

Rubrique : Statistique/Statistics

Titre : Schémas de discrétisation anticipatifs et Estimation d'une diffusion

Title : Anticipative and approximate schemes and Estimation of a diffusion

Titre courant : Schémas anticipatifs et Estimation d'une diffusion

Sandie SOUCHET SAMOS, Université Paris 1, 90, rue de Tolbiac, 75013 PARIS

Résumé. Nous proposons une méthode d'estimation pour le paramètre de dérive d'une diffusion ergodique observée à pas constant $\delta > 0$. En adaptant la méthode d'estimation des Moments Généralisés (Hansen) au schéma d'approximation anticipatif du trapèze (respectivement de Simpson), nous obtenons un estimateur asymptotiquement normal et efficace à un biais explicite en δ^2 (resp. δ^4) près.

Abstract. We propose an estimation method for the drift parameter of an ergodic diffusion observed at constant step $\delta > 0$. Adapting the Generalized Method of Moments (Hansen) to the anticipative and approximate trapezoidal scheme (respectively Simpson's), we obtain an asymptotically normal and efficient estimator with a bias of order δ^2 (resp. δ^4).

1 Introduction

Dans [2], Florens-Zmirou associe la méthode d'estimation des moindres carrés au schéma d'approximation d'Euler à pas $\delta > 0$ et obtient une estimation du paramètre de dérive, θ_0 , avec un biais de l'ordre de δ . Il existe néanmoins des méthodes plus fines pour approcher l'intégrale d'une fonction numérique. On peut citer la méthode du trapèze ou la méthode Simpson (§ 2). Cependant, le caractère anticipatif de ces schémas entraîne un biais systématique dans l'estimation par moindres carrés. Aussi, on doit coupler ces schémas à la méthode d'estimation des *Moments Généralisés* (G.M.M.) (cf. Hansen [4],[5]; Gourieroux et Monfort [3]). Comme nous le montrons au § 3, cette procédure d'estimation permet d'affiner le contrôle du biais qui est alors en δ^2 pour le schéma du trapèze et en δ^4 pour le schéma de Simpson, cela sans perte d'efficacité. Ces résultats sont illustrés à partir de simulations au § 4 dans le cas du modèle de Ornstein-Uhlenbeck (O.U.) pour les schémas d'Euler, du trapèze et de Simpson.

2 Présentation des schémas d'approximation anticipatifs

Soit l'équation différentielle stochastique (e.d.s.) : $dY_t = f(Y_t) dt + \sigma(Y_t) dW_t$. Notons A le générateur associé, défini par : $\forall h \in C^2(\mathbb{R}), Ah = fh' + \frac{1}{2}\sigma^2 h''$; A^l représente alors le $l^{\text{ième}}$ itéré de A . Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration naturelle du brownien $(W_t)_{t \geq 0}$.

Propriété 1 *Supposons que $f \in C^4(\mathbb{R})$ et $\sigma \in C^2(\mathbb{R})$. Si Y est une solution de l'e.d.s. et si, pour $l = 0, 1$, $E \left(\int_0^t [(A^l f)' \sigma]^2(Y_v) dv \right) < \infty$ et $E \left(\int_0^t \sigma^2(Y_v) dv \right) < \infty$, alors :*

$\forall t \geq 0, Y_{t+\delta} = Y_t + \frac{\delta}{2} (f(Y_t) + f(Y_{t+\delta})) + \eta_t + \tilde{W}_t, \left(\tilde{W}_t \right)_{t \geq 0}$ étant une suite de variables de carré intégrable telles que $E \left(\tilde{W}_t \mid \mathcal{F}_t \right) \stackrel{p.s.}{=} 0$ et $\eta_t = \frac{1}{2} \int_t^{t+\delta} (t + \delta - v)(t - v) A^2 f(Y_v) dv$

On constate que l'erreur η_t est en $O(\delta^3)$, là où l'approximation d'Euler, approchant l'intégrale par $\delta f(Y_t)$, donne une erreur en $O(\delta^2)$. De même, la transposition de la méthode de Simpson donne un résultat conforme à celui attendu : la variable d'erreur, η_t , est un $O(\delta^5)$.

Propriété 2 Supposons que $f \in C^8(\mathbb{R})$ et $\sigma \in C^6(\mathbb{R})$. Si Y est une solution de l'e.d.s. et si, pour $l = 0, \dots, 3$, $E \left(\int_0^t \left[(A^l f)' \sigma \right]^2 (Y_v) dv \right) < +\infty$ et $E \left(\int_0^t \sigma^2 (Y_v) dv \right) < \infty$, alors :

$\forall t \geq 0$, $Y_{t+2\delta} = Y_t + \frac{\delta}{3} (f(Y_t) + 4f(Y_{t+\delta}) + f(Y_{t+2\delta})) + \eta_t + \tilde{W}_t^1 + \tilde{W}_t^2$, $(\tilde{W}_t^1)_{t \geq 0}$ et $(\tilde{W}_t^2)_{t \geq 0}$ étant des suites de variables de carré intégrable qui vérifient $E(\tilde{W}_t^1 | \mathcal{F}_t) \stackrel{p.s.}{=} 0$ et $E(\tilde{W}_t^2 | \mathcal{F}_{t+\delta}) \stackrel{p.s.}{=} 0$ et

$$\eta_t = \frac{1}{4!} \int_t^{t+\delta} (v-t)^3 \left(v-t - \frac{4\delta}{3} \right) A^4 f(Y_v) dv + \frac{1}{4!} \int_{t+\delta}^{t+2\delta} (t+2\delta-v)^3 \left(t + \frac{2\delta}{3} - v \right) A^4 f(Y_v) dv$$

3 Schémas anticipatifs et Estimation des Moments Généralisés

Soit Θ un sous ensemble compact de \mathbb{R}^p , $\theta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$ et U un ouvert de \mathbb{R}^p contenant Θ . On considère l'e.d.s. suivante :

$$dY_t = f_{\theta_0}(Y_t) dt + \sigma(Y_t), Y_0 = x \quad (1)$$

On note, pour tout $i = 1, \dots, p$, $\frac{\partial}{\partial \theta^i} f_{\theta}(x)$ est la $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle.

Hypothèses H 1 : Schéma du trapèze et G.M.M.

H 1.1 f_{θ_0} et σ sont respectivement de classe C^4 et C^2 sur \mathbb{R} avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sigma^2(x) > 0$. De plus, il existe $K > 0$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_{\theta_0}(x)| + |\sigma(x)| \leq K(1 + |x|)$.
Pour toute condition initiale $x \in \mathbb{R}$, (1) admet alors une unique solution forte $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$.

H 1.2 La dérivée de la fonction d'échelle associée à (1), $s(\cdot, \theta_0)$, vérifie :

$$\int_0^\infty s(x, \theta_0) dx = \int_{-\infty}^0 s(x, \theta_0) dx = \infty \text{ et } \int_{-\infty}^\infty [s(x, \theta_0) \sigma^2(x)]^{-1} dx = C(\theta_0) < \infty.$$

La loi invariante est alors donnée par $\mu_{\theta_0}(dy) = [C(\theta_0) s(y, \theta_0) \sigma^2(y)]^{-1} dy$. On note Q_{θ_0} la loi du processus stationnaire et E_{θ_0} l'espérance sous Q_{θ_0} .

H 1.3 On note $u_{\theta_0}(x) = \frac{(f_{\theta_0})^2(x)}{2\sigma^2(x)} + \frac{f'_{\theta_0}(x)}{2} - \frac{(\sigma' f_{\theta_0})(x)}{\sigma(x)} + \frac{(\sigma')^2(x)}{8}$ et on suppose que :
 $\min \{ \lim_{x \rightarrow +\infty} u_{\theta_0}(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} u_{\theta_0}(x) \} > 0$.

H 1.4 La loi invariante μ_{θ_0} admet des moments de tous ordres et vérifie, pour tout entier r , $\int \frac{|x|^r}{\sigma^8(x)} d\mu_{\theta_0}(x) < \infty$.

H 1.5 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\theta \rightarrow f_{\theta}(x)$ est de classe C^4 sur U . Cette fonction et ses dérivées partielles successives jusqu'à l'ordre 4 sont à croissance polynomiale en x , uniformément en θ sur U .

De plus, $f_{\theta}(x)$, $\frac{\partial}{\partial \theta^i} f_{\theta}(x)$ et $\frac{\partial^2}{\partial \theta^i \partial \theta^j} f_{\theta}(x)$ sont continues sur $U \times \mathbb{R}$.

2. Pour $\theta \in U$, $x \rightarrow f_{\theta}(x)$ est deux fois dérivable sur \mathbb{R} . La fonction $(\theta, x) \rightarrow A_{\theta_0} f_{\theta}(x)$ est continue sur $U \times \mathbb{R}$ et est à croissance polynomiale en x , uniformément en θ sur U .

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\theta \rightarrow A_{\theta_0} f_{\theta}(x)$ est de classe C^1 sur U .

3. Pour tout $i = 1, \dots, p$ et tout $\theta \in U$, $x \rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta^i} f_{\theta_0}(x)$ est de classe C^2 sur \mathbb{R} .

De plus, $x \rightarrow [A_{\theta_0} (\frac{\partial}{\partial \theta^i} f_{\theta_0})](x)$ est à croissance polynomiale en x .

4. Les fonctions f'_{θ_0} , $(A_{\theta_0} f_{\theta_0})'$, $A_{\theta_0}^2 f_{\theta_0}$ et $A_{\theta_0} (\sigma^2 f'_{\theta_0})$ sont à croissance polynomiale en x , ainsi que σ' et σ'' .

H 1.6 $H_{\theta_0} = \left(E_{\theta_0} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial \theta^i} f_{\theta_0}(Y_0) \frac{\partial}{\partial \theta^j} f_{\theta_0}(Y_0)}{\sigma^2(Y_0)} \right] \right)_{1 \leq i, j \leq p}$ est inversible.

H 1.7 Si pour tout $i = 1, \dots, p$, $E_{\theta_0} \left[\frac{\partial}{\partial \theta^i} f_{\theta_0}(Y_0) \left(\frac{f_{\theta_0}(Y_0) - f_{\theta_0}(Y_0)}{\sigma^2(Y_0)} \right) \right] = 0$ alors $\theta = \theta_0$.

Pour tout $i = 1, p$, on note :

$$\mathcal{V}_{\delta}^i(y, x, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta^i} f_{\theta}(x) \left(\frac{y - x - \frac{\delta}{2} (f_{\theta}(x) + f_{\theta}(y))}{\delta \sigma^2(x)} \right)$$

$$V_n^i(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathcal{V}_{\delta}^i(Y_{k\delta}, Y_{(k-1)\delta}, \theta) \quad \text{et} \quad V_i(\theta, \delta) = E_{\theta_0} [\mathcal{V}_{\delta}^i(Y_{\delta}, Y_0, \theta)]$$

L'estimateur des G.M.M. associé à $\mathcal{V}_{\delta} = {}^t(\mathcal{V}_{\delta}^1, \dots, \mathcal{V}_{\delta}^p)$ et à la matrice de poids l'identité de dimension p est donné par $\hat{\theta}_n = \inf_{\theta} U_n(\theta)$, où $U_n(\theta) = \sum_{i=1}^p (V_n^i(\theta))^2$.

Soient $N_{\theta_0} = \left(E_{\theta_0} \left[\frac{\partial}{\partial \theta^i} f_{\theta_0}(Y_0) \frac{(A_{\theta_0}^2 f_{\theta_0})(Y_0)}{\sigma^2(Y_0)} \right] \right)_i$ et $P_{\theta_0} = \left(E_{\theta_0} \left[\frac{\partial}{\partial \theta^i} f_{\theta_0}(Y_0) \frac{\partial}{\partial \theta^j} f_{\theta_0}(Y_0) \frac{(A_{\theta_0} \sigma^2)(Y_0)}{\sigma^4(Y_0)} \right] \right)_{i,j}$.

Théorème 1 Sous (H 1), il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout δ , $0 < \delta \leq \delta_0$, il existe un unique $\theta_{\delta} \in \mathring{\Theta}$ qui vérifie, pour tout $i = 1, p$, $V_i(\theta_{\delta}, \delta) = 0$. On a alors : $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P_{\theta_0}} \theta_{\delta}$ avec $\theta_{\delta} - \theta_0 = -\frac{\delta^2}{12} H_{\theta_0}^{-1} N_{\theta_0} + o(\delta^2)$ et $\sqrt{n\delta} (\hat{\theta}_n - \theta_{\delta}) \xrightarrow{\mathcal{D}(P_{\theta_0})} \mathcal{N}_p(0, V_{\delta}(\theta_0))$, où $V_{\delta}(\theta_0) = H_{\theta_0}^{-1} (I_p + \frac{\delta}{2} P_{\theta_0} H_{\theta_0}^{-1} + o(\delta))$.

H_{θ_0} étant l'information de Fisher asymptotique, $\hat{\theta}_n$ est un estimateur asymptotiquement efficace de θ_{δ} à un facteur $(I_p + O(\delta))$ près. Lorsque f_{θ_0} est linéaire en θ_0 , $f_{\theta_0}(x) = \theta_0 \cdot f(x)$, la méthode des G.M.M. n'est autre que la méthode d'estimation par *variable instrumentale* : $\hat{\theta}_n$ et θ_{δ} sont alors explicites. On généralise ainsi les résultats obtenus par Bergstrom [1] et Sargan [6] dans le cas d'une diffusion vectorielle gaussienne à dérive linéaire en θ .

La méthode d'estimation des G.M.M. peut également être adaptée au schéma d'approximation de Simpson. On définit pour tout $i = 1, p$:

$$\tilde{\mathcal{V}}_{\delta}^i(z, y, x, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta^i} f_{\theta}(x) \left(\frac{z - x - \frac{\delta}{3} (f_{\theta}(x) + 4f_{\theta}(y) + f_{\theta}(z))}{2\delta \sigma^2(x)} \right)$$

$$\tilde{V}_n^i(\theta) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{\frac{n}{3}} \tilde{\mathcal{V}}_{\delta}^i(Y_{2k\delta}, Y_{2k\delta-1}, Y_{2(k-1)\delta}, \theta) \quad \text{et} \quad \tilde{V}_i(\theta, \delta) = E_{\theta_0} [\tilde{\mathcal{V}}_{\delta}^i(Y_{2\delta}, Y_{\delta}, Y_0, \theta)]$$

On note alors $\tilde{U}_n(\theta) = \sum_{i=1}^p (\tilde{V}_n^i(\theta))^2$ le contraste et $\tilde{\theta}_n = \inf_{\theta \in \Theta} \tilde{U}_n(\theta)$, l'estimateur des moments généralisés. Moyennant quelques adaptations dans les hypothèses, on montre que cet estimateur converge vers θ_0 , à un biais en $O(\delta^4)$ près, et est asymptotiquement normal et efficace à un facteur $(I_p + O(\delta))$ près.

Hypothèses H 2 : Schéma de Simpson et G.M.M.

On reprend l'ensemble des hypothèses de (H 1) à l'exception de :

- **(H 1.1)** que l'on modifie en supposant que f_{θ_0} et σ sont respectivement de classe C^8 et C^6 sur \mathbb{R} .
- **(H 1.5.4)** est remplacée par **(H 2.5.4)** : Pour tout $l = 0, \dots, 3$, $(A_{\theta_0}^l f_{\theta_0})'$, $A_{\theta_0}^4 f_{\theta_0}$ et $A_{\theta_0} (\sigma^2 f'_{\theta_0})$ sont à croissance polynomiale en x , ainsi que celles de σ jusqu'à l'ordre 6.

On note $\tilde{N}_{\theta_0} = \left(E_{\theta_0} \left[\frac{\partial}{\partial \theta^i} f_{\theta_0} (Y_0) \frac{(A_{\theta_0}^4 f_{\theta_0})(Y_0)}{\sigma^2(Y_0)} \right] \right)_i$.

Théorème 2 Sous (H 2), il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout δ , $0 < \delta \leq \delta_0$, il existe un unique $\tilde{\theta}_\delta \in \mathring{\Theta}$ qui vérifie, pour tout $i = 1, p$, $\tilde{V}_i(\tilde{\theta}_\delta, \delta) = 0$. On a alors : $\tilde{\theta}_n \xrightarrow{P_{\theta_0}} \tilde{\theta}_\delta$ avec $\tilde{\theta}_\delta - \theta_0 = -\frac{\delta^4}{180} H_{\theta_0}^{-1} \tilde{N}_{\theta_0} + o(\delta^4)$ et $\sqrt{n\delta} (\tilde{\theta}_n - \tilde{\theta}_\delta) \xrightarrow{D(P_{\theta_0})} \mathcal{N}_p(0, \tilde{V}_\delta(\theta_0))$, où $\tilde{V}_\delta(\theta_0) = H_{\theta_0}^{-1} (I_p + \delta P_{\theta_0} H_{\theta_0}^{-1} + o(\delta))$.

4 Etude expérimentale

L'étude porte sur les modèles de Ornstein-Uhlenbeck (O.U.), de Cox-Ingersoll-Ross et sur le modèle défini par : $dY_t = (-\theta_0 \ln(Y_t) + \frac{1}{2} Y_t) dt + dW_t$. Les diffusions sont simulées sur $[0, T]$ grâce à un schéma d'Euler sur une grille fine de pas 0.005. On estime alors le paramètre par la méthode des G.M.M. pour les schémas du trapèze (t) et de Simpson (s) et par les moindres carrés pour le schéma d'Euler (e), ceci pour un choix (δ, n) , $n\delta = T$. On répète 100 fois cette expérience afin de calculer la moyenne empirique $m(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{100} \hat{\theta}_n^i$. L'influence de δ et du type de schéma de discrétisation sur les résultats apparait clairement dès que T est suffisamment grand. Nous figurons ici quelques résultats pour le modèle O.U. Le schéma du trapèze semble un bon choix en situation de discrétisation assez générale.

	δ	n	$m(\hat{\theta}_n^e)$	θ_δ^e	$m(\hat{\theta}_n^t)$	θ_δ^t	$m(\hat{\theta}_n^s)$	θ_δ^s
$T = 40$	0.1	400	0.846	0.951	0.884	0.999	0.928	0.999
	0.01	4000	1.012	0.995	1.017	0.999	1.019	1
$T = 400$	1	400	0.638	0.632	0.940	0.924	1.007	0.995
	0.1	4000	0.956	0.951	1.004	0.999	1.004	0.999
$T = 4000$	1	4000	0.634	0.632	0.930	0.924	1.004	0.995

Modèle de O.U.- Moyennes empiriques pour 100 réalisations et valeurs théoriques θ_δ pour les trois schémas.
Ornstein-Uhlenbeck's model - Empirical means for 100 realizations and theoretical values θ_δ for the three schemes.

References

- [1] Bergstrom, (1976) *Statistical inference in Continuous Time Series*.- In "Statistical inference in Continuous Time Economic Models", Ed. Bergstrom, North Holland.
- [2] Florens-Zmirou, D. (1989) *Approximate discrete schemes for stastics of diffusion processes*.- Statistics 20, p. 547-557.
- [3] Gourieroux, C. & Monfort, A. *Statistique et Modèles Econométriques. Tome 1*- Economica, p. 338-348.

- [4] Hansen, L (1982) *Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators*.- *Econometrica*, 50 (4), p. 1029-1054.
- [5] Hansen, L & Singleton, K (1982) *Generalized Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectations Models*.- *Econometrica*, 50 (5), p. 1269-1286.
- [6] Sargan, J.D. (1976) *Some discrete approximations to continuous times stochastic models*.- In "Statistical inference in Continuous Time Economic Models", Ed. Bergstrom, North Holland, p. 27-80.