$  sera indépendant de  $\psi$  et  $\theta$ .  
 Projétons la ligne brisée sur Oz, nous obtenons une longueur unité, d'où :

$$(2) \quad 1 = l_m \sum_{\psi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{\theta=0}^{2\pi} m_{p,z}(\psi, \theta) \cos \psi$$

Groupons les P grains, formant le cube, en nz chaînes reliant les points tels que A et B, nous aurons :

$$P = \sum_{p=1}^{n_z} m_{p,z}$$

et la relation (2) reste valable pour chaque chaîne.

Ces nz chaînes contiennent P contacts répartis suivant une loi  $P(\psi, \theta); 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Les chaînes étant choisies arbitrairement, ces P contacts seront représentatifs de l'ensemble des contacts dans le cube et auront même répartition, soit :

$$\frac{P(\psi, \theta)}{P} = \frac{C(\psi, \theta)}{C} \quad \text{pour } 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

La relation (2) étant valable pour chaque chaîne, si nous projetons les nz chaînes sur Oz, nous aurons :

$$(3) \quad n_z = l_m \sum_{\psi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{\theta=0}^{2\pi} P(\psi, \theta) \cos \psi = l_m \frac{P}{C} \sum_{\psi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{\theta=0}^{2\pi} C(\psi, \theta) \cos \psi$$

Cette dernière relation nous permet de définir une chaîne moyenne  $Ch_z$ , représentative de l'empilement des grains dans la direction  $z$ . Cette chaîne comprendra  $m_z$  grains, et  $m_z$  contacts répartis selon  $m_z (\psi, \theta)$ . Les  $P$  contacts devront être décrits par  $n_z$  chaînes, identiques à  $Ch_z$  et qui devront satisfaire aux relations (2) et (3). D'où :

$$\times \quad P = n_z m_z$$

$$\times \quad 1 = l m \sum_{\psi=0}^{\pi/2} \sum_{\theta=0}^{2\pi} m_z(\psi, \theta) \cos \psi$$

et de (3) l'on tire :  $\frac{m_z(\psi, \theta)}{m_z} = \frac{C(\psi, \theta)}{C} \times$

En faisant le même raisonnement sur des chaînes  $Ch_x$  et  $Ch_y$ , l'on obtient les relations :

$$P = n_z m_z = n_x m_x = n_y m_y$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{m_z(\psi, \theta)}{m_z} = \frac{C(\psi, \theta)}{C} & 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \frac{m_x(\psi, \theta)}{m_x} = \frac{C(\psi, \theta)}{C} & 0 \leq \psi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \\ \frac{m_y(\psi, \theta)}{m_y} = \frac{C(\psi, \theta)}{C} & 0 \leq \psi \leq \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

et :

(4)

$$\frac{m_z}{m_x} = \frac{\sum_{\psi=0}^{\pi} \sum_{\theta=0}^{\pi} C(\psi, \theta) \sin \psi \sin \theta}{\sum_{\psi=0}^{\pi/2} \sum_{\theta=0}^{2\pi} C(\psi, \theta) \cos \psi} \quad \times$$

$$\frac{m_z}{m_y} = \frac{\sum_{\psi=0}^{\pi} \sum_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} C(\psi, \theta) \sin \psi \cos \theta}{\sum_{\psi=0}^{\pi/2} \sum_{\theta=0}^{2\pi} C(\psi, \theta) \cos \psi} \quad \times$$

Nous voyons qu'en général le milieu, formé de grains, présentera des propriétés géométriques différentes dans les trois directions ; mais si l'on connaît les propriétés dans une direction ( $m_z$  et  $m_z(\psi, \theta)$  par exemple), il est possible de décrire les propriétés dans les deux autres directions.



### CHAPITRE III

#### DEFORMATIONS

-----

Considérons un cube de coté unité formé de  $P$  grains, en équilibre à l'instant  $t$ , sous un état de contrainte  $\sigma$ . Si entre  $t$  et  $t + dt$ , nous appliquons une variation de contraintes  $d\sigma$ , il résultera une déformation due aux mouvements relatifs entre partie ou totalité des grains. Ces mouvements se réduisent en roulements et glissements entre grains.

Considérons à l'instant  $t$  deux grains en contacts, notés 1 et 2, et désignons par  $\vec{f}$  la force de contact entre ces grains. Supposons 1 fixe et étudions le mouvement de 2 par rapport à 1. La variation  $d\sigma$  induira au point de contact considéré, une force  $d\vec{f}$  et un couple  $d\vec{M}$ . La force  $d\vec{f}$  produira ou non un glissement ; et s'il y a glissement, celui-ci s'effectuera instantanément, selon la projection de  $\vec{f}$  sur le plan tangent au contact.  $d\vec{f}$  n'intervient donc que pour désigner les contacts qui glisseront et fixer ainsi l'anisotropie apparente de l'assemblage de grains. Le couple  $d\vec{M}$  produira un roulement instantané, le long d'une ligne dans le plan tangent au contact, perpendiculaire à l'axe du couple.

Deux cas sont possibles à priori :

- a) Les couples  $d\vec{M}$ , induits par  $d\sigma$  dans le cube, sont orientés dans toutes les directions avec une égale ré-

partition : les roulements s'effectuant alors dans toutes les directions, leur effet sur la déformation globale sera probablement nulle, donc indépendant de  $d\sigma$  et de l'anisotropie du milieu.

- b) Les couples  $\vec{dM}$  ne sont pas orientés avec une égale répartition dans toutes les directions. Cette non-uniformité de répartition sera due à l'anisotropie du milieu et à  $d\sigma$ , et l'effet des roulements sur la déformation globale dépendra de l'anisotropie et de  $d\sigma$ .

Or l'énergie dissipée par roulements, dans le cube, étant nulle, soit l'effet des roulements sur la déformation globale est nulle, soit il n'est fonction que de  $\sigma$ . Cet effet ne pouvant être fonction de  $d\sigma$ , le cas (b) est exclu, et les roulements n'interviennent pas dans la déformation globale du cube.

Remarque - Il est possible de montrer de façon différente, que les roulements n'ont aucun effet sur la déformation globale. En effet l'énergie dissipée par roulement étant nulle, soit l'effet global des roulements est nul, soit il est fonction de  $\sigma$  uniquement. Or considérons deux cubes tels que la disposition et la forme des grains soient identiques, seuls les coefficients de frottement  $\mu$  différent de l'un à l'autre. Ces cubes seront en équilibre sous des contraintes  $\sigma$  différentes,  $\sigma$  étant fonction de  $\mu$ . Pour un même accroissement  $d\sigma$ , les couples  $\vec{dM}$ , donc les roulements instantanés, seront les mêmes dans les deux cubes, et l'effet sur la déformation sera identique bien que les  $\sigma$  soient différents. Ceci est impossible à moins que cet effet ne soit nul.

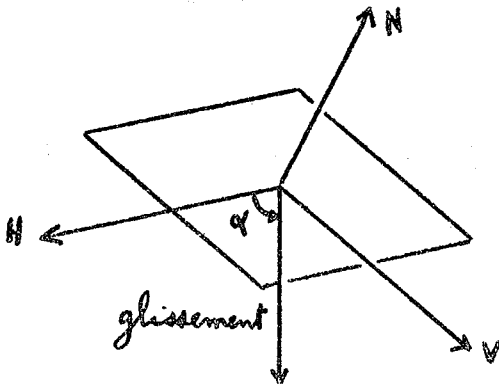
Seuls les glissements entre grains interviennent donc dans la déformation globale.

Si nous considérons une chaîne Chz par exemple, la déformation totale de cette chaîne pourra être décrite en considérant uniquement les  $m'_z$  contacts qui glissent. Ces  $m'_z$  contacts délimitent des groupes de grains dans Chz et le mouvement se fait par glissement entre ces groupes de grains. Ces groupes de grains jouent instantanément le rôle de grains ; et les relations (1) et (4) restent valables, en remplaçant  $m_z$ ,  $m_x$ ,  $m_y$  par  $m'_z$ ,  $m'_x$ ,  $m'_y$  respectivement. Par la suite nous désignerons par grains, à chaque instant, ces groupes de grains et nous les noterons par  $m_z$ ,  $m_x$ ,  $m_y$ .

Il est à remarquer que durant la déformation, ces groupes de grains se modifient continuellement, par l'apparition de nouveaux contacts qui glissent et par la disparition d'autres contacts glissants.

### Calcul des déformations.

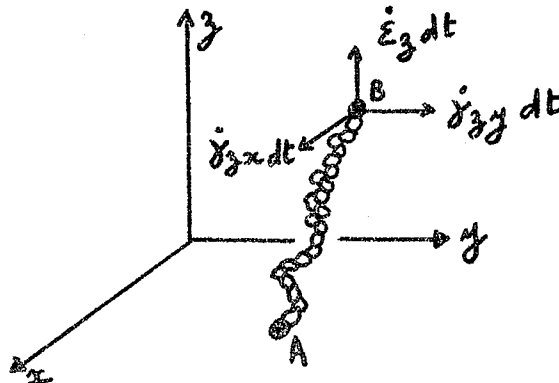
Considérons une chaîne Chz et dans cette chaîne considérons uniquement les contacts qui glissent. Ces contacts seront repérés par  $\psi$ ,  $\theta$  et leur répartition, au temps  $t$ , sera  $m_z(\psi, \theta, t)$ . Pour un contact donné la direction de glissement sera repérée par l'angle  $\alpha$  avec l'horizontale du plan tangent au contact.



Nous désignerons par  $m_z(\psi, \theta, \alpha, t)$  :  
le nombre de contacts,  
de Chz, repérés par  $\psi$  et  $\theta$ , sur  
lesquels le glissement s'effectue  
selon la direction  $\alpha$ , au temps  $t$ .

Soit  $v_m(\psi, \theta, \alpha, t)$  la vitesse moyenne de glissement sur les contacts caractérisés par  $\psi, \theta, \alpha$ , au temps  $t$ . La vitesse de glissement sur un contact dépend de l'intensité de la force  $\vec{df}$  appliquée à ce contact, laquelle est fixée par les conditions d'équilibre et dépend donc de la position dans l'espace des points de contact, et non de leur orientation. Il est donc logique de supposer que  $v_m(\psi, \theta, \alpha, t)$  sera indépendante de  $\psi, \theta, \alpha$ . Nous noterons la vitesse de glissement par  $v_m(t)$ .

Le point B de la chaîne Chz, subira par suite de l'application de  $d\sigma$ , des déplacements notés  $\dot{E}_z dt, \dot{\delta}_{zx} dt, \dot{\delta}_{zy} dt$  (voir figure). Ces déplacements sont égaux aux projections sur Oz, x, y respectivement, de la résultante des glissements entre grains de la chaîne Chz.



D'où :

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{E}_z = -v_m(t) \sum_{\psi=0}^{\pi/2} \sum_{\theta=0}^{2\pi} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} m_3(\psi, \theta, \alpha, t) \sin \psi \sin \alpha \\ \dot{\delta}_{zx} = v_m(t) \sum_{\psi=0}^{\pi/2} \sum_{\theta=0}^{2\pi} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} m_3(\psi, \theta, \alpha, t) [\cos \theta \cos \alpha + \cos \psi \sin \theta \sin \alpha] \end{cases}$$

$$\dot{\gamma}_{zy} = \sqrt{m}(t) \sum_{\psi=0}^{\pi/2} \sum_{\theta=0}^{2\pi} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} m_z(\psi, \theta, \alpha, t) [-\sin \theta \cos \alpha + \cos \psi \cos \theta \sin \alpha]$$

En raisonnant de même sur des chaînes Chx et Chy l'on obtient :

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{E}_x = \sqrt{m}(t) \sum_{\psi=0}^{\pi} \sum_{\theta=0}^{\pi} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} m_x(\psi, \theta, \alpha, t) [\cos \theta \cos \alpha + \cos \psi \sin \theta \sin \alpha] \\ \dot{\gamma}_{xz} = -\sqrt{m}(t) \sum_{\psi=0}^{\pi} \sum_{\theta=0}^{\pi} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} m_x(\psi, \theta, \alpha, t) [\sin \psi \sin \alpha] \\ \dot{\gamma}_{xy} = \sqrt{m}(t) \sum_{\psi=0}^{\pi} \sum_{\theta=0}^{\pi} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} m_x(\psi, \theta, \alpha, t) [-\sin \theta \cos \alpha + \cos \psi \cos \theta \sin \alpha] \end{cases}$$

et :

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{E}_y = \sqrt{m}(t) \sum_{\psi=0}^{\pi} \sum_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} m_y(\psi, \theta, \alpha, t) [-\sin \theta \cos \alpha + \cos \psi \cos \theta \sin \alpha] \\ \dot{\gamma}_{yz} = -\sqrt{m}(t) \sum_{\psi=0}^{\pi} \sum_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} m_y(\psi, \theta, \alpha, t) [\sin \psi \sin \alpha] \\ \dot{\gamma}_{yx} = \sqrt{m}(t) \sum_{\psi=0}^{\pi} \sum_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} m_y(\psi, \theta, \alpha, t) [\cos \theta \cos \alpha + \cos \psi \sin \theta \sin \alpha] \end{cases}$$

Entre les quantités  $m_z(\psi, \theta, \alpha, t)$ ,  $m_x(\psi, \theta, \alpha, t)$  et  $m_y(\psi, \theta, \alpha, t)$  il existe des relations identiques à (4). En effet les chaînes Chz et Chx par exemple ont en commun

un certain nombre de contacts arbitrairement répartis dans ces chaînes et donc représentatifs de l'ensemble des contacts. Si nous désignons par  $C(\psi, \theta, \alpha, t)$  la répartition des contacts, nous aurons :

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{m_z(\psi, \theta, \alpha, t)}{m_z} &= \frac{C(\psi, \theta, \alpha, t)}{C} \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \alpha \leq 2\pi \\ \frac{m_x(\psi, \theta, \alpha, t)}{m_x} &= \frac{C(\psi, \theta, \alpha, t)}{C} \quad 0 \leq \psi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \alpha \leq 2\pi \\ \frac{m_y(\psi, \theta, \alpha, t)}{m_y} &= \frac{C(\psi, \theta, \alpha, t)}{C} \quad 0 \leq \psi \leq \pi, -\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2}, 0 \leq \alpha \leq 2\pi \end{aligned}$$

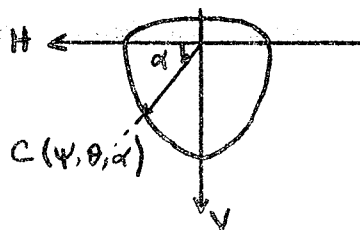
et 
$$C(\psi, \theta, \alpha, t) = C(\pi - \psi, \theta + \pi, \alpha + \pi)$$

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{m_z}{m_x} &= \frac{\sum_{\psi=0}^{\pi} \sum_{\theta=0}^{\pi} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} C(\psi, \theta, \alpha, t) \sin \psi \sin \theta}{\sum_{\psi=0}^{\pi/2} \sum_{\theta=0}^{2\pi} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} C(\psi, \theta, \alpha, t) \cos \psi} \\ \frac{m_z}{m_y} &= \frac{\sum_{\psi=0}^{\pi} \sum_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} C(\psi, \theta, \alpha, t) \sin \psi \cos \theta}{\sum_{\psi=0}^{\pi/2} \sum_{\theta=0}^{2\pi} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} C(\psi, \theta, \alpha, t) \cos \psi} \end{aligned}$$

Les formules (5) font intervenir, outre l'anisotropie du milieu, un angle  $\alpha$  qui fixe la direction de glissement. Sur

les contacts ayant une orientation donnée,  $\alpha$  pourra prendre différentes valeurs suivant une certaine loi de répartition. Cette loi dépendra d'une part du chemin de déformation imposé (ou du chemin de contraintes), et d'autre part de la densité et de l'histoire du milieu. En effet, l'augmentation de contraintes  $d\sigma$  induira des forces  $\vec{df}$  qui ne pourront causer des glissements que suivant certaines valeurs de  $\alpha$ , la répartition des  $\alpha$  dépendra donc de  $d\sigma$ . D'autre part il doit y avoir compatibilité des glissements entre grains, donc plus le milieu sera dense, plus les glissements se feront dans toutes les directions et l'on se rapprochera d'une répartition uniforme des valeurs de  $\alpha$ , compatibles avec  $d\sigma$ . Par exemple, pour un essai de compression triaxial, si l'on augmente la contrainte verticale, nous aurons une forte proportion de glissements orientés vers le bas ( $0 \leq \alpha \leq \pi$ ). Si nous traçons l'indicatrice  $C(\psi, \theta, \alpha)$  pour une orientation  $\psi, \theta$  donnée, celle-ci présentera un maximum pour  $\alpha = \pi/2$ . Ce maximum sera d'autant moins accentué que le milieu sera dense.

Inversement, il existe des répartitions avec un maximum très prononcé, c'est-à-dire que les glissements se feront selon des directions voisines d'une valeur donnée. Ce genre de répartition n'est possible que si le milieu est très remanié pendant la déformation, d'où possibilité d'un réarrangement des grains et glissements suivant certaines directions privilégiées. Ce remaniement important suppose que la densité du milieu est faible ou voisine de la densité critique. Pour un essai de compression triaxial, la valeur préférentielle de  $\alpha$  sera  $\frac{\pi}{2}$  et ne pourra être atteinte que dans l'état limite.

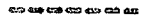


tel-00280656, version 1 - 19 May 2008

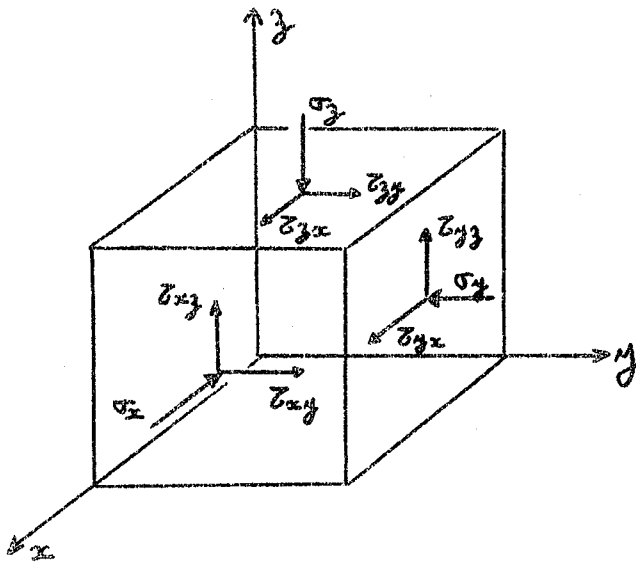


CHAPITRE IV

C O N T R A I N T E S



Soit le cube de côté unité en équilibre sous un état de contrainte  $\sigma$  (voir figure).



Considérons une chaîne  $Chz$  formée de  $mz$  contacts qui glissent. Chacun de ces contacts transmet une force inclinée de  $\varphi_m$  sur la normale, et dont la projection fait un angle  $\alpha$  avec l'horizontale du plan tangent au contact.

L'intensité de ces forces est fixée par les conditions

d'équilibre, donc dépend de la disposition, dans le cube, des points de contacts. Il est donc logique de penser que la valeur moyenne de l'intensité des forces de contact  $f_m(\psi, \theta, \alpha, t)$ , pour les contacts ayant une orientation donnée, sera indépendante de l'orientation  $\psi, \theta, \alpha$ . Nous la noterons  $f_m(t)$ .

Chaque chaîne  $Chz$  sera soumise à des forces extérieures dues à  $\sigma$  et à des forces de contacts avec les autres chaînes qui l'entourent. Examinons ces deux systèmes de forces.

a) Forces extérieures :

Ces forces s'appliqueront aux deux extrémités de Chz.  
Comme il y a  $n_z$  chaînes Chz, chacune sera soumise, en moyenne, aux forces  $\frac{\sigma_z}{n_z}$ ,  $\frac{\tau_{zx}}{n_z}$ ,  $\frac{\tau_{zy}}{n_z}$ .

b) Forces de contacts avec les autres chaînes :

Ces forces doivent nécessairement avoir une résultante nulle. Elles doivent équilibrer l'ensemble des forces extérieures diminuées de celles appliquées à la chaîne Chz considérée ; or ces forces ont une résultante nulle.

La chaîne Chz transmet donc dans la direction z des forces qui, en moyenne, devront être égales à  $\frac{\sigma_z}{n_z}$ ,  $\frac{\tau_{zx}}{n_z}$ ,  $\frac{\tau_{zy}}{n_z}$ , d'où :

$$(7) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\sigma_z}{n_z} &= \frac{f_m(t)}{m_z} \sum_{\psi=0}^{\pi/2} \sum_{\theta=0}^{2\pi} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} m_z(\psi, \theta, \alpha, t) \left[ \cos \psi \mu \cos \psi + \sin \psi \mu \sin \psi \sin \alpha \right] \\ \frac{\tau_{zx}}{n_z} &= \frac{f_m(t)}{m_z} \sum_{\psi=0}^{\pi/2} \sum_{\theta=0}^{2\pi} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} m_z(\psi, \theta, \alpha, t) \left[ \begin{aligned} &\cos \psi \mu \sin \psi \sin \theta - \sin \psi \mu \cos \theta \cos \alpha \\ &- \sin \psi \mu \cos \psi \sin \theta \sin \alpha \end{aligned} \right] \\ \frac{\tau_{zy}}{n_z} &= \frac{f_m(t)}{m_z} \sum_{\psi=0}^{\pi/2} \sum_{\theta=0}^{2\pi} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} m_z(\psi, \theta, \alpha, t) \left[ \begin{aligned} &\cos \psi \mu \sin \psi \cos \theta + \sin \psi \mu \sin \theta \cos \alpha \\ &- \sin \psi \mu \cos \psi \cos \theta \sin \alpha \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\}$$

De même dans les directions x et y, l'on aura :

tel-00280656, version 1 - 19 May 2008

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma_x}{m_x} &= \frac{f_m(t)}{m_x} \sum_{\psi=0}^{\pi} \sum_{\theta=0}^{\pi} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} m_x(\psi, \theta, \alpha, t) \begin{bmatrix} \cos \psi \mu \sin \psi \sin \theta \\ - \sin \psi \mu \cos \theta \cos \alpha \\ - \sin \psi \mu \cos \psi \sin \theta \sin \alpha \end{bmatrix} \\
 (7) \quad \frac{\sigma_{xx}}{m_x} &= \frac{f_m(t)}{m_x} \sum_{\psi=0}^{\pi} \sum_{\theta=0}^{\pi} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} m_x(\psi, \theta, \alpha, t) \begin{bmatrix} \cos \psi \mu \cos \psi \\ + \sin \psi \mu \sin \psi \sin \alpha \end{bmatrix} \\
 \frac{\sigma_{xy}}{m_x} &= \frac{f_m(t)}{m_x} \sum_{\psi=0}^{\pi} \sum_{\theta=0}^{\pi} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} m_x(\psi, \theta, \alpha, t) \begin{bmatrix} \cos \psi \mu \sin \psi \cos \theta \\ + \sin \psi \mu \sin \theta \cos \alpha \\ - \sin \psi \mu \cos \psi \cos \theta \sin \alpha \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

et :

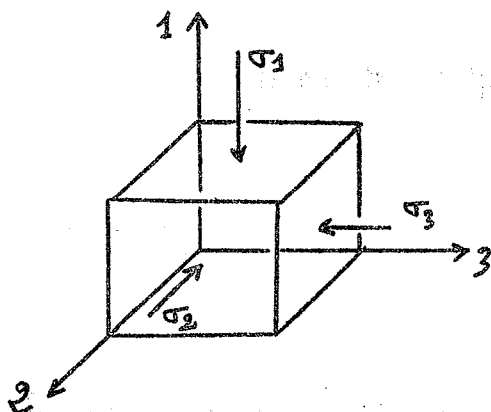
$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma_y}{m_y} &= \frac{f_m(t)}{m_y} \sum_{\psi=0}^{\pi} \sum_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} m_y(\psi, \theta, \alpha, t) \begin{bmatrix} \cos \psi \mu \sin \psi \cos \theta \\ + \sin \psi \mu \sin \theta \cos \alpha \\ - \sin \psi \mu \cos \psi \cos \theta \sin \alpha \end{bmatrix} \\
 (7) \quad \frac{\sigma_{yy}}{m_y} &= \frac{f_m(t)}{m_y} \sum_{\psi=0}^{\pi} \sum_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} m_y(\psi, \theta, \alpha, t) \begin{bmatrix} \cos \psi \mu \cos \psi \\ + \sin \psi \mu \sin \psi \sin \alpha \end{bmatrix} \\
 \frac{\sigma_{yx}}{m_y} &= \frac{f_m(t)}{m_y} \sum_{\psi=0}^{\pi} \sum_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{\alpha=0}^{2\pi} m_y(\psi, \theta, \alpha, t) \begin{bmatrix} \cos \psi \mu \sin \psi \sin \theta \\ - \sin \psi \mu \cos \theta \cos \alpha \\ - \sin \psi \mu \cos \psi \sin \theta \sin \alpha \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Remarque - Nous avons, jusqu'à présent, considéré des répartitions discontinues de contacts. Il est souvent pratique de considérer que tous les angles existent avec une répartition continue. Nous désignerons alors par  $C(\psi, \theta) d\psi d\theta$  : le nombre de contacts dans le corps, compris entre  $\psi$  et  $\psi+d\psi$ ,  $\theta$  et  $\theta+d\theta$ . Il en sera de même de  $m_z(\psi, \theta, \alpha, t)$ ,  $m_x(\psi, \theta, \alpha, t)$  et  $m_y(\psi, \theta, \alpha, t)$ .

Les formules précédentes restent valables, à condition de remplacer le signe  $\sum$  par le signe intégral  $\int$ .

Cas particulier : Problème de révolution. Essai de compression triaxial.

Considérons un cube soumis à des pressions  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = \text{cte}$ . Nous supposons que les axes principaux de la déformation coïncident avec ceux des contraintes, et que nous avons  $\dot{\epsilon}_1 < 0$ ,  $\dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3 > 0$  (compression).



Le problème étant de révolution, l'anisotropie, les déformations et les contraintes seront indépendantes de  $\theta$ . Soit :

$$C(\psi, \theta, \alpha, t) = C(\psi, 0, \alpha, t) = \bar{C}(\psi, \alpha, t)$$

Les formules (6) s'écrivent alors :

$$\bar{C}(\psi, \alpha) = \bar{C}(\pi - \psi, \alpha + \pi)$$

$$n_1 m_1 = n_2 m_2 = n_3 m_3$$

$$(8) \quad \frac{m_2(\psi, \theta, \alpha, t)}{m_1} = \frac{\bar{m}_2(\psi, \alpha, t)}{m_2} = \frac{\bar{c}(\psi, \alpha, t)}{c} \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

$$\frac{m_2(\psi, \theta, \alpha, t)}{m_2} = \frac{\bar{m}_2(\psi, \alpha, t)}{m_2} = \frac{\bar{c}(\psi, \alpha, t)}{c} \quad 0 \leq \psi \leq \pi \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

$$\frac{m_3}{m_2} = \frac{2}{\pi} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \bar{c}(\psi, \alpha, t) \sin \psi \, d\psi \, d\alpha}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \bar{c}(\psi, \alpha, t) \cos \psi \, d\psi \, d\alpha}$$

Les déformations et les contraintes s'écrivent :

$$(9) \quad \dot{\epsilon}_1 = -2\pi \nu_m(t) \frac{m_3}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \bar{c}(\psi, \alpha, t) \sin \psi \sin \alpha \, d\psi \, d\alpha$$

$$\dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3 = 4 \nu_m(t) \frac{m_2}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \bar{c}(\psi, \alpha, t) \cos \psi \sin \alpha \, d\psi \, d\alpha$$

$$\dot{\gamma} = 0$$

$$(10) \quad \sigma_1 = 2\pi f_m(t) \frac{m_3}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \bar{c}(\psi, \alpha, t) [\cos \psi \cos \psi + \sin \psi \sin \psi \sin \alpha] \, d\psi \, d\alpha$$

$$\sigma_2 = 4 f_m(t) \frac{m_2}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \bar{c}(\psi, \alpha, t) [\cos \psi \sin \psi - \sin \psi \cos \psi \sin \alpha] \, d\psi \, d\alpha$$

$$\tau = 0$$

Examinons la fonction  $\bar{C}(\psi, \alpha, t)$  pour un angle  $\psi$  donné  $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ . Comme  $\dot{\xi}_1 < 0$  et  $\dot{\xi}_2 > 0$ , nous devons avoir

$$\int_0^{2\pi} \bar{C}(\psi, \alpha, t) \sin \alpha \, d\alpha > 0, \text{ ce qui suppose que la majorité des } \alpha \text{ seront compris entre } 0 \text{ et } \pi.$$

La répartition sera probablement symétrique par rapport à

$\alpha = \frac{\pi}{2}$  et présentera un maximum pour  $\alpha = \pi/2$ . Nous supposons de plus que la répartition des  $\alpha$  est indépendante de  $\psi$  et nous poserons :

$$\bar{C}(\psi, \alpha, t) = \bar{C}(\psi, t) g(\alpha, t)$$

$\bar{C}(\psi, t) \, d\psi$  = nombre de contacts compris entre  $\psi$  et  $\psi + d\psi$  qui glissent au temps  $t$ .

$g(\alpha, t)$  = proportion de ces contacts qui glissent dans les directions entre  $\alpha$  et  $\alpha + d\alpha$ .

Nous aurons donc :

$$\int_0^{2\pi} g(\alpha, t) \, d\alpha = 1$$

Posons :

$$\int_0^{2\pi} g(\alpha, t) \sin \alpha \, d\alpha = K$$

Des formules (8), (9), (10), l'on tire alors :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{e}{\pi} \frac{\int_0^{\pi/2} \bar{C}(\psi, t) \sin \psi \, d\psi}{\int_0^{\pi/2} \bar{C}(\psi, t) \cos \psi \, d\psi}$$

$$\frac{\dot{\xi}_2}{\dot{\xi}_1} = - \frac{e}{\pi} \frac{m_2}{m_1} \frac{\int_0^{\pi/2} \bar{C}(\psi, t) \cos \psi \, d\psi}{\int_0^{\pi/2} \bar{C}(\psi, t) \sin \psi \, d\psi} = - \left( \frac{e}{\pi} \frac{m_2}{m_1} \right)^2$$

tel-00280656, version 1 - 19 May 2008

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\pi}{2} \frac{m_2}{m_1} \frac{\cos \varphi_r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{c}(y,t) \cos y dy + K \sin \varphi_r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{c}(y,t) \sin y dy}{\cos \varphi_r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{c}(y,t) \sin y dy - K \sin \varphi_r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{c}(y,t) \cos y dy}$$

ou :

$$(11) \quad \left| \begin{aligned} \frac{\pi}{2} \frac{m_1}{m_2} &= \sqrt{-\frac{\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\varepsilon}_2}} = \sqrt{\frac{\dot{\varepsilon}_1}{|\dot{\varepsilon}_2|}} \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_2} &= \frac{\pi}{2} \frac{m_2}{m_1} \frac{1 + K \operatorname{tg} \varphi_r \frac{\pi m_1}{2 m_2}}{\frac{\pi m_1}{2 m_2} - K \operatorname{tg} \varphi_r} \end{aligned} \right.$$

ou encore :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\pi^2 - \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1} + \sqrt{-\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1}} K \operatorname{tg} \varphi_r}{1 - \sqrt{\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1}} K \operatorname{tg} \varphi_r}$$

Désignons par  $V$  le volume du cube et par  $\dot{V} = \frac{dV}{dt}$  la vitesse de variation de volume, nous aurons :

$$-\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1} = 1 - \frac{\dot{V}}{V \dot{\varepsilon}_1}$$

La formule (12) devient :

$$(12) \quad \left| \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\pi^2 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\dot{V}}{V \dot{\varepsilon}_1}\right) + \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\dot{V}}{V \dot{\varepsilon}_1}\right)} K \operatorname{tg} \varphi_r}{1 - \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\dot{V}}{V \dot{\varepsilon}_1}\right)} K \operatorname{tg} \varphi_r} \right.$$

Cette dernière formule relie la déviateur de contraintes  $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$  à la vitesse de variation de volume. Elle fait intervenir l'angle de frottement  $\mu$ , et une fonction K :

$$K = \int_0^{2\pi} g(\alpha, t) \sin \alpha \, d\alpha$$

Cette fonction est inconnue à priori, cependant on peut fixer ses valeurs limites.

La limite supérieure de K est atteinte si tous les glissements se font avec  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , d'où  $K = 1$ .

Ce sera le cas d'un milieu remanié, de densité voisine de la densité critique. Par contre, pour de fortes densités, l'on se rapprochera d'une répartition uniforme de  $\alpha$  entre 0 et  $\pi$  d'où :

$$K = \frac{2}{\pi} = 0,637$$

Entre ces limites, K dépendra essentiellement de la densité du milieu. Pour un milieu de densité supérieure à la densité critique, la loi la plus simple consistera en une variation linéaire de K en fonction de la densité, soit :

$$K = \frac{1}{\pi(d_{max} - d_c)} \left[ (2 - \pi)d + \pi d_{max} - 2 d_c \right]$$

d : densité

$d_{max}$  : densité maximum

$d_c$  : densité critique.

Remarque - Les valeurs limites de  $K$  correspondent à deux cas extrêmes de dissipation d'énergie dans le milieu. Le milieu reçoit une énergie  $\sigma_1 \dot{\epsilon}_1$  et transmet une énergie  $2 \sigma_2 \dot{\epsilon}_2$ . Nous appellerons "rendement" du milieu la quantité  $-\frac{2 \sigma_2 \dot{\epsilon}_2}{\sigma_1 \dot{\epsilon}_1}$ . Pour une valeur donnée de  $\frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1}$ , ce rendement sera minimum pour  $K = 1$  et maximum pour  $K = \frac{2}{\pi}$ . Donc le milieu dissipera, pour une déformation donnée  $\frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1}$ , un maximum d'énergie pour  $K = 1$  et un minimum d'énergie pour  $K = \frac{2}{\pi}$ .

---



## CONCLUSION

Nous voyons qu'il est possible, à partir de l'anisotropie du milieu, de décrire statistiquement l'empilement de grains et d'en déduire l'expression des déformations et contraintes. Ces dernières font, de plus, intervenir un angle  $\alpha$  qui dépendra du chemin de déformation et de la densité du milieu. L'anisotropie et la répartition des  $\alpha$  sont inconnues, et il sera nécessaire, pour résoudre des problèmes, de fixer leurs formes. Pour l'anisotropie, il est généralement admis que la répartition des contacts sera décrite par un ellipsoïde dont les axes coïncident avec ceux de la déformation.

Pour fixer la forme de la répartition des  $\alpha$ , il sera par contre, nécessaire d'étudier chaque problème particulier; comme nous l'avons fait pour l'expérience triaxiale de révolution. De ce fait il ne peut exister une relation générale contrainte-déformation; mais, pour chaque type d'essai, il sera possible d'établir une relation spécifique.

---



BIBLIOGRAPHIE

- [1] C.W. THURSTON et H. DERESIEWICZ -  
"Analysis of a compression test of a granular medium".  
Journal of Applied Mechanics. Vol. 226, n°2,  
p. 252. Juin 1959.
- [2] P. DANTU -  
"Etude mécanique d'un milieu pulvérulent formé  
de sphères égales de compacité maxima".  
Proceedings, 5th Congrès International de Méca-  
nique des Sols. Vol. 1, page 61. 1961.
- [3] B.C. RENNIE -  
"On the Strength of Sand"  
Journal of the Australian Mathematical Society .  
Vol. 1, part 1. 1959.
- [4] J. BIAREZ -  
"Contribution à l'étude des propriétés mécaniques  
des sols et des matériaux pulvérulents".  
Thèse de Doctorat ès-Sciences, Faculté des Sciences  
de Grenoble. 1962.
- [5] P.W. ROWE -  
"The stress dilatancy relation for static equili-  
brium of an assembly of particles in contact".  
Journal of the Soil Mechanics and Foundations Divi-  
sion. Proceedings of the American Society of Civil  
Engineers. May 1963. Paper 3507.
- [6] M.R. HORNE -  
"The Behaviour of an assembly of rotund, rigid,  
cohesionless particles I.II."  
Proceedings of the Royal Society. June 1964, p. 62.

