

2<sup>e</sup> thèse

G. PICOLLIER

1966



ETUDE DE LA STABILITE DES CHAMBRES D'EQUILIBRE

S O M M A I R E

- I. GENERALITES
2. EQUATIONS GENERALES DU MOUVEMENT
3. ETUDE DU MOUVEMENT DANS LE CAS OU LA CHAMBRE NE COMPORTE PAS D'ETRANGLEMENT
  - 3.1. Etude topologique directe
  - 3.2. Approximation par développement de  $\frac{I}{H + Z}$ 
    - 3.2.1. Variables réduites
    - 3.2.2. Equations des petits mouvements
    - 3.2.3. Première approximation
    - 3.2.4. Application du critère de ROUTH-HURWITZ
    - 3.2.5. Equations du deuxième ordre linéarisées
    - 3.2.6. Etude de l'équation non linéaire
4. CHAMBRE AVEC ETRANGLEMENT
  - 4.1. Equations de base
  - 4.2. Etude par la méthode de l'équivalent harmonique
  - 4.3. Cycle limite
  - 4.4. Cas limite où  $F = F_T$



## I. GENERALITES

Les installations hydro-électriques comportant une conduite forcée et une galerie d'amenée en charge assez longue, sont en général pourvues d'une cheminée ou chambre d'équilibre située entre la galerie et la conduite forcée. L'exploitation d'une centrale dépend pour une part importante du dimensionnement de la chambre d'équilibre. Cet ouvrage conditionne les mouvements oscillatoires de l'eau dans l'installation provoqués par la manoeuvre des organes de garde des turbines.

Un problème important à la base du dimensionnement de la cheminée est celui du réglage de la puissance. Le réglage à puissance constante provoque des oscillations de l'eau dans la cheminée et les conduites et il est indispensable que ces oscillations soient stables et amorties d'une façon suffisamment rapide. La période des mouvements du vannage lors du réglage de la puissance est grande devant celle liée au réglage de la vitesse. On peut ainsi séparer ces deux phénomènes en première analyse.

Les facteurs intervenant dans la stabilité du réglage sont nombreux. Citons principalement, les dimensions géométriques de l'installation, les pertes de charge réparties et singulières, le rendement de la turbine, le facteur d'autoréglage, etc...

Nous étudierons la stabilité en supposant le rendement constant et le groupe fonctionnant en réseau séparé, l'influence des paramètres liés au groupe et au réseau pouvant faire, en général, l'objet d'une étude particulière.

Les équations différentielles régissant le mouvement de l'eau dans l'installation ne sont pas linéaires. Les non linéarités proviennent de la condition de puissance constante et des pertes de charges proportionnelles au carré des débits, ou plus précisément, à  $Q|Q|$ .

La résolution de ces équations n'est en général pas possible directement par voie analytique. On peut cependant obtenir des résultats intéressants moyennant certaines hypothèses simplificatrices. Nous distinguerons deux grands procédés d'étude employés en fonction des renseignements que l'on désire obtenir; les méthodes analytiques et les méthodes graphiques ou semi-graphiques. Les premières ne sont utilisables, comme nous l'avons dit, qu'après avoir fait certaines hypothèses simplificatrices. Le procédé le plus simple consiste à négliger les pertes de charge, mais pour l'étude de la stabilité, il faut nécessairement tenir compte des pertes de charge dans la galerie.

Les oscillations dans l'installation peuvent être assimilées à de petits mouvements. C'est d'ailleurs un des buts recherchés. On peut alors linéariser les équations autour des positions d'équilibre et, en général, les résoudre.

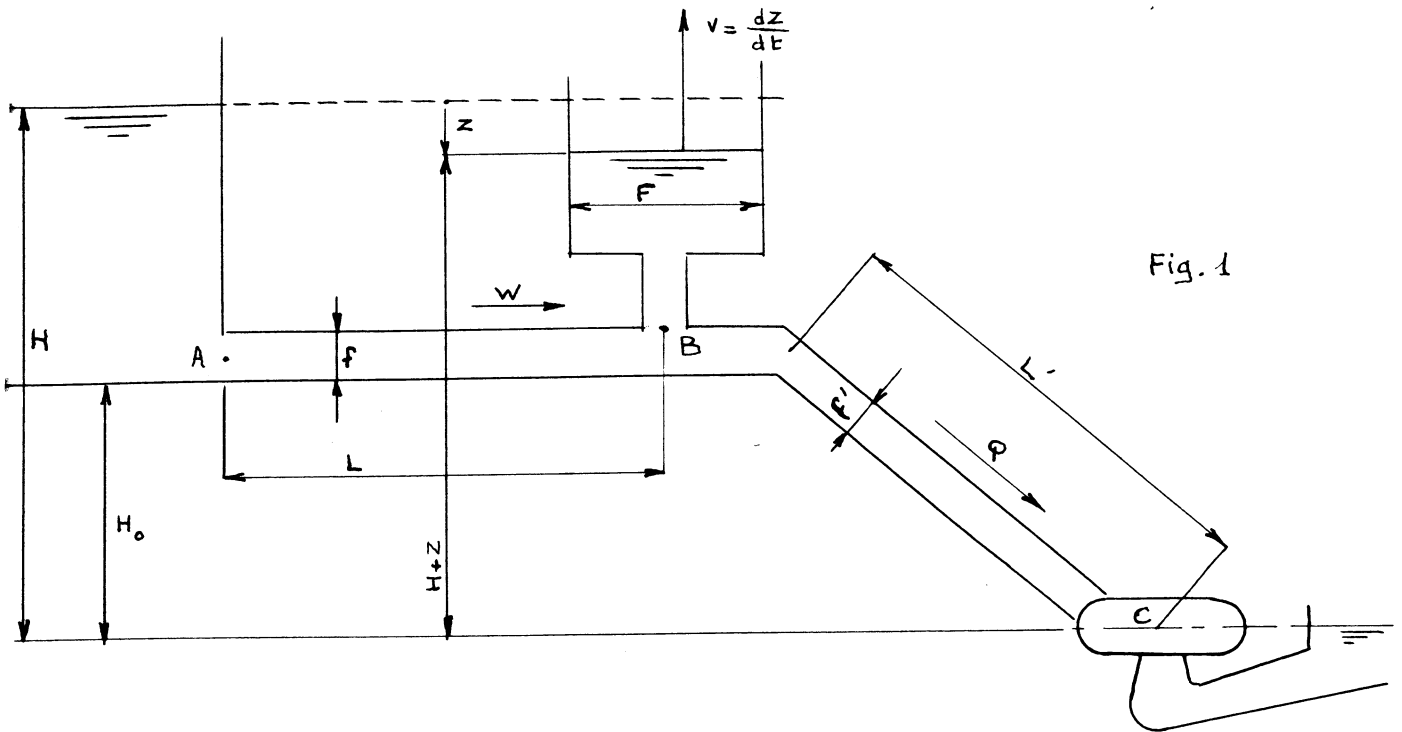
La stabilité du système non linéaire peut ainsi s'étudier à partir des équations linéarisées. Dans certains cas, il est cependant nécessaire d'étudier l'évolution du phénomène au cours du temps. Supposons, par exemple, qu'une manoeuvre du vannage de la turbine produise une oscillation dans la cheminée. Si on réouvre le vannage au moment où le niveau dans la cheminée est au minimum de l'oscillation, ce niveau va encore baisser et l'on risque une entrée d'air dans la conduite (manoeuvres rythmiques). Pour connaître l'évolution des charges et des débits en fonction du temps, on utilise généralement des procédés d'intégration graphique des équations type épure de Bergeron.

La présente étude est consacrée à l'analyse des équations différentielles du mouvement, lors des manoeuvres de réglage à puissance constante. Nous utiliserons principalement les méthodes topologiques qui permettent de déterminer la nature des points singuliers, leur stabilité et par l'allure des courbes intégrales, le comportement du système autour de ces points. Ce procédé permet de déterminer rapidement l'influence des différents paramètres de l'installation et de déduire les conditions de stabilité. Il permet de rattacher l'étude particulière des cheminées d'équilibre au problème général de la stabilité des systèmes dynamiques non linéaires.

Après avoir rappelé les équations générales du mouvement, nous montrerons comment on obtient la condition principale de stabilité (section de Thoma). Nous étudierons ensuite l'influence sur le mouvement, des pertes de charge pour des cheminées comportant ou non un étranglement à la base.

## 2. EQUATIONS GENERALES DU MOUVEMENT

L'installation est représentée schématiquement par la figure 1. Les cotes des niveaux sont comptées positivement vers le haut.



Nous désignerons par :

$H$  : La chute statique.

$Z$  : La cote du plan d'eau dans la cheminée par rapport au niveau amont.

$L$  : La longueur de la galerie d'amenée.

$f$  : La section de la galerie.

$w$  : La vitesse de l'eau dans la galerie.

$F$  : La section de la cheminée qui peut être fonction de  $Z$ .

$v$  : La vitesse de l'eau dans la cheminée.

$L'$  : La longueur de la conduite forcée.

$Q$  : Le débit dans la conduite forcée.

L'indice 0 caractérise un régime permanent :

Soit  $P$ , la perte de charge dans la galerie d'amenée et  $E$ , la perte de charge dans l'étranglement à la base de la cheminée.

Nous poserons :

$$P = \lambda w^2 \tag{1}$$

$$E = \mu v^2$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des paramètres constants dont le signe dépend du signe de la vitesse.

L'application du théorème de la quantité de mouvement à la masse d'eau contenue dans la galerie donne immédiatement :

$$\frac{L}{g} \frac{dW}{dt} + Z + P + E = 0 \quad (2)$$

L'équation de continuité au pied de la cheminée permet d'écrire :

$$f W = F \cdot V + Q \quad (3)$$

avec :

$$V = \frac{dZ}{dt}$$

La relation de puissance constante donne enfin :

$$Q (H + Z) = Q_0 (H + Z_0) = K = \text{constante} \quad (4)$$

où  $Q_0 = fW_0$  est le débit en régime permanent

et  $Z_0 = -P_0 = -\lambda W_0^2$

On a évidemment  $V_0 = 0$  en régime permanent.

D'autre part, si la cheminée ne comporte pas d'étranglement à la base, nous aurons  $E = 0$  avec  $\mu = 0$

### 3. Etude du mouvement dans le cas où la chambre ne comporte pas d'étranglement

#### 3.I. Etude topologique directe

On a dans ce cas  $\mu = 0$  et les équations (1) à (4) se réduisent au système suivant de deux équations différentielles du 1er ordre.

$$\frac{L}{g} \frac{dW}{dt} = -Z - \lambda W^2 \quad (5)$$

$$F \frac{dZ}{dt} = f W - \frac{K}{H + Z} \quad (6)$$

Ces équations peuvent encore se mettre sous la forme =

$$\frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{L}{g} \{fW (H + Z) - K\}} = \frac{\frac{dW}{dt}}{-F (H + Z) (Z + \lambda W^2)} = \frac{\frac{dt}{dt}}{\frac{LF}{g} (H + Z)} \quad (7)$$

et en posant :

$$X = -F (H + Z) (Z + \lambda W^2) \quad (8)$$

$$Y = \frac{L}{g} [fW (H + Z) - K]$$

$$T = \frac{LF}{g} (H + Z)$$

on obtient :

$$\frac{dW}{X(W,Z)} = \frac{dZ}{Y(W,Z)} = \frac{dt}{T(W,Z)} \quad (9)$$

qui constituent les équations différentielles d'un système dynamique plan.

Nous examinons maintenant l'allure des courbes intégrales dans le plan W,Z.

Notons, tout d'abord, que la courbe T = 0 correspond à :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dZ}{dt} \rightarrow \infty$$

C'est une courbe frontière correspondant à un équilibre instable.

On a bien entendu - Z < H.

Les points singuliers sont les points communs aux deux courbes

X (W,Z) = 0 et Y (W,Z) = 0 (fig.2).

Dans notre cas, ces courbes sont respectivement une parabole et une hyperbole. Les points singuliers sont au nombre de deux, soit M et N, qui représentent deux états d'équilibre du système dont nous devons étudier la stabilité, W et Z sont constants en ces points.

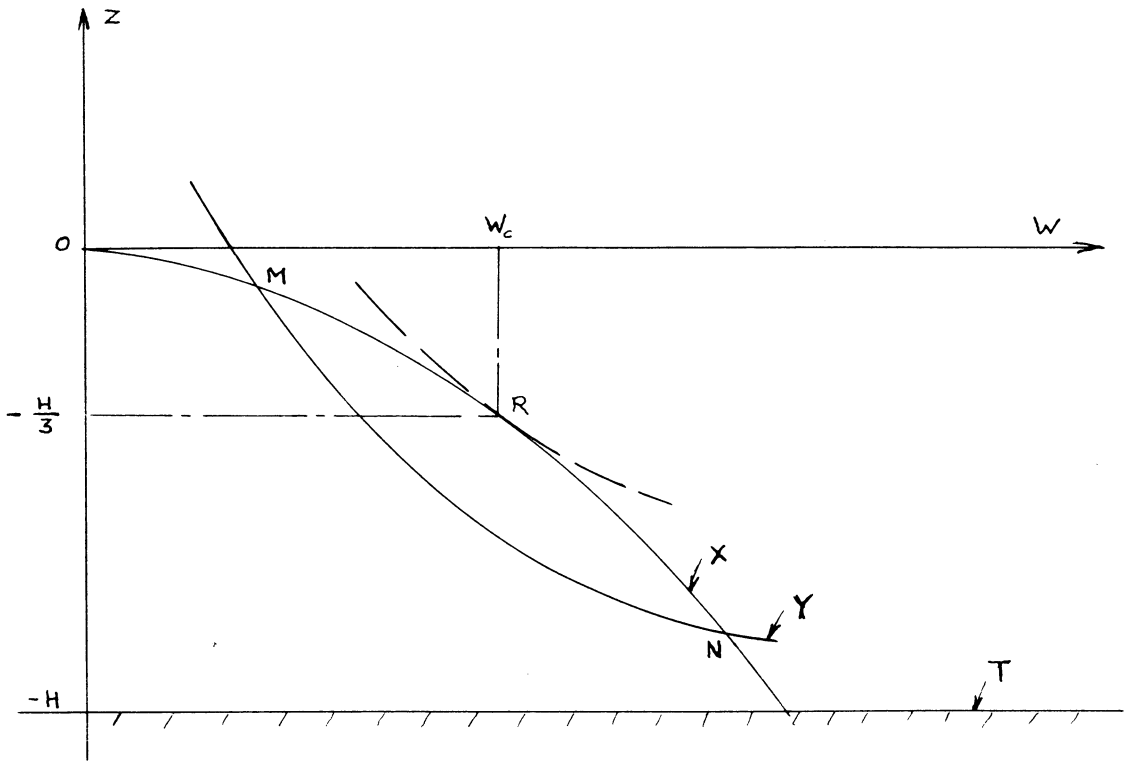


Fig. 2

L'hyperbole  $Y = 0$  dépend seule de la puissance  $K$ , c'est une courbe de réglage. Lorsque cette hyperbole est tangente à la parabole, on a atteint le maximum de puissance utilisable.

Les deux points singuliers sont confondus, soit  $W_c$  le débit correspondant au point double.

En chaque point du plan  $W, Z$  qui ne soit pas un point singulier, il passe une courbe intégrale et une seule.

L'équation caractéristique associée aux équations (8) s'écrit :

$$S^2 + \xi S + \eta = 0 \quad (10)$$

$$\text{avec } \xi = - (X'_W + Y'_Z) \quad (11)$$

$$\eta = X'_W Y'_Z - Y'_Z X'_W \quad (12)$$

D'autre part, la pente  $\lambda$  des tangentes aux courbes intégrales aux points singuliers, lorsque ces tangentes existent, est donnée par l'équation.

$$X'_Z \lambda^2 + (X'_W - Y'_Z) \lambda - Y'_W = 0 \quad (13)$$

La stabilité d'un tel système est liée à la nature des points singuliers. Il est commode de classer les points singuliers dans le plan paramétrique  $\eta, \xi$  (fig. 3).

Les régions des noeuds et des foyers sont séparées par la parabole  $\phi = 0$   
 $\phi$  représente le discriminant de l'équation caractéristique (10).

$$\phi = \xi^2 - 4\eta \quad (I4)$$

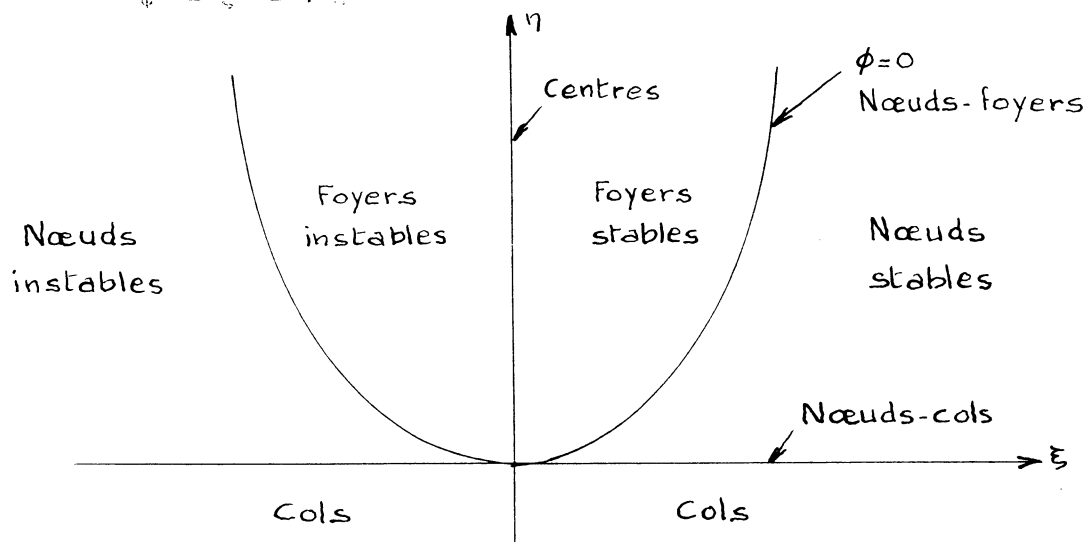


Fig.3

Dans notre problème particulier, les valeurs des paramètres  $\xi$   $\eta$   $\phi$  sont les suivantes :

$$\xi = W \left[ -\frac{Lf}{g} + 2\lambda F (H + Z) \right] \quad (I5)$$

$$\eta = \frac{LPf}{g} (H + Z) (H + 2Z - \lambda W^2) \quad (I6)$$

et  $\phi = \xi^2 - 4\eta$

Conditions de stabilité

T étant positif, la première condition de stabilité nécessaire, mais non suffisante est la suivante :

$$\xi > 0$$

soit :  $2\lambda F (H + Z) > \frac{Lf}{g}$

ou encore :

$$F > \frac{Lf}{2g\lambda(H+Z)} \quad (I7)$$

On retrouve la condition de Thoma donnant une section minimum de la chambre d'équilibre pour laquelle les oscillations ne sont pas amplifiées.

Les points singuliers M et N, situés à l'intersection des courbes  $X = 0$  et  $Y = 0$  sont déterminés par l'équation suivante du troisième degré en W :

$$\lambda f W^3 - f H W + K = 0 \quad (18)$$

Le point M correspond à la plus petite racine positive W, et aux plus faibles oscillations du plan d'eau.

Nous remarquerons qu'aux points singuliers nous avons :

$$\eta = (H + 3Z) \frac{L f f}{g} (H + Z) \quad (19)$$

$\eta$  est donc de même signe que  $H + 3Z$  puisque  $H + Z$  est toujours positif.

La deuxième condition de stabilité est donnée par  $\eta > 0$

donc  $H + 3Z > 0$

$$\text{ou encore } Z > -\frac{H}{3} \quad (20)$$

Le point M est alors un foyer ou un noeud stable.

Lorsque les courbes  $X = 0$  et  $Y = 0$  sont tangentes, le point singulier correspondant R est à caractère double.

Le débit critique correspondant  $W_c$  est donné par la racine double de l'équation (18) on trouve :

$$W_c = \sqrt{\frac{H}{3\lambda}} \quad (21)$$

Le paramètre de la puissance maximum correspondante a pour valeur :

$$K_c = \frac{2}{3\sqrt{3}} f H \sqrt{\frac{H}{P}} \quad (22)$$

La hauteur Z critique des oscillations dans la cheminées est égale à :

$$Z_c = -\frac{H}{3} \quad (23)$$

On a dans ce cas  $\eta = 0$  et le point singulier est un noeud-col.

Les conditions de stabilité imposent encore  $F > 0$  donc d'après (35),

$$2 \lambda F \left( H - \frac{H}{3} \right) > \frac{L F}{E}$$

ou 
$$F > \frac{3}{2} \frac{L F}{2 E \lambda H} \quad (24)$$

Le point singulier  $N$  est tel que  $Z > -\frac{F}{3}$  donc  $\eta < 0$ . Ce point est un col et l'équilibre correspondant est instable.

Les conditions normales de fonctionnement de l'installation sont telles que  $K$  est inférieur en général à la valeur maximum  $K_c$  définie par (22).

Les courbes intégrales ont alors l'allure donnée par la figure 4.

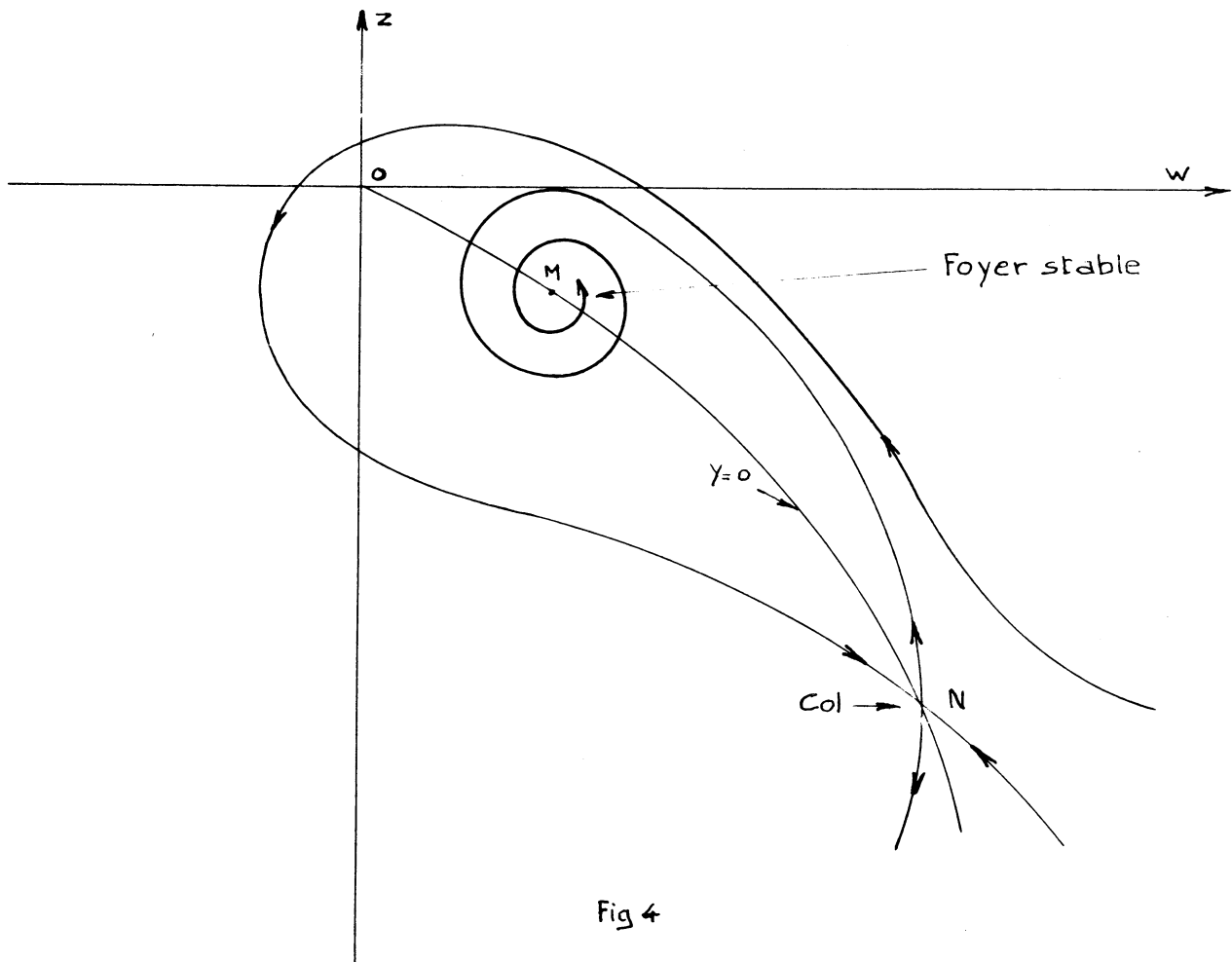


Fig 4

3.2. Approximation par développement de  $\frac{1}{H + Z}$

3.2.1. Variables réduites

soit un régime de fonctionnement permanent défini par :

$Q_0$  débit dans la conduite forcée et la galerie

$$W_0 = \frac{Q_0}{F} = \frac{K}{f (h + Z_0)}$$

$$P_0 = - Z_0 = \lambda W_0^2 \quad \text{Abaissement du plan d'eau dans la chambre par rapport au niveau statique (25)}$$

Nous poserons :

$$w = \frac{W}{W_0}$$

$$z = \frac{Z}{P_0} \tag{26}$$

$$h = \frac{H}{P_0}$$

$$\alpha = \frac{f L W_0^2}{g F P_0^2} = \frac{L f}{g \lambda F P_0} = 2 \frac{F T}{F} (h - 1)$$

$$\tau = \frac{g P_0}{L W_0} t$$

$$F T = \frac{L f}{2 g \lambda (H + Z_0)} \quad \text{section de Thoma}$$

Les équations de base (5) et (6) deviennent :

$$\frac{dw}{d\tau} = - w^2 - z \tag{27}$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \alpha w - \alpha \frac{h - 1}{h + z} \tag{28}$$

Remarquons que ces équations en variables réduites peuvent être utilisées à la place des équations (5) et (6) dans l'étude topologique précédente.

En régime permanent  $w = 1 \quad z = - 1$

tel-00280389, version 1 - 16 May 2008

### 3.2.2. Equations des petits mouvements

Pour étudier les petits mouvements autour de la position d'équilibre nous poserons de plus

$$w = 1 + x \quad (29)$$

$$z = -1 + y \quad (30)$$

où  $x$  et  $y$  représentent respectivement les variations relatives du débit dans la galerie et du niveau de l'eau dans la chambre par rapport au régime permanent.

Dans ces conditions, les équations (27) et (28) s'écrivent :

$$\frac{dx}{dt} = -2x - y - x^2 \quad (31)$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha x + \alpha \frac{y}{h-1+y} \quad (32)$$

### 3.2.3. Première approximation

$y$  étant petit devant  $h-1$ , on peut développer le terme  $\frac{y}{h-1+y}$  en série de puissance de  $y$ .

En conservant seulement le premier terme du développement, nous pouvons écrire le système (31) (32) sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = -2x - y - x^2 = X(x, y) \quad (31)$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha x + \frac{\alpha}{h-1} y = Y(x, y) \quad (33)$$

$$\text{avec } \frac{\alpha}{h-1} = 2 \frac{Fr}{F}$$

Les positions d'équilibre du système sont alors définies par  $x = y = 0$ .

tel-00280389, version 1 - 16 May 2008

Ecrites sous cette forme, les équations non linéaires définissant le mouvement de l'eau dans l'installation peuvent être aisément traitées par de nombreuses méthodes analytiques ou topologiques.

Nous donnons ci-dessous quelques exemples relatifs à l'étude de la stabilité.

### 3.2.4. Application du critère de Routh-Hurwitz

Les deux conditions de stabilité se réduisent à :

$$- \left[ \left( \frac{\delta X}{\delta x} \right)_0 + \left( \frac{\delta Y}{\delta y} \right)_0 \right] > 0 \quad (34)$$

et

$$\left( \frac{\delta X}{\delta x} \right)_0 \cdot \left( \frac{\delta Y}{\delta y} \right)_0 - \left( \frac{\delta X}{\delta y} \right)_0 \cdot \left( \frac{\delta Y}{\delta x} \right)_0 > 0 \quad (35)$$

soit :

$$- 2 + \frac{\alpha}{h + 1} < 0 \quad (36)$$

$$\alpha \frac{h - 3}{h - 1} > 0 \quad (37)$$

ou encore en vertu des changements de variables (25) et (26).

$$F > F_T = \frac{L f}{2 g \lambda (H + Z_0)}$$

On retrouve la condition de Thoma.

D'autre part,  $\frac{\alpha}{h - 1}$  étant positif, la condition (37) se réduit à :

$$H + 3 Z_0 > 0 \quad \text{soit} \quad Z_0 > - \frac{H}{3}$$

condition déjà trouvée dans l'étude précédente.

### 3.2.5. Equations du deuxième ordre linéarisées

Les équations (31) et (33) sont équivalentes aux systèmes suivants du deuxième ordre :

$$L(x) - 2 \frac{FT}{F} x^2 + 2 x \frac{dx}{dt} = 0 \quad (38)$$

$$L(y) + \frac{1}{\alpha} \left( \frac{dy}{dt} - 2 \frac{FT}{F} y \right)^2 = 0 \quad (39)$$

où :

$$L(.) = \frac{d^2}{dt^2} + 2 \left( 1 - \frac{FT}{F} \right) \frac{d}{dt} + \alpha \frac{h-3}{h-1} \quad (40)$$

L'équation (39) est encore équivalente au système.

$$\frac{dv}{dt} + 2 \left( 1 - \frac{FT}{F} \right) v + \alpha \frac{h-3}{h-1} y + \frac{1}{\alpha} \left[ v - \frac{\alpha}{h-1} y \right]^2 = 0 \quad (41)$$

$$v = \frac{dy}{dt} \quad \text{vitesse de l'eau dans la chambre.} \quad (42)$$

Cette dernière forme se prête bien à l'étude de l'équation non linéaire dans le plan de phase, et à la construction des courbes intégrales. Nous utiliserons cette forme dans l'étude des cheminées avec étranglement.

Pour déterminer la nature des points singuliers, nous pouvons utiliser les équations (38) et (39) linéarisées, ce qui revient à considérer, par exemple, l'équation

$$L(x) = 0$$

soit en posant :

$$1 - \frac{FT}{F} = \beta$$

$$\alpha \frac{h-3}{h-1} = 2 \frac{FT}{F} (h-3) = \omega_0^2 \quad (43)$$

l'équation du deuxième ordre linéaire à coefficients constants :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (44)$$

dont l'équation caractéristique est :

$$S^2 + 2\beta S + \omega_0^2 = 0 \quad (45)$$

En comparant à l'équation (40) on voit que les coefficients  $\xi$  et  $\eta$  ont respectivement pour valeur.

$$\begin{aligned} \xi &= 2\beta \\ \eta &= \omega_0^2 \end{aligned} \quad (46)$$

Les conditions de stabilité et la nature des points singuliers s'en déduisent immédiatement.

Dans le cas où le mouvement n'est pas instable ( $\beta > 0$ ) on peut se trouver en présence des configurations suivantes :

a)  $\beta = 0$  la section de la chambre est égale à la section de Thoma. Le mouvement est périodique, entretenu.

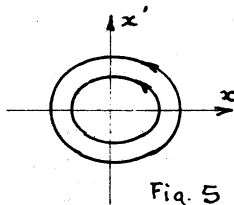


Fig. 5.

Les points singuliers sont des centres.

Les courbes intégrales sont des ellipses homothétiques définies par  $\omega_0^2 x^2 + y^2 = \text{constante}$ .

b)  $\beta^2 < \omega_0^2$  Cas général.

Les points singuliers sont des foyers.  
Les solutions sont de la forme.

$$x = A e^{-\beta\tau} \sin(\omega\tau + \varphi)$$

$$\text{avec } \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

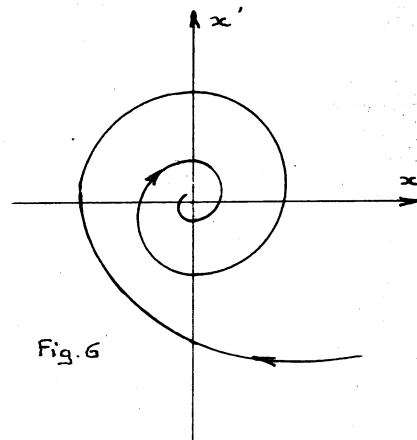


Fig. 6

Les oscillations sont amorties, le décrement logarithmique a pour valeur,

$$\delta = \text{Log} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \beta \frac{2\pi}{\omega}$$

ou  $d = \frac{\delta}{\pi} = \frac{2\beta}{\omega}$

c)  $\beta^2 = \omega_0^2$

Les points singuliers sont des noeuds foyers.  
Les solutions sont de la forme.

$$x = A e^{-\beta\tau} (1 + a \tau)$$

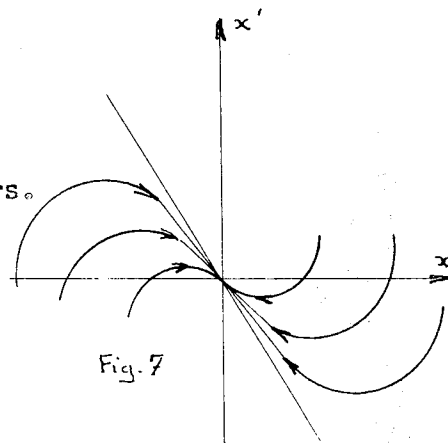


Fig. 7

d)  $\beta^2 > \omega_0^2$

Les points singuliers sont des noeuds attractifs.  
Les solutions sont de la forme.

$$x = A e^{-\beta\tau} \text{sh} (\omega\tau + \varphi)$$

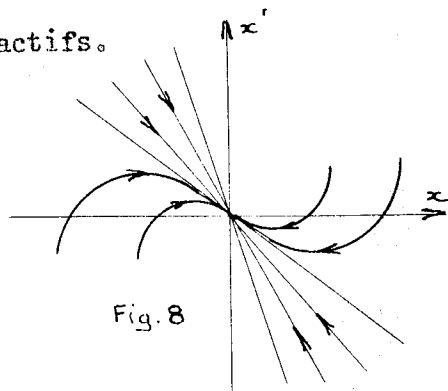


Fig. 8

### 3.2.6. Etude de l'équation non linéaire (38)

Effectuons sur les équations (31) et (33) le changement de variable :

$$y = -v + \frac{\alpha}{h-1} x \tag{47}$$

on obtient :

$$\frac{dx}{d\tau} = +v - 2\beta x - x^2 \tag{48} \quad \beta = 1 - \frac{FT}{F}$$

$$\frac{dv}{d\tau} = -2 \frac{FT}{F} \left( (h-3)x - x^2 \right) \tag{49}$$

Qui est un système de la forme.

$$\frac{dx}{dt} = v - F(x) \quad (50)$$

$$\frac{dv}{dt} = -g(x) \quad (51)$$

$$\text{avec } F(x) = 2\beta x + x^2 \quad (52)$$

$$g(x) = 2 \frac{FT}{F} \left( (h-3)x - x^2 \right) \quad (53)$$

Points singuliers : Considérons le plan  $(x, v)$  - fig.(9)

Le premier point singulier est l'origine.

Le second point singulier A est le point situé sur la parabole  $v = F(x)$ , d'abscisse  $x = h - 3$ .

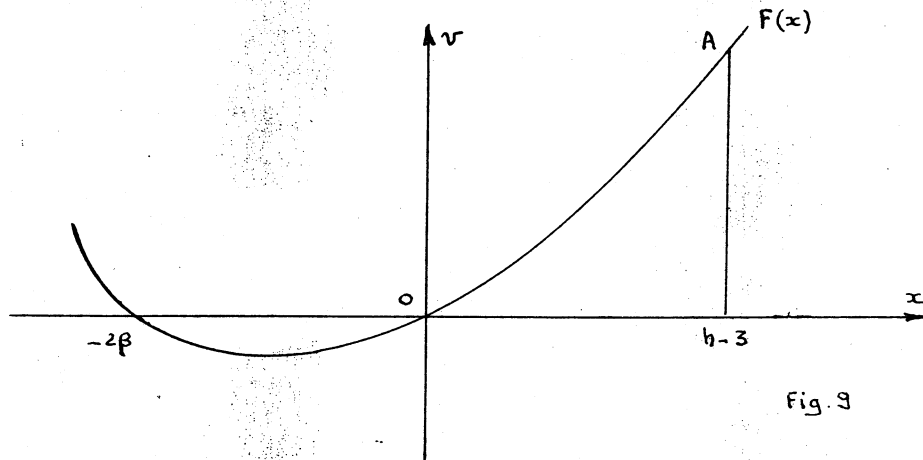


Fig. 9

Comme précédemment, la nature des points singuliers est déterminée par la valeur des paramètres  $\xi, \eta, \phi$ .

On a dans le cas présent :

$$\xi = 2(\beta + x) \quad \beta = 1 - \frac{FT}{F}$$

$$\eta = 2 \frac{FT}{F} (h - 3 - 2x)$$

$$\begin{aligned} \phi &= \xi^2 - 4\eta = 4 \left\{ (\beta + x)^2 - 2 \frac{FT}{F} (h - 3 - 2x) \right\} \\ &= 4 \left\{ \left(\frac{FT}{F}\right)^2 + 2(x + 2 - h) \frac{FT}{F} + (1 + x)^2 \right\} \end{aligned}$$

En général on a par exemple :

Pour le point 0 ( $x = v = 0$ )

$$\xi > 0$$

$$\eta > 0$$

le point 0 est un foyer ou un noeud stable suivant le signe de  $\phi$

Pour le point A ( $x = h - 3$ )

$$\xi > 0$$

$$\eta < 0$$

Le point A est un col.

Construction des courbes intégrales (fig.10)

On peut utiliser la construction de LIENARD en reprenant la figure 3.

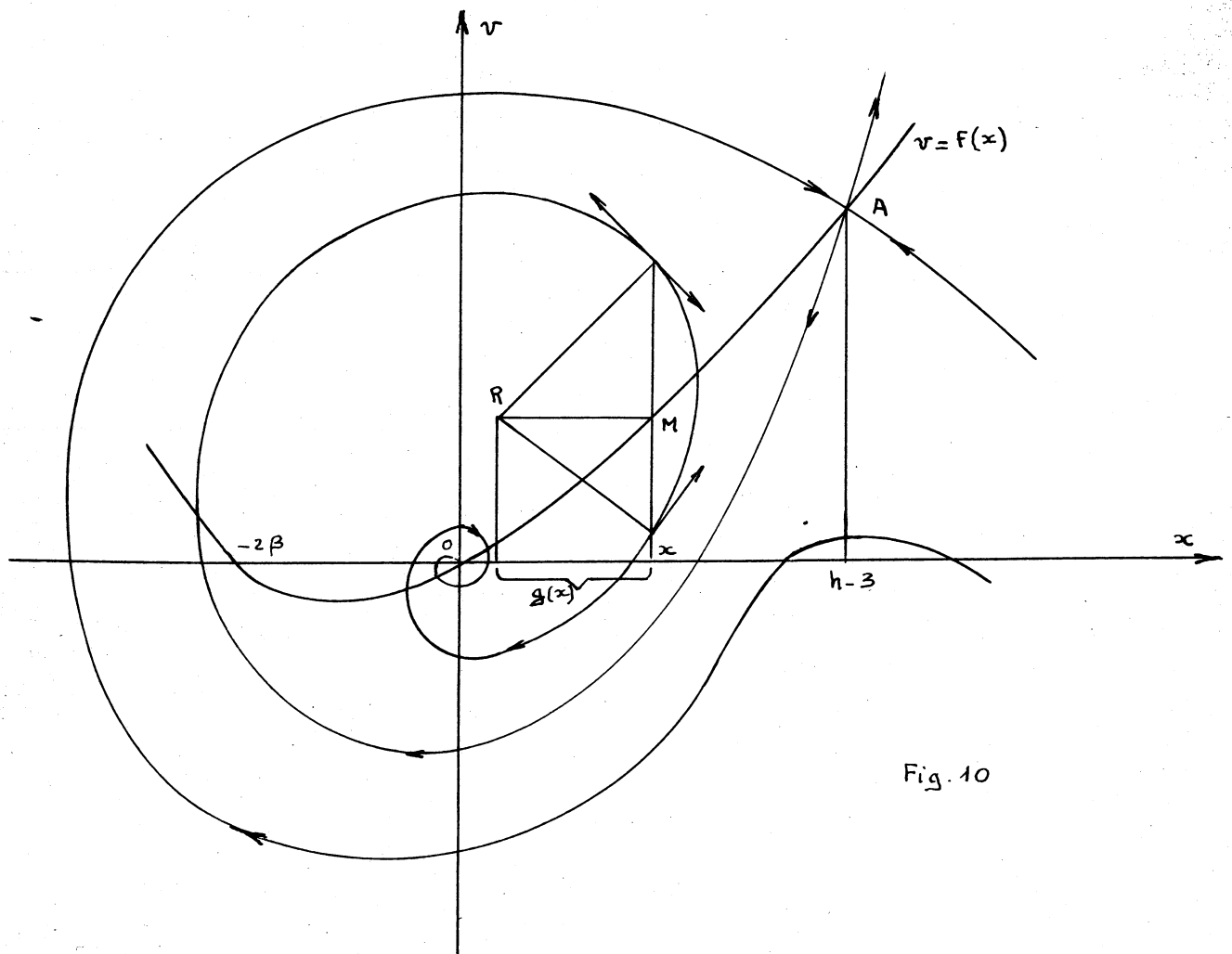


Fig. 10

Rappelons que la normale au point d'abscisse  $x$  passe par le point R, obtenu en décalant la courbe  $F(x)$  de  $-g(x)$ .

On obtient ainsi la direction de la tangente en tout point d'abscisse  $x$ .

On notera, en particulier, que ces courbes intégrales coupent la parabole  $F(x)$  avec une tangente verticale et la verticale  $x = h - 3$  avec une tangente horizontale. Aux points singuliers, la pente des tangentes est donnée par l'équation caractéristique (I3).

#### Domaine de stabilité

La forme (50) (51) du système permet de considérer une fonction  $V$  de Liapounov de la forme :

$$V(x, v) = 1/2 v^2 + G(x) \quad (54)$$

qui représente l'énergie totale du système non amorti (conservatif) où

$$G(x) = \int_0^x g(x) dx = \frac{F_T}{F} \left( (h-3) x^2 - \frac{2}{3} x^3 \right)$$

On a alors :

$$\frac{dV}{dt} = -g(x) \cdot F(x)$$

$V$  est positif autour de l'origine ainsi que pour  $x = h - 3$  en général.

L'équilibre est asymptotiquement stable autour de l'origine si

$$-g(x) \cdot F(x) < 0$$

$$\text{or } -g(x) \cdot F(x) = 2 \frac{F_T}{F} x^2 (2\beta + x) (h - 3 - x)$$

On peut donc définir un domaine de stabilité pour  $x$

$$-2\beta < x < h - 3$$

...

4. CHAMBRE AVEC ETRANGLEMENT. fig.(11)

Certaines installations sont pourvues d'un étranglement situé à la base de la chambre d'équilibre. Cet étranglement crée une perte de charge supplémentaire  $E = \mu V^2$ ,  $V$  étant égal à la vitesse de l'eau dans la chambre,  $\mu$  étant de même signe que cette vitesse.

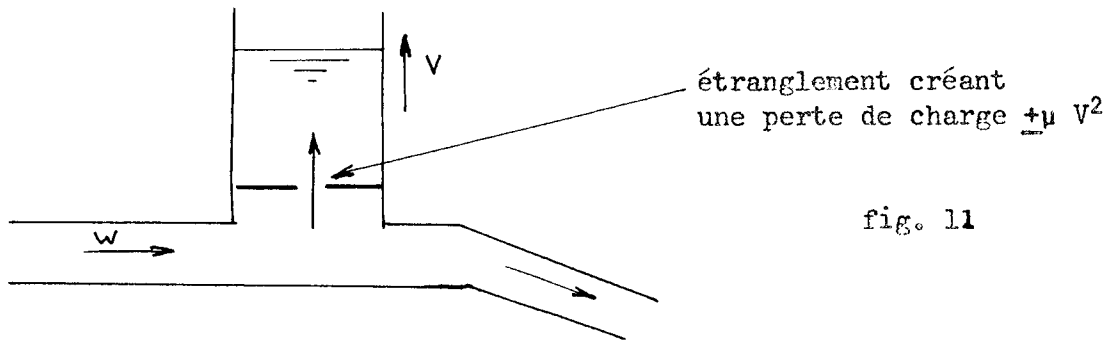


fig. 11

Nous supposons que la perte de charge est symétrique mais le problème peut être traité de la même façon avec une perte de charge dissymétrique.

4.1. Equations de base :

Nous partons des équations (2) et (3) ainsi que de la relation (4) de puissance constante qui s'écrit maintenant  $Q (H + Z + E) = K$

Le système de base est alors le suivant :

$$\frac{L}{g} \frac{dW}{dt} + Z + \lambda W^2 + \mu V^2 = 0 \quad (54)$$

$$F V = f W - \frac{K}{H + Z + \mu V^2} \quad \text{avec} \quad V = \frac{dZ}{dt} \quad (55)$$

qui devient avec les variables réduites définies en (26) et en posant de plus.

$$v = \frac{VF}{Q_0} = \frac{V F}{W_0 f} \quad \gamma = \frac{\mu f^2}{\lambda F^2} \quad V_0 = \frac{Q_0}{F}$$

$$\frac{dw}{d\tau} + z + w^2 + \gamma v^2 = 0 \quad (56)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \alpha v = \alpha \left( w - \frac{h-1}{h+z+\alpha v^2} \right) \quad (57)$$

$\gamma$  changeant de signe avec  $v$  ( dans l'hypothèse ou  $W > 0$  )

De (57) nous tirons :

$$w = v + \frac{h-1}{h+z+\gamma v^2}$$

Nous développons cette expression en négligeant les termes d'ordre supérieur.

$$w \sim v + 1 - \frac{z+1}{h-1} - \frac{\gamma v^2}{h-1} = v + 1 - \frac{1}{h-1} y - \frac{\gamma}{h-1} v^2 \quad (58)$$

en posant comme précédemment  $y = 1 + z$

Portant cette valeur de  $w$  dans (56) et négligeant les termes d'ordre supérieurs, on obtient les équations :

$$\frac{dv}{d\tau} + 2 \left(1 - \frac{F_T}{F}\right) v + \frac{h-3}{h-1} y + \left(1 + \gamma \frac{h-3}{h-1}\right) v^2 \quad (59)$$

$$- \frac{2}{h-1} y v - \frac{2\gamma}{h-1} v \frac{dv}{d\tau} = 0$$

$$v = \frac{1}{\alpha} \frac{dy}{d\tau} \quad (60)$$

#### 4.2. Etude par la méthode de l'équivalent harmonique :

$y$  et  $v$  sont en général des fonctions périodiques. Il est commode, pour étudier l'équation non linéaire (59) de tracer l'allure des variations des différents termes de cette équation sur une période.

On suppose que  $y$  est de la forme :

$$y = y_0 \cos a\tau \quad (61)$$

Dans ces conditions

$$v = - \frac{a}{\alpha} y_0 \sin a\tau \quad v^2 = \left(\frac{a}{\alpha} y_0\right)^2 \sin^2 a\tau$$

$$\frac{dv}{d\tau} = - \frac{a^2}{\alpha} y_0 \cos a\tau \quad v \frac{dv}{d\tau} = \frac{a^3}{2\alpha^2} y_0^2 \sin 2a\tau$$

$$v y = - \frac{a}{2\alpha} y_0^2 \sin 2a\tau$$

Compte tenu du fait que  $y$  change de signe avec la vitesse  $v$ , on obtient les courbes de la fig.12.

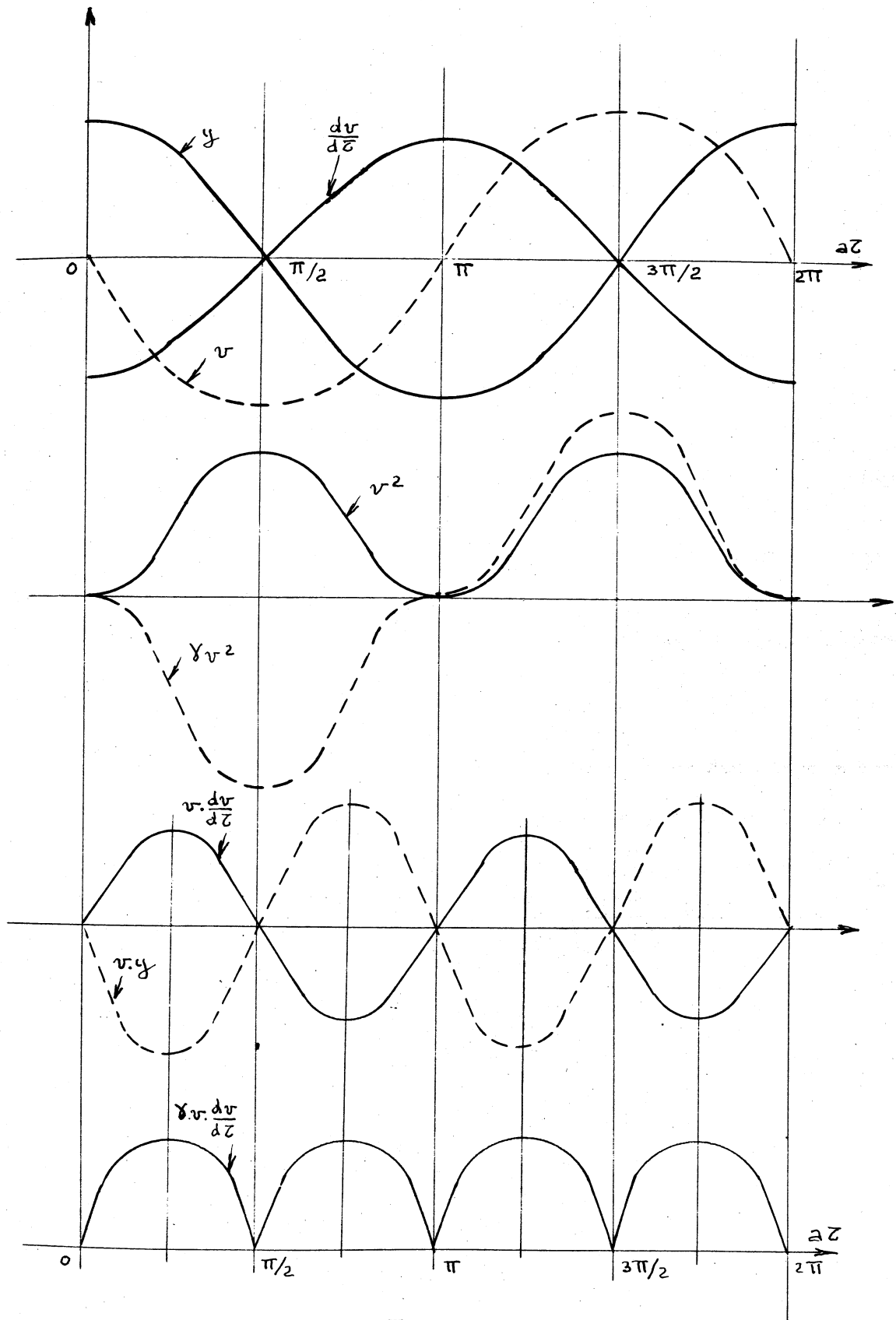


Fig. 12

La méthode de l'équivalent harmonique consiste, rappelons-le à étudier la réponse du système à une entrée de la forme (61) en négligeant les harmoniques d'ordre égal ou supérieur à 2.

L'examen des courbes de la figure 12 montre que le seul terme non linéaire donnant une réponse fondamentale est celui en  $v^2$ .

Le développement de  $\gamma v^2$  en série de Fourier limité au premier terme en sinus donne :

$$\gamma v^2 = \frac{\pi}{a} |\gamma| |v| v \sin a\tau$$

$$\text{avec } B = \frac{2a}{\pi} |\gamma| \int_0^{\frac{\pi}{a}} |v| v \sin a\tau \, d\tau = -\frac{8}{3\pi} |\gamma| \frac{a^2 y_0^2}{\alpha^2}$$

d'où

$$\gamma v^2 = \frac{8}{3\pi} |\gamma| \frac{a y_0}{\alpha} v \quad (62)$$

Le développement de  $v^2$  est limité à une seule constante donnée par :

$$\left(\frac{a}{\alpha} y_0\right)^2 \frac{a}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \sin^2 a\tau \, d\tau = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\alpha} y_0\right)^2 = \frac{1}{2} v_M^2 \quad (63)$$

$v_M = \frac{a}{\alpha} y_0$  étant la vitesse maximum de l'eau dans la chambre ce terme donnera la valeur moyenne de l'amplitude  $y$  des oscillations.

L'équation (59) prend donc la forme linéaire approchée suivante :

$$\frac{dv}{d\tau} + 2 \left(1 - \frac{F_T}{F} + k\right) v + \frac{h-3}{h-1} y + \frac{1}{2} v_M^2 = 0 \quad (64)$$

avec :

$$k = \frac{4}{3\pi} |\gamma| \frac{h-3}{h-1} \frac{a}{\alpha} y_0 \quad (65)$$

ou puisque :

$$v = \frac{1}{\alpha} \frac{dy}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2 \left(1 - \frac{F_T}{F} + k\right) \frac{dy}{d\tau} + \alpha \frac{h-3}{h-1} y + \frac{\alpha}{2} v_M^2 = 0 \quad (66)$$

La valeur moyenne de l'amplitude des oscillations est donnée immédiatement par :

$$y_m = -\frac{1}{2} v_M^2 \frac{h-1}{h-3} \quad (67)$$

La pulsation des oscillations a pour valeur :

$$\omega = a \frac{I}{t} = a \frac{gP_0}{LW_0} \quad (68)$$

Si l'on pose :

$$a_0^2 = \alpha \frac{h-3}{h-1}$$

$$\beta' = 1 - \frac{F_T}{F} + k = \beta + k$$

on a :

$$a^2 = a_0^2 - \beta'^2$$

Comparons l'équation (66) à l'équation (40) des oscillations pour une cheminée sans étranglement.

On peut faire les remarques suivantes :

- L'étranglement crée un amortissement supplémentaire proportionnel à la fréquence et à l'amplitude maximum des oscillations.
- Les oscillations se font autour d'une valeur moyenne  $y_m$  différente du niveau dans la cheminée correspondant au régime permanent.

$$\frac{Z_m}{Z_0} = 1 - y_m = 1 + \frac{1}{2} v_M^2 \frac{h-1}{h-3}$$

La cote moyenne du plan d'eau est située au-dessus de  $Z_0 = -P_0$ , elle dépend de  $y_0$ .

- La fréquence des oscillations est plus faible.

On voit que l'étranglement ne modifie pratiquement pas le mouvement pour les oscillations de faible amplitude. La section critique de la cheminée reste donc toujours celle de Thoma. Si  $F = F_T$  les oscillations sont tout de même amorties alors qu'elles ne le sont pas s'il n'y a pas d'étranglement.

### 4.3. Cycle limite

Si la section de la chambre est inférieure à celle de Thoma, on voit apparaître immédiatement le cycle limite tel que :

$$1 - \frac{F_T}{F} + k = 0$$

L'amplitude du cycle est alors donnée par :

$$y_0 = \frac{3\pi}{4} \left( \frac{F_T}{F} - 1 \right) \frac{F}{f} \frac{1}{\mu W_0} \frac{h-1}{h-3} \frac{1}{\omega} \quad (69)$$

On obtient pour la vitesse :

$$v_0 = \frac{3\pi}{4} \left( \frac{F_T}{F} - 1 \right) \frac{\lambda}{\mu} \left( \frac{F}{f} \right)^2 \frac{h-1}{h-3} \quad (70)$$

Cette dernière expression a déjà été obtenue par M. L. ESCANDE par une méthode différente (Voir Revue Générale de l'Hydraulique Juillet-Août 1961).

Le cycle limite est stable (fig. 13). Il se réduit à un point lorsque la section de la cheminée est égale à  $F_T$ .

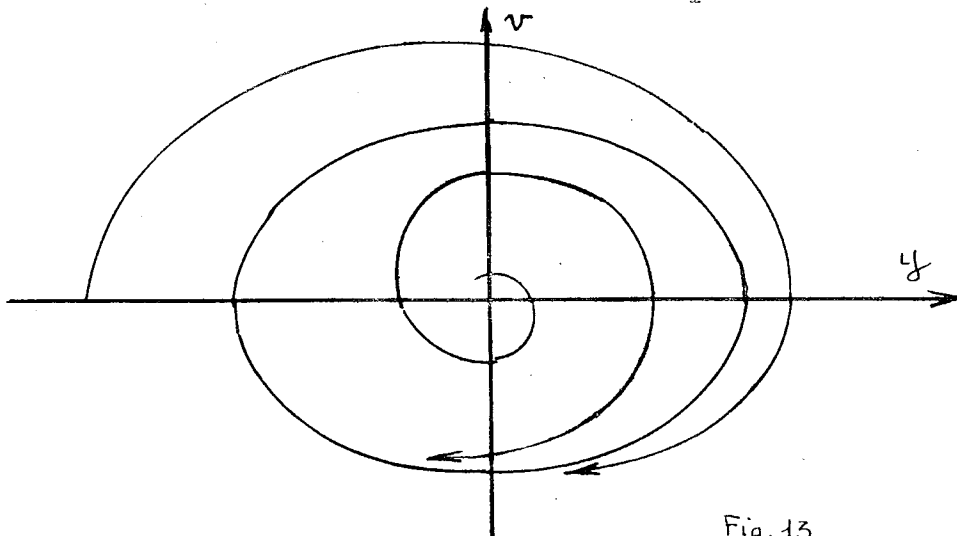


Fig. 13

Ce cycle est une ellipse d'équation.

$$v^2 \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 + y^2 = y_0^2 \quad \text{avec} \quad \frac{\alpha}{a} = \frac{V_0}{\omega P_0}$$

soit en valeurs réelles :

$$\frac{v^2}{\alpha^2} = y_0^2 - y^2 \quad (71)$$

#### 4.4. Cas limite où $F = F_T$

Nous partons de l'équation (59) dans laquelle nous négligeons les termes en  $y$  et  $v$  et  $\frac{dv}{d\tau}$  donnant des harmoniques supérieures.

Dans le cas où la section de la cheminée est égale à la section de Thoma cette équation devient :

$$\frac{dv}{d\tau} + \frac{h-3}{h-1} y + \left(1 + \gamma \frac{h-3}{h-1}\right) v^2 = 0 \quad (72)$$

$$\text{avec } v = \frac{1}{\alpha} \frac{dy}{d\tau}$$

Cette équation s'intègre en posant :

$$v^2 = u$$

$$\text{ce qui donne} \quad \frac{dv}{d\tau} = \frac{\alpha}{2} \frac{du}{dy}$$

$$\text{et} \quad \frac{du}{dy} = -2 p y - 2 q u$$

où :

$$p = \frac{1}{\alpha} \frac{h-3}{h-1} \quad q = \frac{1}{\alpha} \left(1 + \gamma \frac{h-3}{h-1}\right)$$

On obtient en posant  $u = \zeta \xi$  et après une première quadrature.

$$u = v^2 = -\frac{P}{q} \left( y - \frac{1}{2q} \right) + C e^{-2qy}$$

Les conditions aux limites  $y = y_0$ ,  $v = 0$  pour  $\tau = 0$  permettent de déterminer la constante  $C$  et on trouve finalement :

$$v^2 = \frac{P}{q} \left\{ e^{2q(y_0-y)} \left( y_0 - \frac{1}{2q} \right) - \left( y - \frac{1}{2q} \right) \right\} \quad (73)$$

avec :

$$q = \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \gamma \frac{h-3}{h-1} \right) \quad \text{pour} \quad v > 0$$

$$q = \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \gamma \frac{h-3}{h-1} \right) \quad \text{pour} \quad v < 0$$

Pour étudier le mouvement dans le plan de phase  $(v, y)$  nous développons l'exponentielle apparaissant dans l'expression (73) de  $v^2$ , jusqu'aux termes de degré 3.

On obtient tous calculs faits.

$$v^2 \sim P (y_0 - y) \left\{ y_0 + y - \frac{2}{3} q (y^2 + y_0 y - 2 y_0^2) \right\} \quad (74)$$

La vitesse  $v$  s'annule pour :

$$y = y_0$$

et

$$y_1 \sim -y_0 \left( 1 + \frac{3}{2} q y_0 \right) \quad (75)$$

en négligeant les termes en  $(q y_0)^2$ ; on peut ainsi déterminer la valeur moyenne approchée de  $y$ .

$$y_m = \frac{y_0 + y_1}{2} = -\frac{3}{4} q y_0^2 \quad (76)$$

Si l'on avait limité le développement de l'exponentielle aux termes de degré 2, on aurait obtenu

$$y_m = 2 q y_0^2 \quad (77)$$

La méthode de l'équivalent harmonique donne approximativement :

$$y_m = -\frac{1}{2} q y_0^2 \sim -\frac{1}{2} \frac{1}{\alpha} y_0^2 \quad (78)$$

elle est donc plus précise malgré que les développements en série de Fourier soient limités au premier terme.

Les courbes intégrales déduites de (74) ont l'allure représentée sur la fig. 14

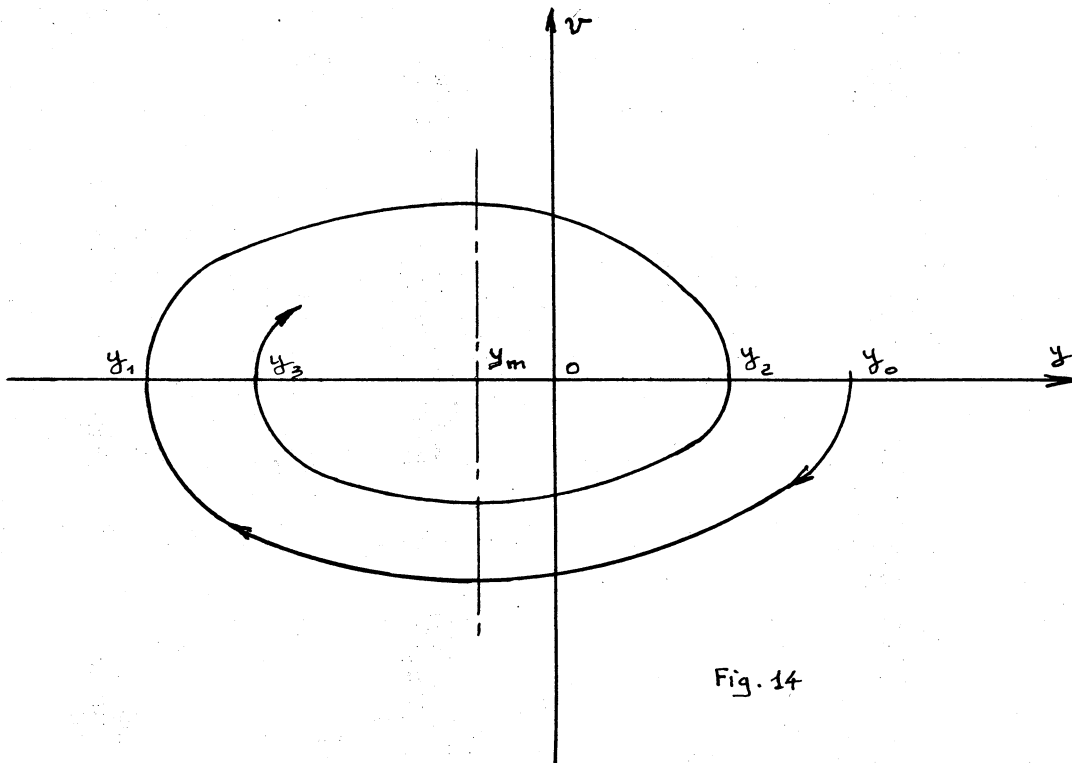


Fig. 14

Les points d'intersection des courbes avec l'axe des y ont pour abscisses :

$y_0$

$$y_1 = -y_0 \left(1 + \frac{3}{2} q y_0\right)$$

$$\text{avec } q = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \gamma \frac{h-3}{h-1}\right) \quad v < 0$$

$$y_2 = -y_1 \left(1 + \frac{3}{2} q' y_1\right)$$

$$\text{avec } q' = \frac{1}{\alpha} \left(1 + \gamma \frac{h-3}{h-1}\right) \quad v > 0$$

...

$$y_3 = -y_2 \left(1 + \frac{3}{2} q y_2\right) \quad v < 0 \quad (79)$$

$$y_{n+1} = -y_n \left(1 + \frac{3}{2} q y_n\right) \quad v < 0$$

$$y_{n+2} = -y_{n+1} \left(1 + \frac{3}{2} q' y_{n+1}\right) \quad v > 0$$

n étant pair.

Amortissement des oscillations (cas où  $F = F_T$ )

Le décrement logarithmique est donné par :

$$\Delta = \text{Log} \frac{y_n}{y_{n+2}}$$

Par la méthode de l'équivalent harmonique on obtient.

$$\Delta_1 = \frac{2\pi}{a} k = \frac{8}{3} \frac{\gamma}{\alpha} \frac{h-3}{h-1} y_0 \quad (80)$$

Les relations (79) donnent pour leur part :

$$\frac{y_{n+2}}{y_n} = \left(1 + \frac{3}{2} q' y_{n+1}\right) \left(1 + \frac{3}{2} q y_n\right)$$

$$\text{Log} \frac{y_{n+2}}{y_n} \sim \frac{3}{2} (q' y_{n+1} + q y_n)$$

et en négligeant les termes d'ordre supérieur.

$$\Delta_2 = 3 \frac{\gamma}{\alpha} \frac{h-3}{h-1} y_n \quad (81)$$

L'amortissement  $\Delta_2$  est un peut supérieur à  $\Delta_1$  pour les premières valeurs de y, mais il décroît avec le temps.

BIBLIOGRAPHIE

ANDRONOW and CHAIKIN

Theory of oscillations  
Princeton University Press 1949.

CALAME et GADEN

Théorie des chambres d'équilibre.  
Gauthier Villars - PARIS 1926

CESARI Lamberto

Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations.  
Springer Verlag - Berlin Göttingen Heidelberg 1963.

DEHOUSE H.M.

Méthode approximative du calcul des oscillations de l'eau dans les cheminées  
d'équilibre.  
Bulletin du CERES Université de LIEGE.  
Tome IX 1957.

ESCANDE L.

Méthodes nouvelles pour le calcul des chambres d'équilibre.  
DUNOD PARIS 1950.

ESCANDE L.

Oscillations entretenues dans les chambres d'équilibre à étranglement.  
Revue générale de l'hydraulique n° 69.  
Juillet-Août 1951 page 188.

ESCANDE I.

Etude de la stabilité des chambres d'équilibre à étranglement.  
Le Génie Civil Tome 128 n° 12  
15 Juin 1951 page 227.

ESCANDE L.

Recherches théoriques et expérimentales sur les oscillations de l'eau dans  
les chambres d'équilibre.  
Publications scientifiques et techniques de la Direction des Industries  
Aéronautiques.  
Gauthier Villars - Paris 1943.

EYDOUX D.

Les mouvements de l'eau et les coups de bélier  
Imprimerie et Librairie Ed. PRIVAT - TOULOUSE 1919.

GARDEL A.

Chambres d'équilibre.  
Librairie de l'Université LAUSANNE 1956.

GILLE - DECAULNE - PELEGRIN

Méthodes modernes d'étude des systèmes asservis.  
DUNOD 1960.

HAYASHI C.

Nonlinear oscillations in physical systems  
Mc. Graw - Hill Book Co NEW-YORK 1964

KRASOVSKII N.M

Stability of motion

Stanford University Press. Stanford California 1963

KUNTZMANN - DANIEL - MA. MIN-YUAN

Stabilité des systèmes de réglage.

. Méthodes d'étude

. Etude d'un type courant d'équations.

Revue Générale de l'Electricité - Tome 61 n° 3 et n° 11.

LEFSCHETZ Soloman

Contributions to the theory of nonlinear oscillations.

Vol. I - II - III - IV.

Princeton University Press. 1950 - 52 - 56 - 58.

LIAPOUNOFF M.A

Problème général de la stabilité du mouvement.

Princeton University Press. Soudan 1949.

MAMINYUAN

Les conditions de stabilité et leurs applications.

Rapport SOGREA.H.

NEMYTSKII - STEPANOV

Qualitative theory of differential equations.

Princeton University Press 1960.

PANGVKO Y.G. et GUBANOVA I.

Stability and oscillations of elastic systems (Paradoxes, fallacies and new concepts).

Consultants Bureau NEW-YORK 1965.

ROSEAU M.

Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité.

Springer Verlag - Berlin Heidelberg - NEW-YORK 1966

STUCKY A.

Chambres d'équilibre.

Sciences et techniques - LAUSANNE 1958.