

Université Hassan II - Mohammedia

**Faculté des Sciences Ben M'sik
Casablanca**

**UFR de Géométrie Différentielle
et Applications**



**Géométrie k-symplectique
DESA Géométrie Différentielle et
Applications**

2001 - 2003 ; 2003 - 2005

Par : Azzouz AWANE

GEOMETRIE k -SYMPLECTIQUE
DESA : 2001-2003; 2003-2005

A. AWANE

Table des Matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | STRUCTURES k-SYMPLECTIQUES | 7 |
| 1.1 | Classification de systèmes extérieurs | 8 |
| 1.1.1 | Rang de (S) | 8 |
| 1.1.2 | Classification pour $k = 2$ et $n = 3$ | 8 |
| 1.1.3 | Classification pour $k = 3, n = 3$ | 9 |
| 1.1.4 | Classification pour $k = 3, n = 4, rg(S) = 4$ | 10 |
| 1.2 | Systèmes extérieurs k-symplectiques | 11 |
| 1.2.1 | Solutions d'un système extérieur k-symplectique | 12 |
| 1.2.2 | Exemples | 12 |
| 1.2.3 | Classification des systèmes k -symplectiques | 13 |
| 1.3 | Endomorphismes k-symplectiques | 15 |
| 1.3.1 | Le groupe $Sp(k, n; E)$ | 16 |
| 1.3.2 | L'algèbre de Lie $sp(k, n; E)$ | 17 |
| 1.4 | Géométrie k-symplectique | 19 |
| 1.4.1 | Orthogonalité k-symplectique | 19 |
| 1.4.2 | Endomorphismes adjoints | 23 |
| 1.5 | Transvections k-symplectiques | 28 |
| 1.5.1 | Transvections | 29 |
| 1.5.2 | Transvections k -symplectiques | 30 |
| 1.5.3 | Le groupe $Tp(k, n; E)$ | 32 |
| 1.5.4 | Le groupe affine $Hp(k, n; E)$ | 34 |
| 2 | VARIÉTÉS k-SYMPLECTIQUES | 35 |
| 2.1 | Introduction | 35 |
| 2.2 | Variétés k -symplectiques | 36 |
| 2.2.1 | Définition | 36 |
| 2.2.2 | Exemples | 37 |
| 2.2.3 | Modèle local | 39 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.2.4 | Γ -structures associées à une k -structure symplectique | 41 |
| 2.3 | Variétés à structures presque k -symplectiques | 42 |
| 2.3.1 | Définition | 42 |
| 2.3.2 | Connexion adaptée | 42 |
| 2.3.3 | Intégrabilité des structures presque k -symplectiques | 43 |
| 2.4 | Systèmes hamiltoniens | 45 |
| 2.4.1 | Champs hamiltonniens | 45 |
| 2.4.2 | Applications hamiltonniennes | 46 |
| 2.4.3 | Crochet de Poisson | 47 |
| 2.5 | Liens avec la mécanique statistique de Nambu | 48 |
| 2.6 | Algèbres de Lie k -symplectiques | 49 |
| 2.6.1 | Définition | 49 |
| 2.6.2 | Algèbres de Lie 1-symplectiques nilpotentes | 51 |
| 2.7 | Algèbres de Lie k -symplectiques exactes | 55 |
| 2.7.1 | Algèbres de Lie du type $(2, 2; \mathcal{J})$ | 58 |
| 3 | VARIETES k-SYMPLECTIQUES AFFINES | 61 |
| 3.1 | Variétés affines | 61 |
| 3.1.1 | Définition | 61 |
| 3.1.2 | Exemple | 61 |
| 3.2 | Groupes de Lie affines | 62 |
| 3.2.1 | Définition | 62 |
| 3.2.2 | Produit symétrique à gauche | 62 |
| 3.3 | Feuilletages caractéristiques | 63 |
| 3.3.1 | Définition | 63 |
| 3.3.2 | Structures affines des feuilles de \mathcal{F}^α | 64 |
| 3.3.3 | Connexion associée | 65 |
| 3.3.4 | Conséquences | 68 |
| 3.4 | Connexion en drapeaux de sous-fibrés | 69 |
| 3.5 | Variétés k -symplectiques affines | 71 |
| 3.5.1 | Structure des variétés k -symplectiques affines | 71 |
| 3.5.2 | Cas où le feuilletage \mathcal{F} est de codimension 1 | 72 |
| 4 | VARIETES k-SYMPLECTIQUES HOMOGENES | 77 |
| 4.1 | G -espaces k -symplectiques | 77 |
| 4.1.1 | Systèmes hamiltoniens stricts | 77 |
| 4.1.2 | G -espaces k -symplectiques | 78 |
| 4.1.3 | Applications moments | 81 |
| 4.1.4 | Etude de l'espace k -symplectique canonique | 81 |
| 4.1.5 | Propriétés de l'application moment | 83 |

| | |
|---|----|
| <i>TABLE DES MATIÈRES</i> | 5 |
| 4.2 Le groupe de Heisenberg d'ordre k | 89 |
| 4.3 Opération coadjointe associée | 91 |

Chapitre 1

STRUCTURES k-SYMPLECTIQUES

Introduction. La mécanique classique conduit à l'étude des équations extérieures

$$\theta = 0$$

où θ est une 2-forme extérieure de rang maximum. Dans le premier chapitre nous avons rappelé la classification des formes extérieures de degré 2, sans revenir sur l'étude classique des espaces vectoriels munis de telles formes. Dans ce chapitre, on se propose de généraliser cette géométrie symplectique en remplaçant l'équation symplectique par un système extérieur de type symplectique. Nous aurions pu élargir la géométrie symplectique en considérant des formes de degré plus élevées: des travaux récents envisagent des structures définies par une équation extérieure de degré 3. Notre motivation d'envisager un système extérieur de degré 2 plutôt qu'une équation extérieure de degré 3 provient de la mécanique. Cela semble une bonne approche pour formaliser la mécanique statistique, comme l'envisage Nambu. Autre source de motivations : la classification des systèmes de formes bilinéaires alternées. Les systèmes multi-symplectiques, que nous allons étudier dans ce chapitre, apparaissent naturellement en dimension 3. En dimension supérieure, une infinité de systèmes non algébriquement équivalents peuvent être mis en évidence. Les systèmes k-symplectiques sont définis directement par des conditions de régularité; ils peuvent être interprétés comme des modèles de systèmes extérieurs de rang maximum.

1.1 Classification de systèmes extérieurs

Soit (S) un système différentiel extérieur sur \mathbb{R}^n engendré par les équations $\theta^i = 0$, où les θ^i sont des formes différentielles fermées de degré 2. Comme dans le chapitre précédent, on notera $(S) = \{\theta^1, \dots, \theta^k\}$ ce système et on supposera que les 2-formes θ^i sont linéairement indépendantes dans $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)^*$.

Si $k = 1$, la classification des systèmes $(S) = \{\theta^1\}$ est entièrement déterminée par le rang de θ^1 . On se propose d'étudier la classification de ces systèmes pour $k \geq 2$ en petite dimension. Rappelons tout d'abord quelques définitions.

1.1.1 Rang de (S)

L'espace associé au système (S) est le plus petit sous-espace $A^*(S)$ de \mathbb{R}^{n*} tel que $\bigwedge A^*(S)$ contienne un sous-ensemble engendrant $I(S)$.

Définition 1.1 *Le rang du système extérieur (S) est la dimension de l'espace associé $A^*(S)$.*

Notons $A(S) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid i(X)\theta = 0, \forall \theta \in S\}$. Il est clair que le rang de (S) coïncide avec la codimension de $A(S)$.

1.1.2 Classification pour $k = 2$ et $n = 3$

$$rg(S) = 1$$

Dans ces conditions $\dim(A(S)) = 2$. Notons par $\{e_1, e_2\}$ une base de $A(S)$ que l'on complète en une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 . Dans la base $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ duale de $\{e_1, e_2, e_3\}$ les formes θ^1 et θ^2 s'écrivent

$$\begin{cases} \theta^1 = \sum C_{ij}^1 \omega^i \wedge \omega^j \\ \theta^2 = \sum C_{ij}^2 \omega^i \wedge \omega^j \end{cases}$$

où C_{ij}^l sont des constantes réelles. On a $i(e_1)\theta^l = \sum_j C_{1j}^l \omega^j = 0$ et $i(e_2)\theta^l = \sum_j C_{2j}^l \omega^j = 0$ donc $C_{jk}^l = 0$ pour tous $l, j = 1, 2$. Ainsi θ^1 et θ^2 sont identiquement nulles, et donc $rg(S) = 0$, ce qui est absurde. Ceci montre qu'il n'existe pas de système de deux 2-formes de rang 1.

$$rg(S) = 2$$

Dans ces conditions $\dim(A(S)) = 1$. Notons par $\{e_1\}$ une base de $A(S)$ que l'on complète en une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de E . Dans la base duale $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$

de $\{e_1, e_2, e_3\}$ les formes θ^1 et θ^2 s'écrivent

$$\begin{cases} \theta^1 = \sum C_{ij}^1 \omega^i \wedge \omega^j \\ \theta^2 = \sum C_{ij}^2 \omega^i \wedge \omega^j \end{cases}$$

On a $i(e_1)\theta^l = \sum_j C_{1j}^l \omega^j = 0$ donc $C_{1k}^l = 0$ pour tous $l, k = 1, 2$. D'où

$$\begin{cases} \theta^1 = C_{23}^1 \omega^2 \wedge \omega^3 \\ \theta^2 = C_{23}^2 \omega^2 \wedge \omega^3 \end{cases}$$

et les formes θ^1 et θ^2 sont liées dans $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

$$rg(S) = 3$$

Dans ce cas le système (S) est non dégénéré (il est de rang maximal). Supposons $\theta^1 \neq 0$. On peut toujours trouver une base $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ de \mathbb{R}^{3*} telle que $\theta^1 = \omega^1 \wedge \omega^3$. Posons $\theta^2 = a\omega^1 \wedge \omega^3 + b\omega^2 \wedge \omega^3 + c\omega^1 \wedge \omega^2$. Le système $\{\theta^1, \theta^2 - a\theta^1\}$ étant algébriquement équivalent à (S) , on peut supposer $a = 0$. L'hypothèse $rg(S) = 3$ implique que soit b soit c est non nul. Supposons $b \neq 0$. Alors (S) est équivalent à $\{\theta^1, \frac{\theta^2}{b}\}$ ce qui permet de supposer $b = 1$. Ainsi $\theta^2 = \omega^2 \wedge \omega^3 + c\omega^1 \wedge \omega^2$ et le changement de base $\alpha^i = \omega^i$, $i = 1, 2$ et $\alpha^3 = \omega^3 + c\omega^1$ donne le modèle suivant :

$$\begin{cases} \theta^1 = \alpha^1 \wedge \alpha^3 \\ \theta^2 = \alpha^2 \wedge \alpha^3 \end{cases}$$

Un tel système sera appelé système extérieur 2-symplectique, ou plus généralement système 2-symplectique. On en déduit la proposition suivante :

Proposition 1 *Si (S) est un 2-système de rang 3 dans \mathbb{R}^3 , alors c'est un système extérieur 2-symplectique.*

Dans ce cas le système (S) possède une solution maximale F de dimension 2 définie par $F = Ker(\alpha^3)$.

1.1.3 Classification pour $k = 3, n = 3$

Soit $(S) = \{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}$ un 3-système (c'est-à-dire les trois formes θ^i sont supposées indépendantes dans $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$). Si le rang de (S) est 3, chacun des 2-systèmes $\{\theta^1, \theta^2\}, \{\theta^1, \theta^3\}, \{\theta^2, \theta^3\}$ est un système 2-symplectique. En effet, d'après ce que nous venons de voir, si ce n'était pas le cas, les formes

$\theta^1, \theta^2, \theta^3$ seraient liées. Comme $\{\theta^1, \theta^2\}$ est 2-symplectique, il existe une base $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ de \mathbb{R}^{3*} telle que

$$\begin{cases} \theta^1 = \omega^1 \wedge \omega^3 \\ \theta^2 = \omega^2 \wedge \omega^3 \end{cases}$$

et

$$\theta^3 = a\omega^1 \wedge \omega^3 + b\omega^2 \wedge \omega^3 + c\omega^1 \wedge \omega^2.$$

Le système $\{\theta^1, \theta^2, \theta^3 - a\theta^1 - b\theta^2\}$ est algébriquement équivalent à (S) . On peut donc supposer que $\theta^3 = c\omega^1 \wedge \omega^2$. Par hypothèse $c \neq 0$, on peut choisir $c = 1$ et l'on obtient le modèle

$$\begin{cases} \theta^1 = \omega^1 \wedge \omega^3 \\ \theta^2 = \omega^2 \wedge \omega^3 \\ \theta^3 = \omega^1 \wedge \omega^2. \end{cases}$$

1.1.4 Classification pour $k = 3, n = 4, \text{rg}(S) = 4$.

Solutions maximales

Soit $(S) = \{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}$ un système extérieur de rang 4 dans \mathbb{R}^4 , les formes extérieures θ^i étant de degré 2.

Proposition 1.1 *Toute solution maximale est au plus de dimension 3*

En effet, sinon le rang de (S) serait nul.

Systèmes munis d'une solution maximale de dimension 3

Soit H une solution maximale de (S) et $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de H . Complétons en une base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de \mathbb{R}^4 dont on note $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ la base duale. Comme H est solution du système, on doit avoir

$$\theta^i = \sum C_{j4}^i \omega^j \wedge \omega^4.$$

Le rang du système étant maximum, le rang de la matrice (C_{j4}^i) est de rang 3. On en déduit que le système est équivalent à

$$\begin{cases} \theta^1 = \omega^1 \wedge \omega^4 \\ \theta^2 = \omega^2 \wedge \omega^4 \\ \theta^3 = \omega^3 \wedge \omega^4. \end{cases}$$

Un tel système est un système 3-symplectique dans \mathbb{R}^4 .

Cas où la solution est de dimension 1

Supposons que chaque forme $\theta = \sum a_i \theta^i$ du système (S) soit de rang maximum. Dans ce cas toute solution du système est de dimension 1. Sinon l'existence d'une solution maximale de dimension 2 montre que l'idéal associé au système est de dimension 2. Il existe alors deux formes linéaires (ω^1, ω^2) telles que

$$\theta^i = \omega^1 \wedge \beta_1^i + \omega^2 \wedge \beta_2^i.$$

Le système $(\beta_1^i, \beta_2^i)_{i=1,2,3}$ est au plus de rang 2. Il existe donc i tel que $\beta_1^i = a\beta_1^j + b\beta_1^k$, avec $i \neq j$ et $i \neq k$. La forme $\theta = \theta^i - a\theta^j - b\theta^k$ est au plus de rang 2 ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi toute solution est de dimension 1. Le problème de classification de tels systèmes consiste à classer un système de formes bilinéaires antisymétriques de rang 4, telles que toute combinaison soit aussi de rang 4 (ce problème est relié à la détermination du nombre de champs de vecteurs indépendants en tout point sur la sphère à trois dimension). Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} \theta^1 = \omega^1 \wedge \omega^4 + \omega^2 \wedge \omega^3 \\ \theta^2 = \omega^2 \wedge \omega^4 + \omega^3 \wedge \omega^1 \\ \theta^3 = \omega^3 \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^2 \end{cases} .$$

Remarque

Le système 3-symplectique que nous venons de déterminer apparaît comme le système le plus "simple" de rang maximum. Tout autre système de cette nature peut être vu comme une déformation de celui-ci.

1.2 Systèmes extérieurs k -symplectiques

Soit E un espace vectoriel de dimension $n(k+1)$ et soit F un sous espace vectoriel de codimension n . Dans tout ce chapitre, le corps de référence \mathbb{K} est un corps commutatif de caractéristique différente de 2.

Définition 1.2 *Un système extérieur k -symplectique associé à F est défini par la donnée de 2-formes extérieures $\theta^1, \dots, \theta^k$ vérifiant :*

1. *le système extérieur $\{\theta^1, \dots, \theta^k\}$ est non dégénéré, c'est-à-dire*

$$A(\theta^1) \cap \dots \cap A(\theta^k) = \{0\},$$

2. $\theta^\alpha(x, y) = 0$ pour tous x, y appartenant à F et $\alpha = 1, \dots, k$.

Un tel système k -symplectique sera noté $(\theta^1, \dots, \theta^k; F)$. Rappelons que $A(\theta)$ désigne l'espace associé à la forme θ (voir chapitre 1). Un sous espace E_1 de E est totalement isotrope pour la forme θ s'il est solution de l'équation $\theta = 0$, c'est-à-dire s'il vérifie

$$\theta(x, y) = 0$$

pour tous x et y appartenant à E_1 . Le sous espace F est donc totalement isotrope pour chacune des formes θ^α .

1.2.1 Solutions d'un système extérieur k -symplectique

Soit (S) un système extérieur k -symplectique (on suppose fixé le sous espace F ce qui évite toute référence à ce sous espace). Un sous espace H de E est une solution de (S) si on a $\theta^\alpha(x, y) = 0$ pour tous x et y appartenant à H . D'après la définition du k -système (S) , le sous espace F est une solution. Nous allons voir qu'elle est maximale.

1.2.2 Exemples

1. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ muni de sa base canonique $(e_{\alpha i}, e_i)$, $1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n$. Soient $(\omega^{\alpha i}, \omega^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ la base duale et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ engendré par les vecteurs $(e_{\alpha i})_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$. Considérons le système extérieur

$$\begin{cases} \theta^1 = \sum_{j=1}^n \omega^{1j} \wedge \omega^j = 0 \\ \dots \\ \theta^k = \sum_{j=1}^n \omega^{kj} \wedge \omega^j = 0 \end{cases}$$

Ce système définit un système extérieur k -symplectique sur $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ associé à F , qui sera dite canonique.

2. Un espace vectoriel symplectique est un espace vectoriel E de dimension $2n$ muni d'une 2-forme extérieure σ de rang maximum. Un sous espace lagrangien de E est une solution maximale de l'équation extérieure $\sigma = 0$. Une telle solution existe toujours et est de dimension n .

Considérons k espaces vectoriels symplectiques $(E^1, \sigma^1), \dots, (E^k, \sigma^k)$ et soit L^α un sous-espace lagrangien de $(E^\alpha, \sigma^\alpha)$. Chaque espace quotient E^α / L^α

étant de dimension n , il existe un espace vectoriel B de dimension n et des applications linéaires surjectives $\pi^\alpha : E^\alpha \longrightarrow B$ telles que

$$\text{Ker } \pi^\alpha = L^\alpha$$

pour tout $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$. Considérons l'espace symplectique produit $(E^1 \times \dots \times E^k, \sigma)$ où σ est la forme symplectique définie par

$$\sigma((x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)) = \sigma^1(x_1, y_1) + \dots + \sigma^k(x_k, y_k).$$

Soit E le sous-espace vectoriel de $E^1 \times \dots \times E^k$ défini par :

$$E = \left\{ (x_1, \dots, x_k) \in E^1 \times \dots \times E^k \mid \pi^1(x_1) = \dots = \pi^k(x_k) \right\}$$

L'application linéaire $\pi : E \longrightarrow B$ telle que

$$\pi(x_1, \dots, x_k) = \pi^1(x_1) = \dots = \pi^k(x_k)$$

pour tout $(x_1, \dots, x_k) \in E$ est surjective et vérifie

$$\text{Ker } \pi = L^1 \times \dots \times L^k.$$

Soient $i : E \longrightarrow E^1 \times \dots \times E^k$ l'injection canonique et $pr^\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$ la projection canonique $E^1 \times \dots \times E^k \longrightarrow E^\alpha$. Pour tout $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$, le composé $pr^\alpha \circ i$ est la restriction de pr^α à E ; c'est une application linéaire surjective. Il est clair que l'espace E est de dimension $n(k+1)$. Pour tout $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$ on pose $\theta^\alpha = (pr^\alpha \circ i)^* \sigma^\alpha$. Alors $(\theta^1, \dots, \theta^k; \text{Ker } \pi)$ est un système extérieur k -symplectique sur E .

1.2.3 Classification des systèmes k -symplectiques

Théorème 1.1 *Si $(\theta^1, \dots, \theta^k; F)$ est un système extérieur k -symplectique sur E , il existe alors une base $(\omega^{\alpha i}, \omega^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ de E^* telle que*

$$\theta^\alpha = \sum_{j=1}^n \omega^{\alpha j} \wedge \omega^j \quad , \quad F = \text{Ker } \omega^1 \cap \dots \cap \text{Ker } \omega^k.$$

Démonstration. Soient $\{f_1, \dots, f_{nk}, g_1, \dots, g_n\}$ une base de E telle que F soit engendré par $\{f_1, \dots, f_{nk}\}$ et $\{\gamma^1, \dots, \gamma^{nk}, \omega^1, \dots, \omega^n\}$ sa base duale. La seconde condition de la définition d'un système extérieur

k -symplectique nous permet de voir que les formes bilinéaires θ^α s'écrivent sous la forme suivante :

$$\theta^\alpha = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{s=1}^{nk} b_s^{\alpha j} \gamma^s + \sum_{s=1}^n c_s^{\alpha j} \omega^s \right) \wedge \omega^j$$

avec $b_s^{\alpha j}, c_s^{\alpha j} \in \mathbb{K}$. Pour tous α, j ($\alpha = 1, \dots, k$ et $j = 1, \dots, n$) on pose

$$\omega^{\alpha j} = \sum_{s=1}^{nk} b_s^{\alpha j} \gamma^s + \sum_{t=1}^n c_t^{\alpha j} \omega^t, \quad \mu^{\alpha j} = \sum_{s=1}^{nk} b_s^{\alpha j} \gamma^s.$$

Les formes linéaires $\mu^{\alpha j}$ forment une base de l'espace dual F^* de F . En effet, si un élément x de F vérifie $\mu^{\alpha j}(x) = 0$ pour tous α, j , alors les formes linéaires $i(x)\theta^\alpha$ sont nulles et il découle de la non dégénérescence du système $\{\theta^1, \dots, \theta^k\}$ que $x = 0$. Les formes linéaires $\mu^{\alpha j}$ sont donc indépendantes dans F^* et forment par conséquent une base de F^* . Les formes linéaires $\omega^{\alpha j}$ étant alors indépendantes dans E^* , le système

$$(\omega^{\alpha i}, \omega^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$$

est une base de E^* dans laquelle les 2-formes θ^α s'écrivent

$$\theta^\alpha = \sum_{j=1}^n \omega^{\alpha j} \wedge \omega^j.$$

Soit $(e_{\alpha i}, e_i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ la base de E ayant $(\omega^{\alpha i}, \omega^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ pour base duale. Les bases $(f_i, g_t)_{1 \leq i \leq nk, 1 \leq t \leq n}$ et $(e_{\alpha i}, e_i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ sont liées par les relations :

$$f_i = \sum_{\alpha=1}^k \left(\sum_{s=1}^n b_i^{\alpha s} e_{\alpha s} \right), \quad g_t = \sum_{\alpha=1}^k \left(\sum_{j=1}^n c_t^{\alpha j} e_{\alpha j} \right) + e_t.$$

Ceci montre en particulier que les vecteurs $e_{\alpha j}$ appartiennent à F et que $F = \text{Ker } \omega^1 \cap \dots \cap \text{Ker } \omega^k$ d'où la proposition.

Corollaire 1 *Le sous espace F est une solution de (S).*

Définition 1.3 *La base $(e_{\alpha i}, e_i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ de E ayant pour base duale $(\omega^{\alpha i}, \omega^i)$ est appelée base k -symplectique de E .*

Considérons à présent les sous espaces F^α définis par :

$$F^\alpha = \bigcap_{\beta \neq \alpha} A(\theta^\beta).$$

Proposition 1.2 *Dans les hypothèses et notations ci-dessus on a 1. $F = F^1 \oplus \dots \oplus F^k$ (somme directe),*

2. pour tout α ($\alpha = 1, \dots, k$) l'application $i_\alpha : x \mapsto i(x)\theta^\alpha$ définit un isomorphisme d'espaces vectoriels de F^α sur l'anneau $Ann(F)$ de F .

Ceci se déduit directement du théorème de classification. Rappelons que $Ann(F)$ est formé des éléments $f \in E^*$ tels que $f(x) = 0$ pour tout $x \in F$. Cet espace est isomorphe à $(E/F)^*$. Si $(e_{\alpha i}, e_i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ est une base k -symplectique de E et $(\omega^{\alpha i}, \omega^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ sa base duale, alors $Ann(F)$ est engendré par $\omega^1, \dots, \omega^n$, et F^α est engendré par les vecteurs $e_{\alpha 1}, \dots, e_{\alpha n}$.

Définition 1.4 *Les sous-espaces F^1, \dots, F^k sont appelés sous espaces caractéristiques du système extérieur k -symplectique.*

Pour tout $\alpha = 1, \dots, k$, on pose

$$G^\alpha = F^\alpha \oplus \frac{E}{F}.$$

On a

$$\theta^\alpha(x, y + f) = \theta^\alpha(x, y)$$

pour tous $x \in F^\alpha$, $y \in E$ et $f \in F$, donc $\theta^\alpha(x, y)$ ne dépend que de la classe \bar{y} de y modulo F , ceci nous permet de poser

$$\bar{\theta}^\alpha(x + \bar{y}, x' + \bar{y}') = \theta^\alpha(x, y') - \theta^\alpha(x', y).$$

$\bar{\theta}^\alpha$ définit bien une structure symplectique sur $G^\alpha = F^\alpha \oplus \frac{E}{F}$.

1.3 Endomorphismes k -symplectiques

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n(k+1)$ et $(\theta^1, \dots, \theta^k; F)$ un système extérieur k -symplectique.

Définition 1.5 *On dit qu'un endomorphisme f de E préserve le système extérieur k -symplectique $(\theta^1, \dots, \theta^k; F)$ s'il laisse invariants le système des*

formes extérieures $\{\theta^1, \dots, \theta^k\}$ et le sous espace F , autrement dit, si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $f(F) \subseteq F$,
2. il existe une permutation σ de $\{1, \dots, k\}$ telle que

$$\theta^\alpha(f(x), f(y)) = \theta^{\sigma(\alpha)}(x, y)$$

pour tous $\alpha(\alpha = 1, \dots, k)$ et $x, y \in E$.

1.3.1 Le groupe $Sp(k, n; E)$

Les automorphismes de E qui conservent la structure k -symplectique de E forment un groupe G . Le sous ensemble de G formé des automorphismes qui laissent invariante chacune des formes θ^α est un sous groupe de G , noté $Sp(k, n; E)$ et appelé groupe k -symplectique de E . Comme tout élément de G s'écrit comme une composée d'éléments de $Sp(k, n; E)$ et de permutations, l'étude de G se ramène à celle de $Sp(k, n; E)$.

Soit $Sp(k, n; \mathbb{K})$ le groupe des matrices des automorphismes k -symplectiques de E exprimées dans la base k -symplectique.

Proposition 1.3 *Le groupe $Sp(k, n; \mathbb{K})$ est formé des matrices du type*

$$\begin{pmatrix} T & & 0 & S_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & T & S_k \\ 0 & & & {}^t(T^{-1}) \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

où T, S_1, \dots, S_k sont des matrices $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{K} , T inversible et $T {}^t S_\alpha = S_\alpha {}^t T$ pour tout α ($\alpha = 1, \dots, k$).

Démonstration. Soient $f \in Sp(k, n; E)$, $\alpha(\alpha = 1, \dots, k)$ et $j, j' = 1, \dots, n$. Ecrivons

$$f(e_{j'}) = \sum_{i=1}^n t_{j'}^i e_i + \sum_{\beta=1}^k \left(\sum_{i=1}^n t_{j'}^{\beta i} e_{\beta i} \right)$$

avec $t_{j'}^i$ et $t_{j'}^{\beta i}$ sont des scalaires. Les éléments du groupe $Sp(k, n; E)$ laissent invariant le sous-espace vectoriel F ; on peut donc écrire

$$f(e_{\alpha j}) = \sum_{\beta=1}^k \sum_{s=1}^n t_{\alpha j}^{\beta s} e_{\beta s}.$$

La relation $\theta^\alpha(f(e_{\alpha j}), f(e_{j'})) = \theta^\alpha(e_{\alpha j}, e_{j'}) = \delta_{jj'}$, donne

$$\sum_{s=1}^n t_{\alpha j}^{\alpha s} t_{j'}^s = \delta_{jj'} ;$$

Désignons par T' (resp. T_α^β , $\alpha, \beta = 1, \dots, k$) la matrice de coefficients t_j^i (resp. $t_{\alpha j}^{\beta i}$). Les matrices T' et T_α^α ($\alpha = 1, \dots, k$) sont inversibles et sont liées par :

$$T_\alpha^\alpha = {}^t(T'^{-1}).$$

Pour $\beta \neq \alpha$, on a $\theta^\beta(f(e_{\alpha j}), f(e_{j'})) = \theta^\beta(e_{\alpha j}, e_{j'}) = 0$, et donc

$$\sum_{s=1}^n t_{\alpha j}^{\beta s} t_{j'}^s = 0;$$

d'où $T_\alpha^\beta {}^t T' = 0$. Comme la matrice T' est inversible, les matrices T_α^β sont nulles. La relation $\theta^\alpha(f(e_j), f(e_{j'})) = \theta^\alpha(e_j, e_{j'})$ donne

$$\sum_{i=1}^n t_j^{\alpha i} t_{j'}^i = \sum_{i=1}^n t_j^i t_{j'}^{\alpha i},$$

et par conséquent les matrices S_α de coefficients $t_j^{\alpha i}(i, j = 1, \dots, n)$ satisfont à

$${}^t S_\alpha T' = {}^t T' S_\alpha$$

pour tout α ($\alpha = 1, \dots, k$). Pour $T = T_\alpha^\alpha = {}^t(T'^{-1})$, la matrice de f s'écrit par rapport à la base k -symplectique sous la forme voulue. D'où la proposition.

1.3.2 L'algèbre de Lie $sp(k, n; E)$

On suppose dans tout ce paragraphe que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Dans ce cas le groupe $Sp(k, n; E)$ est un groupe de Lie. L'algèbre de Lie de ce groupe, notée $sp(k, n; E)$, qui s'identifie à l'espace tangent de ce groupe en l'application identique de E est constituée des endomorphismes u de E tels que $id_E + \varepsilon u$ soit dans le groupe $Sp(k, n; E)$ à ε^2 près. Les éléments de cette algèbre de Lie sont les endomorphismes u de E satisfaisant à :

$$u(F) \subseteq F \quad , \quad \theta^\alpha(u(x), y) + \theta^\alpha(x, u(y)) = 0$$

pour tous $x, y \in E$ et $\alpha = 1, \dots, k$.

Soit $sp(k, n; \mathbb{K})$ l'algèbre de Lie du groupe de Lie $Sp(k, n; \mathbb{K})$. C'est l'algèbre de Lie des matrices des endomorphismes de E appartenant à l'algèbre de Lie $sp(k, n; E)$.

Proposition 1.4 *Les éléments de $sp(k, n; \mathbb{K})$ sont les matrices du type*

$$\begin{pmatrix} A & & 0 & S_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & A & S_k \\ 0 & & & -{}^t A \end{pmatrix}$$

où A, S_1, \dots, S_k sont des matrices $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{K} telles que ${}^t S_\alpha = S_\alpha$ pour tout α ($\alpha = 1, \dots, k$).

Démonstration. Soient $u \in sp(k, n; E)$, $\alpha = 1, \dots, k$ et $j = 1, \dots, n$. Ecrivons

$$\begin{aligned} u(e_{\alpha j}) &= \sum_{b=1}^k (\sum_{h=1}^n c_{\alpha j}^{\beta h} e_{\beta h}) + \sum_{h=1}^n c_{\alpha j}^h e_h, \\ u(e_j) &= \sum_{\beta=1}^k (\sum_{h=1}^n c_j^{\beta h} e_{\beta h}) + \sum_{h=1}^n c_j^h e_h. \end{aligned}$$

La relation $\theta^\alpha(u(x), y) + \theta^\alpha(x, u(y)) = 0$, pour tous $x, y \in E$, donne

$$\begin{aligned} c_{\alpha s}^s &= 0, & c_{\beta j}^{\alpha s} &= 0 \text{ si } \alpha \neq \beta \\ c_{\alpha j}^{\alpha s} + c_s^j &= 0, & c_j^{\alpha s} &= c_s^{\alpha j}. \end{aligned}$$

La matrice de u s'écrit par rapport à la base k -symplectique sous la forme voulue, d'où la proposition.

Corollaire 2 *Le groupe $Sp(k, n; E)$ est de dimension $n^2 + \frac{kn(n+1)}{2}$.*

Corollaire 3 *Le groupe k -symplectique et son algèbre de Lie laissent invariants les sous-espaces caractéristiques du système extérieur k -symplectique.*

Dans les hypothèses et notations du paragraphe précédent, on considère l'espace $G^\alpha = F^\alpha \oplus \frac{E}{F}$, muni de sa structure symplectique naturelle définie par

$$\bar{\theta}^\alpha(x + \bar{y}, x' + \bar{y}') = \theta^\alpha(x, y') - \theta^\alpha(x', y).$$

pour tous $x + \bar{y}, x' + \bar{y}' \in G^\alpha$, où $\alpha = 1, \dots, k$.

Corollaire 4 *Pour tout $f \in Sp(k, n; E)$, la correspondance*

$$\bar{f}_\alpha : x + \bar{y} \mapsto f(x) + \overline{f(y)}$$

définit un élément du groupe symplectique $Sp(\bar{\theta}^\alpha, G^\alpha)$ de l'espace vectoriel symplectique $(G^\alpha, \bar{\theta}^\alpha)$.

Corollaire 5 Si $(\theta^1, \dots, \theta^k; F)$ est un système extérieur k -symplectique sur un espace vectoriel de dimension $n(k+1)$ alors les formes $\theta^1, \dots, \theta^k$ sont de rang $2n$.

1.4 Géométrie k-symplectique

1.4.1 Orthogonalité k-symplectique

Soit E un espace vectoriel de dimension $n(k+1)$ sur un corps commutatif \mathbb{K} de caractéristique différente de 2, muni d'un système extérieur k -symplectique $(\theta^1, \dots, \theta^k; F)$.

Définition 1.6 Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux par rapport au système $\{\theta^1, \dots, \theta^k\}$, et on écrit $x \perp y$, si $\theta^\alpha(x, y) = 0$, pour tout α ($\alpha = 1, \dots, k$).

Deux sous-espaces vectoriels L et M de E sont dits orthogonaux par rapport au système $\{\theta^1, \dots, \theta^k\}$, et on écrit $L \perp M$, si $x \perp y$ pour tout $(x, y) \in L \times M$.

L'orthogonal k -symplectique d'une partie non vide A de E est le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \theta^\alpha(x, y) = 0, \forall y \in A, \forall \alpha (\alpha = 1, \dots, k)\}$$

Deux sous-espaces vectoriels L et M de E sont dits supplémentaires orthogonaux si $E = L \oplus M$ et $L = M^\perp$.

Remarques

La non dégénérescence du système $\{\theta^1, \dots, \theta^k\}$ est équivalente à $E^\perp = \{0\}$.

L'orthogonal 2-symplectique X^\perp d'un élément X de E n'est pas nécessairement un hyperplan. Considérons par exemple l'espace \mathbb{R}^3 muni du système k -symplectique défini par

$$\begin{cases} \theta^1 = \omega^1 \wedge \omega^3 \\ \theta^2 = \omega^2 \wedge \omega^3 \end{cases}$$

et $F = \text{Ker } \omega^3$, où $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ est la base duale de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de E . L'orthogonal 2-symplectique e_1^\perp de e_1 est l'hyperplan engendré par $\{e_1, e_2\}$ tandis que l'orthogonal 2-symplectique e_3^\perp de e_3 est la droite $\mathbb{R}e_3$.

Proposition 1.5 Pour toutes parties non vides A et B de E , on a :

1. $A \subseteq B \implies B^\perp \subseteq A^\perp$,
2. $A \subseteq A^{\perp\perp}$.

Définition 1.7 *Un sous-espace L de E sera dit totalement isotrope si $L \subseteq L^\perp$.*

Les sous espaces totalement isotropes sont caractérisés par la propriété suivante :

$$\theta^\alpha(x, y) = 0$$

pour tous $x, y \in L$ et $\alpha = 1, \dots, k$. Tout sous-espace totalement isotrope est contenu dans un sous-espace totalement isotrope maximal.

Définition 1.8 *Un sous-espace totalement isotrope maximal sera appelé sous-espace lagrangien de E .*

Proposition 1.6 *Les éléments du groupe k -symplectique $Sp(k, n; E)$ transforment les sous-espaces totalement isotropes (resp. lagrangiens) en sous-espaces totalement isotropes (resp. lagrangiens).*

Démonstration. Soient $f \in Sp(k, n; E)$ et L un sous-espace vectoriel de E totalement isotrope. Pour tous $x, y \in E$ on a

$$\theta^\alpha(f(x), f(y)) = \theta^\alpha(x, y) = 0$$

pour tout $\alpha = 1, \dots, k$. Le sous-espace $f(L)$ est totalement isotrope. Supposons que L soit lagrangien et montrons qu'il en est de même pour $f(L)$. Si $f(L)$ est contenu strictement dans $f(L)^\perp$ alors il existe $a' = f(a)$ appartenant $f(L)^\perp - f(L)$ tel que pour tout $x \in f(L)$ on ait $\theta^\alpha(a', x) = 0$. Posons $A = L \oplus \mathbb{K}a'$. On a $\theta^\alpha(u, v) = 0$ pour tous $u, v \in A$, et $A \subseteq A^\perp$; par conséquent L n'est pas maximal ce qui est contraire à l'hypothèse; donc $f(L)$ est lagrangien.

Proposition 1.7 *Soit L un sous-espace lagrangien, M_0 un sous-espace totalement isotrope de E supplémentaire à L . Alors il existe un sous-espace lagrangien M de E , supplémentaire à L et contenant M_0 .*

Démonstration. Soit M un élément maximal de l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes de E transverses à L contenant M_0 . Alors M est un sous-espace lagrangien.

Proposition 1.8 *Pour tout sous-espace vectoriel L de E les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. L est un sous-espace lagrangien de E ,
2. $L = L^\perp$.

Démonstration. Montrons $1 \implies 2$.

Si L est contenu strictement dans L^\perp , alors il existe un élément a de $E - L$ tel que

$$\theta^\alpha(a, y) = 0$$

pour tous $y \in L$ et $\alpha = 1, \dots, k$. Soit $L' = L \oplus \mathbb{K}a$. On a évidemment $L \subset L'$. Soit $z = x + \lambda a \in L'$, avec $x \in L$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned} \theta^\alpha(z, z') &= \theta^\alpha(x + \lambda a, x' + \lambda' a) \\ &= \theta^\alpha(x, x') + \lambda \theta^\alpha(x, a) + \lambda' \theta^\alpha(a, x') \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour tous $z' = x' + \lambda' a$ appartenant à L' ($x' \in L$ et $\lambda' \in \mathbb{K}$) et $\alpha = 1, \dots, k$, et donc $z \in L'^\perp$. D'où $L' \subset L'^\perp$, ceci contredit le fait que L est un sous-espace totalement isotrope maximal.

L'implication $2 \implies 1$ est immédiate.

Proposition 1.9 *Soit L un sous-espace vectoriel de E .*

1. *Si L est un sous-espace totalement isotrope alors $\dim L \leq nk$,*
2. *Si L est lagrangien alors $n \leq \dim L \leq nk$.*

Démonstration. Soient L un sous-espace vectoriel de E totalement isotrope, $\{f_1, \dots, f_p\}$ une base de L que l'on complète en une base de E notée $\{f_1, \dots, f_p, u_1, \dots, u_{m-p}\}$ et $\{f_1^*, \dots, f_p^*, u_1^*, \dots, u_{m-p}^*\}$ sa base duale. Les 2-formes θ^α s'écrivent :

$$\theta^\alpha = \sum_{j=1}^{m-p} \left(\sum_{s=1}^p a^{\alpha s j} f_s^* + \sum_{s=1}^{m-p} b^{\alpha s j} u_s^* \right) \wedge u_j^*,$$

avec $a^{\alpha s j}, b^{\alpha s j} \in \mathbb{K}$. Considérons la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} a^{11 1} & a^{12 1} & \dots & a^{1p 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{11 m-p} & a^{12 m-p} & \dots & a^{1p m-p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{k1 1} & a^{k2 1} & \dots & a^{kp 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{k1 m-p} & a^{k2 m-p} & \dots & a^{kp m-p} \end{pmatrix}.$$

et montrons qu'elle est de rang p . Pour tout $X = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, la relation $A^t X = 0$ entraîne que le vecteur $x_1 f_1 + \dots + x_p f_p$ est dans $A(\theta^1) \cap \dots \cap A(\theta^k)$; la non dégénérescence du système $\{\theta^1, \dots, \theta^k\}$ donne $X = 0$, et donc, la matrice A est de rang p . Il résulte qu'on a en particulier $p \leq k(m-p)$, d'où $p \leq nk$ et la première assertion est démontrée.

Supposons maintenant que L soit un sous-espace lagrangien de E et considérons la matrice

$$B = \begin{pmatrix} a^{11\ 1} & a^{11\ 2} & \dots & a^{11\ m-p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{1p\ 1} & a^{1p\ 2} & \dots & a^{1p\ m-p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{k1\ 1} & a^{k1\ 2} & \dots & a^{k1\ m-p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{kp\ 1} & a^{kp\ 2} & \dots & a^{kp\ m-p} \end{pmatrix}.$$

Montrons que B est de rang $m-p$. Pour tout $Y = (y_1, \dots, y_{m-p}) \in \mathbb{K}^{m-p}$, la relation $B^t Y = 0$ entraîne que le vecteur $y = \sum_{j=1}^{m-p} y_j u_j$ vérifie

$$\theta^\alpha(y, f_s) = - \sum_{j=1}^{m-p} a^{\alpha s\ j} y_j = 0$$

pour tous $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$ et $s (s = 1, \dots, p)$; donc

$$\theta^\alpha(y, g) = 0$$

pour tous $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$ et $g \in L$. Ceci montre que le vecteur y est dans l'orthogonal k -symplectique L^\perp de L ; L étant un sous-espace lagrangien de E , le vecteur y appartient à L , d'où $Y = 0$. On a montré l'implication

$$B^t Y = 0 \implies Y = 0,$$

par conséquent la matrice B est de rang $m-p$, et donc $m-p \leq kp$; d'où $n \leq p$, ce qui montre la seconde assertion.

Corollaire 6 *Les sous-espaces vectoriels F et $G = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ sont des solutions maximales du système*

$$\begin{cases} \theta^1 = 0 \\ \dots \\ \theta^k = 0. \end{cases}$$

Remarques

1. Pour $k = 1$, on retrouve le cas classique où tous les sous-espaces lagrangiens sont de dimension n .

2. Les sous-espaces vectoriels F et $G = Vect(e_1, \dots, e_n)$ sont des sous-espaces lagrangiens de E de dimensions respectives nk et n . Il existe aussi des sous-espaces lagrangiens de dimensions comprises strictement entre n et nk ; considérons par exemple, dans le cas où $n = k = 2$, le sous-espace vectoriel L de E engendré par $e_{11} + e_1$, e_{12} et e_{22} ; L est un sous-espace lagrangien de E de dimension 3.

1.4.2 Endomorphismes adjoints

Soient E un espace vectoriel de dimension $n(k+1)$ et $(\theta^1, \dots, \theta^k; F)$ un système extérieur k -symplectique sur E . Soit $\tilde{\eta}$ l'application de E dans le \mathbb{K} -espace vectoriel $Hom(E, \mathbb{K}^k)$ définie par

$$\tilde{\eta}(x)(y) = (\theta^1(x, y), \dots, \theta^k(x, y))$$

pour tous $x, y \in E$. La non dégénérescence du système $\{\theta^1, \dots, \theta^k\}$ implique que l'application $\tilde{\eta}$ est injective.

A tout endomorphisme u de E , associons l'application linéaire de $Hom(E, \mathbb{K}^k)$ dans lui-même, notée ${}^t u$ et appelée transposée de u , définie par :

$${}^t u(\xi) = \xi \circ u$$

pour tout $\xi \in Hom(E, \mathbb{K}^k)$.

Proposition 1.10 *Pour tous $u, v \in End(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :*

1. ${}^t(u + v) = {}^t u + {}^t v$, ${}^t(\lambda u) = \lambda {}^t u$,
2. ${}^t(u \circ v) = {}^t v \circ {}^t u$,
3. ${}^t id_E$ est l'application identique de $Hom(E, \mathbb{K}^k)$,
4. si $u \in GL(E)$ alors ${}^t u \in GL(Hom(E, \mathbb{K}^k))$ et $({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1})$.

Soit u un endomorphisme de E vérifiant l'hypothèse suivante :

$$Im {}^t u \circ \tilde{\eta} \subseteq Im \tilde{\eta}. \quad (1.2)$$

Pour chaque $t \in E$, il existe un unique $t' \in E$ tel que :

$$({}^t u \circ \tilde{\eta})(t) = \tilde{\eta}(t')$$

La correspondance $t \mapsto t'$ permet de définir une application de E dans lui-même, notée u^* , telle que pour tous t et x appartenant à E , on ait :

$$(\theta^1(t, u(x)), \dots, \theta^k(t, u(x))) = (\theta^1(u^*(t), x), \dots, \theta^k(u^*(t), x)).$$

On déduit que pour tous $u, v \in \text{End}(E)$ satisfaisant la relation (1.2) et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a les propriétés suivantes :

1. $\theta^\alpha(t, u(x)) = \theta^\alpha(u^*(t), x)$ pour tous $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$ et $t, x \in E$,
2. l'application u^* est linéaire,
3. $(u + v)^* = u^* + v^*$, $(\lambda u)^* = \lambda u^*$,
4. $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$, $u^{**} = u$, $(id_E)^* = id_E$,
5. si $u \in GL(E)$ alors $u^* \in GL(E)$ et l'on a $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

Réciproquement, soit u un élément de $\text{End}(E)$ pour lequel il existe un endomorphisme u^* de E satisfaisant à :

$$\theta^\alpha(t, u(x)) = \theta^\alpha(u^*(t), x)$$

pour tous $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$ et $t, x \in E$; on a donc ${}^t u(\tilde{\eta}(t)) = \tilde{\eta}(u^*(t))$ pour tout $t \in E$, et, par conséquent, u satisfait la relation (1.2). On a donc montré la proposition suivante :

Proposition 1.11 *Pour un endomorphisme u de E les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) il existe un endomorphisme u^* de E tel que $\theta^\alpha(t, u(x)) = \theta^\alpha(u^*(t), x)$, quels que soient $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$ et $t, x \in E$,
- ii) $\text{Im } {}^t u \circ \tilde{\eta} \subseteq \text{Im } \tilde{\eta}$.

Définition 1.9 *Si un endomorphisme u de E satisfait l'une des conditions équivalentes de la proposition ci-dessus, l'endomorphisme u^* est appelé endomorphisme adjoint de u .*

Remarque. Pour $k = 1$, l'application $\text{Im } \tilde{\eta}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de E sur E^* et la relation

$$\text{Im } {}^t u \circ \tilde{\eta} \subseteq \text{Im } \tilde{\eta} = E^*$$

est satisfaite pour tout endomorphisme u de E ; ainsi à tout endomorphisme de E est associé, dans ce cas, un endomorphisme adjoint. Cette situation n'est pas automatique lorsque $k \geq 2$, puisque $\text{Im } \tilde{\eta}$ est de dimension $n(k+1)$; il est donc contenu strictement dans $\text{Hom}(E, \mathbb{K}^k)$ qui est de dimension $kn(k+1)$.

Proposition 1.12 *On suppose $k \geq 2$. Pour un endomorphisme u de E , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) u possède un endomorphisme adjoint,
- ii) $u(F^\alpha) \subseteq F^\alpha$ pour tout α ($\alpha = 1, \dots, k$) et $u|_{F^1} = \dots = u|_{F^k}$,
- iii) la matrice de u par rapport à la base k -symplectique de E s'écrit

$$\begin{pmatrix} A & 0 & Q_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & A & Q_k \\ 0 & & & B \end{pmatrix}$$

où A, B, Q_1, \dots, Q_k sont des matrices $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{K} .

Démonstration. Cherchons tout d'abord à exprimer la matrice de u par rapport à la base k -symplectique $(e_{\alpha i}, e_i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ de E , sachant que u vérifie la condition

$$Im({}^t u \circ \tilde{\eta}) \subseteq Im \tilde{\eta}.$$

Désignons par $(f_\mu)_{1 \leq \mu \leq k}$ la base canonique de \mathbb{K}^k . Les éléments E_μ^b de $Hom(E, \mathbb{K}^k)$ donnés par :

$$E_\mu^b(e_a) = \delta_a^b f_\mu$$

où a et $b \in \{1, \dots, \alpha j, \dots, kn, 1, \dots, j, \dots, n\}$ et $\mu \in \{1, \dots, k\}$, forment une base de $Hom(E, \mathbb{K}^k)$. Posons

$$\tilde{\eta}(e_a) = \sum_{b, \mu} \gamma_{ab}^\mu E_\mu^b.$$

Si $a = \alpha s$ ($\alpha = 1, \dots, k; s = 1, \dots, n$) on a

$$0 = \tilde{\eta}(e_{\alpha s})(e_{\beta t}) = \sum_{b, \mu} \gamma_{\alpha s b}^\mu E_\mu^b(e_{\beta t}) = \sum_{b, \mu} \gamma_{\alpha s b}^\mu \delta_{\beta t}^b f_\mu = \sum_{\mu} \gamma_{\alpha s \beta t}^\mu f_\mu$$

pour tous β, t ($\beta = 1, \dots, k; t = 1, \dots, n$), d'où

$$\gamma_{\alpha s \beta t}^\mu = 0$$

pour tous μ, α, β, s, t . De même on a :

$$\delta_{st} f_\alpha = \tilde{\eta}(e_{\alpha s})(e_t) = \sum_{b, \mu} \gamma_{\alpha s b}^\mu E_\mu^b(e_t) = \sum_{b, \mu} \gamma_{\alpha s b}^\mu \delta_t^b f_\mu = \sum_{\mu} \gamma_{\alpha s t}^\mu f_\mu,$$

donc

$$\gamma_{\alpha s t}^{\mu} = \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{s t}$$

pour tous α, μ, s, t ; ainsi

$$\tilde{\eta}(e_{\alpha s}) = \sum_{\mu} \gamma_{\alpha s s}^{\mu} E_{\mu}^s = E_{\alpha}^s.$$

Si $a = s$ ($s = 1, \dots, n$), on a

$$\tilde{\eta}(e_s) = \sum_{b, \mu} \gamma_{s b}^{\mu} E_{\mu}^b$$

où $b = \dots \alpha j \dots, \dots j \dots$ ($\alpha = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n$); ainsi

$$0 = \tilde{\eta}(e_s)(e_t) = \sum_{b, \mu} \gamma_{s b}^{\mu} E_{\mu}^b(e_t) = \sum_{b, \mu} \gamma_{s b}^{\mu} \delta_t^b f_{\mu} = \sum_{\mu} \gamma_{s t}^{\mu} f_{\mu},$$

d'où

$$\gamma_{s t}^{\mu} = 0$$

pour tous μ, s, t . Des égalités

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(e_s)(e_{\beta t}) &= \sum_{b, \mu} \gamma_{s b}^{\mu} E_{\mu}^b(e_{\beta t}) = \sum_{b, \mu} \gamma_{s b}^{\mu} \delta_{\beta t}^b f_{\mu} = \sum_{\mu} \gamma_{s \beta t}^{\mu} f_{\mu} \\ &= -\tilde{\eta}(e_{\beta t})(e_s) = -\delta_{s t} f_{\beta}, \end{aligned}$$

il résulte que l'on a

$$\gamma_{s \beta t}^{\mu} = -\delta_{s t} \delta_{\beta}^{\mu} = -\gamma_{\beta t s}^{\mu},$$

et par conséquent

$$\tilde{\eta}(e_s) = \sum_{\beta, \mu, t} \gamma_{s \beta t}^{\mu} E_{\mu}^{\beta t} = -\sum_{\beta, \mu, t} \delta_{s t} \delta_{\beta}^{\mu} E_{\mu}^{\beta t} = -\sum_{\beta, \mu} \delta_{\beta}^{\mu} E_{\mu}^{\beta s} = -\sum_{\alpha=1}^k E_{\alpha}^{\alpha s} = \Omega^s,$$

ceci montre que $Im \tilde{\eta}$ est engendré par les applications linéaires

$$\Omega_{\alpha}^s = E_{\alpha}^s, \quad \Omega^s = -\sum_{\alpha=1}^k E_{\alpha}^{\alpha s}$$

où $\alpha = 1, \dots, k, s = 1, \dots, n$. On a donc montré que, pour un endomorphisme u de E , les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) il existe un endomorphisme u^* de E satisfaisant à :

$$\theta^\alpha(t, u(x)) = \theta^\alpha(u^*(t), x)$$

pour tous $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$ et $t, x \in E$,

ii) $Im({}^t u \circ \tilde{\eta})$ est contenue dans le sous-espace vectoriel de $Hom(E, \mathbb{K}^k)$ engendré par Ω_α^s et Ω^s ($\alpha = 1, \dots, k$, $s = 1, \dots, n$).

Ecrivons

$$u(e_{\alpha s}) = \sum_{\beta=1}^k \left(\sum_{t=1}^n t_{\alpha s}^{\beta t} e_{\beta t} \right) + \sum_{t=1}^n t_{\alpha s}^t e_t$$

et

$$u(e_s) = \sum_{\beta=1}^k \left(\sum_{t=1}^n t_s^{\beta t} e_{\beta t} \right) + \sum_{t=1}^n t_s^t e_t.$$

On a les relations suivantes :

$$\begin{cases} ({}^t u \circ \tilde{\eta})(e_{\beta s}) = \sum_{\alpha=1}^k \left(\sum_{j=1}^n t_{\alpha j}^s E_\beta^{\alpha j} \right) + \sum_{t=1}^n t_t^s E_\beta^t \\ ({}^t u \circ \tilde{\eta})(e_s) = - \sum_{\alpha, \beta, j} t_{\alpha j}^{\beta s} E_\beta^{\alpha j} - \sum_{t, \rho} t_t^{\rho s} E_\rho^t. \end{cases}$$

Pour que l'endomorphisme $({}^t u \circ \tilde{\eta})(e_{\beta s})$ appartienne à $Im \tilde{\eta}$ il faut et il suffit que $\sum_{\alpha=1}^k \left(\sum_{j=1}^n t_{\alpha j}^s E_\beta^{\alpha j} \right)$ soit une combinaison linéaire des Ω^s ; l'expression $\sum_{\alpha=1}^k \left(\sum_{j=1}^n t_{\alpha j}^s E_\beta^{\alpha j} \right)$ se réduit donc au seul terme :

$$\sum_{\alpha=1}^k \left(\sum_{j=1}^n t_{\alpha j}^s E_\beta^{\alpha j} \right) = t_{\beta j}^s E_\beta^{\beta j}.$$

L'hypothèse $k \geq 2$ entraîne que les coefficients $t_{\beta j}^s$ sont nuls.

Pour que $({}^t u \circ \tilde{\eta})(e_s)$ soit dans $Im \tilde{\eta}$ il est nécessaire et suffisant que pour tout $s (s = 1, \dots, n)$, $\sum_{\alpha, \beta, j} t_{\alpha j}^{\beta s} E_\beta^{\alpha j}$ soit une combinaison linéaire des Ω^s .

L'expression $\sum_{\alpha, \beta, j} t_{\alpha j}^{\beta s} E_\beta^{\alpha j}$ s'écrit alors sous la forme :

$$\sum_{\alpha, \beta, j} t_{\alpha j}^{\beta s} E_\beta^{\alpha j} = \sum_{\alpha, j} t_{\alpha j}^{\alpha s} E_\alpha^{\alpha j}.$$

Dans ces conditions on a :

$$\sum_{\alpha,j} t_{\alpha j}^{\alpha s} E_{\alpha}^{\alpha j} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Omega^i,$$

et donc,

$$\sum_{\alpha,i} t_{\alpha i}^{\alpha s} E_{\alpha}^{\alpha i}(e_{\beta j}) = \sum_{\alpha,i} t_{\alpha i}^{\alpha s} \delta_{\beta j}^{\alpha i} f_{\alpha} = t_{\beta j}^{\beta s} f_{\beta}$$

et

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \Omega^i(e_{\beta j}) = - \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{\alpha=1}^k E_{\alpha}^{\alpha i}(e_{\beta j}) = - \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{\alpha=1}^k \delta_{\beta j}^{\alpha i} f_{\alpha} = -\lambda_j f_{\beta}.$$

Ainsi $t_{\alpha i}^{\alpha s} = a_i^s = -\lambda_i$ ne dépend pas de α ($\alpha = 1, \dots, k$). Par conséquent on a :

$$u(e_{\alpha i}) = \sum_{j=1}^n a_i^j e_{\alpha j}$$

et

$$u(e_i) = \sum_{\alpha=1}^k \left(\sum_{j=1}^n t_i^{\alpha j} e_{\alpha j} \right) + \sum_{j=1}^n t_i^j e_j.$$

On a donc montré que la matrice de u par rapport à la base k -symplectique s'écrit sous la forme demandée.

Corollaire 7 *Si u est dans le groupe k -symplectique $Sp(k, n; E)$, alors u^* existe et l'on a $u^* = u^{-1}$.*

1.5 Transvections k -symplectiques

L'étude des symétries d'une structure donnée (i.e. les applications qui conservent cette structure) permet une étude fine de la géométrie sous jacente. Dans chacune des monographies de E.Artin [1] et de J.Dieudonné [15] on trouve une étude détaillée sur les générateurs du groupe linéaire et du groupe symplectique. On y dégage le rôle que jouent les dilatations et les transvections. Ces transformations engendrent le groupe linéaire dès que le corps de base \mathbb{K} est différent de \mathbb{F}_2 (corps fini à deux éléments). Si E est un espace vectoriel sur \mathbb{F}_2 , alors le groupe linéaire $Gl_{\mathbb{K}}(E)$ coïncide avec le groupe spécial linéaire $SL_{\mathbb{K}}(E)$. Quant au groupe symplectique $Sp(\theta, E)$, relatif à une

structure symplectique θ donnée sur E , il est engendré par l'ensemble de ses transvections symplectiques.

Dans cette partie, nous allons étudier, conformément à l'étude classique correspondant au cas symplectique, les transvections k -symplectiques, i.e. celles qui conservent un système extérieur k -symplectique $(\theta^1, \dots, \theta^k; F)$ sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E afin de voir leur rôle dans l'étude des générateurs de $Sp(k, n; E)$. Nous verrons que, contrairement au cas classique d'une structure symplectique, les transvections k -symplectiques n'engendrent pas le groupe $Sp(k, n; E)$; elles engendrent un sous-groupe normal noté $Tp(k, n; E)$. Cette propriété s'explique aisément pour $k = 1$. Le groupe 1-symplectique $Sp(1, n; E)$ ne coïncide pas avec $Sp(n, E)$. En fait $Sp(1, n, E)$ est le sous-groupe de $Sp(n, E)$ formé des éléments qui laissent invariant la structure symplectique θ sur E et qui laisse aussi invariant un sous-espace lagrangien L . Les transvections de $Sp(1, n, E)$ sont donc les transvections de $Sp(n, E)$ qui laissent invariant ce sous espace lagrangien. Il est étonnant de voir que le sous groupe $Tp(1, n, E)$ engendré par ces transvections apparaît aussi naturellement dans le cadre de la quantification géométrique de Kostant-Souriau et également dans l'approche que fait Kirillov pour l'analyse harmonique dans les groupes de Lie nilpotents.

1.5.1 Transvections

Définition 1.10 *On dit qu'un élément $\tau \in GL(E)$ est une transvection s'il laisse fixe les éléments d'un hyperplan H et s'il déplace tout vecteur x de E d'un vecteur de H , c'est à dire pour tout $x \in E$, le vecteur $\tau(x) - x \in H$.*

Définition 1.11 *On dira que τ est une transvection d'hyperplan H .*

Proposition 1.13 *Si τ est une transvection d'hyperplan H , alors il existe $t \in E$ tel que*

$$\tau(x) = x + \varphi(x)t$$

pour tout $x \in E$, où φ est une forme linéaire sur E dont le noyau contient H .

On dira que τ est une transvection d'hyperplan H et de direction la droite $\mathbb{K}t$

Proposition 1.14 *Soit $\tau(x) = x + \varphi(x)t$ une transvection d'hyperplan H et de direction $\mathbb{K}t$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- i) $\tau \neq id_E$,*
- ii) $t \neq 0$ et $\varphi \neq 0$.*

Ceci résulte directement de la caractérisation d'une transvection.

1.5.2 Transvections k -symplectiques

Définition 1.12 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n(k+1)$ muni d'un système extérieur k -symplectique $(\theta^1, \dots, \theta^k; F)$. Une transvection τ de E d'hyperplan H et de droite $\mathbb{K}t$ est dite k -symplectique si elle appartient au groupe $Sp(k, n; E)$.

Il en résulte qu'une transvection $\tau(x) = x + \varphi(x)t$ d'hyperplan H et de droite $\mathbb{K}t$ est k -symplectique si et seulement si la propriété suivante est satisfaite

$$\varphi(x)\theta^\alpha(y, t) = \varphi(y)\theta^\alpha(x, t) \quad (1.3)$$

pour tous $x, y \in E$ et $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$.

Proposition 1.15 Si $\tau(x) = x + \varphi(x)t$ est une transvection k -symplectique d'hyperplan H et de droite $\mathbb{K}t$ avec $\tau \neq id_E$ alors $H = t^\perp$.

Démonstration. La relation (1.3) montre que $H \subseteq t^\perp$, tandis que l'inclusion $t^\perp \subseteq H$ résulte de la non dégénérescence du système $\{\theta^1, \dots, \theta^k\}$ et de la relation (1.3).

Proposition 1.16 Soit $\tau(x) = x + \varphi(x)t$ une transvection k -symplectique d'hyperplan H et de droite $\mathbb{K}t$ avec $\tau \neq id_E$. Alors pour tout $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) il existe $x \in E - H$ tel que $\theta^\alpha(t, x) \neq 0$,
- ii) pour tout $x \in E - H$, $\theta^\alpha(t, x) \neq 0$.

Cette proposition est une conséquence immédiate de (1.3).

À tout élément $t \in E - \{0\}$ on associe le sous-ensemble $I(t)$ de $\{1, \dots, k\}$ constitué des éléments α tels que $i(t)\theta^\alpha \neq 0$. La non dégénérescence du système $\{\theta^1, \dots, \theta^k\}$ permet de voir que l'ensemble $I(t) \neq \emptyset$. Soit $\tau(x) = x + \varphi(x)t$ une transvection k -symplectique d'hyperplan H et de droite $\mathbb{K}t$; la relation (1.3) et la proposition précédente montrent que l'on a

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(y)} = \frac{\theta^\alpha(t, x)}{\theta^\alpha(t, y)}$$

pour tous $x, y \in E - H$ et $\alpha \in I(t)$. Il existe donc des scalaires non nuls $\mu^\alpha (\alpha \in I(t))$, tels que

$$\varphi(x) = \mu^\alpha \theta^\alpha(x, t)$$

pour tous $x \in E - H$ et $\alpha \in I(t)$. Comme cette équation ne dépend pas de α dans $I(t)$, on a

$$\mu^\alpha \theta^\alpha = \mu^\beta \theta^\beta$$

pour tous $\alpha, \beta \in I(t)$.

La proposition suivante permet de donner une caractérisation des transvections k -symplectiques.

Proposition 1.17 *Soit t un vecteur de E . Pour que t soit une direction d'une transvection k -symplectique τ avec $\tau \neq id_E$ il est nécessaire et suffisant que t prenne la forme suivante :*

$$t = \sum_{\alpha=1}^k \left(\sum_{s=1}^n t^s \lambda^\alpha e_{\alpha s} \right) \quad (1.4)$$

où t^s (resp. λ^α) sont des scalaires non tous nuls.

Démonstration. Pour $k = 1$, il suffit de montrer que $t \in F$. En effet on a $t^\perp = H = Ker \varphi$ et F est τ -invariant. Ainsi $t \in F$.

Supposons que $k \geq 2$. Soit $\tau(x) = x + \varphi(x)t$ une transvection k -symplectique d'hyperplan H et de droite $\mathbb{K}t$ avec $\tau \neq id_E$. Les relations qui précèdent montrent qu'il existe un sous-ensemble $I(t)$ de $\{1, \dots, k\}$ tel que les formes linéaires $i(t)\theta^\alpha$, $\alpha \in I(t)$, soient proportionnelles. On peut supposer que $1 \in I(t)$. Ecrivons

$$t = \sum_{\alpha=1}^k \left(\sum_{s=1}^n t^{\alpha s} e_{\alpha s} \right) + \sum_{s=1}^n t^s e_s.$$

Si $I(t)$ est réduit à $\{1\}$, alors $i(t)\theta^\alpha = 0$ pour tout $\alpha \geq 2$, et $t = \sum_{s=1}^n t^{1s} e_{1s}$. Ceci montre que t s'écrit sous la forme (1.4). Supposons maintenant que $I(t)$ ne soit pas réduit à $\{1\}$. Pour tout $\beta \in I(t)$, il existe $\lambda^\beta \in \mathbb{K}^*$ tel que $i(t)\theta^\beta = \lambda^\beta i(t)\theta^1$; d'où

$$t^{\beta s} = \lambda^\beta t^{1s} \quad , \quad t^s = 0$$

pour tout $s \in \{1, \dots, n\}$ et t s'écrit sous la forme demandée.

Réciproquement, soit t un élément de $E - \{0\}$ s'écrivant sous la forme (1.4). Il est clair que $I(t)$ est la partie de $\{1, \dots, k\}$ formée des éléments β tels que $\lambda^\beta \neq 0$ et H est l'hyperplan de E d'équation

$$\sum_{s=1}^n t^s \omega^s = 0.$$

On a

$$i(t)\theta^\beta = \lambda^\beta \left(\sum_{s=1}^n t^s \omega^s \right) \quad (1.5)$$

pour tout $\beta \in I(t)$, et donc,

$$H = \text{Ker}(i(t)\theta^1) \cap \dots \cap \text{Ker}(i(t)\theta^k) = t^\perp.$$

La relation (1.5) montre qu'il existe des éléments c^β ($\beta \in I(t)$) de \mathbb{K} non nuls, et une forme linéaire φ de noyau H tels que

$$c^\beta i(t)\theta^\beta = \varphi$$

pour tout $\beta \in I(t)$. L'endomorphisme τ de E donné par

$$\tau(x) = x + \varphi(x)t$$

pour tout $x \in E$, définit bien une transvection k -symplectique de E .

Corollaire 8 *Pour toute transvection k -symplectique d'hyperplan H de E , on a $F \subseteq H$.*

Corollaire 9 *Pour une transvection τ de E , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) τ est une transvection k -symplectique,
- ii) τ s'écrit sous la forme

$$\tau(x) = x + \left(\sum_{m=1}^n t^m \omega^m(x) \right) \left(\sum_{m=1}^n \sum_{\alpha=1}^k t^m \lambda^\alpha e_{\alpha m} \right).$$

1.5.3 Le groupe $Tp(k, n; E)$

On désigne par $Tp(k, n; E)$ le sous-groupe de $Sp(k, n; E)$ engendré par les transvections k -symplectiques de E . Comme dans les sections précédentes, nous noterons $Tp(k, n; \mathbb{K})$ le groupe des matrices des éléments de $Tp(k, n; E)$ relatives à une base k -symplectique.

Proposition 1.18 *Le groupe $Tp(k, n; \mathbb{K})$ est le sous-groupe de $Sp(k, n; \mathbb{K})$ formé des matrices du type :*

$$\begin{pmatrix} I_n & & 0 & S_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & I_n & S_k \\ 0 & & & I_n \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

où I_n est la matrice unité d'ordre n et S_1, \dots, S_k des matrices $n \times n$ symétriques à coefficients dans \mathbb{K} . En particulier $Tp(k, n; \mathbb{K})$ est un sous-groupe abélien normal dans $Sp(k, n; \mathbb{K})$.

Démonstration. Il découle du corollaire ci-dessus, que pour toute transvection k -symplectique τ de E on a $\tau(x) = x$ pour tout $x \in F$. Ainsi tout élément de $Tp(k, n; \mathbb{K})$ s'écrit sous la forme (1.6).

Réciproquement, soit M une matrice du type (1.6). Considérons les endomorphismes $\tau_\delta^{\alpha pq}$ et $\rho_\delta^{\alpha p}$ de E définis par :

$$\tau_\delta^{\alpha pq}(x) = x + (\delta\omega^p(x) + \omega^q(x))(\delta e_{\alpha p} + e_{\alpha q}) \quad , \quad \rho_\delta^{\alpha p}(x) = x + \delta\omega^p(x)e_{\alpha p}.$$

où $\alpha = 1, \dots, k$, $p, q = 1, \dots, n$ et $\delta \in \mathbb{K}$. Les applications $\tau_\delta^{\alpha pq}$ et $\rho_\delta^{\alpha p}$ sont des transvections k -symplectiques, contrairement au composé

$$\sigma_\delta^{\alpha pq} = \tau_\delta^{\alpha pq} \circ (\rho_\delta^{\alpha p})^{-1} \circ (\rho_\delta^{\alpha q})^{-1} ,$$

et on vérifie sans peine les relations suivantes :

1. $\tau_\delta^{\alpha pp} = \rho_{(1+\delta)}^{\alpha p}$,
2. $\sigma_\delta^{\alpha pq}(x) = x + \delta(\omega^p(x)e_{\alpha q} + \omega^q(x)e_{\alpha p})$,
3. $\sigma_\delta^{\alpha pq}(e_p) = e_p + \delta e_{\alpha q}$,
4. $\sigma_\delta^{\alpha pq}(e_q) = e_q + \delta e_{\alpha p}$,
5. $\sigma_\delta^{\alpha pq}(e_s) = e_s$ si $s \neq p$ et $s \neq q$.

Pour tout α ($\alpha = 1, \dots, k$), considérons le produit

$$\sigma_\alpha = \left(\prod_{1 \leq p \leq n} \rho_{s(\alpha)}^{\alpha p} \right) \left(\prod_{1 \leq p < q \leq n} \sigma_{s(\alpha)}^{\alpha pq} \right)$$

où les s_α^{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) sont les coefficients de la matrice S_α , pour tout α ($\alpha = 1, \dots, k$). Par rapport à la base k -symplectique canonique de E , la matrice de σ_α s'écrit sous la forme (1.6) avec $S_\beta = 0$ pour $\beta \neq \alpha$. Il en résulte que, par rapport à cette base, M est la matrice du composé $\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_k$.

1.5.4 Le groupe affine $Hp(k, n; E)$

Nous supposons dans tout ce paragraphe que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Le groupe des transformations affines

$$X \longmapsto AX + B$$

de $\mathbb{K}^{n(k+1)}$ où A est dans $Tp(k, n; \mathbb{K})$ est un groupe de Lie noté $Hp(k, n; \mathbb{K})$. Les éléments de ce groupe sont les matrices du type

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 & \cdots & 0 & S_1 & T_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & I_n & S_k & T_k \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_n & Q \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où I_n est la matrice unité d'ordre n , S_1, \dots, S_k sont des matrices $n \times n$ symétriques à coefficients dans \mathbb{K} , et T_1, \dots, T_k, Q sont des matrices colonnes d'ordre n .

On désigne par $(S_1, \dots, S_k, Q, T_1, \dots, T_k)$ les éléments de ce groupe. Pour tous $g = (S_1, \dots, S_k, Q, T_1, \dots, T_k)$ et $g' = (S'_1, \dots, S'_k, Q', T'_1, \dots, T'_k)$ appartenant à $Hp(k, n; \mathbb{K})$ on a :

- i) $gg' = (S_1 + S'_1, \dots, S_k + S'_k, Q + Q', S_1Q' + T_1 + T'_1, \dots, S_kQ' + T_k + T'_k)$,
- ii) $g^{-1} = (-S_1, \dots, -S_k, -Q, S_1Q - T_1, \dots, S_kQ - T_k)$,
- iii) $[g, g'] = (0, \dots, 0, 0, S_1Q' - S'_1Q, \dots, S_kQ' - S'_kQ)$.

Proposition 1.19 *Le groupe $Hp(k, n; \mathbb{K})$ est un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe dont le groupe dérivé coïncide avec le centre.*

Chapitre 2

VARIÉTÉS k -SYMPLECTIQUES

Sauf mention du contraire, les variétés différentiables considérées ici sont supposées connexes, séparées, paracompactes à base dénombrables d'ouverts, et tous les éléments introduits dans ce travail sont supposés de classe C^∞ .

2.1 Introduction

L'un des problèmes majeurs de la géométrie différentielle concerne la détermination et la classification des variétés différentielles munies d'une structure géométrique donnée. Ces derniers temps, de nombreux travaux se consacraient à l'étude des variétés feuilletées, que nous pouvons voir dans le contexte de ce livre comme des variétés différentiables munies d'un système de Pfaff intégrables. L'étude des variétés de contact et symplectiques connaît en ce moment un développement intéressant. Ces variétés sont définies par l'existence soit d'un système de Pfaff de rang 1 de classe maximum, soit d'une 2-formes extérieures différentiables fermées de rang maximum. Nous pourrions nous intéresser ici à un cadre plus général concernant l'étude des variétés munies d'un système de Pfaff non intégrable, de classe constante donnée. Par exemple la détermination et la classification des variétés connexes (simplement connexes) éventuellement compactes de dimension 5 munies d'une structure définie localement par un système de Pfaff de type $S_5^{11}(f)$ semble des plus prometteuse. Des considérations liées à la mécanique statistique et l'originalité d'une étude portant sur les systèmes de formes extérieures nous ont guidées vers une recherche de variétés dont la géométrie est définie localement par des systèmes k -symplectiques.

Rappelons également un des résultats établi au chapitre 3: les systèmes extérieurs k -symplectiques sont des modèles de systèmes extérieurs de rang maximum. Une étude générale des systèmes extérieurs passent, dans cette optique, par celle des systèmes k -symplectiques. On se propose dans ce chapitre de définir de telles variétés et d'approcher les théorèmes d'existence. La démarche est classique : on étudie les variétés munies d'une presque structure (en tout point l'espace tangent est muni d'un système extérieur k -symplectique) et on dégage des conditions d'intégrabilité, c'est-à-dire des conditions pour que la presque structure soit associée à cette structure. Le cadre de la théorie des G -structures se prête bien à cette démarche. Nous renvoyons les lecteurs à l'ouvrage de géométrie différentielle de S. Sternberg pour tout ce qui concerne les notions de base.

2.2 Variétés k -symplectiques

2.2.1 Définition

Soit M une variété différentiable de dimension $n(k+1)$ munie d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension n et soient $\theta^1, \dots, \theta^k$ des formes différentielles sur M fermées de degré 2.

Le sous-fibré de TM défini par les vecteurs tangents aux feuilles de \mathcal{F} sera désigné par E , l'ensemble des sections du M -fibré $TM \rightarrow M$ (resp. $E \rightarrow M$) sera désigné par $\chi(M)$ (resp. $\Gamma(E)$) et l'ensemble des p -formes différentielles sur M sera désigné par $\Lambda^p(M)$.

Pour tout x de M , on désignera par $C_x(\theta^1), \dots, C_x(\theta^k)$ les espaces caractéristiques des 2-formes $\theta^1, \dots, \theta^k$ au point x . Rappelons la définition:

$$C_x(\theta) = \{X_x \in T_x M \mid i(X_x)\theta^\alpha = 0\}$$

où $i(X_x)\theta^\alpha$ désigne le produit intérieur du vecteur X_x par la 2-forme θ^α .

Définition 2.1 *On dit que $\{\theta^1, \dots, \theta^k\}$ est un système différentiel extérieur k -symplectique associé au sous-fibré E (où que le $(k+1)$ -uplet $(\theta^1, \dots, \theta^k; E)$ est une structure k -symplectique sur M) si pour tout $x \in M$, les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $C_x(\theta^1) \cap \dots \cap C_x(\theta^k) = \{0\}$,
2. $\theta^\alpha(X, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \Gamma(E)$ et $\alpha(\alpha = 1, \dots, k)$.

2.2.2 Exemples

1. Structure k -symplectique canonique sur $\mathbb{R}^{n(k+1)}$.

Considérons $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ muni de ses coordonnées $(x^{\alpha i}, x^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$. Soient E le sous-fibré de $T\mathbb{R}^{n(k+1)}$ défini par les équations

$$dx^1 = \dots = dx^n = 0$$

et θ^α ($\alpha = 1, \dots, k$) les 2-formes différentielles données par

$$\theta^\alpha = \sum_{i=1}^n dx^{\alpha i} \wedge dx^i.$$

Le $(k+1)$ -uplet $(\theta^1, \dots, \theta^k; E)$ définit bien une structure k -symplectique sur $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ dite canonique. Cette structure induit une structure k -symplectique naturelle sur le tore $\mathbb{T}^{n(k+1)}$.

2. Produit de fibrations lagrangiennes

Considérons k fibrations différentiables

$$\xi^1 = (M^1, B, \pi^1), \dots, \xi^k = (M^k, B, \pi^k)$$

au dessus d'une même variété différentiable B , η le produit trivial

$$\eta = (M^1 \times \dots \times M^k, B \times \dots \times B, \pi^1 \times \dots \times \pi^k)$$

et δ l'application diagonale $x \mapsto (x, \dots, x)$ de B dans $B \times \dots \times B$. Le produit fibré

$$\xi = \xi^1 \times_B \dots \times_B \xi^k$$

des fibrations ξ^α ($\alpha = 1, \dots, k$) est par définition la fibration image réciproque par δ de η . C'est une fibration $\xi = (M, B, \pi)$ dont l'espace total M est formé des éléments (x^1, \dots, x^k) de $M^1 \times \dots \times M^k$ tels que $\pi^1(x^1) = \dots = \pi^k(x^k)$; c'est une sous-variété fermée de $M^1 \times \dots \times M^k$. Pour tout $b \in B$, la fibre $\pi^{-1}(b)$ est le produit $(\pi^1)^{-1}(b) \times \dots \times (\pi^k)^{-1}(b)$. Soient

$$i : M \longrightarrow M^1 \times \dots \times M^k$$

l'injection canonique (i est un plongement) et

$$pr^\alpha : M^1 \times \dots \times M^k \longrightarrow M^\alpha$$

($\alpha = 1, \dots, k$) la projection canonique sur M^α . Pour tout α ($\alpha = 1, \dots, k$), le composé $pr^\alpha \circ i$ est la restriction de pr^α à M ; c'est une submersion.

On suppose que les fibrations ξ^α sont lagrangiennes (c'est à dire M^α est munie d'une structure symplectique σ^α pour laquelle les fibres définissent un feuilletage lagrangien). Si $2n$ est la dimension commune aux variétés M^α , alors les fibres de ξ sont de dimension nk et la variété M est de dimension $n(k+1)$, n étant la dimension de la variété B . Pour tout α ($\alpha = 1, \dots, k$) on pose $\theta^\alpha = (pr^\alpha \circ i)^* \sigma^\alpha$

Proposition 2.1 *Dans les hypothèses et notations ci-dessus, le $(k+1)$ -uplet $(\theta^1, \dots, \theta^k; E)$ définit une structure k -symplectique sur M , E étant le sous-fibré de TM défini par les fibres de ξ .*

Démonstration. Pour tout α ($\alpha = 1, \dots, k$) on a

$$d\theta^\alpha = (pr^\alpha \circ i)^* d\sigma^\alpha,$$

donc les formes θ^α sont fermées. Soient X et Y des sections du sous-fibré E , x un point de M et α ($\alpha = 1, \dots, k$). On a

$$\theta_x^\alpha(X_x, Y_x) = \sigma_{(pr^\alpha \circ i)(x)}^\alpha((pr^\alpha \circ i)_x^T X_x, (pr^\alpha \circ i)_x^T Y_x),$$

$(pr^\alpha \circ i)_x^T$ étant l'application tangente associée à $(pr^\alpha \circ i)$. Les applications $(pr^\alpha \circ i)$ envoient les fibres de ξ sur les fibres de ξ^α , donc les vecteurs $(pr^\alpha \circ i)_x^T X_x$ et $(pr^\alpha \circ i)_x^T Y_x$ sont verticaux dans M^α ; le feuilletage défini par les fibres de ξ^α étant lagrangien par hypothèse, ainsi $\theta_x^\alpha(X_x, Y_x) = 0$.

Si pour un point x de M et un vecteur tangent X_x à M en x on a $i(X_x)\theta^\alpha = 0$ pour tout α ($\alpha = 1, \dots, k$), alors

$$\theta_x^\alpha(X_x, Y_x) = 0.$$

pour tous α ($\alpha = 1, \dots, k$) et $Y_x \in T_x(M)$. Le fait que pour tout α ($\alpha = 1, \dots, k$), $(pr^\alpha \circ i)$ soit une submersion et σ^α de classe $2n$ montre que $i_x^T X_x = 0$; d'où $C_x(\theta^1) \cap \dots \cap C_x(\theta^k) = \{0\}$.

Remarques

a) Si les variétés M^α sont compactes, il en est de même pour M et toutes les feuilles du feuilletage défini par ξ sont compactes.

b) Si M^1, \dots, M^k coïncident avec le fibré cotangent T^*B d'une variété B ($M^1 = \dots = M^k = T^*B$), on obtient une structure k -symplectique sur la somme de Whitney $T^*B \oplus \dots \oplus T^*B$ au dessus de B .

3. Structure k -symplectique sur le fibré des k^1 -covélocités.

Cet exemple, souvent étudié dans le cadre des structures p -presque cotangentes régulières, correspond à la structure k -symplectique canonique de la somme de Whitney. Soit M une variété différentiable de dimension n . On désigne par $T_{k^1}^*M$ le fibré cotangent des k^1 -covélocités de M ; c'est la variété des 1-jets des applications différentiables de M dans \mathbb{R}^k de but $0 \in \mathbb{R}^k$. La variété $T_{k^1}^*M$ est localement caractérisée de la façon suivante : A un système de coordonnées locales $(x^j)_{1 \leq j \leq n}$ de M on associe le système de coordonnées $(x^i, x_i^1, \dots, x_i^k)_{1 \leq i \leq n}$ de $T_{k^1}^*M$ défini par :

$$x^i(J_{x,0^1}f) = x^i(x)$$

$$x_i^\alpha(J_{x,0^1}f) = \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\right)(x),$$

pour tous $i = 1, \dots, n$, $\alpha = 1, \dots, k$, où $J_{x,0^1}f$ est le 1-jet en $x \in M$ de l'application

$$f = (f^1, \dots, f^k) : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

telle que $f(x) = 0$. $T_{k^1}^*M$ est une $n(k+1)$ -variété différentiable. $T_{k^1}^*M$ est un fibré vectoriel au dessus de M de fibre type \mathbb{R}^{nk} . Soit $\pi : J_{x,0^1}f \mapsto x$ de $T_{k^1}^*M$ dans M , la projection canonique. On a un difféomorphisme canonique

$$\Lambda : T_{k^1}^*M \longrightarrow T^*M \oplus \dots \oplus T^*M \quad (k - fois)$$

de $T_{k^1}^*M$ sur la somme de Whitney $T^*M \oplus \dots \oplus T^*M$ défini par

$$\Lambda(J_{x,0^1}f) = (J_{x,0^1}f^1, \dots, J_{x,0^1}f^k).$$

Pour tout α ($\alpha = 1, \dots, k$), on a une forme de Pfaff canonique λ^α définie par :

$$\lambda^\alpha(u)(X) = u^\alpha(x)(\pi_*X)$$

où $u = (u^1, \dots, u^k) \in T_{k^1}^*M$, $X \in T_u(T_{k^1}^*M)$ et $\pi(u) = x$. Posons $\theta^\alpha = d\lambda^\alpha$ pour tout α ($\alpha = 1, \dots, k$). Le $(k+1)$ -uplet $(\theta^1, \dots, \theta^k; Ker \pi_*)$ définit bien une structure k -symplectique sur $T_{k^1}^*M$.

2.2.3 Modèle local

Théorème 2.1 (de Darboux) *Si $(\theta^1, \dots, \theta^k; E)$ est une structure k -symplectique sur la variété différentiable M , alors pour tout point p de M*

il existe un voisinage ouvert U de M contenant p de coordonnées locales $(x^{\alpha i}, x^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ dites adaptées, tel que les formes différentielles θ^α soient représentées dans U par

$$\theta^\alpha = \sum_{i=1}^n dx^{\alpha i} \wedge dx^i$$

et le sous-fibré E soit défini par les équations

$$dx^1 = \dots = dx^n = 0.$$

Démonstration. Il résulte du théorème de Frobenius qu'il existe un système de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_{nk}, x^1, \dots, x^n)$ défini sur un voisinage ouvert U de M contenant p tel que les dérivations

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{nk}}$$

engendrent l'espace tangent aux feuilles en tout point de U . Le problème étant de nature locale, on peut supposer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ et que $p = (x_1(p), \dots, x_{nk}(p), x^1(p), \dots, x^n(p)) = 0$ en est l'origine. Les formes θ^α étant localement exactes (lemme de Poincaré), on peut supposer que dans l'ouvert U les expressions des formes θ^α soient les suivantes :

$$\theta^\alpha = d\left(\sum_{u=1}^{nk} f^{\alpha u} dx_u + \sum_{s=1}^n g_s^\alpha dx^s\right)$$

où $f^{\alpha u}$ et g_s^α sont des fonctions différentiables sur U ; ainsi

$$\begin{aligned} \theta^\alpha &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq u, j \leq nk} \left(\frac{\partial f^{\alpha u}}{\partial x_j} - \frac{\partial f^{\alpha j}}{\partial x_u} \right) dx_u \wedge dx_j \\ &\quad + \sum_{s=1}^n \left(\sum_{u=1}^{nk} \left(\frac{\partial g_s^\alpha}{\partial x_u} - \frac{\partial f^{\alpha u}}{\partial x^s} \right) dx_u + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left(\frac{\partial g_s^\alpha}{\partial x^t} - \frac{\partial g_t^\alpha}{\partial x^s} \right) dx^t \right) \wedge dx^s. \end{aligned}$$

La seconde condition de la définition d'une structure k -symplectique donne

$$\frac{\partial f^{\alpha u}}{\partial x_j} = \frac{\partial f^{\alpha j}}{\partial x_u}.$$

Pour tous $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$ et $i (i = 1, \dots, n)$ on pose :

$$x^{\alpha i} = g_i^\alpha - \sum_{j=1}^{nk} \int_0^{x_j} \frac{\partial f^{\alpha j}}{\partial x_i} (0, \dots, 0, t, x_{j+1}, \dots, x_{nk}, x^1, \dots, x^n) dt.$$

La relation $\theta^\alpha = \sum_{i=1}^n dx^{\alpha i} \wedge dx^i$ est équivalente à

$$\frac{\partial x^{\alpha s}}{\partial x_u} = \frac{\partial g_s^\alpha}{\partial x_u} - \frac{\partial f^{\alpha u}}{\partial x^s} \quad , \quad \frac{\partial x^{\alpha s}}{\partial x^t} - \frac{\partial x^{\alpha t}}{\partial x^s} = \frac{\partial g_s^\alpha}{\partial x^t} - \frac{\partial g_t^\alpha}{\partial x^s}.$$

Comme la deuxième condition est satisfaite, la première l'est aussi. Un raisonnement analogue à celui de théorème de la classification des systèmes extérieurs k -symplectiques linéaires nous permet de voir que les formes différentielles $dx^{\alpha i}$ et dx^i sont indépendantes. D'où le théorème.

Remarque Si $(\theta^1, \dots, \theta^k; E)$ est une structure k -symplectique sur M , alors les formes différentielles θ^α sont de rang $2n$.

2.2.4 Γ -structures associées à une k -structure symplectique

Proposition 2.2 Une structure k -symplectique sur une variété différentiable M de dimension $n(k+1)$ est équivalente à la donnée d'une Γ -structure intégrable, où Γ est le pseudo-groupe des difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ qui laissent invariante la structure k -symplectique canonique de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$.

Démonstration. Il résulte du théorème de Darboux que si M est munie d'une structure k -symplectique, alors elle admet un atlas \mathcal{A} appelé atlas de Darboux, dont les changements de coordonnées locales appartiennent au pseudo-groupe Γ ; autrement dit, l'atlas \mathcal{A} définit une Γ -structure intégrable sur M .

Réciproquement, si la variété M admet une Γ -structure intégrable, alors elle admet un atlas \mathcal{A} dont les changements de cartes conservent la structure k -symplectique canonique $(\theta^1, \dots, \theta^k; E)$ de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$, c'est à dire pour toutes cartes $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ on a:

- i) $(\varphi \circ \psi^{-1})^* \theta^\alpha = \theta^\alpha$ pour tout $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$,
- ii) $(\varphi \circ \psi^{-1})_* E_x = E_{(\varphi \circ \psi^{-1})(x)}$ pour tout $x \in \varphi(U) \cap \psi(V)$.

Sur le domaine U d'une carte quelconque (U, φ) de l'atlas \mathcal{A} , on pose

$$\sigma_\varphi^\alpha = \varphi^* \theta^\alpha \quad , \quad P_x^\varphi = (\varphi^{-1})_* E_{\varphi(x)},$$

pour tous $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$ et $x \in U$. Sur l'intersection $U \cap V$ des domaines des cartes φ et ψ , on a

$$\sigma_\varphi^\alpha = \sigma_\psi^\alpha \quad , \quad P_x^\varphi = P_x^\psi.$$

pour tous $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$ et $x \in U \cap V$; ce qui montre que $(\sigma^1, \dots, \sigma^k; P)$ définit une structure k -symplectique sur M .

2.3 Variétés à structures presque k -symplectiques

2.3.1 Définition

Soit M une variété différentiable de dimension $n(k+1)$.

Définition 2.2 *On dit que M possède une structure presque k -symplectique si pour tout point x de M l'espace tangent $T_x M$ admet une structure k -symplectique d'espaces vectoriels*

$$(\theta_x^1, \dots, \theta_x^k; F_x)$$

où $\theta^\alpha \in \Lambda^2(M)$.

Bien entendu, on suppose que cette structure dépend de façon C^∞ du point x . Ceci revient à dire que pour tout x_0 de M , il existe un voisinage U_0 de x_0 dans M et une section locale C^∞ du fibré des corepères notée $(\omega^{\alpha i}, \omega^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ telle qu'en chaque point x de U_0 les 2-formes θ^α s'écrivent

$$\theta^\alpha = \sum_{i=1}^n \omega^{\alpha i} \wedge \omega^i$$

et le sous-espace F soit défini par les équations $\omega^1 = \dots = \omega^n = 0$. Une telle section locale du fibré des corepères de M sera dite adaptée à la structure presque k -symplectique de M .

2.3.2 Connexion adaptée

Définition 2.3 *On dit qu'une connexion linéaire Π sur une variété presque k -symplectique est adaptée à la structure presque k -symplectique si la 1-forme de connexion (Π_v^α) prend ses valeurs dans l'algèbre de Lie $sp(k, n; \mathbb{R})$ lorsqu'elle est exprimée par rapport à une section adaptée.*

Autrement dit, les composantes de la connexion notées par rapport à la section adaptée

$$(\Pi_j^s, \Pi_j^{\alpha s}, \Pi_{\alpha j}^s, \Pi_{\beta j}^{\alpha s})$$

satisfont à

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha j}^s &= 0 \quad , \quad \Pi_{\beta j}^{\alpha s} = 0 \text{ si } \alpha \neq \beta \\ \Pi_{\beta j}^{\alpha s} + \Pi_s^j &= 0, \quad , \quad \Pi_j^{\alpha s} - \Pi_s^{\alpha j} = 0. \end{aligned}$$

Rappelons que la torsion d'une connexion linéaire Π est une forme vectorielle T dont les composantes T^u sont liées à celles de la forme de connexion (Π_f^u) et de la forme fondamentale ω^u du fibré tangent par la relation

$$T^u = d\omega^u + \sum_f \Pi_f^u \wedge \omega^f.$$

2.3.3 Intégrabilité des structures presque k -symplectiques

1. G -structure

Soient M une variété différentielle et $\mathcal{F}(M)$ le fibré des repères. Ce fibré est principal au dessus de M , le groupe linéaire $Gl(n)$ agit naturellement sur chaque fibre (la fibre au dessus d'un point $x \in M$ est l'ensemble des repères de l'espace vectoriel $T_x(M)$). Soit G un sous groupe de Lie de $Gl(n)$. On appelle G -structure, une réduction du fibré $\mathcal{F}(M)$ au groupe de Lie G c'est à dire une sous variété B_G de $\mathcal{F}(M)$ vérifiant : pour tout $p \in B_G$ et $g \in Gl(n)$, le point $p.g$ défini dans $\mathcal{F}(M)$ appartient à B_G si et seulement si $g \in G$ (autrement dit, il est permis de faire des changements de bases modulo G).

Le fibré des corepères de M se définit en considérant pour tout point $x \in M$ l'ensemble des bases duales des repères de $T(M)$.

Une G -structure sur une variété différentiable M est dite intégrable s'il existe au voisinage de chaque point de M un système de coordonnées locales telles que leurs différentielles forment une section du fibré des corepères adaptée à la structure. En général une G -structure n'est pas intégrable. Une condition nécessaire d'intégrabilité est la nullité du tenseur de Bernard.

2. Etude de la $Sp(k, n; \mathbb{R})$ -structure

Se donner une presque structure k -symplectique sur la variété M équivaut à se donner une G -structure avec $G = Sp(k, n; \mathbb{R})$. Dire que cette G -structure est intégrable revient à dire que la presque structure k -symplectique correspond à une structure k -symplectique. Nous pouvons donc nous ramener au calcul du tenseur de Bernard pour intégrer cette G -structure. Mais la nullité de ce tenseur est équivalente à l'existence d'une connexion adaptée sans torsion. Nous allons donc étudier le problème d'existence d'une telle connexion. Notons que si l'intégrabilité d'une G -structure implique la nullité du tenseur de Bernard, la réciproque n'est en général pas vérifiée. La proposition suivante précise que dans le cas des structures

presque k -symplectiques, il y a équivalence entre la nullité de ce tenseur (ou l'existence d'une connexion adaptée sans torsion) et l'intégrabilité.

La structure presque k -symplectique est intégrable si et seulement si on peut trouver au voisinage de chaque point x_0 de M des coordonnées locales $(x^{\alpha i}, x^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ telles que les 2-formes θ^α s'écrivent

$$\theta^\alpha = \sum_{i=1}^n dx^{\alpha i} \wedge dx^i$$

et le sous-fibré F défini par les équations

$$dx^1 = \dots = dx^n = 0.$$

Proposition 2.3 *Soit M une variété munie d'une structure presque k -symplectique avec F intégrable. Alors la structure presque k -symplectique est intégrable si et seulement si la variété M possède une connexion adaptée à torsion nulle.*

Démonstration. Soit Π une connexion linéaire adaptée à torsion nulle c'est à dire pour toute section adaptée $(\omega^{\alpha i}, \omega^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$, on a

$$d\omega^{\alpha j} = - \sum_{s=1}^n (\Pi_s^{\alpha j} \wedge \omega^s + \Pi_{\alpha s}^{\alpha j} \wedge \omega^{\alpha s})$$

et

$$d\omega^j = - \sum_{s=1}^n \Pi_s^j \wedge \omega^s.$$

Les différentielles extérieures des formes θ^α sont nulles puisque

$$d\theta^\alpha = - \sum_{s,j=1}^n (\Pi_s^{\alpha j} \wedge \omega^s \wedge \omega^j + \Pi_{\alpha s}^{\alpha j} \wedge \omega^{\alpha s} \wedge \omega^j - \omega^{\alpha j} \wedge \Pi_s^j \wedge \omega^s).$$

Il résulte du théorème de Darboux qu'il existe un système de coordonnées locales $(x^{\alpha i}, x^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ tel que les 2-formes θ^α s'écrivent

$$\theta^\alpha = \sum_{i=1}^n dx^{\alpha i} \wedge dx^i$$

et le sous-fibré F soit défini par les équations $dx^1 = \dots = dx^n = 0$.

Remarque Une $Sp(k, n; \mathbb{R})$ -structure intégrable est du type infini car l'algèbre de Lie $sp(k, n; \mathbb{R})$ possède des éléments de rang 1.

2.4 Systèmes hamiltoniens

Nous allons dans ce paragraphe généraliser pour $k \geq 2$ le formalisme de la géométrie symplectique classique.

2.4.1 Champs hamiltonniens

Soient M une variété différentiable de dimension $n(k+1)$ munie d'une structure k -symplectique $(\theta^1, \dots, \theta^k; E)$ et j l'application de $\chi(M)$ dans $\Lambda^1(M) \times \dots \times \Lambda^1(M)$ définie par :

$$j(X) = (j^1(X), \dots, j^k(X)) = (i(X)\theta^1, \dots, i(X)\theta^k)$$

pour tout $X \in \chi(M)$.

Définition 2.4 *Un champ de vecteurs X sur M est appelé automorphisme infinitésimal de \mathcal{F} (ou de E) si au voisinage de tout point de M , le groupe à un paramètre local associé à X respecte le feuilletage \mathcal{F} .*

Proposition 2.4 *Pour tout champ de vecteurs $X \in \chi(M)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) X est un automorphisme infinitésimal pour \mathcal{F} ,
- ii) $[X, Y] \in \Gamma(E)$ pour tout $Y \in \Gamma(E)$.
- iii) Dans un système de coordonnées locales distinguées

$$(x_u, x^i)_{1 \leq u \leq nk, 1 \leq i \leq n},$$

le champ de vecteurs X prend la forme

$$X = \sum_{s=1}^{nk} \xi^s(x_1, \dots, x_{nk}, x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x_s} + \sum_{t=1}^n \eta^t(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^t}.$$

On notera $\mathcal{I}(M, \mathcal{F})$ l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux pour \mathcal{F} .

Définition 2.5 *Un champ de vecteurs X sur M est appelé système hamiltonien si X est un automorphisme infinitésimal pour \mathcal{F} et pour les 2-formes θ^α à la fois; autrement dit, s'il satisfait les conditions suivantes :*

1. X est un automorphisme infinitésimal pour \mathcal{F} ,
2. les formes de Pfaff $i(X)\theta^1, \dots, i(X)\theta^k$ sont fermées.

Le champ de vecteurs X sera appelé automorphisme infinitésimal pour la structure k -symplectique $(\theta^1, \dots, \theta^k; E)$.

2.4.2 Applications hamiltonniennes

Soit X un système hamiltonien. Il résulte du lemme de Poincaré, que pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de M contenant x et une application différentiable H de U dans \mathbb{R}^k vérifiant sur U la relation

$$j(X) = -dH.$$

Inversement, si H est une application différentiable de M dans \mathbb{R}^k telle que $dH \in j(\mathcal{I}(M, \mathcal{F}))$, il existe un unique champ de vecteurs sur M noté X_H , et appelé système hamiltonien associé à H , tel que $j(X_H) = -dH$.

Les applications différentiables H de M dans \mathbb{R}^k telles que $dH \in j(\mathcal{I}(M, \mathcal{F}))$ sont appelées applications hamiltonniennes de la structure k -symplectique $(\theta^1, \dots, \theta^k; E)$.

Proposition 2.5 *Soit $H = (H^\alpha)_{1 \leq \alpha \leq k}$ une application hamiltonnienne et X_H le système hamiltonien associé. Dans un ouvert U de M muni d'un système de coordonnées locales adaptées $(x^{\alpha i}, x^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$, les composantes H^α de H et X_H s'écrivent respectivement :*

$$H^\alpha = \sum_{j=1}^n f_j(x^1, \dots, x^n) x^{\alpha j} + g^\alpha(x^1, \dots, x^n)$$

et

$$\begin{aligned} X_H &= - \sum_{s=1}^n \sum_{\alpha=1}^k \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x^s}(x^1, \dots, x^n) x^{\alpha s} + \frac{\partial g^\alpha}{\partial x^s}(x^1, \dots, x^n) \right) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha s}} \\ &\quad + \sum_{s=1}^n f_s(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^s} \end{aligned}$$

où f_j et g^α sont des fonctions différentiables dans U .

Démonstration. Dans un ouvert U de M muni d'un système de coordonnées locales adaptées $(x^{\alpha i}, x^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ le système hamiltonien X_H s'écrit

$$X_H = \sum_{s=1}^n \sum_{\alpha=1}^k X_{\alpha s} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha s}} + \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Les relations

$$j^r(X_H) = i(X_H)\theta^r = \sum_{j=1}^n (X_{rj} dx^j - X_j dx^{rj}) = -dH^r \quad (r = 1, \dots, k)$$

donnent

$$X_{rj} = -\frac{\partial H^r}{\partial x^j} \quad , \quad X_s = \frac{\partial H^r}{\partial x^{rs}} \quad , \quad \frac{\partial H^r}{\partial x^{\alpha s}} = 0 \text{ si } \alpha \neq r.$$

X étant un automorphisme infinitésimal, donc par rapport au système de coordonnées locales adaptées $(x^{\alpha i}, x^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ on a

$$\frac{\partial X_s}{\partial x^{\alpha s}} = 0,$$

et, donc, les composantes H^α de H s'écrivent sous la forme

$$H^\alpha = \sum_{j=1}^n f_j(x^1, \dots, x^n) x^{\alpha j} + g^\alpha(x^1, \dots, x^n)$$

où f_j et g^α sont des fonctions différentiables sur U .

Remarque Supposons que $k \geq 2$. Il résulte de la démonstration de la proposition précédente que si les formes de Pfaff $i(X)\theta^1, \dots, i(X)\theta^k$ sont fermées, X est nécessairement un automorphisme infinitésimal pour \mathcal{F} .

2.4.3 Crochet de Poisson

Proposition 2.6 Soient H, K deux applications hamiltoniennes et X_H, X_K les systèmes hamiltoniens associés. Le crochet $[X_H, X_K]$ est un système hamiltonien. Plus précisément l'application notée $\{H, K\}$ de M dans \mathbb{R}^k définie par:

$$\{H, K\} = (\theta^1(X_H, X_K), \dots, \theta^k(X_H, X_K))$$

satisfait

$$[X_H, X_K] = X_{\{H, K\}}.$$

En effet, on a

$$i([X_H, X_K])\theta^\alpha = [\mathcal{L}_{X_H}, i(X_K)]\theta^\alpha = d(\theta^\alpha(X_H, X_K)) = -d\{H, K\}^\alpha$$

pour tout $(\alpha = 1, \dots, k)$. Dans un système de coordonnées locales adaptées $(x^{\alpha i}, x^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ les composantes $\{H, K\}^\alpha$ de $\{H, K\}$ s'écrivent

$$\{H, K\}^\alpha = \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial H^\alpha}{\partial x^s} \frac{\partial K^\alpha}{\partial x^{\alpha s}} - \frac{\partial H^\alpha}{\partial x^{\alpha s}} \frac{\partial K^\alpha}{\partial x^s} \right).$$

Soit $\mathfrak{h}(M)$ l'ensemble des applications hamiltoniennes de la structure k -symplectique $(\theta^1, \dots, \theta^k; E)$. La correspondance $(H, K) \mapsto \{H, K\}$ de $\mathfrak{h}(M) \times \mathfrak{h}(M)$ dans $\mathfrak{h}(M)$ est une application \mathbb{R} -bilinéaire antisymétrique satisfaisant l'identité de Jacobi.

Proposition 2.7 $(\hbar(M), \{, \})$ est une algèbre de Lie réelle de dimension infinie.

2.5 Liens avec la mécanique statistique de Nambu

Le théorème de Liouville sur la conservation des volumes est le point central de la mécanique classique. Ce théorème joue un rôle important dans la mécanique statistique. Le formalisme "hamiltonien" classique n'est pas le seul décrivant cette mécanique statistique. Tout système d'équations qui conduit au théorème de Liouville convient également. Nambu propose une généralisation possible de la dynamique hamiltonienne pour un espace de phase de dimension 3. Nous allons voir, après avoir rappelé le système d'équations de Nambu, que les applications hamiltoniennes de la structure 2-symplectique sur \mathbb{R}^3 engendrent les solutions de ce système.

Les équations régissant le mouvement de la mécanique statistique de Nambu sont données par le système suivant :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{D(H,G)}{D(y,z)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{D(H,G)}{D(z,x)}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{D(H,G)}{D(x,y)}$$

où H et G sont deux fonctions réelles définies sur l'espace de phase M décrit par le système de coordonnées (x, y, z) et où $\frac{D(H,G)}{D(y,z)}$ désigne le Jacobien

$$\frac{D(H,G)}{D(y,z)} = \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial y}.$$

Les équations ci-dessus sont appelées équations de mouvement de Nambu et le champ de vecteurs dont les trajectoires sont définies par les équations de mouvement de Nambu sera désigné par $X_{(H,G)}^n$, et appelé système dynamique de Nambu.

Munissons l'espace M de la structure 2-symplectique canonique $(\theta^1, \theta^2; E)$ définie par

$$\begin{cases} \theta^1 = dx \wedge dz, \\ \theta^2 = dy \wedge dz, \\ E = \text{Ker } dz. \end{cases}$$

Les applications hamiltoniennes de la structure 2-symplectique sont les applications du type

$$H : M \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

dont les composantes sont données par

$$\begin{cases} H^1 = f(z)x + g^1(z), \\ H^2 = f(z)y + g^2(z), \end{cases}$$

où f , g^1 et g^2 sont des fonctions réelles définies sur l'espace M . Les trajectoires du système hamiltonien X_H de la structure 2-symplectique sont données par les équations suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H^1}{\partial z}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H^2}{\partial z}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial H^1}{\partial x} = \frac{\partial H^2}{\partial y}$$

Théorème 2.2 Soient $H = (H^1, H^2)$ avec $H^1 = f(z)x + g^1(z)$ et $H^2 = f(z)y + g^2(z)$, une application hamiltonienne de la structure 2-symplectique. Alors le système hamiltonien X_H et le système dynamique de Nambu X_H^n sont liés par la relation $X_H^n = f(z)X_H$.

Démonstration. Cela résulte directement des relations suivantes:

$$\frac{D(H^1, H^2)}{D(y, z)} = -f(z)\frac{\partial H^1}{\partial z}, \quad \frac{D(H^1, H^2)}{D(z, x)} = -f(z)\frac{\partial H^2}{\partial z},$$

et

$$\frac{D(H^1, H^2)}{D(x, y)} = -f(z)\frac{\partial H^1}{\partial x} = -f(z)\frac{\partial H^2}{\partial y}.$$

Corollaire 10 La fonction

$$(f(z))^{-1}H = (x + h^1(z), y + h^2(z))$$

est une solution des équations du mouvement de la mécanique statistique de Nambu sur le domaine de l'espace où $f(z)$ ne s'annule pas, ici

$$h^1(z) = (f(z))^{-1}g^1(z) \quad \text{et} \quad h^2(z) = (f(z))^{-1}g^2(z).$$

2.6 Algèbres de Lie k -symplectiques

2.6.1 Définition

Soit G un groupe de Lie de dimension $n(k+1)$ d'algèbre de Lie \mathcal{G} , muni d'une structure k -symplectique

$$(\theta^1, \dots, \theta^k; E).$$

On suppose que cette structure est invariante à gauche c'est-à-dire. pour tous $g, x \in G$ et $\alpha = 1, \dots, k$ on a

1. $L_g^* \theta^\alpha = \theta^\alpha$,
2. $(L_g)_* E_x = E_{gx}$.

Soit \mathcal{F} le feuilletage invariant à gauche défini par le sous-fibré E . La feuille H de \mathcal{F} passant par l'élément neutre e de G est un sous-groupe de Lie connexe de G de codimension n . Désignons par \mathcal{H} l'algèbre de Lie du sous-groupe H . On a donc associé au sous-fibré E une sous-algèbre de Lie \mathcal{H} de \mathcal{G} telle que:

$$\theta^\alpha(X, Y) = 0$$

pour tous $X, Y \in \mathcal{H}$ (on identifie la forme différentielle $\theta^\alpha(e)$ en l'élément neutre de G avec la forme bilinéaire sur \mathcal{G} correspondante, notée également θ^α).

Réciproquement, soit \mathcal{H} une sous-algèbre de \mathcal{G} . Pour tout $x \in G$ on pose

$$P_x = \{X_x \in T_x G \mid \tilde{\eta}(X_x) \in \mathcal{H}\}$$

$\tilde{\eta}$ étant la 1-forme de Maurer-Cartan de G . Le champ d'éléments de contact P , ainsi construit, définit bien un sous-fibré intégrable de TG . La feuille H du feuilletage \mathcal{F} associé au sous-fibré P passant par l'élément neutre e de G est un sous-groupe de Lie connexe H de G d'algèbre de Lie \mathcal{H} tel que les orbites de H agissant par translations à droite dans G soient les feuilles de \mathcal{F} .

Définition 2.6 Soient \mathcal{G} une algèbre de Lie de dimension $n(k+1)$ sur \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), $\theta^1, \dots, \theta^k$ des 2-formes fermées de $\Lambda^2(\mathcal{G})$ et \mathcal{H} une sous-algèbre de Lie de \mathcal{G} de codimension n . On dit que $(\theta^1, \dots, \theta^k; \mathcal{H})$ est une structure k -symplectique sur \mathcal{G} si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. le système extérieur $\{\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^k\}$ est non dégénéré, c'est à dire $A(\theta^1) \cap \dots \cap A(\theta^k) = (0)$
2. La sous-algèbre de Lie \mathcal{H} est un sous-espace totalement isotrope par rapport à chacune des 2-formes θ^α , c'est à dire $\theta^\alpha(x, y) = 0$ pour tous x, y appartenant à \mathcal{H} .

Exemple Soit \mathcal{A} un espace vectoriel de dimension $n(k+1)$ sur \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) et $(\omega^j)_{1 \leq j \leq n(k+1)}$ une base de l'espace dual \mathcal{A}^* de \mathcal{A} . Considérons l'application δ de \mathcal{A}^* dans $\Lambda^2(\mathcal{A}^*)$ définie par :

$$\begin{cases} \delta\omega^r = \sum_{i=1}^{n-1} \omega^{ik+r} \wedge \omega^{nk+i+1} & \text{pour } 1 \leq i \leq k, \\ \delta\omega^a = 0 & \text{si } k+1 \leq a \leq nk+1, \\ \delta\omega^{nk+i} = -\omega^{nk+1} \wedge \omega^{nk+i} & \text{pour } 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

On a $\delta \circ \delta = 0$, donc l'application δ confère à \mathcal{A} une loi d'algèbre de Lie. Soit $(X_j)_{1 \leq j \leq n(k+1)}$ la base de \mathcal{A} ayant pour base duale $(\omega^j)_{1 \leq j \leq n(k+1)}$, et soit \mathcal{J} l'idéal de \mathcal{A} engendré par $(X_j)_{1 \leq j \leq nk}$. Le $(k+1)$ -uplet

$$(\theta^1 = \delta\omega^1, \dots, \theta^k = \delta\omega^k; \mathcal{J})$$

définit bien une structure k -symplectique sur \mathcal{A} .

2.6.2 Algèbres de Lie 1-symplectiques nilpotentes

Rappelons le théorème de A. Medina ([32])

Théorème 2.3 *Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathcal{G} complètement résoluble. Si Ω est une forme symplectique invariante sur G alors (G, Ω) possède un feuilletage lagrangien invariant.*

Rappelons qu'une algèbre de Lie \mathcal{G} est dite complètement résoluble si la représentation adjointe de \mathcal{G} est trigonalisable, autrement dit s'il existe une suite décroissante d'idéaux de \mathcal{G} de dimensions $n, n-1, n-2, \dots, 0$, où $n = \dim \mathcal{G}$. Par exemple toute algèbre de Lie nilpotente est complètement résoluble.

Corollaire 11 *Toute algèbre de Lie symplectique nilpotente est 1-symplectique.*

Conséquence : Classification des algèbres de Lie nilpotentes 1-symplectique de dimension ≤ 6 .

$$\dim \mathcal{G} = 2$$

L'algèbre de Lie est abélienne. Ses équations de structure sont

$$d\alpha_i = 0 \quad (i = 1, 2).$$

$$\dim \mathcal{G} = 4$$

1. L'algèbre abélienne dont les équations de structure sont

$$d\alpha_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 4).$$

2. L'algèbre $h_3 \oplus a$ définie par

$$\begin{cases} d\alpha_1 = \alpha_2 \wedge \alpha_3 \\ d\alpha_i = 0 \end{cases} \quad (i = 2, 3, 4).$$

3. L'algèbre n_4 définie par

$$\begin{cases} d\alpha_3 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_4 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 \\ d\alpha_i = 0 \end{cases} \quad i = 2, 3.$$

$$\dim \mathcal{G} = 6$$

Toute algèbre de Lie nilpotente de dimension 6 munie d'une structure 1-symplectique est isomorphe à l'une des algèbres suivantes:

$$\begin{aligned}
n_{6,3} & \left\{ \begin{array}{l} d\alpha_3 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_4 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 \\ d\alpha_5 = \alpha_1 \wedge \alpha_4 + \alpha_2 \wedge \alpha_3 \\ d\alpha_6 = \alpha_1 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \end{array} \right. \\
n_{6,4} & \left\{ \begin{array}{l} d\alpha_3 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_4 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 \\ d\alpha_5 = \alpha_1 \wedge \alpha_4 \\ d\alpha_6 = \alpha_1 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_3 \end{array} \right. \\
n_{6,5} & \left\{ \begin{array}{l} d\alpha_3 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_4 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 \\ d\alpha_5 = \alpha_1 \wedge \alpha_4 \\ d\alpha_6 = \alpha_1 \wedge \alpha_5 \end{array} \right. \\
n_{6,6} & \left\{ \begin{array}{l} d\alpha_3 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_4 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 \\ d\alpha_5 = \alpha_2 \wedge \alpha_3 \\ d\alpha_6 = \alpha_1 \wedge \alpha_4 + \alpha_2 \wedge \alpha_5 \end{array} \right. \\
n_{6,7} & \left\{ \begin{array}{l} d\alpha_3 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_4 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 \\ d\alpha_5 = \alpha_2 \wedge \alpha_3 \\ d\alpha_6 = \alpha_1 \wedge \alpha_4 - \alpha_2 \wedge \alpha_5 \end{array} \right. \\
n_{6,8} & \left\{ \begin{array}{l} d\alpha_3 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_4 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 \\ d\alpha_5 = \alpha_1 \wedge \alpha_4 \\ d\alpha_6 = \alpha_2 \wedge \alpha_3 \end{array} \right. \\
n_{6,9} & \left\{ \begin{array}{l} d\alpha_4 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_5 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \\ d\alpha_6 = \alpha_2 \wedge \alpha_5 + \alpha_3 \wedge \alpha_4 \end{array} \right. \\
n_{6,10} & \left\{ \begin{array}{l} d\alpha_4 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_5 = \alpha_1 \wedge \alpha_4 \\ d\alpha_6 = \alpha_1 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \end{array} \right. \\
n_{6,11} & \left\{ \begin{array}{l} d\alpha_4 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_5 = \alpha_1 \wedge \alpha_4 \\ d\alpha_6 = \alpha_1 \wedge \alpha_5 + \alpha_2 \wedge \alpha_3 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$n_{6,12} \begin{cases} d\alpha_4 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_5 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \\ d\alpha_6 = \alpha_2 \wedge \alpha_4 \end{cases}$$

$$n_{6,13} \begin{cases} d\alpha_4 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_5 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \\ d\alpha_6 = \alpha_1 \wedge \alpha_4 \end{cases}$$

$$n_{6,14} \begin{cases} d\alpha_4 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_5 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 - \alpha_2 \wedge \alpha_4 \\ d\alpha_6 = \alpha_1 \wedge \alpha_4 + \alpha_2 \wedge \alpha_3 \end{cases}$$

$$n_{6,18} \begin{cases} d\alpha_4 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_5 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 \\ d\alpha_6 = \alpha_2 \wedge \alpha_4 \end{cases}$$

$$n_{6,19} \begin{cases} d\alpha_4 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_5 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 \\ d\alpha_6 = \alpha_1 \wedge \alpha_4 + \alpha_2 \wedge \alpha_3 \end{cases}$$

$$n_{6,20} \begin{cases} d\alpha_4 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_5 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 \\ d\alpha_6 = \alpha_1 \wedge \alpha_4 \end{cases}$$

$$n_{6,21} \begin{cases} d\alpha_4 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_5 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 \\ d\alpha_6 = \alpha_2 \wedge \alpha_3 \end{cases}$$

$$n_{6,23} \begin{cases} d\alpha_5 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 - \alpha_3 \wedge \alpha_4 \\ d\alpha_6 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \end{cases}$$

$$n_{6,24} \begin{cases} d\alpha_5 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_6 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \end{cases}$$

$$n_{5,1} \oplus \mathbb{K} \begin{cases} d\alpha_3 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_4 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 \\ d\alpha_5 = \alpha_1 \wedge \alpha_4 + \alpha_2 \wedge \alpha_3 \end{cases}$$

$$n_{5,2} \oplus \mathbb{K} \begin{cases} d\alpha_3 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_4 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 \\ d\alpha_5 = \alpha_1 \wedge \alpha_4 \end{cases}$$

$$n_{5,4} \oplus \mathbb{K} \begin{cases} d\alpha_4 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_5 = \alpha_2 \wedge \alpha_3 + \alpha_1 \wedge \alpha_4 \end{cases}$$

$$n_{5,5} \oplus \mathbb{K} \begin{cases} d\alpha_4 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_5 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
n_{4,1} \oplus \mathbb{K}^2 & \begin{cases} d\alpha_3 = \alpha_1 \wedge \alpha_4 \\ d\alpha_2 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 \end{cases} \\
n_3 \oplus n_3 & \begin{cases} d\alpha_3 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\ d\alpha_6 = \alpha_4 \wedge \alpha_5 \end{cases} \\
n_3 \oplus \mathbb{K}^3 & \begin{cases} d\alpha_3 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \end{cases} \\
\text{abélienne} & \begin{cases} d\alpha = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

les notations sont celles correspondant aux classifications données dans [27]. Les équations de structure triviales ($d\alpha = 0$) non pas été écrites dans les définitions ci dessus.

2.7 Algèbres de Lie k -symplectiques exactes

Soit \mathcal{A} une algèbre de Lie k -symplectique définie par $(\theta^1, \dots, \theta^k; \mathcal{J})$. Nous allons supposer, dans ce paragraphe, que les formes définissant la structure k -symplectiques sont exactes :

$$\theta^1 = d\omega^1, \dots, \theta^k = d\omega^k,$$

où $\omega^1, \dots, \omega^k$ sont des formes linéaires indépendantes sur l'algèbre de Lie \mathcal{A} vérifiant:

$$\mathcal{A} = \mathcal{J} + (\text{Ker } \omega^1 \cap \dots \cap \text{Ker } \omega^k)$$

Nous allons également supposer que la sous algèbre \mathcal{J} est un idéal de \mathcal{A} de codimension n . Ces algèbres de Lie seront dites **exactes du type** $(k, n; \mathcal{J})$.

Lemme *Dans les hypothèses et notations ci-dessus, il existe une base $(X_j)_{1 \leq j \leq nk}$ de \mathcal{J} telle que*

$$\omega^r(X_j) = \delta_j^r$$

pour tous r, j ($r = 1, \dots, k$ et $j = 1, \dots, nk$).

Démonstration. Soient e_1, \dots, e_k des éléments de \mathcal{A} tels que $\omega^r(e_j) = \delta_j^r$. L'hypothèse ci dessus montre que pour tout i ($i = 1, \dots, k$), les vecteurs e_i s'écrivent sous la forme $e_i = X_i + Y_i$ avec $X_i \in \mathcal{J}$ et $Y_i \in (\text{Ker } \omega^1 \cap \dots \cap \text{Ker } \omega^k)$. Pour tout i ($i = 1, \dots, k$) on a

$$\omega^r(X_i) = \omega^r(e_i) = \delta_i^r.$$

Les vecteurs X_1, \dots, X_k sont linéairement indépendants. Montrons tout d'abord qu'on peut les compléter en une base $(X_1, \dots, X_k, X'_{k+1}, \dots, X'_{nk})$ de \mathcal{J} telle que $\omega^r(X'_u)$ ne soit pas nul pour $r = 1, \dots, k$ et $u > k$. Complétons

en effet (X_1, \dots, X_k) en une base quelconque $(X_1, \dots, X_k, X''_{k+1}, \dots, X''_{nk})$ de \mathcal{J} . Pour tous $r = 1, \dots, k$ et $u = k + 1, \dots, nk$, on pose

$$\rho_u^r = \omega^r(X_u)$$

et pour γ n'appartenant pas à l'ensemble $\{\rho_u^r \mid r = 1, \dots, k, u = k + 1, \dots, nk\} \cap \mathbb{K}^*$, on définit

$$X'_u = X''_u - \gamma(X_1 + \dots + X_k).$$

Les vecteurs $X_1, \dots, X_k, X'_{k+1}, \dots, X'_{nk}$ déterminent une base de \mathcal{J} telle que $\omega^r(X'_u) = \rho_u^r - \gamma \neq 0$ pour tous $r = 1, \dots, k$ et $u = k + 1, \dots, nk$. Pour tout $A = (a_i^j) \in Gl(n-1, \mathbb{K})$ on pose

$$X_{k+v} = - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{(n-1)k} a_v^j \omega^i(X'_{k+j}) X_i - \sum_{j=1}^{(n-1)k} a_v^j X'_{k+j}.$$

pour tout $v = 1, \dots, n-1$. Les vecteurs $(X_j)_{1 \leq j \leq nk}$ forment une base de \mathcal{J} telle que $\omega^r(X_j) = \delta_j^r$ pour tous $r = 1, \dots, k$ et $j = 1, \dots, nk$

Proposition 2 . *Si $(\theta^1 = d\omega^1, \dots, \theta^k = d\omega^k; \mathcal{J})$ est une structure k -symplectique exacte, alors on peut compléter $(\omega^1, \dots, \omega^k)$ en une base*

$$(\omega^1, \dots, \omega^k, \omega^{k+1}, \dots, \omega^{n(k+1)})$$

de \mathcal{A}^* telle que la loi d'algèbre de Lie de \mathcal{A} soit définie par

$$d\omega^\alpha = \sum_{a=nk+1}^{n(k+1)} \left(\sum_{s < a} C_{sa}^\alpha \omega^s \right) \wedge \omega^a, \quad \alpha = 1, \dots, k,$$

$$d\omega^r = \sum_{nk+1 \leq u < v \leq n(k+1)} C_{uv}^r \omega^u \wedge \omega^v, \quad r = nk + 1, \dots, n(k+1),$$

et la matrice

$$\begin{pmatrix} C_{1,nk+1}^1 & C_{2,nk+1}^1 & \cdots & C_{nk,nk+1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1,n(k+1)}^1 & C_{2,n(k+1)}^1 & \cdots & C_{nk,n(k+1)}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1,nk+1}^r & C_{2,nk+1}^r & \cdots & C_{nk,nk+1}^r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1,n(k+1)}^r & C_{2,n(k+1)}^r & \cdots & C_{nk,n(k+1)}^r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1,nk+1}^k & C_{2,nk+1}^k & \cdots & C_{nk,nk+1}^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1,n(k+1)}^k & C_{2,n(k+1)}^k & \cdots & C_{nk,n(k+1)}^k \end{pmatrix}$$

est inversible.

Démonstration. Soit $(X_j)_{1 \leq j \leq nk}$ une base de \mathcal{J} telle que

$$\omega^r(X_j) = \delta_j^r$$

pour tous r, j ($r = 1, \dots, k$ et $j = 1, \dots, nk$) et soit $(X_{nk+1}, \dots, X_{n(k+1)})$ une base quelconque de $\text{Ker } \omega^1 \cap \dots \cap \text{Ker } \omega^k$ et $(\omega'^1, \dots, \omega'^k, \omega^{k+1}, \dots, \omega^{n(k+1)})$ la base duale de $(X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_{n(k+1)})$. La relation

$$\omega^r(X_j) = \omega^{r'}(X_j) = \delta_j^r$$

pour tous $r, j = 1, \dots, k$, montre que $\omega^\alpha = \omega^{\alpha'}$ pour tout $\alpha = 1, \dots, k$. Comme \mathcal{J} est un idéal de \mathcal{A}

$$[X_s, X_a] = - \sum_{r=1}^{n(k+1)} C_{sa}^r X_r \in \mathcal{J}$$

pour tous $s = 1, \dots, nk$ et $a = 1, \dots, n(k+1)$, et par conséquent on a

$$C_{sa}^r = 0$$

pour tous $r = nk+1, \dots, n(k+1)$, $s = 1, \dots, nk$; ce qui montre que

$$d\omega^r = \sum_{nk+1 \leq u < v \leq n(k+1)} C_{uv}^r \omega^u \wedge \omega^v,$$

avec $r = nk + 1, \dots, n(k + 1)$. Lorsque $r = 1, \dots, k$ écrivons

$$d\omega^r = \sum_{nk+1 \leq s < j \leq nk} C_{sj}^r \omega^s \wedge \omega^j + \sum_{a=nk+1}^{n(k+1)} \left(\sum_{s < a} C_{sa}^r \omega^s \right) \wedge \omega^a.$$

La deuxième condition de la définition d'une structure k -symplectique montre que

$$C_{sj}^r = 0$$

pour tous $r = 1, \dots, k$ et $s, j = 1, \dots, nk$, d'où

$$d\omega^r = \sum_{a=nk+1}^{n(k+1)} \left(\sum_{s < a} C_{sa}^r \omega^s \right) \wedge \omega^a.$$

L'inversibilité de la matrice C résulte de la non dégénérescence du système $\{\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^k\}$.

Les algèbres de Lie k -symplectiques en codimension 1 (c'est à dire $n = 1$) sont complètement déterminées par le

Corollaire 12 *Dans les hypothèses et notations ci-dessus, si $n = 1$ la loi d'algèbre de Lie de \mathcal{A} est donnée par :*

$$\begin{cases} d\omega^1 = (a_1^1 \omega^1 + \dots + a_k^1 \omega^k) \wedge \omega^{k+1} \\ \dots \\ d\omega^k = (a_1^k \omega^1 + \dots + a_k^k \omega^k) \wedge \omega^{k+1} \\ d\omega^{k+1} = 0 \end{cases}$$

la matrice $A = (a_v^u)_{1 \leq u, v \leq k}$ est inversible.

2.7.1 Algèbres de Lie du type $(2, 2; \mathcal{J})$

On se place ici dans le cadre des algèbres de Lie 2-symplectiques du type $(2, 2; \mathcal{J})$. Ces algèbres de Lie sont données par

$$\begin{cases} d\omega^\alpha = \left(\sum_{s=1}^4 C_{s5}^\alpha \omega^s \right) \wedge \omega^5 + \left(\sum_{s=1}^5 C_{s6}^\alpha \omega^s \right) \wedge \omega^6 & \alpha = 1, 2 \\ d\omega^5 = u \omega^5 \wedge \omega^6 \\ d\omega^6 = v \omega^5 \wedge \omega^6 \end{cases}$$

avec $u = C_{56}^5$ et $v = C_{56}^6$. Les équations de Jacobi $dd\omega^\alpha = 0$ vont permettre de déterminer $d\omega^3$ et $d\omega^4$. Pour simplifier les calculs nous allons nous placer dans le cas suivant

$$C_{15}^1 = C_{25}^2 = C_{36}^1 = C_{46}^2 = 1,$$

les autres constantes de structure C_{sj}^1 et C_{sj}^2 étant nulles. L'algèbre de Lie dont les constantes de structure non définies par ces conditions sont nulles est l'algèbre 2-symplectique modèle (toute algèbre 2-symplectique est une déformation de ce modèle) définie dans l'exemple du paragraphe 6.1. Les relations $dd\omega^1 = dd\omega^2 = 0$ donnent

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{35}^3 = 1 + v \quad , \quad C_{15}^3 = u \\ C_{12}^3 = C_{13}^3 = C_{14}^3 = C_{23}^3 = C_{24}^3 = C_{25}^3 = C_{34}^3 = C_{45}^3 = 0 \\ C_{45}^4 = 1 + v \quad , \quad C_{25}^4 = u \\ C_{12}^4 = C_{13}^4 = C_{14}^4 = C_{15}^4 = C_{23}^4 = C_{24}^4 = C_{34}^4 = C_{35}^4 = 0. \end{array} \right.$$

Les relations $dd\omega^3 = dd\omega^4 = 0$ impliquent

$$\begin{aligned} 2u + v(C_{36}^3 + u) &= 0 \\ -u^2 - 2vC_{16}^3 + uC_{36}^3 &= 0 \\ -2vC_{26}^3 + uC_{46}^3 &= 0 \\ vC_{46}^3 &= 0 \\ -2vC_{16}^4 + uC_{36}^4 &= 0 \\ 2u + uv + vC_{46}^4 &= 0 \\ -u^2 - 2vC_{26}^4 + uC_{46}^4 &= 0 \\ vC_{36}^4 &= 0 \end{aligned}$$

Si $v = 0$, alors on a aussi $u = 0$; on obtient ainsi une famille d'algèbres de Lie qui dépend de 10 paramètres :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega^5 + \omega^3 \wedge \omega^6 \\ d\omega^2 = \omega^2 \wedge \omega^5 + \omega^4 \wedge \omega^6 \\ d\omega^3 = \omega^3 \wedge \omega^5 + C_{16}^3 \omega^1 \wedge \omega^6 + C_{26}^3 \omega^2 \wedge \omega^6 + C_{36}^3 \omega^3 \wedge \omega^6 + C_{46}^3 \omega^4 \wedge \omega^6 \\ \quad + C_{56}^3 \omega^5 \wedge \omega^6 \\ d\omega^4 = C_{16}^4 \omega^1 \wedge \omega^6 + C_{26}^4 \omega^2 \wedge \omega^6 + C_{36}^4 \omega^3 \wedge \omega^6 + \omega^4 \wedge \omega^5 + C_{46}^4 \omega^4 \wedge \omega^6 \\ \quad + C_{56}^4 \omega^5 \wedge \omega^6 \\ d\omega^5 = 0 \\ d\omega^6 = 0 \end{array} \right.$$

Lorsque $v \neq 0$ on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{46}^3 = C_{36}^4 = C_{26}^3 = C_{16}^4 = 0 \\ C_{26}^4 = C_{16}^3 = -\frac{u^2(1+v)}{v^2} \\ C_{36}^3 = C_{46}^4 = -\frac{u(2+v)}{v}, \end{array} \right.$$

les constantes C_{56}^3 et C_{56}^4 étant arbitraires; on obtient ainsi une famille d'algèbres de Lie qui dépend de 4 paramètres :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega^5 + \omega^3 \wedge \omega^6 \\ d\omega^2 = \omega^2 \wedge \omega^5 + \omega^4 \wedge \omega^6 \\ d\omega^3 = u\omega^1 \wedge \omega^5 - \frac{u^2(1+v)}{v^2}\omega^1 \wedge \omega^6 + (1+v)\omega^3 \wedge \omega^5 - \frac{u(2+v)}{v}\omega^3 \wedge \omega^6 \\ \quad + C_{56}^3\omega^5 \wedge \omega^6 \\ d\omega^4 = u\omega^2 \wedge \omega^5 - \frac{u^2(1+v)}{v^2}\omega^2 \wedge \omega^6 + (1+v)\omega^4 \wedge \omega^5 - \frac{u(2+v)}{v}\omega^4 \wedge \omega^6 \\ \quad + C_{56}^4\omega^5 \wedge \omega^6 \\ d\omega^5 = u\omega^5 \wedge \omega^6 \\ d\omega^6 = v\omega^5 \wedge \omega^6 \end{array} \right.$$

où u, v, C_{56}^3, C_{56}^4 sont des paramètres avec $v \neq 0$.

Chapitre 3

VARIETES k -SYMPLECTIQUES AFFINES

3.1 Variétés affines

3.1.1 Définition

Soit M une variété différentiable de dimension n . On dit que M est une variété affine s'il existe un atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de M dont les changements de cartes soient des restrictions d'applications affines de \mathbb{R}^n . Se donner une structure affine sur M équivaut à se donner une connexion

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

telle que les tenseurs de courbure et de torsion

$$k(X, Y) = \nabla_{[X, Y]} - (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X)$$

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

soient identiquement nuls.

3.1.2 Exemple

La sphère S^1 est une variété affine. C'est en fait la seule sphère affine.

3.2 Groupes de Lie affines

3.2.1 Définition

Un groupe de Lie G est dit affine s'il existe une structure affine invariante à gauche, c'est-à-dire telle que pour tout $x \in G$ l'application

$$L_x : G \rightarrow G$$

définie par

$$L_x(y) = xy$$

est affine. Autrement dit, G est muni d'une connexion plate invariante à gauche.

3.2.2 Produit symétrique à gauche

Soit \mathcal{G} l'algèbre de Lie du groupe de Lie affine G . En identifiant les champs de vecteurs invariants à gauche sur G et les éléments de \mathcal{G} , on définit un nouveau produit sur \mathcal{G} en posant

$$X \cdot Y = \nabla_X Y.$$

Comme ∇ est à courbure nulle, ce produit vérifie

$$X \cdot (Y \cdot Z) - Y \cdot (X \cdot Z) = [X, Y] \cdot Z.$$

Un tel produit est dit symétrique à gauche. Le crochet de Lie de \mathcal{G} en est l'anticommutateur.

Tout groupe de Lie symplectique est affine. En effet le produit dans l'algèbre de Lie \mathcal{G} donné par

$$\theta(X \cdot Y, Z) = -\theta(Y, [X, Z])$$

où θ est la forme symplectique invariante à gauche, est symétrique à gauche et associé au crochet. On en déduit

Proposition 3.1 *Tout groupe de Lie 1-symplectique est affine.*

Notons toutefois qu'il existe des groupes k -symplectiques non affines. Prenons par exemple le groupe simple $Sl(2)$. Il existe une base $(\omega^1, \omega^2, \omega^3)$ de $sl(2)^*$ vérifiant

$$\begin{cases} d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^3 \\ d\omega^2 = 2\omega^1 \wedge \omega^3 \\ d\omega^3 = -2\omega^1 \wedge \omega^2 \end{cases}$$

Les formes $\theta^2 = d\omega^2$, $\theta^3 = d\omega^3$ et le sous groupe associé à $\text{Ker } \omega^1$ définissent une structure 2-symplectique sur le groupe $Sl(2)$. Comme ce groupe est simple, il n'admet aucune structure affine invariante à gauche. Le problème est donc posé de déterminer les groupes k -symplectiques affines. Dans ce chapitre, nous allons montrer que toute variété munie d'une structure k -symplectique est affine en restriction à chacune des feuilles des feuilletages canoniquement associés à cette structure.

3.3 Feuilletages caractéristiques

3.3.1 Définition

Soit M est une variété différentiable de dimension $n(k+1)$ munie d'une structure k -symplectique $(\theta^1, \dots, \theta^k; E)$. Soient TM/E le fibré quotient de TM par E c'est-à-dire la réunion des espaces quotients $T_x M/E_x$. Notons ν la projection canonique $TM \rightarrow TM/E = \nu E$ et soit $\nu^* E$ le fibré dual de νE , c'est-à-dire le fibré dont les fibres $\nu^* E_x$ sont égales à $(T_x M/E_x)^*$. Le sous fibré E étant par définition intégrable, il définit un feuilletage sur M que l'on désignera par \mathcal{F} . D'après le théorème de Darboux, il existe pour chaque point x de M un voisinage U et un système de coordonnées locales $(x^{\alpha i}, x^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ définies sur U , dites adaptées, telles que

$$\theta|_U^\alpha = \sum_{i=1}^n dx^{\alpha i} \wedge dx^i \quad , \quad E|_U = \text{Ker } dx^1 \cap \dots \cap \text{Ker } dx^n$$

pour tout $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$.

Ceci est équivalent à dire qu'il existe un atlas \mathcal{A} de M , appelé atlas de Darboux, tel que les changements de cartes soient dans le pseudogroupe des difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ laissant invariante la structure k -symplectique canonique de cet espace. Il résulte des expressions canoniques de Darboux que les formes différentielles $\theta^\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$ sont de classe $2n$. La distribution

$$x \longmapsto C_x(\theta^\alpha)$$

où $C_x(\theta^\alpha)$ est l'espace caractéristique au point x de la 2-forme θ^α , définit un sous-fibré intégrable de TM .

Pour tout $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$ on pose

$$E^\alpha = \bigcap_{\beta \neq \alpha} C(\theta^\beta).$$

En termes des coordonnées locales adaptées $(x^{\alpha i}, x^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$, on a

1. νE est engendré par les dérivations $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$,
2. $\nu^* E$ est engendré par les formes différentielles dx^1, \dots, dx^n ,
3. E^α est engendré par les dérivations $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha 1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\alpha n}}$.

Proposition 3.2 *On a :*

Proposition 3 *i) pour tout $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$, le sous-fibré E^α est intégrable,*

ii) $E = E^1 \oplus \dots \oplus E^k$ (somme directe) et $[E^\alpha, E^\beta] \subset \bigcap_{\gamma \neq \alpha, \gamma \neq \beta} C(\theta^\gamma)$ dès que $\alpha \neq \beta$,

iii) pour tout $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$ l'application $X \mapsto i(X)\theta^\alpha$ définit un isomorphisme i_α de fibrés vectoriels au dessus de M de E^α sur $\nu^ E$.*

Démonstration. Seule la deuxième partie de la propriété ii) nécessite un commentaire. Soit $X \in E^\alpha$ et $Y \in E^\beta$. On a

$$\begin{aligned} i([X, Y])\theta^\gamma &= L_X i(Y)\theta^\gamma - i(Y)L_X \theta^\gamma \\ &= -i(Y)L_X \theta^\gamma \\ &= -i(Y)(i(X)d\theta^\gamma + d(i(X)\theta^\gamma)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dès que $\gamma \neq \alpha$ et β .

Définition 3.1 *Les feuilletages \mathcal{F}^α ($\alpha = 1, \dots, k$) de M définis par les sous-fibrés intégrables E^α sont appelés feuilletages caractéristiques de la structure k -symplectique.*

En termes de coordonnées locales adaptées $(x^{\alpha i}, x^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ l'application i_α exprime la dualité $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha s}} \mapsto dx^s$ entre la géométrie le long des feuilles \mathcal{F}^α et la géométrie transverse.

3.3.2 Structures affines des feuilles de \mathcal{F}^α

Considérons l'atlas \mathcal{A} de Darboux de M . Les changements de cartes locales s'expriment par

$$\bar{x}^{\alpha i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} x^{\alpha j} + \varphi^{\alpha i}(x^1, \dots, x^n) \quad , \quad \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \dots, x^n).$$

On constate que ces expressions sont affines par rapport aux coordonnées $x^{\alpha i}$.

Proposition 3.3 *Toute feuille de \mathcal{F}^α ($\alpha = 1, \dots, k$) et de \mathcal{F} est munie d'une structure affine.*

3.3.3 Connexion associée

La connexion de Bott $\overline{\nabla}$ de E est définie par l'application \mathbb{R} -bilinéaire

$$\overline{\nabla} : \Gamma(E) \times \Gamma(\nu E) \longrightarrow \Gamma(\nu E)$$

donnée par

$$\overline{\nabla}_X Z = \nu[X, \overline{Z}],$$

pour tous $X \in \Gamma(E)$ et $Z \in \Gamma(\nu E)$ où $\overline{Z} \in \chi(M)$ tel que $\nu(\overline{Z}) = Z$. La valeur de $\overline{\nabla}_X Z$ ne dépend pas du choix de \overline{Z} . Rappelons que la courbure \overline{k} de $\overline{\nabla}$ est donnée par

$$\overline{k}(X, Y)Z = \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X, Y]} Z,$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(E)$ et $Z \in \Gamma(\nu E)$.

Proposition 3.4 $\overline{k}(X, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \Gamma(E)$.

Démonstration. Soient $X, Y \in \Gamma(E)$, $Z \in \Gamma(\nu E)$ et $\overline{Z} \in \chi(M)$ tel que $\nu(\overline{Z}) = Z$. Posons

$$\overline{\nu[X, \overline{Z}]} = [X, \overline{Z}], \quad \overline{\nu[Y, \overline{Z}]} = [Y, \overline{Z}],$$

on obtient

$$\begin{aligned} \overline{k}(X, Y)Z &= \overline{\nabla}_X(\nu[Y, \overline{Z}]) - \overline{\nabla}_Y(\nu[X, \overline{Z}]) - \nu[[X, Y], \overline{Z}] \\ &= \nu[X, [Y, \overline{Z}]] + \nu[Y, [\overline{Z}, X]] + \nu[\overline{Z}, [X, Y]] \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où la proposition.

Nous allons définir sur chacune des feuilles de \mathcal{F}^α , à partir de cette connexion de Bott, une connexion affine. Soit \mathcal{L} une feuille de \mathcal{F}^α . Pour tous $X, Y \in \chi(\mathcal{L})$ on pose

$$\nabla_X Y = i_\alpha^{-1}(\overline{\nabla}_X^*(i_\alpha(Y)))$$

où $\overline{\nabla}^*$ est l'application de $\Gamma(E^\alpha) \times \Gamma(\nu^*E)$ dans $\Gamma(\nu^*E)$ définie par

$$(\overline{\nabla}_X^* \sigma)Z = L_X(\sigma(Z)) - \sigma(\overline{\nabla}_X Z)$$

pour tous $X \in \Gamma(E^\alpha)$, $\sigma \in \Gamma(\nu^*E)$ et $Z \in \Gamma(\nu E)$; L_X dénote la dérivée de Lie par rapport à X . ∇ définit une connexion sur la feuille \mathcal{L} . Calculons les tenseurs de torsion et de courbure de cette connexion.

Soient T le tenseur de torsion de la connexion ∇ , Z une section locale du fibré $\nu E \longrightarrow M$ et \bar{Z} une section locale du fibré $TM \longrightarrow M$ telle que $\nu(\bar{Z}) = Z$. On a

$$\theta^\alpha(T(X, Y), \bar{Z}) = \theta^\alpha(\nabla_X Y - \nabla_Y X, \bar{Z}) - \theta^\alpha([X, Y], \bar{Z})$$

et

$$\begin{aligned} \theta^\alpha(\nabla_X Y - \nabla_Y X, \bar{Z}) &= \theta^\alpha(i_\alpha^{-1}(\bar{\nabla}_X^*(i_\alpha(Y)) - \bar{\nabla}_Y^*(i_\alpha(X))), \bar{Z}) \\ &= (\bar{\nabla}_X^*(i_\alpha(Y)))(Z) - (\bar{\nabla}_Y^*(i_\alpha(X)))(Z), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \theta^\alpha(\nabla_X Y - \nabla_Y X, \bar{Z}) &= L_X i_\alpha(Y)(Z) - i_\alpha(Y) \bar{\nabla}_X Z - L_Y i_\alpha(X)(Z) \\ &\quad + i_\alpha(X) \bar{\nabla}_Y Z = L_X(\theta^\alpha(Y, \bar{Z})) - \theta^\alpha(Y, [X, \bar{Z}]) \\ &\quad + L_Y(\theta^\alpha(\bar{Z}, X)) + \theta^\alpha(X, [Y, \bar{Z}]) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \theta^\alpha(T(X, Y), \bar{Z}) &= L_X(\theta^\alpha(Y, \bar{Z})) + L_Y(\theta^\alpha(\bar{Z}, X)) \\ &\quad + \theta^\alpha(X, [Y, \bar{Z}]) - \theta^\alpha(Y, [X, \bar{Z}]) - \theta^\alpha([X, Y], \bar{Z}) \\ &= d\theta^\alpha(X, Y, \bar{Z}). \end{aligned}$$

La forme θ^α étant fermée, $\theta^\alpha(T(X, Y), \bar{Z}) = 0$. Mais $\theta^\alpha(T(X, Y), \bar{Z}) = -i_\alpha(\bar{Z})(T(X, Y))$, et comme Z est arbitraire et i_α est un isomorphisme, on a $T(X, Y) = 0$.

Soient k , \bar{k} et \bar{k}^* les tenseurs de courbure de ∇ , $\bar{\nabla}$ et $\bar{\nabla}^*$ respectivement. Ils sont reliées par

$$i_\alpha(k(X_1, X_2)Y) = \bar{k}^*(X_1, X_2)(i_\alpha(Y))$$

où $X_1, X_2, Y \in \chi(\mathcal{L})$. Mais $\bar{k} = 0$, donc $\bar{k}^* = 0$ et $k = 0$.

On a donc montré la proposition suivante :

Proposition 3.5 *La connexion ∇ est plate. Elle définit une structure affine sur la feuille \mathcal{L} .*

Nous allons à présent définir une connexion plate sur chacune des feuilles du feuilletage \mathcal{F} induisant les autres connexions affines plates que

nous venons de définir sur chaque feuille des feuilletages caractéristiques. Cette connexion se construit de la manière suivante : soit \mathcal{M} une feuille de \mathcal{F} . Pour tout $X, Y \in \chi(\mathcal{M})$, on pose

$$D_X Y = \sum_{\alpha=1}^k i_\alpha^{-1}(\overline{\nabla}_X^*(i_\alpha(Y^\alpha)))$$

où les $Y^\alpha \in \Gamma(E^\alpha)$ sont tels que $Y = Y^1 + \dots + Y^k$. Il est clair que D définit une connexion sur \mathcal{M} qui en restriction à \mathcal{L} vaut ∇ . Cette connexion est à torsion nulle. En effet si X et $Y \in \Gamma(E)$, alors

$$\theta^\alpha(T_1(X, Y), \overline{Z}) = \theta^\alpha(D_X Y - D_Y X, \overline{Z}) - \theta^\alpha([X, Y], \overline{Z})$$

et

$$\begin{aligned} \theta^\alpha(D_X Y - D_Y X, \overline{Z}) &= \sum_{\beta=1}^k \theta^\alpha(i_\beta^{-1}(\overline{\nabla}_X^*(i_\beta(Y^\beta)) - \overline{\nabla}_Y^*(i_\beta(X^\beta))), \overline{Z}) \\ &= \theta^\alpha(i_\alpha^{-1}(\overline{\nabla}_X^*(i_\alpha(Y^\alpha)) - \overline{\nabla}_Y^*(i_\alpha(X^\alpha))), \overline{Z}) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \theta^\alpha(D_X Y - D_Y X, \overline{Z}) &= L_X i_\alpha(Y^\alpha)(Z) - i_\alpha(Y^\alpha) \overline{\nabla}_X Z - L_Y i_\alpha(X^\alpha)(Z) \\ &\quad + i_\alpha(X^\alpha) \overline{\nabla}_Y Z = L_X(\theta^\alpha(Y^\alpha, \overline{Z})) - \theta^\alpha(Y, [X, \overline{Z}]) \\ &\quad + L_Y(\theta^\alpha(\overline{Z}, X^\alpha)) + \theta^\alpha(X, [Y, \overline{Z}]), \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \theta^\alpha(T_1(X, Y), \overline{Z}) &= L_X(\theta^\alpha(Y, \overline{Z})) + L_Y(\theta^\alpha(\overline{Z}, X)) \\ &\quad + \theta^\alpha(X, [Y, \overline{Z}]) - \theta^\alpha(Y, [X, \overline{Z}]) - \theta^\alpha([X, Y], \overline{Z}) \\ &= d\theta^\alpha(X, Y, \overline{Z}). \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi la torsion T_1 de D est nulle. Ceci montre en particulier que si $X \in \Gamma(E^\alpha)$ et $Y \in \Gamma(E^\beta)$ alors

$$[X, Y] = D_X Y - D_Y X.$$

Quant à la courbure, sa nullité se démontre d'une manière identique.

Théorème 3.1 *Soit M une variété munie d'une structure k -symplectique. Alors les feuilles du feuilletage \mathcal{F} et des feuilletages caractéristiques sont affines.*

3.3.4 Conséquences

Rappelons le théorème de R. Blumenthal :

Proposition 3.6 *Soit M une variété différentiable compacte dont le groupe fondamental est fini. Alors M n'admet pas de feuilletage avec une connexion de Bott plate*

Corollaire 13 *Soit (M, \mathcal{F}) une variété feuilletée possédant une connexion de Bott plate. Si $H_1(M, \mathbb{Z}) = 0$, alors le feuilletage \mathcal{F} admet un élément de volume transverse; c'est à dire \mathcal{F} est défini par une q -forme fermée sans singularité sur M où $q = \text{codim}(\mathcal{F})$.*

On déduit

Proposition 3.7 *Soit M une variété k -symplectique. Alors :*

Proposition 4 1. *Si M est compacte alors le groupe fondamental $\pi_1(M)$ de M est infini.*

2. *Si $H_1(M, \mathbb{Z}) = 0$ alors le feuilletage \mathcal{F} est défini par une n -forme fermée sans singularité sur M , $n = \text{codim}(\mathcal{F})$.*

Rappelons qu'un automorphisme infinitesimal X du sous-fibré E est un système hamiltonien si les formes différentielles $i(X)\theta^1, \dots, i(X)\theta^k$ sont fermées. Soit X un système hamiltonien de la structure k -symplectique $(\theta^1, \dots, \theta^k; E)$. En termes des coordonnées locales adaptées

$$(x^{\alpha i}, x^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n},$$

le champ de vecteurs X prend la forme

$$\begin{aligned} X = & - \sum_{s=1}^n \sum_{\alpha=1}^k \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x^s}(x^1, \dots, x^n) x^{\alpha s} + \frac{\partial g^\alpha}{\partial x^s}(x^1, \dots, x^n) \right) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha s}} \\ & + \sum_{s=1}^n f_s(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^s} \end{aligned}$$

où f_j et g^α sont des fonctions différentiables. Le champ de vecteurs X satisfait à

$$L_X \circ \nabla_Y Z - \nabla_Y \circ L_X Z = \nabla_{[X, Y]} Z,$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(E)$. Comme ceci caractérise les transformations infinitésimales affines, on a :

Proposition 3.8 *Soit X un système hamiltonien. Alors le flot du champ de vecteurs X respecte la structure affine des feuilles de \mathcal{F} . i.e. X est une transformation affine infinitésimale de l'espace M muni de sa structure de variété différentiable de dimension nk définie par les feuilles de \mathcal{F} .*

3.4 Connexion en drapeaux de sous-fibrés

Soient M une variété différentiable, E un sous-fibré de dimension q de TM , $\Lambda^p(M)$ l'espace des p -formes différentielles sur M et $\Gamma(E)$ (resp. $\chi(M)$) le $\Lambda^0(M)$ -module des sections de E (resp. TM). Soient TM/E le fibré quotient de TM par E , ν la projection canonique $TM \rightarrow TM/E = \nu E$ et ν^*E l'espace dual de νE . Lorsque le sous-fibré E sera intégrable, on désignera par \mathcal{F} le feuilletage qui lui est associé.

Un repère transverse en un point x de M est un isomorphisme linéaire de \mathbb{R}^q sur l'espace transverse $(\nu E)_x$. L'ensemble de tous ces repères est un espace fibré principal $E_T(M, \nu_T, Gl(q, \mathbb{R}))$. Rappelons ([13]) qu'une connexion ω sur E_T est basique si et seulement si l'opérateur de Koszul associé

$$\nabla : \chi(M) \times \Gamma(\nu E) \rightarrow \Gamma(\nu E)$$

satisfait la condition

$$\nabla_X Z = \nu[X, \bar{Z}]$$

pour tous $X \in \Gamma(E)$ et $Z \in \Gamma(\nu E)$, où \bar{Z} est un champ de vecteurs sur M se projetant sur Z ($\nu(\bar{Z}) = Z$).

En choisissant une métrique riemannienne sur M , on peut regarder νE comme un sous-fibré de TM supplémentaire à E ($TM = E \oplus \nu E$). Sous ce point de vue, l'opérateur ∇ vérifie

$$\nabla_X Z = \nu[X, Z]$$

pour tous $X \in \Gamma(E)$ et $Z \in \Gamma(\nu E)$.

Soit $\bar{\nabla}$ une connexion de Bott (basique) de E . Elle vérifie :

$$\bar{\nabla}_{fX} Y = f \bar{\nabla}_X Y \quad , \quad \bar{\nabla}_X fY = X(f)Y + f \bar{\nabla}_X Y.$$

pour tous $X \in \Gamma(E)$, $Y \in \Gamma(\nu E)$ et $f \in \Lambda^0(M)$.

Nous allons, dans ce paragraphe, élargir la notion de connexion de Bott à notre structure. Rappelons dans un premier temps un résultat relatif aux structures symplectiques.

Proposition 3.9 *Soit (M, θ) une variété symplectique munie d'un feuilletage lagrangien \mathcal{F} . Alors toute feuille de \mathcal{F} est munie d'une connexion affine plate.*

Ceci étant, soient M une variété différentiable connexe, E un sous-fibré de TM de codimension q et F un sous-fibré de TM contenu dans E ($F \subseteq E$). Si E est intégrable, alors $[X, Y] \in \Gamma(E)$ pour tous $X, Y \in \Gamma(F)$.

Soit $Z \in \Gamma(\nu E)$, alors il existe un champ de vecteurs $\bar{Z} \in \chi(M)$ tel que $Z = \nu(\bar{Z})$; \bar{Z} est bien défini modulo $\Gamma(E)$, donc pour tous $X \in \Gamma(F)$ et $Z \in \Gamma(\nu E)$, $\bar{\nabla}_X Z = \nu[X, \bar{Z}]$ est bien défini. On construit ainsi une application \mathbb{R} -bilinéaire

$$\bar{\nabla} : \Gamma(F) \times \Gamma(\nu E) \longrightarrow \Gamma(\nu E)$$

vérifiant

$$\bar{\nabla}_{fX} Y = f \bar{\nabla}_X Y \quad , \quad \bar{\nabla}_X fY = X(f)Y + f \bar{\nabla}_X Y.$$

pour tous $X \in \Gamma(F)$, $Y \in \Gamma(\nu E)$ et $f \in \Lambda^0(M)$.

Définition 5 *Une connexion en drapeau sur (E, F) est une application \mathbb{R} -bilinéaire*

$$\bar{\nabla} : \Gamma(F) \times \Gamma(\nu E) \longrightarrow \Gamma(\nu E)$$

telle que

$$\bar{\nabla}_X Z = \nu[X, \bar{Z}],$$

pour tous $X \in \Gamma(F)$ et $Z \in \Gamma(\nu E)$, où $\bar{Z} \in \chi(M)$ satisfaisant à $\nu(\bar{Z}) = Z$.

Une telle connexion sera appelée F -connexion sur E .

Proposition 3.10 *Soit E un sous-fibré de TM tel que*

$$E = F^1 \oplus \dots \oplus F^p$$

où F^1, \dots, F^p sont des sous-fibrés de TM tels que pour tout α ($\alpha = 1, \dots, p$) il existe une F^α -connexion $\bar{\nabla}^\alpha$ sur E . Alors le sous-fibré E admet connexion de Bott.

Démonstration. Soient $X = \sum_{\alpha=1}^p X^\alpha \in \Gamma(E)$, $X^\alpha \in \Gamma(F^\alpha)$ et $Z \in \Gamma(\nu E)$. Si l'on pose

$$\bar{\nabla}_X Z = \sum_{\alpha=1}^p \bar{\nabla}_{X^\alpha}^\alpha Z,$$

on obtient

$$\overline{\nabla}_X Z = \sum_{\alpha=1}^p \nu[X^\alpha, \overline{Z}] = \nu[X, \overline{Z}],$$

où $\overline{Z} \in \chi(M)$ satisfait $\nu\overline{Z} = Z$; ceci montre que $\overline{\nabla}$ est une connexion de Bott sur E .

Proposition 3.11 *Soit F un sous-fibré intégrable de TM tel que $F \subseteq E$; soit $\overline{\nabla}$ une F -connexion sur E et soit \bar{k} sa courbure. Alors $\bar{k}(X, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \Gamma(F)$.*

Démonstration. La courbure \bar{k} de la F -connexion $\overline{\nabla}$ est une correspondance qui associe à tout couple $(X, Y) \in \Gamma(F) \times \Gamma(F)$ l'application $\bar{k}(X, Y) : \Gamma(\nu E) \rightarrow \Gamma(\nu E)$ définie par

$$\bar{k}(X, Y)Z = \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \Gamma(\nu E).$$

Soient $X, Y \in \Gamma(F)$, $Z \in \Gamma(\nu E)$ et $\overline{Z} \in \chi(M)$ tel que $\nu(\overline{Z}) = Z$. Si l'on pose

$$\overline{\nu[X, \overline{Z}]} = [X, \overline{Z}] \quad , \quad \overline{\nu[Y, \overline{Z}]} = [Y, \overline{Z}],$$

on obtient

$$\begin{aligned} \bar{k}(X, Y)Z &= \overline{\nabla}_X(\nu[Y, \overline{Z}]) - \overline{\nabla}_Y(\nu[X, \overline{Z}]) - \nu[[X, Y], \overline{Z}] \\ &= \nu[X, [Y, \overline{Z}]] + \nu[Y, [\overline{Z}, X]] + \nu[\overline{Z}, [X, Y]] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cette notion de connexion en drapeaux permet de retrouver l'existence de structure affine sur les feuilles des feuilletages caractéristiques.

3.5 Variétés k -symplectiques affines

3.5.1 Structure des variétés k -symplectiques affines

Définition 3.2 *Une variété M de dimension $n(k+1)$ munie d'une structure k -symplectique*

$$(\theta^1, \dots, \theta^k; E).$$

est dite k -symplectique affine si l'atlas de Darboux associé à la structure k -symplectique définit sur M une structure de variété affine.

Nous avons vu qu'il existait des variétés k -symplectiques non affines. Le groupe de Lie $Sl(2)$ en est un exemple. Par contre, les feuilles des feuilletages caractéristiques sont toujours munies d'une structure affine. Dans le cas de $Sl(2)$, ces feuilles s'identifient à des 2-plans symplectiques donc affines.

Soit $Gp(k, n; \mathbb{R})$ le groupe des transformations affines de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ laissant invariante la structure k -symplectique canonique de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$. Le groupe $Gp(k, n; \mathbb{R})$ est l'ensemble des transformations affines $X \mapsto AX + B$ de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ telles que $A \in Sp(k, n; \mathbb{R})$ (défini dans le chapitre 3).

Proposition 3.12 *Soit M une variété k -symplectique connexe affine complète de dimension $n(k+1)$. Alors M est un quotient $M = \mathbb{R}^{n(k+1)}/\Gamma$ de groupe fondamental Γ , où Γ est un sous groupe de $Gp(k, n; \mathbb{R})$ qui opère de manière proprement discontinue sans point fixe sur $\mathbb{R}^{n(k+1)}$:*

$$M = \mathbb{R}^{n(k+1)}/\Gamma \quad , \quad \pi_1(M) = \Gamma.$$

Rappelons qu'une variété affine est complète si les géodésiques de la connexion plate sont définies sur \mathbb{R} .

Démonstration. La variété M étant connexe affine complète, c'est un quotient $\mathbb{R}^{n(k+1)}/\Gamma$ dont le groupe fondamental $\pi_1(M)$ est isomorphe à Γ , où Γ est un sous groupe de $A(n(k+1))$ opérant proprement discontinu sans points fixes sur $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ (voir [46]). Soit

$$q : \mathbb{R}^{n(k+1)} \longrightarrow M = \mathbb{R}^{n(k+1)}/\Gamma$$

la projection canonique (q est un revêtement), et soit P le sous-fibré de $T\mathbb{R}^{n(k+1)}$ défini par $q_*P_x = E_{q(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{n(k+1)}$. Le $(k+1)$ -uplet $(q^*\theta^1, \dots, q^*\theta^k; P)$ définit une structure k -symplectique Γ -invariante sur $\mathbb{R}^{n(k+1)}$. Les changements de coordonnées de M sont des transformations affines de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ laissant invariante la structure k -symplectique canonique de cet espace. La définition de la variété quotient $M = \mathbb{R}^{n(k+1)}/\Gamma$, nous permet de voir que Γ est contenu dans $Gp(k, n; \mathbb{R})$.

3.5.2 Cas où le feuilletage \mathcal{F} est de codimension 1

Soit $Hp(k, n; \mathbb{R})$ le groupe affine k -symplectique

$$\begin{pmatrix} I_n & & 0 & S_1 & T_1 \\ & \ddots & & \vdots & \\ & & I_n & S_k & T_k \\ 0 & & & I_n & Q \\ 0 & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où I_n est la matrice unité d'ordre n , S_1, \dots, S_k sont des matrices réelles symétriques du type $n \times n$ et T_1, \dots, T_k, Q sont des vecteurs colonnes de rang n . On désigne par (S, Q, T) les matrices de cette forme où $S = (S_1, \dots, S_k)$, $T = (T_1, \dots, T_k)$.

Proposition 3.13 *Soit M une variété k -symplectique connexe localement affine complète de dimension $k+1$. Alors $M = \mathbb{R}^{k+1}/\Gamma$ ayant pour groupe fondamental Γ , où Γ est un sous groupe de $Hp(k, 1; \mathbb{R})$ agissant de façon proprement discontinue sans point fixe sur \mathbb{R}^{k+1} :*

$$M = \mathbb{R}^{k+1}/\Gamma \quad , \quad \pi_1(M) = \Gamma .$$

Démonstration. Il découle de ce qui précède que la variété M est un quotient \mathbb{R}^{k+1}/Γ dont le groupe fondamental est isomorphe à Γ , où Γ est un sous-groupe de $Gp(k, 1; \mathbb{R})$ opérant de manière proprement discontinue sans point fixe sur \mathbb{R}^{k+1} . Une transformation affine $g \in Gp(k, 1; \mathbb{R})$ est sans points fixes si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) $g = (S, q, T) \in Hp(k, 1; \mathbb{R})$.
- (2) $T \notin \mathbb{R}.S$.

En particulier on a $\Gamma \subset Hp(k, 1; \mathbb{R})$.

Cas particulier $n = 1$ et $k = 2$.

Soit Γ_2^{02012} le sous groupe de $Hp(2, 1, \mathbb{Z})$ engendré par

$$(S^0, 0, T^0) \quad , \quad (mS^0, 0, T^1) \quad , \quad (S^2, q_2, T^2)$$

où $S^0, S^2, T^0, T^1, T^2 \in \mathbb{Z}^2$, $q_2 \in \mathbb{Z}^*$, $m \in \mathbb{Q}$ avec $q_2 \neq 0$, $Det(T^0, T^1) \neq 0$ et $\delta = mD_2$ ici δ et D_2 désignent les déterminants $Det(T^1, S^0)$ et $Det(T^0, S^0)$ respectivement.

Proposition 3.14 *On a*

(i) *le sous groupe Γ_2^{02012} opère proprement discontinu sans points fixes sur \mathbb{R}^3 ,*

(ii) *le quotient $M = \mathbb{R}^3/\Gamma_2^{02012}$ est une variété 2-symplectique compacte connexe affine orientable et complète.*

(iii) *La variété $M = \mathbb{R}^3/\Gamma_2^{02012}$ est homéomorphe au tore \mathbb{T}^3 si et seulement si $S^0 = 0$.*

Démonstration.

(i) Tout élément g de Γ_2^{02012} s'écrit $g = (S, q, T)$ avec

$$\begin{aligned} (a) \quad S &= ((\sum_{i=1}^n \alpha_i) + m(\sum_{i=1}^n \beta_i)) S^0 + (\sum_{i=1}^n \gamma_i) S^2 \\ (b) \quad q &= (\sum_{i=1}^n \gamma_i) q_2 \\ (c) \quad T &= \left(\sum_{p=1}^n \left(\sum_{j=1}^p (\alpha_j + m\beta_j) \right) \gamma_p \right) q_2 S^0 + q_2 P_{(\sum_{i=1}^n \gamma_i)} S^2 \\ &\quad + (\sum_{i=1}^n \alpha_i) T^0 + (\sum_{i=1}^n \beta_i) T^1 + (\sum_{i=1}^n \gamma_i) T^2 \end{aligned}$$

où n est un entier naturel, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{Z}$ quels que soient $i, j, k = 1, \dots, n$ et $P_\gamma = \gamma(\gamma-1)/2$. Si g a des points fixes alors $\sum_{i=1}^n \gamma_i = 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{Q}$ tel que $T = \lambda S$; ceci montre que

$$\left(\sum_{j=1}^p (\alpha_j + m\beta_j) \right) = 0,$$

et aussi que $g = (0, 0, 0)$. Si $D_2 \neq 0$ alors

$$\left(\sum_{j=1}^p (\alpha_j + m\beta_j) \right) D_2 = 0$$

et $g = (0, 0, 0)$. Si $D_2 = 0$ alors $\delta = 0$ et on a deux possibilités :

1. Si $S^0 = 0$ alors $g = (0, 0, 0)$.
2. Si $S^0 \neq 0$ alors $T^0, T^1 \in \mathbb{R} \cdot S^0$ et $\det(T^0, T^1) = 0$; ceci contredit le fait que $\det(T^0, T^1) \neq 0$. Ainsi $D_2 \neq 0$ et $g = (0, 0, 0)$.

Nous avons prouvé que le sous groupe $G = \Gamma_2^{02012}$ agit librement sur \mathbb{R}^3 . Montrons maintenant que l'action de G est proprement discontinue. Pour cela les conditions suivantes doivent être satisfaites :

1. tout point $Q_0 \in \mathbb{R}^3$ possède un voisinage ouvert U tel que l'ensemble $\{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\}$ est fini,
2. si deux points Q_1 et Q_2 de \mathbb{R}^3 ne sont pas congrus modulo G , alors Q_1 et Q_2 possèdent des voisinages ouverts U_1 et U_2 tels que $gU_1 \cap U_2 = \emptyset$ pour tout $g \in G$.

Deux cas sont possibles.

1. $S^0 \neq 0$.

Soient $p_0 \in \mathbb{Z}$ et $q_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que $m = \frac{p_0}{q_0}$. Soient $Q_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$,

$$\varepsilon = \min\left(\frac{1}{2q_0}, \frac{|D_2|}{2q_0(|S_1^0| + |S_2^0|)}\right),$$

et soit U_0 la boule ouverte $B(Q_0, \varepsilon)$ de centre Q_0 et de rayon ε (pour la norme $\|(u, v, w)\| = \max(|u|, |v|, |w|)$). Soient $g \in G$ tel que $gU \cap U \neq \emptyset$ et soit $Q = (x, y, z) \in U$ tel que $g(Q) = (x', y', z') \in U$. On a

$$|x - x'| < 2\varepsilon \quad , \quad |y - y'| < 2\varepsilon \quad , \quad |z - z'| < 2\varepsilon.$$

Il résulte de (a), (b), (c) que l'on a

$$|z - z'| = \left| \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \right) q_2 \right| < 2\varepsilon < 1$$

et, donc, $|\sum_{i=1}^n \gamma_i|$ est un entier naturel inférieur strictement à 1, donc $\sum_{i=1}^n \gamma_i = 0$ et $z = z'$. Les inégalités $|x - x'| < 2\varepsilon$ et $|y - y'| < 2\varepsilon$ impliquent

$$|S_2^0(x' - x) - S_1^0(y' - y)| \leq 2\varepsilon(|S_1^0| + |S_2^0|).$$

De nouveau on obtient (en vertu de (a), (b), (c))

$$\left| \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) + m \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \right) \right| q_0 < 1,$$

donc $(\sum_{i=1}^n \alpha_i) + m(\sum_{i=1}^n \beta_i) = 0$; d'où $q_0|x - x'|$ et $q_0|y - y'|$ sont des entiers naturels inférieurs strictement à 1, donc $x = x'$, $y = y'$ et par suite $g = (0, 0, 0)$; en d'autres termes, on a

$$\{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\} = \{id_{\mathbb{R}^3}\}.$$

Considérons maintenant deux points Q_1 et Q_2 de \mathbb{R}^3 non congrus modulo G , soit K une partie compacte de \mathbb{R}^3 . Soit $r > 0$ tel que $K \subset B(Q_1, r)$; où $B(Q_1, r)$ est la boule ouverte de centre Q_1 et de rayon r . Les ensembles suivants

$$E_1 = \{\gamma \in \mathbb{Z} \mid |\gamma q_2| < r\}$$

$$E_2 = \{(\alpha + m\beta)q_0 \mid |\alpha + m\beta| < 2r(|S_1^0| + |S_2^0|) \text{ , } \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$$

et

$$E_{(s,3)} = \{(\alpha + m\beta)z_1 S_s^0 + \gamma T_s^2 + u \mid (\alpha + m\beta)z_1 S_s^0 + \gamma T_s^2 + u < r, \\ (\alpha + m\beta)q_0 \in E_2, \gamma \in E_1 \text{ , } u \in \mathbb{Z}\} \quad (s = 1, 2)$$

sont finis, donc $G.Q_1 \cap K$ est fini; ceci implique que

$$\inf\{d(Q, Q_1) = \|\overrightarrow{QQ_1}\| \mid Q \in G.Q_1\} = \alpha > 0.$$

Soient

$$\varepsilon' = \min\left(\frac{1}{q_0}, \frac{|D_2|}{4q_0(|S_1^0| + |S_2^0|)}, \frac{\alpha}{2}\right),$$

et U_1 (resp. U_2) la boule ouverte de centre Q_1 (resp. Q_2) et de rayon ε' .
On a

$$G.U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

2. $S^0 = 0$.

Cette partie se traite de la même manière que le premier cas. Observons dans ce cas que Γ_2^{02012} est un groupe abélien libre à trois générateurs.

(ii) Le fait que les vecteurs $(T^0, 0)$, $(T^1, 0)$ et (T^2, q_2) sont linéairement indépendants nous permet de voir que le quotient $\mathbb{R}^3/\Gamma_2^{02012}$ est une variété compacte. L'orientabilité de cette variété résulte du fait que tout élément du groupe $Hp(2, 1, \mathbb{R})$ est de déterminant positif.

(iii) Deux variétés compactes connexes complètes localement affines M_1 et M_2 sont homéomorphes si et seulement si les groupes fondamentaux $\pi_1(M_1)$ et $\pi_1(M_2)$ sont isomorphes; ceci implique que $M = \mathbb{R}^3/\Gamma_2^{02012}$ est homéomorphe au tore \mathbb{T}^3 si seulement si $\pi_1(M) = \Gamma_2^{02012}$ est un groupe abélien ce qui est équivalent à $S^0 = 0$.

Chapitre 4

VARIETES k-SYMPLECTIQUES HOMOGENES

4.1 G -espaces k -symplectiques

4.1.1 Systèmes hamiltoniens stricts

Soit M une variété de dimension $n(k+1)$ munie d'une structure k -symplectique $(\theta^1, \dots, \theta^k; E)$. On désigne par \mathcal{F} le feuilletage défini par le sous-fibré E . De la relation

$$L_X\omega = i(X)d\omega + d(i(X)\omega)$$

pour tout $\omega \in \Lambda^p(M)$, on déduit :

Proposition 4.1 *Pour qu'un automorphisme infinitésimal de \mathcal{F} soit un système hamiltonien il est nécessaire et suffisant que l'on ait*

$$L_X\theta^1 = \dots = L_X\theta^k = 0.$$

Définition 4.1 *Un système hamiltonien X sur M est dit strict s'il existe une application $H \in C^\infty(M, \mathbb{R}^k)$ telle que*

$$j(X) = -dH$$

où

$$j(X) = (j^1(X), \dots, j^k(X)) = (i(X)\theta^1, \dots, i(X)\theta^k).$$

On désigne par $\Xi(M)$ l'ensemble des systèmes hamiltoniens et par $\bar{H}(M)$ l'ensemble des systèmes hamiltoniens stricts de la structure k -symplectique $(\theta^1, \dots, \theta^k; E)$. La variété M étant supposée connexe, on a alors

Proposition 4.2 *Soient H une application hamiltonienne de la structure k -symplectique $(\theta^1, \dots, \theta^k; E)$ et X_H le système hamiltonien associé. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $j(X_H) = 0$,
2. $X_H = 0$,
3. H est constante sur M .

Conséquence. La suite d'algèbres de Lie

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^k \xrightarrow{inj} \mathfrak{h}(M) \xrightarrow{\nu} \bar{H}(M) \longrightarrow 0$$

est exacte, ν étant l'application de $\mathfrak{h}(M)$ dans $\bar{H}(M)$ définie par

$$\nu(H) = X_H$$

pour tout $H \in \mathfrak{h}(M)$ et inj l'injection canonique.

Proposition 4.3 *On a les propriétés suivantes :*

1. $[\Xi(M), \Xi(M)] \subseteq \bar{H}(M)$,
2. $\bar{H}(M)$ est un idéal de $\Xi(M)$.

Démonstration. On a :

$$i([X, Y])\theta^\alpha = [L_X, i(Y)]\theta^\alpha = L_X(i(Y)\theta^\alpha) = -d(\theta^\alpha(X, Y))$$

pour tous X et Y appartenant à $\Xi(M)$, d'où $[X, Y] \in \bar{H}(M)$. La deuxième propriété s'en déduit.

4.1.2 G-espaces k -symplectiques

Soient G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie \mathcal{G} et M une variété connexe de dimension $n(k+1)$ munie d'une structure k -symplectique $(\theta^1, \dots, \theta^k; E)$. On suppose que G opère différemment à gauche sur M par :

$$\varphi : G \times M \longrightarrow M.$$

Pour tout $g \in G$, on désigne par φ_g le difféomorphisme

$$x \longmapsto \varphi(g, x).$$

Définition 4.2 On dit que M est un G -espace k -symplectique si pour tous $g \in G$ et $x \in M$ on a :

1. $\varphi_g^* \theta^\alpha = \theta^\alpha$. pour tout $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$,
2. $(\varphi_g)_* E_x = E_{\varphi(g,x)}$.

Si de plus l'action de G sur M est transitive, on dira que M est un G -espace k -symplectique homogène.

Pour tout $X \in \mathcal{G}$, on désigne X_M le champ fondamental associé à X par l'action de G sur M . Il est défini par

$$X_M(x) = d/dt|_{t=0} (\varphi(\exp(tX), x)).$$

Ce champ de vecteurs X_M est complet et la correspondance $\sigma : X \mapsto X_M$, de \mathcal{G} dans $\chi(M)$ est un anti-homomorphisme injectif d'algèbres de Lie c'est-à-dire

$$[X, Y]_M = -[X_M, Y_M].$$

Si de plus l'action de G sur M est effective, alors σ est injective ([35]).

Soit $x \in M$. On désigne par $G.x$ la G -orbite de x et par G_x le sous-groupe d'isotropie de x par rapport à cette action. G_x est un sous-groupe fermé de G et l'espace homogène G/G_x admet une structure naturelle de variété différentiable; on conviendra de munir la G -orbite $G.x$ de la structure de variété différentiable pour laquelle la bijection $g.G_x \mapsto \varphi(g, x)$, de G/G_x sur $G.x$, est un isomorphisme de variétés différentiables. Pour M non nécessairement connexe on a

Proposition 4.4 ([28]). Pour tous $x \in M$ et y appartenant à la G -orbite $G.x$ de x , l'espace tangent $T_y(G.x)$ de $G.x$ au point y est formé des vecteurs tangents du type $X_M(y)$ tels que $X \in \mathcal{G}$ et l'algèbre de Lie \mathcal{G}_x du groupe G_x est formée des vecteurs X de \mathcal{G} tels que à $X_M(x) = 0$:

$$T_y(G.x) = \{X_M(y) \mid X \in \mathcal{G}\} \quad , \quad \mathcal{G}_x = \{X \in \mathcal{G} \mid X_M(x) = 0\} .$$

Il existe une action naturelle du groupe G sur $Hom(\mathcal{G}, \mathbb{R}^k)$, dite coadjointe, définie par :

$$\langle Ad_g^*(f), X \rangle = \langle f, Ad_{g^{-1}}(X) \rangle ,$$

pour tous $g \in G$, $f \in Hom(\mathcal{G}, \mathbb{R}^k)$ et $X \in \mathcal{G}$. Les orbites de cette action sont appelées G -orbites coadjointes.

Il résulte aussitôt de la définition d'un G -espace k -symplectique que l'on a

Proposition 4.5 Soit M un G -espace k -symplectique. Pour tout $X \in \mathcal{G}$, le champ de vecteurs X_M est un système hamiltonien.

Définition 4.3 Un G -espace k -symplectique M est dit strict si pour tout $X \in \mathcal{G}$, le champ de vecteurs X_M est un système hamiltonien strict.

Proposition 4.6 Pour qu'un G -espace k -symplectique M soit strict, il est nécessaire et suffisant qu'il existe une base (X^1, \dots, X^p) de \mathcal{G} telle que les champs fondamentaux (X_M^1, \dots, X_M^p) soient des systèmes hamiltoniens stricts.

Proposition 4.7 Un G -espace k -symplectique M est strict dans les cas suivants :

1. Le groupe de cohomologie de De Rham $H^1(M, \mathbb{R})$ est trivial.
2. \mathcal{G} vérifie $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathcal{G}$.

Démonstration. Soient M un G -espace k -symplectique et $X \in \mathcal{G}$. Si le groupe de cohomologie de De Rham $H^1(M, \mathbb{R})$ est trivial, alors les formes de Pfaff $i(X)\theta^1, \dots, i(X)\theta^k$ sont exactes. Il existe $H \in C^\infty(M, \mathbb{R}^k)$ tel que $j(X_H) = -dH$, et donc M est un G -espace k -symplectique strict.

Si $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathcal{G}$, il existe des vecteurs $(X^1, Y^1, \dots, X^\nu, Y^\nu) \in \mathcal{G}$ tels que

$$X = \sum_{i=1}^{\nu} [X^i, Y^i]$$

et par conséquent on a

$$X_M = - \sum_{i=1}^{\nu} [X_M^i, Y_M^i].$$

Comme $[\Xi(M), \Xi(M)] \subseteq \bar{H}(M)$ et que les champs de vecteurs fondamentaux sont des systèmes hamiltoniens, alors

$$[X_M^i, Y_M^i] \in \bar{H}(M)$$

pour tout $i (i = 1, \dots, \nu)$, et par conséquent X_M est un système hamiltonien strict, ce qui montre que le G -espace k -symplectique M est strict.

Définition 4.4 Soit M un G -espace k -symplectique strict. On appelle relèvement de M un homomorphisme d'algèbres de Lie J de \mathcal{G} dans $\mathfrak{h}(M)$ tel que pour tout $X \in \mathcal{G}$, le champ de vecteurs X_M coïncide avec le système hamiltonien associé à l'application hamiltonienne $-J(X)$; autrement dit,

un homomorphisme J de \mathcal{G} dans $\mathfrak{h}(M)$ est un relèvement de M s'il rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \mathcal{G} & & & \\
 & & -J & \downarrow & \searrow \sigma & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\text{inj}} & \mathfrak{h}(M) & \xrightarrow{\nu} & \bar{H}(M) \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Un G -espace k -symplectique strict muni d'un relèvement est appelée G -espace hamiltonien.

4.1.3 Applications moments

Définition 4.5 Soit M un G -espace hamiltonien muni d'un relèvement J . On appelle moment de J , l'application \tilde{J} de M dans $\text{Hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^k)$ définie par

$$\tilde{J}(x)(X) = J(X)(x)$$

pour tous $x \in M$ et $X \in \mathcal{G}$.

4.1.4 Etude de l'espace k -symplectique canonique

Considérons l'espace réel $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ muni de sa structure k -symplectique canonique $(\theta^1, \dots, \theta^k; E)$ définie par les 2-formes

$$\theta^\alpha = \sum_{i=1}^n dx^{\alpha i} \wedge dx^i.$$

et par le sous-fibré E de $T\mathbb{R}^{n(k+1)}$ défini par les équations

$$dx^1 = \dots = dx^n = 0.$$

$(x^{\alpha i}, x^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ étant les coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$. Soit M l'espace $M = \mathbb{R}^{n k} \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$ muni de la structure k -symplectique induite par la structure k -symplectique canonique de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$. L'action naturelle du groupe k -symplectique $Sp(k, n; \mathbb{R})$ sur M est effective et M est un $Sp(k, n; \mathbb{R})$ -espace k -symplectique homogène strict. En effet tout élément X de $sp(k, n; \mathbb{R})$ s'écrit

$$X = \begin{pmatrix} A & & 0 & S_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & A & S_k \\ 0 & & & -{}^t A \end{pmatrix}$$

où A, S_1, \dots, S_k sont des matrices $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{R} telles que ${}^t S_\alpha = S_\alpha$ pour tout α ($\alpha = 1, \dots, k$). Désignons les coefficients de la matrice A par u_{ij} et ceux de la matrice S_α par $s_{\alpha ij}$. Le champ fondamental X_M associé à X par l'action de $Sp(k, n; \mathbb{R})$ sur M est donnée par

$$X_M(x) = X.x$$

pour tout $x \in M = \mathbb{R}^{nk} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Dans les notations ci-dessus avec $x = (x^{\alpha i}, x^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ on a :

$$\begin{aligned} X_M(x) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^k ((u_{ij} x^{\alpha j} + s_{\alpha ij} x^j) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha i}} - u_{ji} x^j \frac{\partial}{\partial x^i}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(- \sum_{\alpha=1}^k \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^n) x^{\alpha i} + \frac{\partial g^\alpha}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^n) \right) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha i}} \right. \\ &\quad \left. + f_i(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \end{aligned}$$

où

$$f_j = - \sum_{i=1}^n u_{ji} x^i \quad , \quad g^\alpha = - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n s_{\alpha ij} x^i x^j.$$

Il résulte aussitôt que l'application H de M dans \mathbb{R}^k de composantes

$$H^\alpha = \sum_{j=1}^n f_j(x^1, \dots, x^n) x^{\alpha j} + g^\alpha(x^1, \dots, x^n)$$

est une application hamiltonienne de X_M . La correspondance $X \mapsto -H$ permet de définir, grâce à la construction précédente, une application J de $sp(k, n; \mathbb{R})$ dans $\mathfrak{h}(M)$ satisfaisant à

$$J(X)(0) = 0.$$

et

$$X_{J(X)} = -X_M.$$

On vérifie aisément que J est un morphisme d'algèbres de Lie. Donc l'application J confère à M une structure de $Sp(k, n; \mathbb{R})$ -espace hamiltonien.

Les composantes \tilde{J}^α de l'application moment du relèvement J est l'application de M dans $sp(k, n; \mathbb{R})^*$ définie par :

$$\tilde{J}^\alpha((x^{\alpha i}, x^i))(X) = -\left(\sum_{i,j=1}^n u_{ji} x^j x^{\alpha i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n s_{\alpha ij} x^i x^j\right)$$

pour tous $x \in M$ et $X \in sp(k, n; \mathbb{R})$.

4.1.5 Propriétés de l'application moment

Soient M un G -espace k -symplectique. Pour tous $H \in \mathfrak{h}(M)$ et $g \in G$, $\varphi_g^* \in \mathfrak{h}(M)$ et plus précisément on a :

$$X_{\varphi_g^* H} = (\varphi_g^{-1})_* X_H.$$

Si à présent M est un G -espace hamiltonien muni d'un relèvement J , alors pour tous $X \in \mathcal{G}$ et $g \in G$ on a

$$X_{\varphi_g^* J(X)} = (\varphi_g^{-1})_* X_{J(X)}.$$

Il en résulte :

Proposition 4.8 *Soit M un G -espace k -symplectique. Pour tout $g \in G$, l'application φ_g^* est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{h}(M)$ dans lui-même.*

Rappelons ([43]) que pour tout $X \in \mathcal{G}$, $g \in G$ et $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\exp(t \text{Ad}_g X) = g \exp(tX) g^{-1}.$$

En dérivant par rapport à t on obtient

$$(\varphi_g)_* X_M = (\text{Ad}_g X)_M.$$

Si M est un G -espace hamiltonien admettant J pour relèvement, on a alors la relation suivante :

$$X_{\varphi_{g^{-1}}^* J(X)} = (\text{Ad}_g X)_M,$$

pour tous $X \in \mathcal{G}$ et $g \in G$. Autrement dit, pour tous $g \in G$ et $X \in \mathcal{G}$, l'application

$$\Theta(g)(X) = (\varphi_{g^{-1}})_* J(X) - J(\text{Ad}_g X)$$

définie sur M et à valeurs dans \mathbb{R}^k est constante sur M ; ainsi il existe une application différentiable de G dans $Hom(\mathcal{G}, \mathbb{R}^k)$, notée également Θ , telle que pour tous $g \in G$ et $x \in M$ on ait :

$$\Theta(g) = \tilde{J}(\varphi_{g^{-1}}(x)) - Ad_{g^{-1}}^*(\tilde{J}(x)).$$

Soit c l'application de \mathcal{G} dans $Hom(\mathcal{G}, \mathbb{R}^k)$ définie par

$$c(g) = \Theta(g^{-1}).$$

pour tout $g \in G$. On a

$$\begin{aligned} c(g_1 g_2) &= \tilde{J}(\varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x))) - Ad_{g_1}^*(Ad_{g_2}^*(\tilde{J}(x))) \\ &= \tilde{J}(\varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x))) - Ad_{g_1}^*(\tilde{J}(\varphi_{g_2}(x))) \\ &\quad + Ad_{g_1}^*(\tilde{J}(\varphi_{g_2}(x))) - Ad_{g_1}^*(Ad_{g_2}^*(\tilde{J}(x))) \\ &= c(g_1) + Ad_{g_1}^*(c(g_2)), \end{aligned}$$

pour tous $g_1, g_2 \in G$ et $x \in M$, donc les composantes c^α de c (qui sont des applications de G dans \mathcal{G}^*) satisfont la condition

$$c^\alpha(g_1 g_2) = c^\alpha(g_1) + Ad_{g_1}^*(c^\alpha(g_2))$$

caractérisant les 1-cocycles de G pour la représentation coadjointe, d'où

$$c_g^T = Ad_g^* \circ c_e^T \circ L_{g^{-1}}^T,$$

pour tout $g \in G$ (voir [31]), où c^T désigne l'application tangente de c , e l'élément neutre de G et L la translation à gauche du groupe G .

Proposition 4.9 *Pour tous $g \in G$ et $X, Y \in \mathcal{G}$ on a*

$$\Theta(g)([X, Y]) = 0.$$

En effet on a

$$J(Ad_g[X, Y]) = J([Ad_g X, Ad_g Y]) = \{J(Ad_g X), J(Ad_g Y)\},$$

$\Theta(g)(X)$ et $\Theta(g)(Y)$ étant constantes sur M , d'où

$$\begin{aligned} J(Ad_g[X, Y]) &= \{(\varphi_{g^{-1}})^* J(X), (\varphi_{g^{-1}})^* J(Y)\} \\ &= \varphi_{g^{-1}}^* \{J(X), J(Y)\} \\ &= (\varphi_{g^{-1}})^* J([X, Y]), \end{aligned}$$

d'où

$$\Theta(g)([X, Y]) = 0.$$

Proposition 4.10 Pour tous $g \in G$ et $X \in \mathcal{G}$, l'application Θ est constante sur la courbe $\gamma(t) = g \exp(tX)$.

Démonstration. Pour tout $Y \in \mathcal{G}$, on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\Theta(\gamma(t)|_{t=0})(Y)\right) &= \frac{d}{dt}((\varphi_{g \exp(tX)})^{-1})^* J(Y)|_{t=0} - J(Ad_g[X, Y]) \\ &= dJ(Y) \circ \left(\frac{d}{dt}((\varphi_{\exp(-tX)} \circ \varphi_{g^{-1}})|_{t=0}) - J(Ad_g[X, Y])\right) \\ &= -dJ(Y)(X_M) \circ \varphi_g^{-1} - J(Ad_g[X, Y]) \\ &= (\varphi_g^*)^{-1}\{J(X), J(Y)\} - J(Ad_g[X, Y]) \\ &= (\varphi_g^*)^{-1}J([X, Y]) - J(Ad_g[X, Y]) \\ &= \Theta(g)([X, Y]) = 0. \end{aligned}$$

Y étant quelconque, donc on a $(\frac{d}{dt}\Theta(\gamma(t)|_{t=0})(Y)) = 0$.

La proposition ci-dessus montre que $\Theta_e^T = 0$, et $c_e^T = 0$; par suite $c_g^T = 0$ pour tout $g \in G$. Comme Θ est constante sur les composantes connexes de G , on a

$$\Theta(g)(X) = \Theta(e)(X) = J(X) - J(X) = 0,$$

pour tous $g \in G$ et $X \in \mathcal{G}$, d'où,

$$\varphi_g^* \circ J = J \circ Ad_g$$

pour tout $g \in G$. On a donc démontré la proposition suivante :

Proposition 4.11 L'application moment \tilde{J} est équivariante c'est à dire pour tout $g \in G$ on a

$$\tilde{J} \circ \varphi_g = Ad_g^* \circ \tilde{J}.$$

Corollaire 14 Soient M un G -espace hamiltonien, H une application hamiltonienne G -invariante; c'est à dire $H(\varphi(g, x)) = H(x)$ pour tous $g \in G$ et $x \in M$. Alors \tilde{J} est constante sur les trajectoires du champ de vecteurs X_H .

Considérons maintenant un G -espace k -symplectique strict, X^1, \dots, X^p une base de \mathcal{G} et H^1, \dots, H^p des applications hamiltoniennes de X_M^1, \dots, X_M^p respectivement. L'application linéaire J_0 de \mathcal{G} dans $\mathfrak{h}(M)$ définie par

$$J_0(X^i) = -H^i$$

pour tout $i(i = 1, \dots, p)$ satisfait la relation

$$X_{J_0(X)} = -X_M.$$

pour tout $X \in \mathcal{G}$. Lorsque J_0 est un morphisme d'algèbres de Lie, M est un G -espace hamiltonien. Supposons que J_0 ne soit pas un morphisme d'algèbres de Lie. Considérons à cet effet, l'application

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\longrightarrow \hbar(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \{J_0(X), J_0(Y)\} - J_0([X, Y]). \end{aligned}$$

Pour tout $(X, Y) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ on a

$$X_{\mu(X, Y)} = 0,$$

donc $\mu(X, Y)$ est constante sur M et par conséquent μ définit une application \mathbb{R} -bilinéaire anti-symétrique β de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ à valeurs dans \mathbb{R}^k .

Proposition 4.12 *Dans les hypothèses et notations ci-dessus on a les propriétés suivantes :*

1. $\delta\beta = 0$,
2. *si il existe $\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^k)$ tel que $\beta = \delta\alpha$, en particulier si le groupe de cohomologie de De Rham $H^2(M, \mathbb{R})$ est trivial, alors M admet un relèvement (qui n'est pas unique en général),*
3. *si $H^2(M, \mathbb{R})$ est trivial et $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathcal{G}$, le G -espace M possède un relèvement unique,*
4. *si β n'est pas un cobord, il existe un groupe de Lie connexe et simplement connexe \tilde{G}_β d'algèbre de Lie $\tilde{\mathcal{G}}_\beta = \mathcal{G} \times \mathbb{R}^k$ pour la loi*

$$B((X, T), (Y, S)) = ([X, Y], \beta(X, Y))$$

tel que M soit un \tilde{G}_β -espace hamiltonien.

Démonstration. Soient $Z^1, Z^2, Z^3 \in \mathcal{G}$. On a :

$$\begin{aligned} \delta\beta(Z^1, Z^2, Z^3) &= -\beta([Z^1, Z^2], Z^3) + \beta([Z^1, Z^3], Z^2) - \beta([Z^2, Z^3], Z^1) \\ &= -\{J_0([Z^1, Z^2]), J_0(Z^3)\} + \{J_0([Z^1, Z^3]), J_0(Z^2)\} \\ &\quad - \{J_0([Z^2, Z^3]), J_0(Z^1)\}, \end{aligned}$$

et pour tout α ($\alpha = 1, \dots, k$) on a :

$$\begin{aligned} \{J_0([Z^1, Z^2]), J_0(Z^3)\}^\alpha &= -\theta^\alpha([Z^1, Z^2]_M, Z^3_M) = (i(Z^3_M)\theta^\alpha)([Z^1, Z^2]_M) \\ &= -[Z^1, Z^2]_M(J_0^\alpha(Z^3)) = [Z^1_M, Z^2_M](J_0^\alpha(Z^3)) \\ &= [X_{J_0(Z^1)}, X_{J_0(Z^2)}](J_0^\alpha(Z^3)) \\ &= X_{\{J_0(Z^1), J_0(Z^2)\}}(J_0^\alpha(Z^3)) \\ &= -(i(Z^3_M)\theta^\alpha)(X_{\{J_0(Z^1), J_0(Z^2)\}}) \\ &= -\theta^\alpha(X_{\{J_0(Z^1), J_0(Z^2)\}}, X_{J_0(Z^3)}) \\ &= -\{\{J_0(Z^1), J_0(Z^2)\}, J_0(Z^3)\}^\alpha \end{aligned}$$

donc,

$$\{J_0([Z^1, Z^2]), J_0(Z^3)\} = -\{\{J_0(Z^1), J_0(Z^2)\}, J_0(Z^3)\}$$

par suite on a :

$$\begin{aligned} \delta\beta((Z^1, Z^2, Z^3)) &= \{\{J_0(Z^1), J_0(Z^2)\}, J_0(Z^3)\} - \{\{J_0(Z^1), J_0(Z^3)\}, J_0(Z^2)\} \\ &\quad + \{\{J_0(Z^2), J_0(Z^3)\}, J_0(Z^1)\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

et l'assertion 1 est démontrée.

Supposons qu'il existe $\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^k)$ tel que $\beta = \delta\alpha$. Soit J l'application de \mathcal{G} à valeurs dans $\mathfrak{h}(M)$ définie par

$$J(X)(x) = J_0(X)(x) - \alpha(X)$$

pour tout $X \in \mathcal{G}$ et $x \in M$. On a

$$\begin{aligned} (\{J(X), J(Y)\} - J[X, Y])(x) &= \{J_0(X), J_0(Y)\}(x) - J_0[X, Y](x) \\ &\quad + \alpha([X, Y]) = \mu(X, Y)(x) + \alpha([X, Y]) \\ &= \beta(X, Y) + \alpha([X, Y]) \\ &= \delta\alpha(X, Y)(x) + \alpha([X, Y]) = 0 \end{aligned}$$

pour tous $X, Y \in \mathcal{G}$ et $x \in M$. L'application J définit bien un relèvement de M , ce qui montre l'assertion 2.

Montrons l'unicité du relèvement. Supposons que $H^2(M, \mathbb{R}) = \{0\}$ et $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathcal{G}$. La propriété 2 montre que le G -espace k -symplectique M admet un relèvement. Soient J_1, J_2 deux relèvements de M . La relation

$$X_{J_1(X)} = X_{J_2(X)}$$

pour tout $X \in \mathcal{G}$, montre que l'application

$$J_1(X) - J_2(X),$$

de M dans \mathbb{R}^k est constante pour tout $X \in \mathcal{G}$; donc $J_1 - J_2$ définit une application de \mathcal{G} dans \mathbb{R}^k qui est un homomorphisme d'algèbres de Lie de \mathcal{G} dans \mathbb{R}^k ; d'où

$$(J_1 - J_2)([X, Y]) = 0$$

pour tout $X, Y \in \mathcal{G}$. Ainsi la restriction de l'application $J_1 - J_2$ à $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ est nulle, et l'égalité $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathcal{G}$ montre que $J_1 - J_2 = 0$.

Démontrons le point 4. Supposons que β ne soit pas un cobord. Soient $\tilde{\mathcal{G}}_\beta$ l'espace produit

$$\tilde{\mathcal{G}}_\beta = \mathcal{G} \times \mathbb{R}^k$$

et B l'application

$$\begin{aligned} B : \tilde{\mathcal{G}}_\beta \times \tilde{\mathcal{G}}_\beta &\longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}_\beta \\ (u, v) &\longmapsto B(u, v) = ([X, Y], \beta(X, Y)) \end{aligned}$$

où $u = (X, T)$ et $v = (Y, S) \in \tilde{\mathcal{G}}_\beta$. Cette application est \mathbb{R} -bilinéaire antisymétrique. La relation $\delta\beta = 0$ montre que l'identité de Jacobi est satisfaite, et donc, $(\tilde{\mathcal{G}}_\beta, B)$ est une algèbre de Lie réelle. Soit J l'application de $\tilde{\mathcal{G}}_\beta$ dans $\mathfrak{h}(M)$ définie par :

$$J(u) = J_0(X) + T$$

pour tout $u = (X, T) \in \tilde{\mathcal{G}}_\beta$. On a

$$\{J(u), J(v)\} - J(B(u, v)) = \{J_0(X), J_0(Y)\} - J_0([X, Y]) - \beta(X, Y) = 0,$$

pour tous $u = (X, T), v = (Y, S) \in \tilde{\mathcal{G}}_\beta$, donc J est un morphisme d'algèbres de Lie de $\tilde{\mathcal{G}}_\beta$ dans $\mathfrak{h}(M)$ vérifiant :

$$X_{J(u)} = -X_M$$

pour tout $u = (X, T) \in \tilde{\mathcal{G}}_\beta$. Soit \tilde{G}_β un groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\tilde{\mathcal{G}}_\beta$ et \tilde{H}_β le sous-groupe de Lie connexe de \tilde{G}_β ayant pour algèbre de Lie $\mathcal{H}_\beta = 0_{\mathcal{G}} \times \mathbb{R}^k$. La sous-algèbre de Lie \mathcal{H}_β est un idéal de $\tilde{\mathcal{G}}_\beta$, donc \tilde{H}_β est un sous-groupe de Lie normal de \tilde{G}_β . La variété quotient $\tilde{G}_\beta/\tilde{H}_\beta$ est un groupe de Lie connexe et simplement connexe dont l'algèbre de Lie est isomorphe à \mathcal{G} ; il existe donc un revêtement différentiable

$$p : \tilde{G}_\beta/\tilde{H}_\beta \longmapsto G$$

de base G et d'espace total $\tilde{G}_\beta/\tilde{H}_\beta$. Soit \tilde{p} l'application de \tilde{G}_β dans G définie par :

$$\tilde{p}(\tilde{g}) = p(\tilde{g}\tilde{H}_\beta)$$

pour tout $\tilde{g} \in \tilde{G}_\beta$. Le groupe \tilde{G}_β opère différentiablement sur M par :

$$\tilde{\varphi}(\tilde{g}, x) = \varphi(\tilde{p}(\tilde{g}), x)$$

pour tous $\tilde{g} \in \tilde{G}_\beta$ et $x \in M$. Par rapport à l'action $\tilde{\varphi}$ on a

$$X_{J(u)} = -u_M = -X_M,$$

pour tout $u = (X, T) \in \tilde{\mathcal{G}}_\beta$ c'est à dire J est un relèvement du \tilde{G}_β -espace M ; ce qui montre que M est un \tilde{G}_β -espace hamiltonien.

4.2 Le groupe de Heisenberg d'ordre k .

Soit M l'espace réel $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ muni de sa structure k -symplectique canonique définie par les 2-formes $\theta^\alpha = \sum_{i=1}^n dx^{\alpha i} \wedge dx^i$ et par le sous-fibré E de $T\mathbb{R}^{n(k+1)}$ donné par les équations $dx^1 = \dots = dx^n = 0$; $(x^{\alpha i}, x^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ étant les coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^{n(k+1)}$. Le groupe additif $G = \mathbb{R}^{n(k+1)}$ opère différenciablement et transitivement sur M par l'application φ définie par

$$\varphi(g, x) = x + g.$$

Cette action est effective (elle est même libre). L'algèbre de Lie \mathcal{G} du groupe de Lie G est l'espace $\mathbb{R}^{n(k+1)}$ muni de sa structure triviale d'algèbre de Lie, les actions adjointes et coadjointes de G sur M et $\text{Hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^k)$ respectivement sont également triviales. Pour tout $X \in \mathcal{G}$, le champ de vecteurs X_M associé à X est défini par

$$X_M(x) = X$$

pour tout $x \in M$.

Proposition 4.13 *La variété M est un G -espace k -symplectique.*

La famille

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha i}}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$$

défini par les dérivations associées au système de coordonnées cartésiennes $(x^{\alpha i}, x^i)_{1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n}$ forme une base de \mathcal{G} . Les applications $H^{\alpha i}, H^i$ ($1 \leq \alpha \leq k, 1 \leq i \leq n$), de M dans \mathbb{R}^k , définies par

$$H^{\alpha i} = -(\delta_1^\alpha x^i, \dots, \delta_k^\alpha x^i) \quad , \quad H^i = -(x^{1i}, \dots, x^{ki})$$

satisfont à

$$X_{H^{\alpha i}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha i}} \right)_M \quad , \quad X_{H^i} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_M.$$

Soit J_0 l'application \mathbb{R} -linéaire de \mathcal{G} dans $\mathfrak{h}(M)$ définie par

$$J_0 \left(\sum_{\alpha j} X^{\alpha j} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha j}} + \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = - \left(\sum_{\alpha j} X^{\alpha j} H^{\alpha j} + \sum_j X^j H^j \right).$$

Cette application satisfait à

$$X_{J_0(X)} = -X_M,$$

pour tout $X \in \mathcal{G}$, donc M est un G -espace k -symplectique strict. Le fait que \mathcal{G} est une algèbre de Lie abélienne et que $\hbar(M)$ ne le soit pas montre que J_0 n'est pas un morphisme d'algèbres de Lie et que l'application β définie ci-dessus n'est pas un cobord. Considérons l'algèbre de Lie

$$\tilde{\mathcal{G}}_\beta = \mathcal{G} \times \mathbb{R}^k$$

munie de la loi

$$B((X, T), (Y, S)) = (0, \beta(X, Y))$$

avec

$$\beta(X, Y) = \{J_0(X), J_0(Y)\} - J_0([X, Y]) = \{J_0(X), J_0(Y)\}.$$

Soit $\tilde{H}_{(n,k)}$ le groupe de Lie

$$\tilde{H}_{(n,k)} = \mathbb{R}^{n(k+1)} \times \mathbb{R}^k$$

dont la loi du groupe est donnée par

$$u.v = (X + Y, T + S + \frac{1}{2}\beta(X, Y))$$

pour tous $u = (X, T), v = (Y, S) \in \tilde{H}_{(n,k)}$.

Définition 4.6 *Le groupe de Heisenberg d'ordre k est le groupe de Lie connexe et simplement connexe de dimension $(k+1)n+k$ dont le groupe dérivé coïncide avec son centre.*

Ce groupe possède une r -structure de contact invariante à gauche (voir chapitre 4). Il joue le même rôle que le groupe de Heisenberg par rapport aux structures de contact. Il peut se représenter comme le groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} I_k & P & T \\ 0 & I_n & Q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où I_n désigne la matrice identité d'ordre n . Son algèbre de Lie $\mathcal{H}_{(n,k)}$ est l'algèbres de Lie des matrices du type

$$(X, Y, T) = \begin{pmatrix} 0 & X & T \\ 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où X une matrice réelle $k \times n$ et T (resp. Y) est une matrice colonne d'ordre k (resp. n).

Proposition 4.14 $\tilde{H}_{(n,k)}$ est un groupe de Lie connexe et simplement connexe ayant pour algèbre de Lie $\tilde{\mathcal{G}}_\beta$ et est isomorphe au groupe de Heisenberg $H(n,k)$ d'ordre k .

Démonstration. Soit

$$(X, Y, T) = \begin{pmatrix} 0 & X & T \\ 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

un élément de $\mathcal{H}_{(n,k)}$. L'application

$$(X, Y, T) \longmapsto ((X, Y), T)$$

de $\mathcal{H}_{(n,k)}$ dans $\tilde{\mathcal{G}}_\beta$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Proposition 4.15 L'application J de $\mathcal{H}_{(n,k)}$ dans $\mathfrak{h}(M)$ définie par

$$J(X, Y, T) = J_0(X, Y) + T$$

pour tout (X, Y, T) appartenant à $\mathcal{H}_{(n,k)}$, est un relèvement de M , et donc, M est un $H_{(n,k)}$ -espace hamiltonien.

Le moment correspondant est l'application de M dans $\text{Hom}(\mathcal{H}_{(n,k)}, \mathbb{R}^k)$ définie par

$$\tilde{J}(x)(X, Y, T) = J_0(X, Y)(x) + T$$

pour tous $x \in M$ et $(X, Y, T) \in \mathcal{H}_{(n,k)}$.

4.3 Opération coadjointe associée

Soient M un G -espace hamiltonien homogène muni d'un relèvement J de moment \tilde{J} et soit \mathcal{H}^E le sous-ensemble de \mathcal{G} formé des éléments X tels que $X_M \in \Gamma(E)$. \mathcal{H}^E est une sous-algèbre de Lie de \mathcal{G} .

Proposition 4.16 Soit $x \in M$. L'espace tangent au feuilletage \mathcal{F} au point x est donné par :

$$E_x = \{X_M(x) \mid X \in \mathcal{H}^E\}.$$

Démonstration. Il résulte aussitôt de la définition de \mathcal{H}^E que l'on a

$$X_M(x) \in E_x$$

pour tout $X \in \mathcal{H}^E$. Réciproquement soit $v_x \in E_x$. En munissant la variété M de la structure de variété différentiable définie par le feuilletage \mathcal{F} . Cette variété est de dimension nk et les feuilles sont les composantes connexes. L'espace tangent à M au point x pour cette structure de variété n'est rien d'autre que E_x . L'opération de G sur M étant transitive, il existe $X \in \mathcal{G}$ tel que

$$v_x = X_M(x).$$

Or pour la structure initiale de variété différentiable de M , X_M est une section de E , donc $X \in \mathcal{H}^E$; autrement dit :

$$v_x = X_M(x)$$

avec $X \in \mathcal{H}^E$.

Proposition 4.17 *Si l'action de G sur M est effective, alors la sous-algèbre de Lie \mathcal{H}^E est abélienne.*

Démonstration. Comme les champs fondamentaux sont hamiltoniens, pour tous $X, Y \in \mathcal{H}^E$ et $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$ on a

$$L_{X_M}\theta^\alpha = L_{Y_M}\theta^\alpha = 0,$$

et par conséquent on a :

$$\begin{aligned} i([X, Y]_M)\theta^\alpha &= -i([X_M, Y_M])\theta^\alpha = -[L_{X_M}, i(Y_M)]\theta^\alpha \\ &= -L_{X_M}(i(Y_M)\theta^\alpha) = d(\theta^\alpha(X_M, Y_M)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour tout $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$, puisque X_M et Y_M sont tangents aux feuilles de \mathcal{F} , et donc,

$$[X, Y]_M \in C_x(\theta^1) \cap \dots \cap C_x(\theta^k),$$

d'où

$$[X, Y]_M = 0.$$

L'action de G sur M étant effective, on a

$$[X, Y] = 0,$$

ce qui montre que l'algèbre de Lie \mathcal{H}^E est abélienne.

Exemple. Reprenons le cas de l'espace k -symplectique canonique. \mathcal{H}^E est la sous-algèbre de Lie $tp(k, n; \mathbb{R})$ du sous-groupe $Tp(k, n; \mathbb{R})$ de $Sp(k, n; \mathbb{R})$ engendré par les transvections k -symplectiques. La sous-algèbre de Lie $tp(k, n; \mathbb{R})$ est un idéal abélien de $sp(k, n; \mathbb{R})$.

Pour tout $X \in \mathcal{G}$, on désigne par X^* le champ fondamental associé à X par l'action coadjointe de G sur $Hom(\mathcal{G}, \mathbb{R}^k)$; il résulte de l'égalité

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{exp(tX)}Y = [X, Y],$$

que l'on a

Proposition 4.18 *Pour tous $X, Y \in \mathcal{G}$ et $f \in Hom(\mathcal{G}, \mathbb{R}^k)$ on a*

$$\langle X^*(f), Y^*(f) \rangle = - \langle f, [X, Y] \rangle .$$

Soient O une G -orbite coadjointe, $f = (f^\alpha)_{1 \leq \alpha \leq k}$ un point de la G -orbite O et $X_1, X_2, Y \in \mathcal{G}$ tels que

$$X_1^*(f) = X_2^*(f).$$

Pour tout $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$ on a

$$\langle f^\alpha, [X_1, Y] \rangle = \langle f^\alpha, [X_1 - X_2, Y] \rangle + \langle f^\alpha, [X_2, Y] \rangle .$$

En effet $X_1 - X_2$ est dans l'algèbre de Lie \mathcal{G}_f du sous-groupe d'isotropie G_f de f relativement à l'opération coadjointe, donc

$$\langle f^\alpha, [X_1 - X_2, Y] \rangle = \langle (X_1 - X_2)^*(f^\alpha), Y \rangle = 0,$$

et par conséquent on a

$$\langle f^\alpha, [X_1, Y] \rangle = \langle f^\alpha, [X_2, Y] \rangle .$$

Ceci montre qu'on a

Proposition 4.19 *Sur toute G -orbite coadjointe O , on a k formes différentielles $\Omega^1, \dots, \Omega^k$ de degré 2 définies par :*

$$\Omega_f^\alpha(X^*(f), Y^*(f)) = - \langle f^\alpha, [X, Y] \rangle$$

pour tous $f = (f^\alpha)_{1 \leq \alpha \leq k}$ appartenant à la G -orbite O , $X^*(f), Y^*(f) \in T_f O$ et $\alpha = 1, \dots, k$. Ces formes différentielles $\Omega^1, \dots, \Omega^k$ sont fermées.

Démonstration. Soient $f = (f^\alpha)_{1 \leq \alpha \leq k} \in O$, $X, Y, Z \in \mathcal{G}$ et $\alpha = 1, \dots, k$. Les égalités

$$\begin{aligned} \Omega_f^\alpha([X^*, Y^*], Z^*) &= -\Omega_f^\alpha([X^*, Z^*], Y^*) + \Omega_f^\alpha([Y^*, Z^*], X^*) \\ &= \langle f^\alpha, [[X, Y], Z] \rangle - \langle f^\alpha, [[X, Z], Y] \rangle \\ &\quad + \langle f^\alpha, [[Y, Z], X] \rangle = 0 \end{aligned}$$

impliquent

$$d\Omega_f^\alpha(X^*, Y^*, Z^*) = X_f^*(\Omega_f^\alpha(Y^*, Z^*)) - Y_f^*(\Omega_f^\alpha(X^*, Z^*)) + Z_f^*(\Omega_f^\alpha(X^*, Y^*)).$$

Or

$$\begin{aligned} X_f^*(\Omega_f^\alpha(Y^*, Z^*)) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\psi(Ad_{exp(tX)}^*(f))) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\Omega_{Ad_{exp(tX)}^*(f)}^\alpha(Y^*, Z^*)) \\ &= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle f^\alpha \circ Ad_{exp(-tX)}, [Y, Z] \rangle \\ &= \langle f^\alpha, [X, [Y, Z]] \rangle \end{aligned}$$

avec $\psi = \Omega^\alpha(Y^*, Z^*)$; et donc,

$$\begin{aligned} d\Omega_f^\alpha(X^*, Y^*, Z^*) &= \langle f^\alpha, [X, [Y, Z]] \rangle - \langle f^\alpha, [Y, [X, Z]] \rangle \\ &\quad + \langle f^\alpha, [Z, [X, Y]] \rangle = 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que les formes différentielles Ω^α sont fermées.

Proposition 4.20 *Si l'action de G sur M est effective, alors*

$$\Omega^\alpha(X^*(f), Y^*(f)) = 0$$

pour tous $X, Y \in \mathcal{H}^E$, $f \in O$ et $\alpha = 1, \dots, k$.

Soient M un G -espace hamiltonien homogène muni d'un relèvement J , \tilde{J} le moment associé à J et x_0 un point de M . La transitivité de l'action de G sur M montre que pour tout x de M il existe $g \in G$ tel que $x = \varphi(g, x_0)$ et l'équivariance de \tilde{J} donne

$$\tilde{J}(x) = \tilde{J}(\varphi(g, x_0)) = Ad_g^*(\tilde{J}(x_0)),$$

ce qui montre que $\tilde{J}(M)$ est une G -orbite coadjointe. Soient $f \in Hom(\mathcal{G}, \mathbb{R}^k)$, $O = G.f$ une G -orbite coadjointe de f et J_f l'application de \mathcal{G} dans $C^\infty(O, \mathbb{R}^k)$ définie par

$$J_f(X)(p) = \langle p, X \rangle$$

pour tout $X \in \mathcal{G}$ et $p \in O$. On a :

$$\tilde{J}^*(J_f(X))(x) = J_f(X)(\tilde{J}(x)) = \langle \tilde{J}(x), X \rangle = J(X)(x)$$

pour tous $X \in \mathcal{G}$ et $x \in M$, d'où

$$\tilde{J}^* \circ J_f = J.$$

Il résulte qu'on a la

Lemme 4.1 *Pour tout $X \in \mathcal{G}$, si $J_f(X)$ est constante sur O , alors $J(X)$ est constante sur M .*

L'application moment étant équivariante, pour tous $X \in \mathcal{G}$ et $x \in M$ on a

$$\begin{aligned} (\tilde{J}_* X_M)(\tilde{J}(x)) &= \tilde{J}_x^T X_M(x) = \tilde{J}_x^T \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi(\exp(tX), x) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tilde{J}(\varphi(\exp(tX), x)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Ad_{\exp(tX)}^* (\tilde{J}(x)) \\ &= X^*(\tilde{J}(x)), \end{aligned}$$

et

$$\tilde{J}_* X_M = X^*.$$

Soient $X, Y \in \mathcal{G}$, $f \in \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^k)$, $O = G.f$ une G -orbite coadjointe de f , $p \in O$ et $\alpha = 1, \dots, k$. On a

$$\begin{aligned} d(J_f^\alpha(X))_p(Y^*) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} J_f^\alpha(X)(Ad_{\exp(tY)}^*(p)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle Ad_{\exp(tY)}^*(p^\alpha), X \rangle \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle p^\alpha, Ad_{\exp(-tY)} X \rangle = \langle p^\alpha, [X, Y] \rangle \\ &= -\Omega_p^\alpha(X^*(p), Y^*(p)) = -(i(X^*)\Omega_p^\alpha)(Y^*). \end{aligned}$$

D'où

Proposition 4.21 *Pour tous $X \in \mathcal{G}$ et $\alpha = 1, \dots, k$ on a*

$$i(X^*)\Omega^\alpha = -d(J_f^\alpha(X)).$$

Soient $X \in \mathcal{G}$, $f \in \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathbb{R}^k)$ et $O = G.f$. Les trois propositions qui précèdent montrent que l'égalité $\tilde{J}_* X_M = 0$ entraîne que $J_f(X)$ est constante sur O ; et donc $J(X)$ est constante sur M , par conséquent $i(X_M)\theta^\alpha = 0$ pour tout $\alpha = 1, \dots, k$; il résulte de la définition d'une structure k -symplectique que $X_M = 0$ et l'application \tilde{J} est une immersion; en

particulier on a $\dim G \leq \dim(O)$. L'équivariance de l'application moment montre alors que

$$G_{x_0} \subseteq G_{\tilde{J}(x_0)}$$

où G_{x_0} , $G_{\tilde{J}(x_0)}$ sont les sous-groupes d'isotropie de x_0 et de $\tilde{J}(x_0)$ respectivement; d'où $\dim(M) \geq \dim(O)$. Il en découle que les composantes connexes de l'unité $G_{x_0}^e$ et $G_{\tilde{J}(x_0)}^e$ coïncident, et par conséquent, le quotient $G_{\tilde{J}(x_0)}/G_{x_0}$ est discret; ceci montre que la fibration

$$\tilde{J} : M = G/G_{x_0} \longrightarrow O = G/G_{\tilde{J}(x_0)}$$

dont la fibre type est discrète, est un revêtement.

On a donc montré le résultat suivant :

Proposition 4.22 *Soient M un G -espace hamiltonien homogène muni d'un relèvement \tilde{J} de moment \tilde{J} . Alors $\tilde{J}(M)$ est une G -orbite coadjointe et l'application \tilde{J} définit un revêtement de M sur une G -orbite coadjointe O .*

On suppose que l'action de G sur M est transitive et effective. Soit $E^{(O)}$ le sous-fibré de TO défini par

$$E_p^{(O)} = \{X_p^* \mid X \in \mathcal{H}^{(E)}\}$$

pour tout $p \in O$. La proposition précédente montre que la variété O est de dimension $n(k+1)$ et que le sous-fibré $E^{(O)}$ de TO est de codimension n et est intégrable.

Proposition 4.23 *Soient M un G -espace hamiltonien homogène, x_0 un point de M et $f = \tilde{J}(x_0)$. Alors*

$$(\Omega^1, \dots, \Omega^k; E^{(O)})$$

définit une structure k -symplectique sur $O = G.f$.

Démonstration. Si pour un point $p = (p^\alpha)_{1 \leq \alpha \leq k}$ de O et $X \in \mathcal{G}$ on a $i(X^*)\theta^\alpha = 0$ pour tout $\alpha = 1, \dots, k$, alors

$$\langle p^\alpha, [Y, X] \rangle = \langle X^*(p^\alpha), Y \rangle = 0;$$

pour tout $Y \in \mathcal{G}$; Y et α étant quelconques, $X^*(p) = 0$, ce qui montre que la première condition de la définition d'une structure k -symplectique est satisfaite; quant à la deuxième condition, elle résulte du fait que

$$\Omega^\alpha(X^*(f), Y^*(f)) = 0,$$

pour tous $X, Y \in \mathcal{H}^E$.

Proposition 4.24 *Dans les hypothèses et notations de la proposition précédente on a :*

1. *La G -orbite coadjointe $O = G.f$ de f est un G -espace hamiltonien homogène et J_f en est un relèvement,*
2. *L'application moment \tilde{J} est un morphisme de variétés k -symplectiques; plus précisément on a*

$$\begin{cases} \tilde{J}\Omega^\alpha = \theta^\alpha, & \alpha = 1, \dots, k \\ \tilde{J}_*(E) = E^{(O)}. \end{cases}$$

Démonstration. Pour tous $X, Y \in \mathcal{G}$, α ($\alpha = 1, \dots, k$) et $p \in O$ on a :

$$(\psi_g^* \Omega^\alpha)_p(X^*(p), Y^*(p)) = \Omega_{\psi_g(p)}^\alpha((\psi_g)_p^T X^*(p), (\psi_g)_p^T Y^*(p))$$

où $\psi_g = Ad_g^*$. Or

$$(\psi_g)_p^T X^*(p) = ((\psi_g)_* X^*)_p = (Ad_g X)^*(p),$$

donc,

$$\begin{aligned} (\psi_g^* \Omega^\alpha)_p(X^*(p), Y^*(p)) &= \Omega_{\psi_g(p)}^\alpha((Ad_g X)^*(p), (Ad_g Y)^*(p)) \\ &= - \langle p^\alpha, Ad_{g^{-1}}([Ad_g X, Ad_g Y]) \rangle \\ &= - \langle p^\alpha, [X, Y] \rangle \\ &= \Omega_p^\alpha(X^*(p), Y^*(p)). \end{aligned}$$

On donc montré que la première condition de la définition d'un G -espace k -symplectique strict est satisfaite; quant à la deuxième condition, elle provient de la relation $\tilde{J}_* X_M = X^*$. La relation

$$i(X^*)\Omega^\alpha = -d(J_f^\alpha(X))$$

montre que l'orbite O est un G -espace k -symplectique strict. Soient $X, Y \in \mathcal{G}$, α ($\alpha = 1, \dots, k$) et $p \in O$. On a :

$$\begin{aligned} \{J_f(X), J_f(Y)\}(p) &= -(\Omega_p^1(X_{J_f(X)}, X_{J_f(Y)}), \dots, \Omega_p^k(X_{J_f(X)}, X_{J_f(Y)})) \\ &= -(\Omega_p^1(X^*(p), Y^*(p)), \dots, \Omega_p^k(X^*(p), Y^*(p))) \\ &= \langle p, [X, Y] \rangle \\ &= J_f([X, Y])(p), \end{aligned}$$

donc J_f est un morphisme d'algèbres de Lie de \mathcal{G} dans $\mathfrak{h}(O)$, et par conséquent la G -orbite coadjointe O est un G -espace hamiltonien homogène, et la propriété 1 est démontrée. La propriété (b) provient de la relation $\tilde{J}_* X_M = X^*$ et de la proposition 8.22. Soient maintenant $X, Y \in \mathcal{G}$, $\alpha (\alpha = 1, \dots, k)$ et $x_0 \in M$. On a :

$$\begin{aligned}
(\tilde{J}^* \Omega^\alpha)_{x_0}(X_M(x_0), Y_M(x_0)) &= \Omega_{\tilde{J}(x_0)}^\alpha((\tilde{J}_* X_M)(x_0), (\tilde{J}_* Y_M)(x_0)) \\
&= \Omega_{\tilde{J}(x_0)}^\alpha(X_M^*(\tilde{J}(x_0)), Y_M^*(\tilde{J}(x_0))) \\
&= - \langle \tilde{J}^\alpha(x_0), [X, Y] \rangle \\
&= - \langle J^\alpha([X, Y]), x_0 \rangle \\
&= \{J(X), J(Y)\}^\alpha(x_0) \\
&= \theta_{x_0}^\alpha(X_M(x_0), Y_M(x_0)) ;
\end{aligned}$$

ceci achève la démonstration de (a) et la proposition est démontrée.

Bibliographie

- [1] E. ARTIN. *Algèbre géométrique* Gauthiers-Villars (1972).
- [2] L. AUSLANDER *Examples of locally affine spaces* Ann. of Maths. 64 (1964) 255-259.
- [3] L. AUSLANDER *The structure of complete locally affine manifolds.* Topology 3 suppl.1 (1964) 131-139.
- [4] L. AUSLANDER and L. MARKUS *Holonomy of flat affinely connected manifolds.* Ann. of Math. Princeton 62(1955) 139-151.
- [5] A. AWANE *Sur une généralisation des structures symplectiques.* Thèse Strasbourg (1984).
- [6] A. AWANE *k-symplectic structures* . Journal of Mathematical physics 33(1992) 4046-4052. U.S.A.
- [7] A. AWANE *G-espaces k-symplectiques homogènes.* Journal of Geometry and Physics. 13(1994) 139-157. North-Holland.
- [8] A. AWANE *Structures k-symplectiques.* Thèse Mulhouse(1992).
- [9] A. AWANE *Some affine properties of the k-symplectic manifolds.* A paraître dans "Contribution to Algebra and Geometry *Beiträge zur Algebra und Geometrie*".
- [10] ROBERT A. BLUMENTHAL *Foliated variétés with flat basic connection.* J. Differential Geometry , 16 (1981) 401-406.
- [11] R. BOTT *Lectures on characteristic classes and foliations.* Lecture note in Mathematics, 279 (Springer-Verlag, New-York . 1972) 1-80.
- [12] E. CARTAN. *Les systèmes de Pfaff à 5 variables.* Ann. Sci. Ec. Nor. Sup. 27(1910) 109-192.

- [13] L. CONLON *Transversally parallelizable foliations of codimension 2*. Trans. Amer. Math. soc. 194(1974)79-102.
- [14] P. DAZORD *Sur la géométrie des sous-fibrés et des feuilletages lagrangiens*. Ann. Ecole Normale Sup. 14 Paris (1981) 465-480.
- [15] J. DIEUDONNE *La géométrie des groupes classiques*. Springer-Verlag (1971).
- [16] J. DIEUDONNE *Eléments d'Analyse*. Gauthiers-Villars (1974).
- [17] R. GARDNER *Invariants of Pfaffian systems*. TRAMS 126(1967) 514-433.
- [18] C. GODBILLON *Géométrie différentielle et Mécanique Analytique*. Hermann. Paris (1969).
- [19] C. GODBILLON *FEUILLETAGES. Etude géométrique*. Birkhäuser (1991).
- [20] C. GODBILLON *Eléments de topologie algébrique*. Hermann. Paris (1971).
- [21] E. GOURSAT *Leçons sur les systèmes de Pfaff*. Paris. 1922.
- [22] M.GOZE. *Systèmes de Pfaff*. Rendiconti Seminario. Facoltà di Scienze. Università di Cagliari Vol. 60 Fasc.2 (1990) 167-187.
- [23] M.GOZE. *Systèmes de Pfaff associés aux algèbres de type H*. Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino Vol. 46, 1 (1988) 91-110.
- [24] M.GOZE. *Sur la classe des formes invariantes à gauche sur un groupe de Lie* CRAS, Paris, (1976), T283 SA 499-502.
- [25] M. GOZE - A. BOUYAKOUB *Sur les algèbres de Lie munie d'une forme symplectique*. Rendiconti Seminario Facoltà Scienze. Università Cagliari Vol. 37 Fasc. 57 1(1987) 86-97.
- [26] M. GOZE - Y. HARAGUCHI *Sur les r-systèmes de contact*. CRAS, Paris, (1982), T294 SI 95-97.
- [27] M. GOZE - Y. KHAKIMDJANOV *Nilpotent Lie algebras*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht / Boston / London (1996).
- [28] S. HELGASON *Differential Geometry, Lie groups and Symmetric spaces* . Academic Press. New-York (1978).

- [29] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU *Foundations of differential Geometry*. Volume 1. Interscience Publishers New-York (1963).
- [30] M. de LEON-MENDEZ-SALGADO. *Regular p-almost cotangent structures*. J. Korean Math. Soc. 25 (1988) Nø2; 273-287.
- [31] P. LIBERMANN et C.M.MARLE *Géométrie symplectique Bases théorique de la Mécanique classique*. Tomes 1, 2, 3, U.E.R. de Mathématiques, L.A. 212 et E.R.A. 944, 1020, 1021 du C.N.R.S.
- [32] A. MEDINA *Structures de Poisson affines*. Colloque international Aix-en-Provence (1990).
- [33] P.MOLINO *Géométrie de Polarisation*. Travaux en cours Hermann (1984) 37-53.
- [34] P.MOLINO *Géométrie globale des feuilletages riemanniens*. Proc. Kon. Nederl. Akad. Ser.A, 1,85(1982) 45-76.
- [35] K. NOMIZU *Lie Groups and differential Geometry*. Math. Soc. Japan (1956).
- [36] Y.NAMBU *Generalized Hamiltonian Dynamics*. Physical Review D Volume 7, Number 8 15 April 1973.
- [37] M. POSTNIKOV *Groupes et Algèbres de Lie*. Mir. Moscou.(1985).
- [38] M. PUTA *Some Remarks on the k-symplectic manifolds*. Tensors.109-115.
- [39] T. SARI *Sur les variétés de contact localement affines*. CRAS, Paris, (1981), T292 SI 809-812.
- [40] T. SARI *Sur les variétés de contact affines plates*. Séminaire Gaston-Darboux de Géométrie et Topologie, (1991-1992).
- [41] S. STERNBERG *Lectures on differential Geometry*. Prentice Hall (1964).
- [42] N. WALLACH *Symplectic Geometry and Fourier Analysis*. MATH. SCI. PRESS, 53, Jordan Road, Brookline, Massachusetts. 02146 (1977).
- [43] G. WARNER *Foundations of differential manifolds and Lie groups*. Scott, Foresman and co., Glenview (1972).

- [44] A. WEINSTEIN *Lectures on symplectic manifolds*. Conference board of mathematical science, (Regional Conference Series in Mathematics n 29 , A.M.S.) (1977).
- [45] A. WEINSTEIN *Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds*. Advances in Maths, 6 (1971), 329-346.
- [46] J.A. WOLF *Spaces of constant curvature* (University de California, 1972).