

Théorie du contrôle optimal et calcul des variations.

La théorie du contrôle optimal s'est développée rapidement depuis quelques années.

Différentes méthodes ont été proposées pour aborder ce problème. Nous développons ci-dessous une méthode due essentiellement à M. Hestenes [2]

I. Première formulation du problème du contrôle optimal :

Definition 1.1: Nous appelons arc x , l'application qui à $\forall t \in [t^1, t^2]$ fait correspondre le triplet : $x(t), u(t), \ell$.
 où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^q$, $\ell \in \mathbb{R}^r$.

Les composantes $x^i(t)$ $1 \leq i \leq n$ sont les fonctions d'état.
 " " $u^k(t)$ $1 \leq k \leq q$ " " " de contrôle
 " " ℓ^r $1 \leq r \leq r$ " " paramètres de contrôle

Le problème du contrôle optimal (ou problème de Bolza)

Considérons l'ensemble B des arcs $x : x(t), u(t), \ell$ $t \in [t^1, t^2]$
 tels que :

(i) $\dot{x} = f(t, x(t), u(t), \ell)$

(ii)
$$\begin{cases} \varphi_d(t, x(t), u(t), \ell) \leq 0 & 1 \leq d \leq m' \\ \varphi_d(t, x(t), u(t), \ell) = 0 & m' < d \leq m \end{cases}$$

(iii)
$$\begin{cases} x(t^1) = X^1(\ell) & \text{arc} & t^1 = T^1(\ell) \\ x(t^2) = X^2(\ell) & \text{arc} & t^2 = T^2(\ell) \end{cases}$$

(iv)
$$\begin{cases} I_\gamma(x) \leq 0 & 1 \leq \gamma \leq p' \\ I_\gamma(x) = 0 & p' < \gamma \leq p \end{cases}$$

où
$$I_\gamma(x) = g_\gamma(\ell) + \int_{t^1}^{t^2} L_\gamma(t, x(t), u(t), \ell) dt \quad 0 \leq \gamma \leq p$$

$g_\gamma(\ell)$ étant une application de \mathbb{R}^r dans \mathbb{R} .

Le problème de Bolza consiste à minimiser $I_0(x)$ sur B

Nous le nommons dans la suite problème (B_1)

Remarque 1.1. : Un cas particulier important du problème (B1) est le problème dans lequel $x = u$. Nous le nommerons problème (B'1) et nous noterons B' l'ensemble des arcs qui satisfont alors aux conditions (i bis) (ii bis) (iii bis) et (iv bis) correspondant aux conditions (i), (ii), (iii), (iv) respectivement.

On peut réduire le problème (B1) au problème (B'1) en introduisant les nouvelles fonctions d'état :

$$x^{n+k}(t) = \int_{t'}^t u^k(s) ds \quad 1 \leq k \leq q$$

vérifiant les conditions : $x^{n+k}(t') = 0$, $x^{n+k}(t^2) = b^{n+k}$ $1 \leq k \leq q$ où b^{r+1}, \dots, b^{r+q} sont de nouveaux paramètres de contrôle.

Remarque 1.2. : On peut modifier l'énoncé du problème (B1) de plusieurs façons :

- 1) en remplaçant les contraintes du "type inégalité" par des contraintes du type "égalité".
- 2) en éliminant les conditions isoperimétriques.
- 3) en éliminant t de f, φ_2 et L_T ;

il suffit pour cela d'introduire r nouvelles fonctions d'état $x^{n+r}(t)$ telles que :

$$\dot{x}^{n+r} = 0 \quad , \quad x^{n+r}(t') = b^r \quad , \quad x^{n+r}(t^2) = b^r \quad 1 \leq r \leq r$$

Nous n'effectuons aucune de ces transformations qui ne simplifient pas le problème posé.

II Conditions nécessaires du premier ordre et principe

du maximum.

Hypothèse h1)

Nous supposons dans la suite que les fonctions de t, x, u, b que nous considérons sont de classe C^1 sur un sous-ensemble ouvert $K \subset \mathbb{R}^4$.

Hypothèse h2)

Les fonctions de contrôle ont un nombre fini de discontinuités de première espèce sur $[t^1, t^2]$.

Définition 2.1: Ensemble K_0 des éléments admissibles.

C'est le sous-ensemble de K dont les éléments (t, x, u, b) vérifient les conditions :

$$\begin{cases} \varphi_\alpha(t, x, u, b) \leq 0 & 1 \leq \alpha \leq m' \\ \varphi_\alpha(t, x, u, b) = 0 & m' < \alpha \leq m \end{cases}$$

Définition 2.2: Ensemble des arcs admissibles: A .

C'est le sous-ensemble A des arcs

$$x : \quad x(t), u(t), b \quad t \in [t^1, t^2]$$

tels que : $(t, x(t), u(t), b) \in K_0$

Hypothèse h3):

Nous supposons que la matrice :

$$\Phi = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial u^m} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial u^q} \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} \varphi_\beta = \left(\begin{array}{ccc} \varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_m \end{array} \right)$$

est de rang m en tout point $(t, x_0(t), u, b_0) \in \mathcal{H}_0$.

Lemme 2.1 : La matrice ϕ est de rang m en un point $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{b})$ si et seulement si la matrice :

$$\phi_0 = \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u^k} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{\alpha_1}}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{\alpha_1}}{\partial u^q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{\alpha_r}}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{\alpha_r}}{\partial u^q} \end{pmatrix} \quad \text{est de rang } r$$

les indices $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ étant ceux pour lesquels $\varphi_{\alpha_i}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{b}) =$

Démonstration : En ordonnant différemment les lignes de ϕ_0 et de ϕ nous pourrions toujours supposer que $\alpha_i = i$ et que le déterminant :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial u^r} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{si } \phi_0 \text{ est de rang } r.$$

C. 1 : Si ϕ_0 est de rang r , le déterminant

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \Delta_1 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \varphi_{r+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \varphi_m \end{vmatrix} \neq 0$$

Δ_2 est un mineur de ϕ de rang m . ϕ est donc de rang m .

c.n. Supposons que ϕ soit de rang m et que ϕ_0 soit de rang inférieur à r ($r < q$).

Comme $\phi =$

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial \phi_1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial u^q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_r}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial \phi_r}{\partial u^q} \\ \frac{\partial \phi_{r+1}}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial \phi_{r+1}}{\partial u^q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial \phi_m}{\partial u^q} \end{array} \right)$$

The matrix is shown with a block of zeros in the top right corner, starting from the first row and column $r+1$ to column q . The element ϕ_{r+1} is written in the $(r+1, r+1)$ position, and ϕ_m is written at the bottom right of the matrix.

il est très facile de vérifier que tous les mineurs de ϕ de rang m ont un déterminant nul, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Convention : Sauf mention spéciale, tout produit de deux ou plusieurs termes dans lequel un indice ou un exposant est répété sera mis à la place de la somme des produits correspondants aux différentes valeurs prises par l'indice considéré.

Théorème I :

Supposons que l'arc $x : x_0(t), u_0(t), b_0$ $t \in [t^1, t^2]$ minimise $I_0(x)$ sur B . Il existe alors des multiplicateurs

$$\lambda_0 \geq 0, \lambda_\gamma, p_i(t), \mu_\alpha(t), \quad 1 \leq \gamma \leq p, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq \alpha \leq m$$

qui ne sont pas tous nuls sur $[t^1, t^2]$ et deux fonctions :

$$H(x, t, u, b, p, \mu) = p_i \dot{f}^i - \lambda_0 L_0 - \lambda_\gamma L_\gamma - \mu_\alpha \varphi_\alpha$$

$$G(b) = \lambda_0 g_0 + \lambda_\gamma g_\gamma,$$

Il est que :

$$1) \lambda_\gamma \in \mathbb{R}, \lambda_\gamma \geq 0 \quad 1 \leq \gamma \leq p' \quad \text{et} \quad \lambda_\gamma = 0 \quad \text{si} \quad I_\gamma(x_0) < 0$$

2) $\mu_\alpha(t)$ est une fonction continue par morceaux admettant pour points de continuité, les mêmes points de continuité que ceux de $u_0(t)$.

$$\text{De plus :} \quad \mu_\alpha(t) \geq 0 \quad 1 \leq \alpha \leq m'$$

$$\mu_\alpha(t) \varphi_\alpha(t, x_0(t), u_0(t), b_0) = 0 \quad \forall t \in [t^1, t^2]$$

(la sommation n'étant pas effectuée par rapport à α)

3) Les multiplicateurs $p_i(t)$ sont des fonctions continues ayant des dérivées premières continues par morceaux.

Il existe des constantes c_i ($1 \leq i \leq n$) et c telles que sur l'arc x_0 :

$$-\int_{t^1}^t H_{x_i} ds + c_i = p_i(t), \quad \int_{t^1}^t H_t ds + c = H, \quad H_{u_k} = 0.$$

4) La condition de transversalité :

$$dG + \left[-H dT^0 + p_i (T^0)^i dX^i \right]_{s=1}^{s=2} - \int_{t^1}^{t^2} H_{b^\sigma} db^\sigma dt = 0$$

est une identité en db^σ sur x

$$5) \quad H(t, x_0(t), u, b_0, p(t), 0) \leq H(t, x_0(t), u_0(t), b_0, p(t), 0)$$

pour tout élément $(t, x_0(t), u, b_0) \in \mathcal{K}_0$.

Remarque 2.1. La formule $H = \int_{t'}^t H_t ds + c$, par exemple, est une abréviation de :

$$H(t, x_0(t), u_0(t), b_0, p(t), \mu(t)) = \int_{t'}^t H_t(s, x_0(s), u_0(s), b_0, p(s), \mu(s)) ds + c$$

Les équations du 3) traduisent en particulier que sur toute portion de x_0 où $u_0(t)$ est continue :

$$\frac{dp_i}{dt} = -H_{x_i} \quad , \quad \frac{dH}{dt} = H_t \quad , \quad H_{u_k} = 0$$

Remarque 2.2 : Dans le cas particulier d'un problème de variations classique, les équations :

$$\dot{p}_i = -H_{x_i} \quad , \quad \dot{x}^i = H_{p_i} = f^i \quad , \quad H_{u_k}$$

sont les équations d'Euler

d'inegalité 5) $H(t, x_0(t), u, b_0, p(t), 0) \leq H(t, x_0(t), u_0(t), b_0, p(t), 0)$ est alors la condition de Weierstrass.

Remarque 2.3 : Dans le cas où nous ne posons pas $\mu_d = 0$, l'inegalité 5) devient :

$$H(\bar{t}, \bar{x}, u, b_0, \bar{p}, \bar{\mu}) + \bar{\mu}_d \varphi_d(\bar{t}, \bar{x}, u, b_0) \leq H(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, b_0, \bar{p}, \bar{\mu})$$

$$\text{où } \bar{x} = x_0(\bar{t}) \quad , \quad \bar{u} = u_0(\bar{t}) \quad , \quad \bar{p} = p(\bar{t}) \quad , \quad \bar{\mu} = \mu(\bar{t})$$

Theoreme I'

Supposons que l'arc $x_0 : x_0(t), b_0 \quad t \in [t', t'']$
minimise $I_0(x)$ sur B' . Il existe donc des multiplicateurs

$$\lambda_0 \geq 0, \lambda_\gamma, \mu_\alpha(t), \quad 1 \leq \gamma \leq p \quad 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq \alpha \leq m.$$

qui ne sont pas tous nuls sur $[t', t'']$ et deux fonctions

$$\begin{cases} F(t, x, \dot{x}, b, \mu) = \lambda_0 L_0 + \lambda_\gamma L_\gamma + \mu_\alpha \varphi_\alpha \\ G(b) = \lambda_0 g_0 + \lambda_\gamma g_\gamma \end{cases}$$

telles que :

1) $\lambda_\gamma \in \mathbb{R}, \lambda_\gamma \geq 0 \quad 1 \leq \gamma \leq p$ et $\lambda_\gamma = 0$ si $I_\gamma(x_0) = 0$

2) $\mu_\alpha(t)$ est une fonction continue par morceaux
admettant pour points de continuité, les points de continuité
de $x_0(t)$.

De plus : $\mu_\alpha(t) \geq 0 \quad 1 \leq \alpha \leq m$
 $\mu_\alpha(t) \varphi_\alpha(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), b_0) = 0 \quad \forall t \in [t', t'']$

(la sommation n'étant pas effectuée par rapport à α).

3) Il existe des constantes $c_i \quad (1 \leq i \leq n)$ et c telles
que sur l'arc x_0 , μ_α étant égal à $\bar{\mu}_\alpha(t)$ on ait :

$$F - \sum_{i=1}^n \bar{x}^i F_{\bar{x}^i} = \int_{t'}^t F_{\bar{t}} ds + c \quad F_{\bar{x}^i} = \int_{t'}^t F_{\bar{x}^i} ds + c_i$$

4) La condition de transversalité :

$$dG + \left[(F - \sum_{i=1}^n \bar{x}^i F_{\bar{x}^i}) dT^1 + \sum_{i=1}^n F_{\bar{x}^i} dX^{i\alpha} \right]_{\alpha=1}^{\alpha=2} + \int_{t'}^{t''} F_{\bar{t}} db^\alpha dt = 0$$

est une identité en db^α sur x_0 .

5) En chaque point $(t, x, \dot{x}, u, b, \mu)$ de x_0 :

$$E(t, x, \dot{x}, u, b, \mu) \geq \mu_2 \varphi_2(t, x, u, b)$$

pour tout élément $(t, x, u, b) \in \mathcal{H}_0$, E étant la fonction de Weierstrass définie ainsi :

$$E(t, x, \dot{x}, u, b, \mu) = \bar{F}(t, x, u, b, \mu) - F(t, x, \dot{x}, b, \mu) - (u^i - \dot{x}^i) \bar{F}_{\dot{x}^i}(t, x, \dot{x}, b, \mu)$$

Ce théorème se déduit facilement du théorème I.

Il suffit de remarquer que $H = p_i u^i - F(t, x, u, b, \mu)$

et que $H_{u^i} = p_i - F_{x^i} = 0$, $H_{x^i} = -F_{x^i}$, $H_t = -F_t$, $H_{b^0} = -F_{b^0}$

Au moyen des transformations indiquées dans la remarque 1.1 le théorème I peut se déduire du théorème I'.

Remarque 2.4: Transformations qui permettent d'étudier uniquement le cas où l'intervalle $[t^1, t^2]$ a des bornes fixes.

Introduisons une nouvelle fonction d'état $x^0(t)$ et une nouvelle fonction de contrôle $u^0(t)$ telles que :

$$\begin{cases} \dot{x}^0(t) = u^0(t) > 0 \\ \left. \begin{array}{l} x^0(t^1) = T^1(b) = X^0(t^1) \quad \text{avec} \quad t^1 = T^1(b_0) \\ x^0(t^2) = T^2(b) = X^0(t^2) \quad \text{avec} \quad t^2 = T^2(b_0) \end{array} \right\} \end{cases}$$

Posons de plus : $x^0(t) = t$ ce qui implique $u^0(t) = 1$

$$\text{et} \quad \begin{cases} y(t) = (x^0(t), x^1(t), \dots, x^n(t)) \\ v(t) = (u^0(t), u^1(t), \dots, u^n(t)) \\ \left. \begin{array}{l} Y^1(b) = (X^0(t^1), X^1(t^1), \dots, X^n(t^1)) \\ Y^2(b) = (X^0(t^2), X^1(t^2), \dots, X^n(t^2)) \end{array} \right\} \end{cases}$$

Posons enfin :

$$\begin{cases} M_p(y, v, t) = L_p(x^0, x, u, t) u^0 & 0 \leq p \leq p \\ \psi_\alpha(y, v, t) = \varphi_\alpha(x^0, x, u, t) u^0 \\ h^0(y, v, t) = u^0 \\ h^i(y, v, t) = h^i(x^0, x, u, t) u^0 & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Considérons l'ensemble \mathcal{D} des arcs :

$$y : y(t), v(t), t \quad t \in [t^1, t^2]$$

Tels que :

$$\begin{cases} \dot{y} = h(y, v, t) \\ \psi_\alpha \leq 0 & 1 \leq \alpha \leq m' \\ \psi_\alpha = 0 & m' < \alpha \leq m \\ y(t^1) = Y^1(t) \\ y(t^2) = Y^2(t) \\ I_\gamma(y) \leq 0 & 1 \leq \gamma \leq p' \\ I_\gamma(y) = 0 & p' < \gamma \leq p \end{cases}$$

où $I_\gamma(y) = g_\gamma(t) + \int_{t^1}^{t^2} M_\gamma(y, v, t) dt \quad 0 \leq \gamma \leq p.$

L'arc y_0 minimise $I_0(y)$ sur \mathcal{D} , car nous avons seulement modifié les variables d'intégration.

Le théorème 5 s'applique dans ce cas aussi :

En effet, posons :

$$N = p_j h^j - (\lambda_p M_p + \mu_\alpha \psi_\alpha) = (p_0 + H) u^0$$

$$\text{et } \pi = (p_0, p_1, \dots, p_n)$$

Puisque $N_{u^0} = p_0 + H = 0$, $p_0(t) = -H(t, x_0(t), u_0(t), b_0)$ sur x_0 .

De plus, sur x_0 :

$$u^0 = 1, \quad N_{x^0} = H_t, \quad N_{x^i} = H_{x^i}, \quad N_{b^0} = H_{b^0}, \quad N_{u^k} = H_{u^k}$$

On en déduit que les relations du type 3) et 4) du théorème I sont satisfaites.

La relation du type 4) s'écrit :

$$N(y_0(t), v, b_0, \pi(t), 0) \leq N(y_0(t), v_0(t), b_0, \pi(t), 0)$$

Mais $N(y_0(t), v_0(t), b_0, \pi(t), 0) = 0$, puisque $p_0 = -H$ sur x_0 .

Donc $(p_0(t) + H(t, x_0(t), u, b_0, 0)) u^0 \leq 0$.

Il en résulte que la relation 4) du théorème 1 est vérifiée puisque u^0 est > 0 .

III Une proposition essentielle.

Rappelons tout d'abord le théorème du rang :

Théorème : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, A un ouvert de E contenant un point $a \in E$, f une application continûment différentiable de A dans F dont le rang soit un nombre constant p .

Alors, il existe :

1°) Un voisinage ouvert $V \subset A$ du point a et un difféomorphisme h de V sur la boule unité I_n de \mathbb{R}^n

2°) Un voisinage ouvert $V' \supset f(V)$ du point $b = f(a)$ et un difféomorphisme h' de V' sur la boule unité I_m de \mathbb{R}^m tels que : $f = h' \circ g \circ h$,

où g est l'application : $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (y_1, \dots, y_r, 0, \dots, 0)$
de I_n dans I_m .

Nous allons déduire de ce théorème le lemme suivant :

Lemme 3.1 : Soit $x_0 : x_0(t), u_0(t), b_0 \quad t \in [t', t'']$

un arc de \mathcal{B} tel que la matrice

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u^k} & \delta_{\alpha\beta} \varphi_\beta \end{pmatrix} \text{ soit de rang } m \text{ en tout point}$$

$$(t, x_0(t), u_0(t), b_0) \quad t \in [t', t''] .$$

Il existe alors une fonction $U_0(t, x, b)$ définie sur un voisinage Ω de l'arc de \mathbb{R}^{n+r+1} :

$$(t, x_0(t), b_0) \quad t \in [t', t'']$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

$$1) \quad (t, x, U_0, b) \in \mathcal{K}_0$$

$$2) \quad U_0(t, x_0(t), b_0) = u_0(t) \quad t \in [t', t'']$$

$$3) \quad U_0 \text{ et ses dérivées partielles relativement à } x^i \text{ et } b^\alpha$$

sont continues sauf pour les valeurs de t pour lesquelles $u_0(t)$ est discontinue.

En un point \bar{t} de discontinuité de $u_0(t)$, ces fonctions ont des limites à droite et à gauche.

De plus, si nous posons :

$$\zeta_i^k(t) = \frac{\partial U_0^k}{\partial x^i} \quad \zeta_\alpha^k(t) = \frac{\partial U_0^k}{\partial b^\alpha} \quad \text{sur } x_0 ,$$

alors pour $\forall t$ tel que $\varphi_\alpha(t, x_0(t), u_0(t), b_0) = 0$

$$\text{et pour } \forall \alpha \quad \begin{cases} \varphi_{\alpha x^i} + \varphi_{\alpha u^k} \zeta_i^k = 0 \\ \varphi_{\alpha b^\sigma} + \varphi_{\alpha u^k} \zeta_\sigma^k = 0 \end{cases} \quad \text{sur } x_0$$

Démonstration :

a) Supposons tout d'abord que $m' = 0$ et que $u_0(t)$ soit continue sur $[t', t'']$.

Alors $x_0(t)$ est continue et a une dérivée première continue sur $[t', t'']$. D'autre part, ϕ_0 est de rang m en tout point $(t, x_0(t), u_0(t), b_0)$ $t \in [t', t'']$.

Posons : $w_\alpha^k(t) = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u^k}(t, x_0(t), u_0(t), b_0)$ $\alpha = 1, \dots, m$ $k = 1, \dots, q$

Ces fonctions sont continues sur $[t', t'']$.

Il en résulte que le déterminant :

$$\Delta(t) = |w_\alpha^k(t) w_\beta^k(t)| \quad 1 \leq \alpha \leq m \quad 1 \leq \beta \leq m$$

est de rang m en tout point de $[t', t'']$.

$\Delta(t)$ est le déterminant fonctionnel relativement à z_β des

équations : $\varphi_\alpha(t, x, u_0(t) + w_\beta(t) z_\beta, b) = 0 \quad 1 \leq \alpha \leq m,$

en tout point de l'arc $\Gamma : (t, x_0(t), u_0(t), b_0) \quad t \in [t', t'']$.

Posons : $\psi_\alpha(t, x, z, b) = \varphi_\alpha(t, x, u_0(t) + w_\beta(t) z_\beta, b)$

Puisque $\varphi_\alpha(t, x, u, b)$ est de classe C^1 (hypothèse h_1), il

en est de même de $\psi_\alpha(t, x, z, b)$.

De plus, $D_z \psi_\alpha$ est de rang m en tout point de Γ .

Posons encore : $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)$, $E = \mathbb{R}^{m+n+r+1}$, $F = \mathbb{R}^{n+r+1}$.

Γ étant compact, il existe un ouvert Ω de E contenant

Γ , dans lequel ψ est continûment différentiable et ~~non nul~~.

$D_z \psi$ est de rang constant m puisque ψ applique E

dans \mathbb{R}^m .

La restriction w de φ à Ω est donc une submersion.

On en déduit, en utilisant le théorème du rang, que $w^{-1}(0)$ est une sous-variété H de E de dimension $(n+r+1)$.

Puisque $D_3 w \neq 0$ en tout point de Γ , il existe un ouvert $\Omega_0 \subset H$ et contenant Γ qui se projette suivant un ouvert Ω'_0 de F contenant Γ' , projection de Γ .

Il existe donc une fonction $Z(t, x, b)$ continûment différentiable définie sur Ω'_0 et telle que $Z(t, x_0(t), b_0) = 0$.

La fonction $U_0(t, x, b) = u_0(t) + W_p(t)Z_p(t, x, b)$ possède toutes les propriétés énoncées dans le lemme 3.1., comme on pourrait le vérifier facilement.

b) Supposons $m' > 0$ et $u_0(t)$ continue sur $[t', t'']$

$$\text{Posons } \begin{cases} \theta_\alpha(t, x, w, b) = \varphi_\alpha(t, x, u, b) + (v^\alpha)^2 = 0 & 1 \leq \alpha \leq m' \\ \theta_\alpha(t, x, w, b) = \varphi_\alpha(t, x, u, b) = 0 & m' < \alpha \leq m \end{cases}$$

$$\text{ou } v = (v^1, \dots, v^{m'}) \quad \text{et} \quad w = (u, v)$$

$$\text{Posons : } \textcircled{*} = \left(\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial w^k} \right) = \left(\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial u^k} \quad \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial v^p} \right) \quad 1 \leq \alpha \leq m \quad 1 \leq k \leq q \quad 1 \leq p \leq m'$$

De l'hypothèse faite sur φ on déduit que $\textcircled{*}$ est de rang m , en tout point $(t, x_0(t), w_0(t), b_0)$ $t \in [t', t'']$ avec $v_0^\alpha(t) = [-\varphi_{\alpha, v}(\cdot, x_0(t), u_0(t), b_0)]^{\frac{1}{2}}$.

Il existe donc une fonction $W_0(t, x, b) = (U_0(t, x, b), V_0(t, x, b))$ définie dans un voisinage Ω' de Γ' , ayant des dérivées partielles continues par rapport à x^i et b^j dans Ω' et

telles que :

$$b_1) \quad W_0(t, x_0(t), b_0) = (u_0(t), v_0(t))$$

ce qui implique : $U_0(t, x_0(t), b_0) = u_0(t)$.

$$b_2) \quad \partial_\alpha(t, x, W_0, b) = 0 \quad 1 \leq \alpha \leq m \quad \text{dans } \Omega'$$

ce qui implique :
$$\begin{cases} \varphi_\alpha(t, x, U_0, b) \leq 0 & 1 \leq \alpha \leq m' \\ \varphi_\alpha(t, x, U_0, b) = 0 & m' < \alpha \leq m \end{cases}$$

$$b_3) \quad \partial_{x^i} + \partial_{u^k} \frac{\partial U_0^k}{\partial x^i} + \partial_{v^l} \frac{\partial V_0^l}{\partial x^i} = 0 \quad \text{sur } \Gamma'$$

ce qui implique : $\varphi_\alpha x^i + \varphi_{u^k} \frac{\partial U_0^k}{\partial x^i} = 0 \quad m' < \alpha \leq m \quad \text{sur } \Gamma'$

De même, $\varphi_\alpha v^l + \varphi_{v^l} \frac{\partial V_0^l}{\partial v^l} = 0 \quad m' < \alpha \leq m \quad \text{sur } \Gamma'$

c) Supposons que $u_0(t)$ ait des discontinuités de première espèce aux points t_1, \dots, t_{N-1} ($t_0 = t^1 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t^2 = t_N$)

Dans chacun des intervalles $]t_{j-1}, t_j[$, $u_0(t)$, $x_0(t)$ et $\dot{x}_0(t)$ sont continus.

Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{0j}(t) = u_0(t) \quad t \in]t_{j-1}, t_j[\\ u_{0j}(t_{j-1}) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_{j-1} \\ t > t_{j-1}}} u_0(t) \\ u_{0j}(t_j) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_j \\ t < t_j}} u_0(t) \end{array} \right.$$

et $x_{0j}(t) = x_0(t) \quad t \in [t_{j-1}, t_j]$

Notons Γ'_j l'arc $(t, x_{0j}(t), b_0) \quad t \in [t_{j-1}, t_j]$

Des résultats des paragraphes a) et b) on déduit qu'à chaque arc Γ_j^1 on peut associer un ouvert de \mathbb{R}^{n+r+1} : $\Omega_j^1 \supset \Gamma_j^1$ sur lequel est définie une fonction $U_{0j}(t, x, b)$ continûment différentiable et telle que :

$$U_{0j}(t, x_{0j}(t), b_0) = u_{0j}(t) \quad t \in [t_{j-1}, t_j]$$

En tout point de Γ_j^1 :

$$\begin{cases} \varphi_{\alpha x^i} + \varphi_{\alpha u^k} \frac{\partial U_{0j}^k}{\partial x^i} = 0 & m' < \alpha \leq m \\ \varphi_{\alpha t^r} + \varphi_{\alpha u^k} \frac{\partial U_{0j}^k}{\partial t^r} = 0 & m' < \alpha \leq m \end{cases}$$

Posons : $U_0(t, x, b) = U_{0j}(t, x, b) \quad t \in [t_{j-1}, t_j] \quad (t, x, b) \in \Omega_j^1$

$U_0(t, x, b)$ possède les propriétés énoncées dans le lemme 3.1.

Lemme 3.2 : Soit $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, b_0)$ un élément de K_0 tel que $\bar{x} = x_0(\bar{t})$. Il existe une fonction $U(t, x, b)$ définie dans un voisinage $\bar{\Omega}$ de (\bar{t}, \bar{x}, b_0) telle que $(t, x, u, b) \in K_0$ et $U(\bar{t}, \bar{x}, b_0) = \bar{u}$.

La fonction U et ses dérivées partielles relativement à x^i et b^r sont continues dans $\bar{\Omega}$.

Le lemme est une conséquence immédiate du lemme 3.1. ou du théorème des fonctions implicites.

IV Deuxième formulation du problème de contrôle

optimal.

Comme nous l'avons montré, ci-dessus, nous pourrions toujours supposer que t^1 et t^2 sont indépendants de b .

Hypothèse h4):

L'intervalle $[t^1, t^2]$ a des bornes fixes.

Définition 4.1: Ensemble des arcs permis \mathcal{C} :

\mathcal{C} est le sous-ensemble \mathcal{C} des arcs de \mathcal{A}

$$x: \quad x(t), u(t), b \quad t \in [t^1, t^2]$$

tels que

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u, b) \\ x(t^1) = X^1(b) \end{cases}$$

Le problème de Bolza consiste à minimiser $I_0(x)$ sur \mathcal{C} avec

les contraintes :

$$\begin{cases} I_\gamma(x) \leq 0 & 1 \leq \gamma \leq p' \\ I_\gamma(x) = 0 & p' < \gamma \leq p \\ x(t^2) = X^2(b) \end{cases}$$

Nous allons introduire maintenant $(p+n+1)$ nouvelles fonctions :

$$J_p(x) = G_p(b) + \int_{t^1}^{t^2} F_p(t, x, u, b) dt \quad 0 \leq p \leq p+n$$

de telle façon que le problème de Bolza se réduise à

minimiser $J_0(x)$ sur \mathcal{C} avec les contraintes :

$$\begin{cases} J_p(x) \leq 0 & 1 \leq p \leq p' \\ J_p(x) = 0 & p' < p \leq p+n \end{cases}$$

tel-00280308, version 1 - 16 May 2008

Ces fonctions sont telles que :

$$\frac{\partial}{\partial x^i} F_p(t, x, U_0(t, x, b), b) = 0 \quad \text{sur } \Pi,$$

U_0 étant une fonction définie par le lemme 3-1.

Soit
$$\tau_j^k(t) = \frac{\partial U_0^k(t, x_0(t), b_0)}{\partial x^j}$$

et posons :

$$\begin{cases} A_j^i(t) = \frac{\partial}{\partial x^i} [f^i(t, x, U_0, b)] = f_{x^i}^i + f_{u^k}^i \tau_j^k \\ B_{\gamma j}(t) = \frac{\partial}{\partial x^i} [L_\gamma(t, x, U_0, b)] = L_{\gamma x^i} + L_{\gamma u^k} \tau_j^k \end{cases},$$

les expressions au second membre étant calculées sur Π .

Posons aussi :

$$\begin{cases} F_\gamma = L_\gamma - B_{\gamma j} x^j + q_{\gamma i}(t) (f^i - A_j^i x^j) \\ G_\gamma = q_\gamma - q_{\gamma i}(t^2) X^{i2} + q_{\gamma i}(t^1) X^{i1} \end{cases} \quad 0 \leq \gamma \leq p$$

où les fonctions $q_{\gamma i}$ sont des solutions des problèmes différentiels :

$$\dot{q}_{\gamma i} + q_{\gamma i} A_j^i + B_{\gamma j} = 0 \quad q_{\gamma i}(t^2) = 0$$

Si $x \in \mathcal{C}$:
$$\frac{d}{dt} (q_{\gamma i} x^i) = -B_{\gamma j} x^j + q_{\gamma i} (f^i - A_j^i x^j)$$

Donc :

$$\forall x \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad 0 \leq \gamma \leq p$$
$$J_\gamma(x) = I_\gamma(x) - [q_{\gamma i}(t^2) X^{i2} - q_{\gamma i}(t^1) X^{i1}] + \int_{t^1}^{t^2} \frac{d}{dt} (q_{\gamma i} x^i) dt = I_\gamma(x)$$

Posons d'autre part :

$$\begin{cases} F_{p+i} = P_{ij}(t) (f^i - A_c^i x^j) \\ G_{p+i} = - [P_{ij}(t^2) X^{j2} - P_{ij}(t^1) X^{j1}] \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n$$

où les fonctions $P_{ij}(t)$ sont solutions des problèmes différentiels :

$$\dot{P}_{ij} + P_{il} A_j^l = 0 \quad P_{ij}(t^2) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathcal{E} \quad \text{et} \quad 1 \leq i \leq n$$

$$J_{p+i}(x) = G_{p+i} + \int_{t^1}^{t^2} \frac{d}{dt} (P_{ij} x^j) dt = x^i(t^2) - X^i(t^1)$$

Et sur \mathcal{E} :

$$\begin{cases} J_\gamma(x) \leq 0 & 1 \leq \gamma \leq p' \\ J_\gamma(x) = 0 & p' < \gamma \leq p \\ x(t^2) = X^2(t^1) \end{cases} \iff \begin{cases} J_p(x) \leq 0 & 1 \leq p \leq p' \\ J_p(x) = 0 & p' < p \leq p+n \end{cases}$$

Théorème II : Supposons que l'arc :

$$x_0 : x_0(t), u_0(t), b_0 \quad t \in [t^1, t^2]$$

minimise $J_0(x)$ sur \mathcal{E} en satisfaisant aux contraintes :

$$\begin{cases} J_p(x) \leq 0 & 1 \leq p \leq p' \\ J_p(x) = 0 & p' < p \leq p+n \end{cases}$$

Il existe alors des multiplicateurs : $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p+n}$ qui ne sont pas tous nuls et deux fonctions :

$$F(t, x, u, b) = \lambda_p F_p, \quad \bar{G}(b) = \lambda_p G_p, \quad 0 \leq p \leq p+n$$

telles que :

- 1) $\lambda_\gamma \in \mathbb{R}, \lambda_\gamma \geq 0 \quad 1 \leq \gamma \leq p'$ et $\lambda_\gamma = 0$ si $J_\gamma(x_0) < 0$
- 2) $\forall t \in [t^1, t^2]$ et $\forall u$ tel que $(t, x_0(t), u, b_0) \in \mathcal{H}_0$:

$$F(t, x_0(t), u, b_0) \geq F(t, x_0(t), u_0(t), b_0)$$

3) La condition de transversalité :

$$d\bar{G} + \int_{t'}^{t''} (F_{u^k} \dot{x}_0^k + F_{b^0}) db^0 dt = 0 \quad \text{avec} \quad \dot{x}_0^k = \frac{\partial U_0^k(t, x_0(t), b_0)}{\partial b^0}$$

est une identité en db^0 sur l'arc x_0 .

La démonstration de ce théorème sera donnée au paragraphe VI

Nous allons énoncer maintenant un résultat complémentaire.

Théorème II' :

Considérons les fonctions F et \bar{G} définies dans le théorème II.

Il existe des multiplicateurs $\mu_\alpha(t)$, continues en chaque point de continuité de $u_0(t)$ et telles que :

$$F_{u^k} + \mu_\alpha(t) \varphi_{\alpha u^k} = 0 \quad \text{sur } x_0.$$

De plus, $\mu_\alpha(t) \geq 0$ si $\alpha \leq m'$

$$\mu_\alpha(t) \varphi_\alpha = 0 \quad \text{sur } x_0.$$

(la sommation n'étant pas effectuée par rapport à α)

Si nous posons : $\bar{F} = F + \mu_\alpha(t) \varphi_\alpha$,

la condition de transversalité s'écrit :

$$d\bar{G} + \int_{t'}^{t''} \bar{F}_{b^0} db^0 dt = 0 \quad \text{sur } x_0 \quad \text{quel que}$$

soit db^0 .

Pour démontrer ce théorème, posons :

$$f(t, u) = F(t, x_0(t), u, b_0) \quad , \quad \bar{\varphi}_\alpha(t, u) = \varphi_\alpha(t, x_0(t), u, b_0)$$

$u = u_0(t)$ minimise $f(t, u)$ parmi tous les vecteurs u

tel que :

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_\alpha(t, u) \leq 0 & \alpha \leq m' \\ \bar{\varphi}_\alpha(t, u) = 0 & m' < \alpha \leq m \end{cases} \quad t \in [t^1, t^2]$$

Il résulte de la règle des multiplicateurs de Lagrange — qui se déduit d'un résultat que nous établissons au paragraphe suivant — que pour $\forall t \in [t^1, t^2]$, il existe des multiplicateurs $\mu_0 \geq 0$, $\mu_\alpha(t)$ qui ne sont pas tous nuls

tel que :

$$\begin{cases} \mu_0 \bar{f}_{u^k} + \mu_\alpha(t) \bar{\varphi}_{\alpha u^k} = 0 & \text{si } u = u_0(t) \\ \mu_\alpha(t) \geq 0 & \alpha \leq m' \\ \mu_\alpha(t) \varphi_\alpha = 0 & \text{sur } x_0 \quad (\text{la sommation n'étant pas effectuée par rapport à } \alpha) \end{cases}$$

Puisque la matrice ϕ , par hypothèse, est de rang m sur x_0 , la condition $\mu_0 = 0 \Rightarrow \mu_\alpha(t) = 0 \quad 1 \leq \alpha \leq m$.

Comme μ_0 est positif et l'on peut choisir μ_0 égal à 1.

Puisque ϕ est de rang m sur x_0 , $\mu_\alpha(t)$ est continu en chaque point de continuité de $u_0(t)$.

On voit d'autre part que $\bar{f}_{u^k} = 0$ sur x_0 .

Tenant compte des relations :

$$\varphi_{\alpha x^i} + \varphi_{\alpha u^k} u_i^k = 0 \quad \varphi_{\alpha b^r} + \varphi_{\alpha u^k} b_r^k = 0 \quad \text{sur } x_0,$$

on conclut que $\int_{t^1}^{t^2} \mu_\alpha(t) \{ \varphi_{\alpha u^k} b_r^k + \varphi_{\alpha b^r} \} dt = 0$ sur x_0 .

et que $d\bar{G} + \int_{t^1}^{t^2} \bar{F}_{b^r} db^r dt = 0$ sur x_0 quel que soit db^r .

Démonstration du théorème I au moyen des résultats

établis dans les théorèmes II et II' :

Considérons les multiplicateurs λ_p introduits dans le théorème II et posons :

$$p_i(t) = -\lambda_{p+j} F_{ij}(t) - \lambda_p g_{pi}(t) \quad 0 \leq \beta \leq p.$$

Alors :
$$p_j + p_i A_j^i = \lambda_p B_{pj}.$$

De même si nous posons :

$$H(t, x, u, b, p, \mu) = p_j \dot{x}^j - \lambda_p L_p - \mu_\alpha \varphi_\alpha$$

alors
$$H(t, x, u, b, p(t), \mu(t)) = -p_{ij}(t) x^j - F - \mu_\alpha \varphi_\alpha = -p_j x^j - \bar{F},$$

F et \bar{F} étant les fonctions introduites dans les théorèmes II et II'.

Ainsi $\forall (t, x_0(t), u, b_0) \in K_0 :$

$$H(t, x_0(t), u, b_0, p(t), 0) \leq H(t, x_0(t), u_0(t), b_0, p(t), 0)$$

De plus le long de $x_0 :$

$$H_{u^k} = -\bar{F}_{u^k} = 0 \quad \text{avec} \quad \mu_\alpha = \mu_\alpha(t).$$

Puisque $\mu_\alpha(t) = 0$ si $\varphi_\alpha(t, x_0(t), u_0(t), b_0) < 0$,

$$\mu_\alpha(t) \{ \varphi_{\alpha x^i} + \varphi_{\alpha u^k} x_j^k \} = 0 \quad \text{sur } x_0.$$

Comme
$$\frac{\partial}{\partial x^i} [F_p(t, x, U_0(t, x, b), b)] = 0 \quad \text{sur } x_0 \quad 0 \leq p \leq p+n$$

et puisque $-\bar{F}_{u^k} = H_{u^k} = 0$, en posant $u = U_0(t, x, b)$,

on obtient par différentiation :

$$p_i = -H_{x^i} - H_{u^k} x_j^k = -H_{x^i} \quad \text{sur } x_0.$$

Finalement, on déduit des définitions de \bar{F}_p et $G_p \quad 0 \leq p \leq p+n$

que :
$$\bar{G} = G + p_i(t^2) X^{i2} - p_i(t^1) X^{i1} \quad \text{avec} \quad G = \lambda_p g_p.$$

De plus : $H_{\rho\sigma} = -F_{\rho\sigma}$ sur x_0 .

)' où il résulte que :

$$dG + p_i(t^2) dX^{i2} - p_i(t^1) dX^{i1} - \int_{t^1}^{t^2} H_{\rho\sigma} db^\sigma dt = 0 \quad \text{sur } x_0$$

quel que soit db^σ .

Ainsi est établi le théorème I.

V Un théorème fondamental du calcul des variations.

Nous considérons dans toute la suite que \mathbb{R}^k est muni d'une structure d'espace Euclidien.

Notons J l'application de \mathcal{E} dans \mathbb{R}^{p+n+1} :

$$\mathcal{E} \ni x \xrightarrow{J} J(x) = (J_0(x), \dots, J_{p+n}(x)) \in \mathbb{R}^{p+n+1}$$

Soit $\Delta_n(0, 2\delta)$ le cube ouvert de \mathbb{R}^n , centré à l'origine et de côté 2δ .

Soit $\Delta_n^+(0, \delta)$, le sous-ensemble de $\Delta_n(0, 2\delta)$ dont les éléments ont des composantes positives ou nulles.

$\Delta_n^+(0, \delta)$ est un cube ayant l'origine pour sommet et de côté δ .

Notons X^n l'application de $\Delta_n(0, 2\delta)$ dans \mathcal{E} :

$$\mathbb{R}^n \supset \Delta_n(0, 2\delta) \ni \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \xrightarrow{X^n} X^n(\lambda) \in \mathcal{E}$$

Désignons par ϕ^n la restriction de l'application $J \circ X^n$ à $\Delta_n^+(0, \delta)$. ϕ^n est une application de $\Delta_n^+(0, \delta)$ dans \mathbb{R}^{p+n+1} .

Definition 5.1 :

Vous direz que l'application ϕ^n de $\Delta_n^+(0, \delta)$ dans \mathbb{R}^{p+n+1} est fortement différentiable à l'origine, s'il existe une application linéaire et continue L de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^{p+n+1} telle que :

$$\frac{1}{\|\lambda\|} [\phi^n(\lambda) - \phi^n(0) - L(\lambda)] \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \Delta_n^+(0, \delta) \ni \lambda \rightarrow 0$$

Vous direz alors que L est la dérivée de ϕ^n à l'origine.

Definition 5.2 : Ensemble tangent à $J(\mathcal{E})$ en $J(x_0)$.

Soit x_0 un élément de \mathcal{E} et K un sous-ensemble de \mathbb{R}^{p+n+1} .

On dira que K est un ensemble tangent à $J(\mathcal{E})$ en $J(x_0)$

si, à tout ensemble fini de N vecteurs $k_1, \dots, k_N \in K$

— qui définit une application linéaire T^N de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^{p+n+1} —

on peut faire correspondre une application X^N de $\Delta_N^+(0, \delta)$

dans \mathcal{E} et une application $\phi^N = J \circ X^N$ qui possèdent les

propriétés suivantes :

$$1) X^N(0) = x_0$$

$$2) \phi^N(\lambda) \text{ est continue sur } \Delta_N^+(0, \delta).$$

$$3) \phi^N(\lambda) \text{ est fortement différentiable à l'origine}$$

ou sa dérivée est égale à T^N .

Nous construirons au paragraphe V un ensemble tangent à $J(\mathcal{E})$ en $J(x_0)$.

Lemme 5.1: Si K est un ensemble tangent à $J(B)$ en $J(x_0)$,
 ('enveloppe convexe K^* de K possède la même propriété').

Soient k_1^*, \dots, k_N^* , N éléments de K^*

$$k_i^* = \sum_{j=1}^{M_i} \alpha_{ij} k_{ij} \quad \alpha_{ij} \geq 0 \quad k_{ij} \in K.$$

Posons $M = \sum_{i=1}^N M_i$. Il existe une application de $\Delta_M^+(0, \delta)$
 dans \mathbb{R}^{h+n+1} : $X^M(\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1M_1}, \dots, \lambda_{N1}, \dots, \lambda_{NM_N})$
 qui possède les propriétés énoncées dans la définition 5.2.

Posons $\lambda_{ij} = \alpha_{ij} \mu_i$ (la sommation n'étant pas effectuée
 au rapport à i), $\delta_i' = \frac{\delta}{\sum_{j=1}^{M_i} \alpha_{ij}}$ $1 \leq i \leq N$

et $\delta' = \inf_{1 \leq i \leq N} \delta_i'$.

Soit $Y^N(\mu) = Y^N(\mu_1, \dots, \mu_N) = X^M(\lambda_{11}, \dots, \lambda_{NM_N})$.

$Y^N(\mu)$ est une application de $\Delta_N^+(0, \delta')$ qui possède les
 propriétés énoncées dans la définition 5.2.

En particulier si S^N est l'application linéaire de \mathbb{R}^N
 dans \mathbb{R}^{h+n+1} , définie par la donnée des vecteurs k_1^*, \dots, k_N^*

$$\left(\frac{dY^N}{d\mu} \right)_{\mu=0} = S^N \quad \mu \in \Delta_N^+(0, \delta') \quad \psi^N = J_0 Y^N$$

Theorem III

Soit K un ensemble tangent à $J(\mathcal{C})$ en $J(x_0)$.

Supposons que x_0 minimise $J_0(x)$ parmi tous les éléments $x \in \mathcal{C}$ qui satisfont aux contraintes :

$$\begin{cases} J_\gamma(x) \leq 0 & 1 \leq \gamma \leq p' \\ J_\gamma(x) = 0 & p' < \gamma \leq p+n \end{cases}$$

Alors il existe des scalaires $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p+n}$ qui

ne sont pas tous nuls tels que :

$$\forall k = (k^0, \dots, k^{p+n}) \in \bar{K}^*, \quad L(k) = \lambda_0 k^0 + \sum_{\gamma=1}^{p+n} \lambda_\gamma k^\gamma \geq 0$$

\bar{K}^* étant la fermeture dans \mathbb{R}^{p+n+1} du cône convexe K^* engendré par K .

De plus $\lambda_\gamma \geq 0 \quad 1 \leq \gamma \leq p'$ avec $\lambda_\gamma = 0$ si $J_\gamma(x_0) < 0$

Remarque 5.1: Le théorème III généralise la règle des multiplicateurs de Lagrange.

C'est de ce théorème que nous déduisons le principe du maximum et la condition de transversalité de Weierstrass.

Remarque 5.2: Le fait que $\lambda_\gamma = 0$ si $J_\gamma(x_0) < 0$ signifie que J_γ ne joue aucun rôle dans la règle des multiplicateurs. Ceci s'explique intuitivement en notant que si $J_\gamma(x_0) < 0$, la condition $J_\gamma(x) < 0$ n'est pas une contrainte locale.

Remarque 5.3 : Soit $k \in K$ et X^1 l'application de $\Delta_1^+(0, \delta)$ dans \mathbb{R}^{p+n+1} associée à k selon la définition 5.2.

Posons : $\Psi = \lambda_0 (J_0 \circ X^1) + \dots + \lambda_{p+n} (J_{p+n} \circ X^1)$

$$\forall k \in K \quad \left(\frac{d\Psi(\mu)}{d\mu} \right)_{\mu=0} \geq 0$$

La démonstration du théorème III résultera des trois lemmes que nous établissons ci-dessous. Il sera suffisant de supposer $K^* = K$.

Définition 5.2 : Nous appelons K^- le sous-ensemble de \mathbb{R}^{p+n+1} , composé des éléments $k = (k^0, \dots, k^{p+n})$ tels que :

$$\begin{cases} k^0 < 0 \\ k^j < 0 & \text{si } 1 \leq j \leq p' \text{ et } J_j(x_0) = 0 \\ k^j = 0 & \text{si } p' < j \leq p+n \end{cases}$$

K^- est un cône convexe.

Remarque 5.4 : Supposons que x_0 minimise $J_0(x)$ parmi tous les éléments $x \in \mathcal{C}$ qui satisfont aux contraintes :

$$\begin{cases} J_j(x) \leq 0 & 1 \leq j \leq p' \\ J_j(x) = 0 & p' < j \leq p+n \end{cases}$$

Soit l un élément de K^- et S l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^{p+n+1} qui lui est associée.

Quel que soit $\delta > 0$, il n'existe pas d'application γ^1 de $\Delta_1^+(0, \delta) \subset \mathbb{R}$ dans \mathcal{C} telle que :

$$\left(\frac{d\Psi(\mu)}{d\mu} \right)_{\mu=0} = S \text{ avec } \Psi = J_0 \circ \gamma^1 \text{ et } \Psi_p(\mu) = 0 \quad p' < p \leq p+n$$

Lemme 5.2 : Le théorème III est vrai si K^* et K^- sont séparés (au sens large) ou ce qui est équivalent si $K^* - K^- \neq \mathbb{R}^{p+n+1}$.

En effet, notons tout d'abord que si K^* et K^- sont séparés par un hyperplan H contenant l'origine, K^* et $-K^-$ sont dans le même demi-espace fermé limité par H . Donc $K^* - K^-$ n'engendre pas l'espace \mathbb{R}^{p+n+1} tout entier.

Inversement si $K^* - K^- \neq \mathbb{R}^{p+n+1}$, $K^* - K^-$ qui est un cône convexe, est situé tout entier dans l'un des deux demi-espace fermés déterminés par un hyperplan H contenant l'origine. Il en résulte que K^* et K^- sont séparés (au sens large).

Il existe donc des scalaires λ_p $0 \leq p \leq p+n$ tels que :

$$L(k) = \lambda_p k^p \geq 0 \quad \forall k = (k^0, \dots, k^{p+n}) \in K^*$$

$$L(l) \leq 0 \quad \forall l \in K^-$$

Notons \bar{K}^* (resp. \bar{K}^-) la fermeture de K^* (resp. K^-) dans \mathbb{R}^{p+n+1} .

$$\forall k \in \bar{K}^* \quad L(k) \geq 0, \quad \forall l \in \bar{K}^- \quad L(l) \leq 0$$

Considérons les vecteurs l_γ $0 \leq \gamma \leq p'$ tels que :

$$l_\gamma = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma \neq p \\ -1 & \text{si } \gamma = p \end{cases}$$

$$l_\gamma \in \bar{K}^- \quad 0 \leq \gamma \leq p'. \quad \text{Donc } L(l_\gamma) = -\lambda_\gamma \leq 0.$$

$$\text{et } \lambda_\gamma \geq 0 \quad 0 \leq \gamma \leq p'.$$

$$\text{Si } J_\gamma(x_0) < 0 \quad 1 \leq \gamma \leq p', \quad -l_\gamma \in K^-.$$

Donc $L(-l_\gamma) = \lambda_\gamma \leq 0 \quad 1 \leq \gamma \leq p'$

Il en résulte que $\lambda_\gamma = 0 \quad 1 \leq \gamma \leq p'$ et $\nabla_\gamma(x_0) < 0$.

Lemme 5.2 : Si aucun hyperplan ne sépare (au sens large)

K^* et K^- ou ce qui est équivalent si $K^* - K^- = \mathbb{R}^{p+n+1}$,

il existe $N = p+n+1 - p'$ vecteurs linéairement indépendants

$k_1, \dots, k_N \in K^*$ tels que :

1) $l = k_1 + \dots + k_N \in K^-$

2) la matrice (k_j^γ) $p' < \gamma \leq p+n \quad 1 \leq j \leq N$ soit

de rang $N-1$.

Remarquons tout d'abord que $K^* - K^- = \mathbb{R}^{p+n+1} \Rightarrow K^* \cap K^- \neq \emptyset$

Posons $V = \{v \in \mathbb{R}^{p+n+1} : v^\gamma = 0 \quad p' < \gamma \leq p+n+1\}$; $\dim(V) = p'+1$.

Notons que $K^- \subset V$.

Soit W la variété linéaire engendrée par V^\perp et par un vecteur l_0 quelconque appartenant à $K^* \cap K^-$; $\dim(W) = N$.

Il existe N vecteurs h_1, \dots, h_N formant une base de W qui se projettent sur V suivant une base de V , c.à.d. tels que la matrice (h_j^γ) $1 \leq j \leq N, p' < \gamma \leq p+n$ soit de rang $N-1$.

De plus on peut toujours supposer que h_1, \dots, h_N sont tels que : $l_0 = \sum_{i=1}^N h_i$.

Mais $h_i = k_i - l_i \quad k_i \in K^*, l_i \in K^-$

$$(k_j)^\delta = (h_j)^\delta \quad 1 \leq j \leq N \quad p' < \gamma \leq p+n \quad \text{car } (h_j)^\delta = 0$$

Ainsi $l_0 = \sum_{i=1}^N k_i - \sum_{i=1}^N l_i$. Posons : $l = \sum_{i=1}^N k_i$.

Puisque $l_i \in \mathcal{K}^-$, $\sum_{i=1}^N l_i \in \mathcal{K}^-$ et $l = l_0 + \sum_{i=1}^N l_i \in \mathcal{K}^-$

Parmi les N vecteurs k_1, \dots, k_N , il y en a $N-1$ qui sont linéairement indépendants sinon la matrice $(k_j)^\delta$ ne serait pas de rang $N-1$.

Supposons que $k^N = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i k_i$

comme $\mathcal{K}^- \neq 0$, $0 \neq l = \sum_{i=1}^{N-1} (1+\lambda_i) k_i$.

Les scalaires $1+\lambda_i$ ne sont pas tous nuls ce qui est impossible

car $\sum_{i=1}^{N-1} (1+\lambda_i) k_i^\delta = 0 \Rightarrow 1+\lambda_i = 0 \quad 1 \leq i \leq N-1$.

Les vecteurs k_1, \dots, k_N sont donc linéairement indépendants.

Lemme 5.3 : Si \mathcal{K} est un ensemble tangent à $J(\mathcal{C})$ en $J(x_0)$,

k^* la fonction courbe de \mathcal{K} et s'il existe un élément

x_0 qui minimise $J_0(x)$ parmi tous les éléments $x \in \mathcal{C}$

tel que
$$\begin{cases} J_\gamma(x) \leq 0 & 1 \leq \gamma \leq p' \\ J_\gamma(x) = 0 & p' < \gamma \leq p \end{cases}$$

alors $k^* - \mathcal{K}^- \neq \mathbb{R}^{p+n+1}$.

• S'il n'en était pas ainsi, il existerait $N = p+n+1 - p'$

vecteurs linéairement indépendants $k_1, \dots, k_N \in \mathcal{K}^*$ tels que :

1) $l = k_1 + \dots + k_N \in \mathcal{K}^-$

2) la matrice (k_j^{δ}) $p' < j \leq p+n$ $1 \leq j \leq N$
soit de rang $N-1$.

Puisque $k_1, \dots, k_N \in K^*$, il existe une application
 $X^N(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ de $\Delta_N^+(0, \delta) \subset \mathbb{R}^N$ dans \mathcal{E} et une
application $\phi^N = J \circ X^N$ de $\Delta_N^+(0, \delta)$ dans \mathbb{R}^{p+n+1} qui ont
les propriétés suivantes :

$$1) X^N(0) = x_0$$

$$2) \phi^N(\lambda) \text{ est continue sur } \Delta_N^+(0, \delta)$$

3) $\phi^N(\lambda)$ est localement différentiable au point zéro
où sa dérivée est identique à l'application T^N de \mathbb{R}^N
dans \mathbb{R}^{p+n+1} définie par la matrice (k_j^{δ}) $1 \leq j \leq N$ $0 \leq j \leq p+n$.

$$\text{Posons } \lambda_j = \mu(1+y^j) \quad 0 \leq \mu < \frac{\delta}{2} \quad |y^j| < 1 \quad 1 \leq j \leq N$$

$$\phi^N(\lambda) = \phi^N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \phi^N[\mu(1+y^1), \dots, \mu(1+y^N)]$$

$$\begin{cases} \psi_p^N(\mu, y) = \frac{1}{\mu} \phi_p^N[\mu(1+y^1), \dots, \mu(1+y^N)] & \mu \neq 0 \\ \psi_p^N(\mu, y) = l^p + k_j^p y^j & \mu = 0 \end{cases} \quad 0 \leq p \leq p+n$$

$\psi_p^N(\mu, y)$ est continue au point $(0, 0)$.

De plus $\psi_p^N(0, 0) = 0$ $p' < p \leq p+n$.

On sait aussi que $\left(\frac{d\psi_p^N}{dy} \right)_{y=0} = T_p^N$

Choisissons maintenant N scalaires $k_1^{p+n+1}, \dots, k_N^{p+n+1}$

tels que la matrice :

$$\begin{pmatrix} k_1^{p+1} & \dots & k_N^{p+1} \\ \vdots & & \vdots \\ k_1^{p+n+1} & \dots & k_N^{p+n+1} \end{pmatrix} \text{ soit de rang } N.$$

Posons : $\Psi_{p+n+1}^N(\mu, y) = k_j^{p+n+1} y^j$, $\left(\frac{d\Psi_{p+n+1}^N}{dy}\right)_{y=0} = T_{p+n+1}^N$

et $X^N = (\Psi_{p+1}^N, \dots, \Psi_{p+n+1}^N)$, $\mathcal{E}^N = (T_{p+1}^N, \dots, T_{p+n+1}^N)$

$X^N(0,0) = 0$ $\left(\frac{dX^N}{dy}\right)_{y=0} = \mathcal{E}^N$ ou \mathcal{E}^N est un isomorphisme

de \mathbb{R}^N sur \mathbb{R}^N .

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe une application continue $y(\mu) = (y^1(\mu), \dots, y^N(\mu))$ définie

pour $\forall \mu \in [0, \delta']$ $0 < \delta' < \frac{\delta}{2}$ telle que :

- 1) $y(0) = 0$
- 2) $|y^j(\mu)| \leq \delta'' < 1$ si $0 \leq \mu < \delta'$ $1 \leq j \leq N$
- 3) $\omega_p^N(\mu) = \Psi_p^N(\mu, y(\mu)) = 0$ $p' < p \leq p+n$.

Posons : $\gamma(\mu) = X^N(\mu [1 + y^1(\mu)], \dots, \mu [1 + y^N(\mu)])$

Par construction, $\int_p \gamma(\mu) = \mu \omega_p^N(\mu) = 0$ $p' < p \leq p+n$

Plaçons nous maintenant dans le cas où $1 \leq p \leq p'$.

Supposons que : $J_p(x_0) = J_p[\gamma(0)] < 0$.

Puisque $J_p[\gamma(\mu)]$ est continue au voisinage de zéro, il existe $\delta'_1 > 0$ tel que : $J_p[\gamma(\mu)] < 0 \quad 0 \leq \mu < \delta'_1$.

Supposons que : $J_p(x_0) = J_p[\gamma(0)] = 0$.

$$\lim_{\substack{\mu \rightarrow 0 \\ \mu > 0}} \frac{J_p[\gamma(\mu)]}{\mu} = l^p < 0$$

Il existe donc $\delta'_2 > 0$ tel que si $0 \leq \mu < \delta'_2$, $J_p[\gamma(\mu)] < 0$.

$$\text{Enfin, } \lim_{\substack{\mu \rightarrow 0 \\ \mu > 0}} \frac{J_0[\gamma(\mu)]}{\mu} = l^0 < 0$$

Il existe donc δ'_3 tel que si $0 < \mu < \delta'_3$: $J_0[\gamma(\mu)] - J_0[\gamma(0)] < 0$.

Si $\delta'' = \text{Min}(\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3)$, pour $\forall \mu \in [0, \delta'']$,

il existe un élément $\gamma(\mu) \in \mathcal{C}$ tel que :

$$\begin{aligned} J_p[\gamma(\mu)] &< 0 & 1 \leq p \leq p' \\ J_p[\gamma(\mu)] &= 0 & p' < p \leq p+n \end{aligned}$$

et $J_0[\gamma(\mu)] < J_0(x_0)$, ce qui est contraire

à l'hypothèse.

La démonstration du théorème III est ainsi terminée.

VI Démonstration du théorème II.

Désignons par K_1 , l'ensemble des vecteurs $k = (k^0, k^1, \dots, k^{p+n})$ tels que :

$$\begin{cases} k^p = F_p(t, x_0(t), u, b_0) - F_p(t, x_0(t), u_0(t), b_0) & 0 \leq p \leq p+n \\ t \in [t^1, t^2] \text{ est un point de continuité de } u_0(t). \\ (t, x_0(t), u, b_0) \in K_0 \end{cases}$$

Posons
$$h_\sigma^p = \left[\frac{\partial}{\partial b^\sigma} \left\{ G_p(b) + \int_{t^1}^{t^2} F_p(t, x_0(t), U_0(t, x_0(t), b), b) dt \right\} \right]_{b=b_0}$$

$$h_\sigma^p = G_{p\sigma} + \int_{t^1}^{t^2} \{ F_{puk} s_r^k + F_{p\sigma\sigma} \} dt \quad \text{ou l'intégrale est}$$

calculée le long de x_0 avec $s_r^k = \frac{\partial U_0^k(t, x_0(t), b_0)}{\partial b^\sigma}$

Désignons par K_2 , l'ensemble des vecteurs $k = (k^0, k^1, \dots, k^{p+n})$

tels que : $k^p = h_\sigma^p a^\sigma$, $a = (a^1, \dots, a^r)$ arbitraire, $0 \leq p \leq p+n$

Lemme 6.1 : L'ensemble $K_1 \cup K_2 = K$ est un ensemble tangent à $J(B)$ en $J(x_0)$.

Le théorème II est une conséquence immédiate de ce lemme et du théorème III.

Le théorème III précise, en effet, qu'il existe des multiplicateurs $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p+n}$ qui ne sont pas tous nuls tels que :

$$L(k) = \lambda_p k_p \geq 0 \quad \forall k \in K^*$$

De plus $\lambda_p \geq 0 \quad t \in p \leq p'$ avec $\lambda_p = 0$ si $J_p(x_0) < 0$.

Posons : $F = \lambda_p F_p$. Il en résulte immédiatement que :

$\forall (t, x_0(t), u, b_0) \in K_0, \quad t \in [t', t'']$ étant un point de continuité de $u_0(t)$: $F(t, x_0(t), u, b_0) \geq F(t, x_0(t), u_0(t), b_0)$

Comme $u_0(t)$ n'admet qu'un nombre fini de discontinuités de première espèce, l'inégalité ci-dessus est vraie pour

$\forall (t, x_0(t), u, b_0) \in K_0, \quad t \in [t', t'']$.

Posons aussi : $\bar{G} = \lambda_p G_p$.

Sur x_0 :
$$\bar{G}_{b_0} a^\sigma + \int_{t'}^{t''} (F_{u^k} s_r^k + F_{b_0}) a^\sigma dt \geq 0$$

a étant arbitraire on en déduit que :

$$d\bar{G} + \int_{t'}^{t''} (F_{u^k} s_r^k + F_{b_0}) db^\sigma = 0$$

Ainsi est établi le théorème II.

Démonstration du lemme 6.1.

Considérons un ensemble de $M+N$ vecteurs :

$k_1, \dots, k_N \in K_1, \quad l_1, \dots, l_M \in K_2$ tels que :

$$\begin{cases} k_j^p = F_p(t_j, x_0(t_j), u_j, b_0) - F_p(t_j, x_0(t_j), u_0(t_j), b_0) & 0 \leq p \leq p+n \\ t' < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N < t'' \end{cases}$$

$$l_j^p = h_r^p a_j^\sigma \quad a_j^\sigma \in \mathbb{R} \quad 0 \leq p \leq p+n$$

Considérons la fonction $U_0(t, x, b)$ dont les propriétés ont été énoncés dans le lemme 3.1.

Puisque l'arc Γ : $(t, x_0(t), u_0(t), b_0) \quad t \in [t', t'']$

est compact, U_0 est définie sur un ouvert Ω qui est la réunion de tous les cubes ouverts de centres $(t, x_0(t), b_0)$ et de côté 2δ suffisamment petit.

D'autre part, si δ est suffisamment petit, il existe, d'après le lemme 3.2 des fonctions $U_j(t, x, b)$ $1 \leq j \leq N$ définies sur les cubes ouverts $\Omega_j \subset \mathbb{R}^{n+r+1}$ de centres respectifs $(t_j, x_0(t_j), b_0)$ et de côté 2δ , telles que :

$$1) (t, x, U_j(t, x, b), b) \in \mathcal{H}_0;$$

$$2) U_j(t_j, x_0(t_j), b_0) = \varphi_j;$$

$$3) \text{ les dérivées partielles de } U_j \text{ par rapport à } x^j$$

et b^r sont continues sur Ω_j .

Nous pouvons choisir δ de façon que pour $j = 1, 2, \dots, N$:

$$t_j \pm N\delta \in]t^1, t^2[$$

$$\text{et que : } t_j + N\delta < t_i \text{ si } t_j < t_i, \quad t_j - N\delta > t_i \text{ si } t_i < t_j$$

$$\text{Posons : } \Delta_1(\lambda) = \begin{cases}]t_1, t_1 + \lambda_1[& \text{si } \lambda_1 \geq 0 \\ [t_1 + \lambda_1, t_1[& \text{si } \lambda_1 \leq 0 \end{cases} \quad |\lambda_1| \leq \delta' < \delta$$

Notons $\Delta_{2,1}$ l'intervalle déduit de Δ_1 dans la translation d'amplitude $t_2 - t_1$: $\Delta_{2,1} = (t_2^1, t_2^2)$

$$\text{Posons : } \Delta_2(\lambda) = \begin{cases}]t_2^2, t_2^2 + \lambda_2[& \text{si } \lambda_2 \geq 0 \\ [t_2^1 + \lambda_2, t_2^1[& \text{si } \lambda_2 \leq 0 \end{cases} \quad |\lambda_2| \leq \delta' < \delta$$

$$\text{et } \Delta_{2,2} = \Delta_{2,1} \cup \Delta_2$$

$\Delta_{j-1,2}$ étant donné, notons $\Delta_{j,1}$ l'intervalle déduit de $\Delta_{j-1,2}$ dans la translation d'amplitude $t_j - t_{j-1}$.

$$\Delta_{j,1} = (t_j', t_j'')$$

Ponons :
$$\Delta_j(\lambda) = \begin{cases}]t_j', t_j' + \lambda_j] & \text{si } \lambda_j \geq 0 \\ [t_j' + \lambda_j, t_j' [& \text{si } \lambda_j \leq 0 \end{cases} \quad |\lambda_j| \leq \delta' < \delta$$

et $\Delta_{j,2} = \Delta_{j,1} \cup \Delta_j$.

On définit ainsi une suite d'intervalle $\Delta_1(\lambda), \dots, \Delta_N(\lambda)$ disjoints.

Notons $N(\lambda)$ le complémentaire de $\bigcup_{p=1}^N \Delta_p$ dans $[t', t'']$

Ponons d'autre part, $b^\sigma(\mu) = b_0^\sigma + \mu_i a_i^\sigma \quad |\mu_i| \leq \delta' < \delta$

et
$$U(t, x, \lambda, \mu) = \begin{cases} U_j[t, x, b(\mu)] & t \in \Delta_j(\lambda) \\ U_0[t, x, b(\mu)] & t \in N(\lambda) \end{cases}$$

Nous allons étudier maintenant la solution du problème

différentiel :

$$(P) \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, U(t, x, \lambda, \mu), b(\mu)) & t \in [t', t''] \\ x(t') = x' [t'/\mu] \end{cases}$$

Désignons par D_1, \dots, D_N les N intervalles considérés $\Delta_1, \dots, \Delta_N$ rangés de façon que pour $\forall \theta_i \in D_i$ et $\forall \theta_j \in D_j$, $\theta_i < \theta_j$ si et seulement si $i < j$.

Ponons $D_j = (\theta_j', \theta_j'')$.

Si $\Delta_k = D_e$ nous posons : $V_e(t, x, b) = U_k(t, x, b)$.

Nous savons que le problème différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, U_0(t, x, b_0), b_0) & t \in [t', t''] \\ x(t') = X'(b_0) \end{cases}$$

admet la solution $x_0(t)$.

Considérons le problème différentiel

$$(P_{01}) \begin{cases} \dot{x} = f[t, x, U_0(t, x, b(\mu)), b(\mu)] & t \in [t', \theta'] \\ x(t') = X'(b(\mu)) \end{cases}$$

Puisque f et U_0 ont des dérivées premières continues par rapport à x^i et b^{σ} et que X' est continûment différentiable par rapport à b , nous savons qu'il existe un nombre $\delta'' > 0$, $\delta'' < \delta'$ tel que si $|\mu_k| < \delta''$ $1 \leq k \leq M$ le problème (P_{01}) admette une solution $x_{01}(t, \mu)$ continûment différentiable par rapport à μ .

De même le problème différentiel :

$$(P_1) \begin{cases} \dot{x} = f[t, x, V_1(t, x, b(\mu)), b(\mu)] & t \in D_1 \\ x(\theta_1') = x_{01}(\theta_1', \mu) \end{cases}$$

admet une solution $x_1(t, \lambda, \mu)$ continûment différentiable par rapport à (λ, μ) si $|\lambda| < \delta''$, $|\mu_k| < \delta''$ $1 \leq k \leq M$ dès que δ'' est suffisamment petit.

Plus généralement, le problème différentiel

$$(P_{0j}) \begin{cases} \dot{x} = f[t, x, U_0(t, x, b(\mu)), b(\mu)] & t \in (\theta_{j-1}', \theta_j') \\ x(\theta_{j-1}') = x_{j-1}(\theta_{j-1}', \lambda, \mu) \end{cases}$$

admet une solution $x_{0j}(t, \lambda, \mu)$ continûment différentiable

par rapport à $\bar{a}(\lambda, \mu)$ si $|\lambda_i| < \delta''$ $1 \leq i \leq j-1$,
 $|\mu_k| < \delta''$ $1 \leq k \leq M$ dès que δ'' est suffisamment petit.

De même le problème différentiel :

$$i) \begin{cases} \dot{x} = [t, x, V_j(t, x, \bar{b}(\mu)), \bar{b}(\mu)] & t \in D_j \\ x(\theta_j^1) = x_{0j}(\theta_j^1, \lambda, \mu) \end{cases}$$

admet une solution $x_j(t, \lambda, \mu)$ continûment différentiable
 par rapport à $\bar{a}(\lambda, \mu)$ dès que $|\lambda_i| < \delta''$ $1 \leq i \leq j$

$|\mu_k| < \delta''$ $1 \leq k \leq M$, si δ'' est suffisamment petit.

$$\text{La fonction } x(t, \lambda, \mu) = \begin{cases} x_{0j}(t, \lambda, \mu) & t \in (\theta_{j-1}^2, \theta_j^1) \\ x_j(t, \lambda, \mu) & t \in D_j \end{cases}$$

avec $\theta_0^2 = t^1$ et $\theta_{N+1}^1 = t^2$ est une solution du
 problème (P) continûment différentiable par rapport à $\bar{a}(\lambda, \mu)$
 dès que $|\lambda_i| < \delta''$ $1 \leq i \leq N$, $|\mu_k| < \delta''$ $1 \leq k \leq M$,
 si δ'' est assez petit.

$$\text{Posons } \Lambda = (\lambda, \mu) \text{ et } u(t, \Lambda) = U(t, x(t, \Lambda), \Lambda)$$

Si δ'' est assez petit $(t, x(t, \Lambda), u(t, \Lambda), \bar{b}(\mu)) \in \mathcal{H}_0$.

De plus $x(t, 0) = x_0$.

Notons X^{M+N} , l'application qui à $\forall \Lambda \in \Delta_{M+N}^+(0, \delta'')$

fait correspondre l'arc $x(t, \Lambda) \in \mathcal{G}$.

$$X^{M+N}(0) = x_0.$$

$$\text{Considérons l'application } \phi^{M+N} = J_0 X^{M+N}.$$

$$\begin{cases} \phi^{M+N}(\Lambda) = \bar{G}[\bar{b}(\mu)] + \int_{t^1}^{t^2} F[t, x(t, \Lambda), U(t, x(t, \Lambda), \bar{b}(\mu)), \bar{b}(\mu)] dt \\ \Lambda \in \Delta_{M+N}^+(0, \delta'') \end{cases}$$

Nous allons montrer que $\phi_{(\lambda)}^{M+N}$ est continue sur $\Delta_{M+N}^+(0, \delta'')$

et positivement différentiable à l'origine.

$$\text{En effet, } \int_{t'}^{t^2} = \int_{N(\lambda)} + \sum_{i=1}^N \int_{\Delta_i}$$

$$\text{avec } \int_{\Delta_i} = \int_{T_i}^{T_i + \lambda_i} \quad T_i = t_i + \lambda_1 + \dots + \lambda_{i-1}$$

Comme F est continûment différentiable sur $\Delta_{M+N}(0, 2\delta'')$

on voit facilement que chacune des intégrales \int_{Δ_i} ainsi

que $\int_{N(\lambda)}$ sont positivement différentiable à l'origine

Puisque \bar{G} est continûment différentiable par rapport à \bar{b} ,

$\phi^{M+N}(\lambda)$ est positivement différentiable à l'origine.

Remarque importante: On pourrait définir sur $\Delta_{M+N}(0, \delta'')$

l'application $\psi^{M+N} = J_0 \gamma^{M+N}$, γ^{M+N} étant l'application qui à $\forall \lambda \in \Delta_{M+N}(0, \delta'')$ fait correspondre

l'arc $x(t, \lambda) \in \mathcal{C}$.

Cette application est continue sur $\Delta_{M+N}(0, 2\delta'')$ mais n'est pas différentiable à l'origine.

Calculons $\left(\frac{d\phi^{M+N}(\lambda)}{d\lambda} \right)_{\lambda=0}$

Supposons $\lambda_i = 0 \quad 1 \leq i \leq N \quad \mu_k = 0 \quad \text{si } j \neq k \quad 1 \leq k \leq M$

$$\text{Alors } \phi^{M+N}(\lambda) = \bar{G}[\bar{b}(\mu)] + \int_{t'}^{t^2} F[t, x(t, \lambda), U_0(t, x(t, \lambda), \bar{b}(\mu)), \bar{b}(\mu)] dt$$

Comme $\frac{\partial F(t, x, U_0(t, x, b_0), b_0)}{\partial x^i} = 0$ sur x_0 $t \in [t_1, t_2]$

$$\left(\frac{d\phi^{M+N}(\lambda)}{d\lambda_i} \right)_{\lambda_j=0} = h_0 a_i^c = l_j$$

D'autre part, supposons que $\lambda_j = 0$ $1 \leq j < i$, $i < j \leq N$
et $\lambda_k = 0$ $1 \leq k \leq M$

$$\phi^{M+N}(\lambda) = A(\lambda) + B(\lambda) \quad \text{au}^c$$

$$A(\lambda) = \bar{G}(b_0) + \int_{t_i}^{t_i + \lambda_i} F[t, x(t, \lambda), U_i(t, x(t, \lambda), b_0), b_0] dt$$

$$B(\lambda) = \bar{G}(b_0) + \int_{N(\lambda)} F[t, x(t, \lambda), U_0(t, x(t, \lambda), b_0), b_0] dt$$

Du théorème des accroissements finis il résulte que :

$$\left(\frac{d[A(\lambda)]}{d\lambda_i} \right)_{\lambda_i=0} = F(t_i, x_0(t_i), u_i, b_0)$$

En utilisant le fait que $\frac{\partial F(t, x, U_0(t, x, b_0), b_0)}{\partial x^i} = 0$ sur x_0

on obtient facilement que :

$$\left(\frac{d[B(\lambda)]}{d\lambda_i} \right)_{\lambda_i=0} = - F(t_i, x_0(t_i), u_0(t_i), b_0)$$

c. q. f. d.

Quelques remarques :

Notons que pour définir un ensemble tangent à $J(\mathcal{C})$ en $J(x_0)$, il suffit, étant donné un ensemble quelconque de N vecteurs linéairement indépendants de K , de savoir lui associer une application X^N de $\Delta_N^+(0, \delta)$ qui possède les propriétés énoncées dans la définition 5.2.

Il est important aussi de constater que la méthode proposée par M. Hestenes permet de réduire le problème le plus général du contrôle optimal à un problème de séparation de cône convexe ^{qui est} et simple dans $J(\mathcal{C})$, alors qu'il est souvent plus difficile dans \mathcal{C} .

Bibliographie

- [1] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrilidze and E.F. Mishchenko : The Mathematical Theory of optimal process.
- [2] M.R. Hestenes : On variational Theory and optimal control theory : J. SIAM Control Ser. A Vol. 3 No. 1 (1965)
- [3] Palle de la Barrière : Cours d'automatique théorique Dunod (1966)