Manuscrit auteur, publié dans "Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Série 1, Mathématiques, 345 (2007) 705-708"
DOI : 10.1016/j.crma.2007.11.004

Comportement asymptotique de sommes de Cesàro aléatoires

Florian HECHNER
IRMA, UFR de mathématique et d'informatique,
7 rue René–Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France
hechner@math.u-strasbg.fr

Résumé

On sait que sous des hypothèses d'intégrabilité adéquates, les sommes de Cesàro - d'ordre $\alpha \leqslant 1$ - associées à une suite de variables aléatoires i.i.d. vérifient une loi des grands nombres analogue à celle de Kolmogorov. Nous précisons ce comportement presque sûr en montrant que ces sommes ont un comportement de martingale généralisée (amart ou quasimartingale).

Pour citer cet article : F. Hechner, Comportement asymptotique de sommes de Cesàro aléatoires, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.I 345 (2007) 705–708.

Abstract

Asymptotic behaviour of Cesàro random sums. It's known that under suitable integrability assumptions, the Cesàro sums - of order $\alpha \leqslant 1$ - associated to an i.i.d. sequence of random variables fulfill a Kolmogorov–like strong law of large numbers. Here, we make this asymptotic behaviour more precise by showing that these sums are generalized martingales (amart or quasimartingale).

To cite this article: F. Hechner, Comportement asymptotique de sommes de Cesàro aléatoires, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.I 345 (2007) 705–708.

1 Introduction

L'étude de la vitesse de convergence presque sûre (p.s.) dans la loi des grands nombres de Kolmogorov pour une suite de variables indépendantes équidistribuées a fait l'objet de nombreux travaux. L'approche classique repose essentiellement sur des majorations de la queue de la distribution de la n–ième somme partielle associée à la suite. Une autre approche consiste à regarder sous quelles conditions ces sommes pondérées ont un comportement de martingale généralisée (quasimartingale, ou seulement amart) ([2],[5],[6]). Nous allons ici nous intéresser à la vitesse de convergence p.s. de sommes de Cesàro aléatoires en suivant l'approche martingales généralisées.

Commençons par rappeler comment s'exprime la convergence presque sûre au sens de Cesàro.

2 Convergence au sens de Cesàro de suites de variables aléatoires

Définition 2.1 *Soit $(\mathbf{X}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, et $\alpha > -1$ un réel. On dit que la suite $(\mathbf{X}_i)$ converge presque sûrement au sens de Cesàro d'ordre α (ce que l'on note $(C,\alpha)-p.s.$) si la suite de variables aléatoires $(\mathbf{V}_n^\alpha)$ définie par*

$$\mathbf{V}_n^\alpha := \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{i=0}^{n} A_{n-i}^{\alpha-1}\mathbf{X}_i$$

converge presque sûrement, où les coefficients A_n^α sont définis par $A_n^\alpha := \dfrac{(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{n!}$.
(L'ordre de grandeur de A_n^α est de n^α lorsque $n\to+\infty$.)

Remarquons que lorsque $\alpha = 1$ et que les variables aléatoires sont indépendantes et équidistribuées, on retrouve la loi des grands nombres de Kolmogorov. La limite est alors $\mathbb{E}(\mathbf{X})$.

Pour $\alpha < 1$, on a un résultat similaire à la loi forte des grands nombres :

Théorème 2.2 *Soit $(\mathbf{X}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi, centrées, et $0 < \alpha \leqslant 1$ un réel. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :
 (a) *La suite $(\mathbf{X}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge $(C,\alpha) - p.s.$ vers 0.*
 (b) $\mathbb{E}|\mathbf{X}_1|^{\frac{1}{\alpha}} < +\infty$.

G.G. Lorentz ([7]) a montré le résultat dans le cas $1/2 < \alpha < 1$. Chow et Lai ([1]) ont ensuite montré ce résultat dans le cas $0 < \alpha < 1/2$. Enfin, Y. Déniel et Y. Derriennic ([3]) ont traité le cas restant $\alpha = \frac{1}{2}$.

Rappelons à présent les deux notions de martingales généralisées que nous serons amenés à utiliser.

3 Amarts et quasimartingales

Nous nous contentons ici de rappeler les définitions d'amart et de quasimartingale. Pour les principales propriétés de ces suites de variables aléatoires, on pourra se référer à [4] ou [5].

Définition 3.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(\mathcal{F}_n)$ une filtration, c'est–à–dire une suite croissante de sous–tribus de $\mathcal{F}$. Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des temps d'arrêt bornés à valeurs dans $\mathbb{N}$.*
Soit $(\mathbf{Z}_n)$ une suite de variables aléatoires intégrables adaptées à la filtration.
- *On dit que $(\mathbf{Z}_n)$ est un amart si $(\mathbb{E}\mathbf{Z}_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}}$ converge dans $\mathbb{R}$.*
- *On dit que $(\mathbf{Z}_n)$ est une quasimartingale si* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|\mathbb{E}(\mathbf{Z}_{n+1}|\mathcal{F}_n) - \mathbf{Z}_n| < +\infty$.

Il est bien connu qu'une quasimartingale est un amart, mais que la réciproque est fausse en général.

Dans le contexte qui nous intéresse, on considère une suite $(\mathbf{X}_i)$ de v.a. i.i.d. ; on prend pour $(\mathbf{Z}_n)$ la suite $(\mathbf{V}_n^\alpha)$ des sommes de Cesàro associées, et pour tribu $\mathcal{F}_n$ celle engendrée par $(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$.

4 Comportement de martingale généralisée de suites de moyennes de Cesàro

Lorsque $\alpha = 1$, on a le théorème suivant, dans lequel on a noté $\mathbf{S}_n := \mathbf{X}_1 + \ldots + \mathbf{X}_n$:

Théorème 4.1 *Soit $(\mathbf{X}_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et centrées. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :
 (i) $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ *est un amart.*
 (ii) $\mathbb{E}|\mathbf{X}_1| \ln^+ |\mathbf{X}_1| < +\infty$.

Marcinkiewicz et Zygmund ([8]) ont montré que, sous l'hypothèse (ii), $\mathbb{E}\sup \frac{|\mathbf{S}_n|}{n} < +\infty$. Il en découle immédiatement que (i) est vérifiée. La réciproque est due à Burgess Davis ([2]).

Le théorème précédent peut en fait être amélioré :

Théorème 4.2 *Soit $(\mathbf{X}_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et centrées. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes* :
 (i) $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ *est une quasimartingale.*
 (ii) $\mathbb{E}|\mathbf{X}_1| \ln^+ |\mathbf{X}_1| < +\infty$.

L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ résulte du théorème précédent. Pour établir $(ii) \Rightarrow (i)$, on se ramène au cas symétrique. On tronque alors les variables $\mathbf{X}_k$ comme suit : pour $n \geqslant 2$, et pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose $\mathbf{X}'_{n,k} := \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\{|\mathbf{X}_k| \leqslant \frac{n}{(\ln n)^\beta}\}}$ et $\mathbf{X}''_{n,k} := \mathbf{X}_k - \mathbf{X}'_{n,k}$, où $\beta > 0$ est un réel bien choisi. On pose alors $\mathbf{S}'_n := \sum \mathbf{X}'_{n,k}$ et $\mathbf{S}''_n := \sum \mathbf{X}''_{n,k}$, et on montre que les séries de terme général $\frac{\mathbb{E}|\mathbf{S}'_n|}{n^2}$ et $\frac{\mathbb{E}|\mathbf{S}''_n|}{n^2}$ convergent toutes deux.

La situation est très différente lorsque l'on considère le même problème de convergence de sommes de Cesàro d'ordre $\alpha < 1$. Dans ce cas, on vérifie facilement que $(\mathbf{V}_n^\alpha)$ n'est jamais une quasimartingale. Par contre, on a :

Théorème 4.3 *Soit* $(\mathbf{X}_n)$ *une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et centrées. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes* :

(i) $\mathbf{V}_n^\alpha$ *est un amart.*

(ii) $\mathbb{E}|\mathbf{X}_1|^{\frac{1}{\alpha}} < +\infty$.

Autrement dit, en vertu du théorème 2.2, lorsque $\alpha < 1$, la suite $(\mathbf{V}_n^\alpha)$ forme toujours un amart si et seulement si $\mathbf{V}_n^\alpha \longrightarrow 0$ *p.s.* Il y a donc une modification du comportement de $\mathbf{V}_n^\alpha$ par rapport au cas $\alpha = 1$ pour lequel on a vu plus haut que la loi des grands nombres ne suffisait pas à ce que $\mathbf{V}_n^1$ soit un amart. De plus, dans le cas $\alpha = 1$, on a vu que les deux notions de quasimartingale et d'amart coïncident, alors que pour $\alpha < 1$, $(\mathbf{V}_n^\alpha)$ n'est jamais une quasimartingale mais est toujours un amart !

Indications de démonstration.

Supposons (i) vérifiée. Comme l'amart $(\mathbf{V}_n^\alpha)$ est borné dans L^1, il converge presque sûrement. On montre que sa limite est p.s. constante par un raisonnement de loi du 0–1, puis qu'elle est nulle par uniforme intégrabilité de $(\mathbf{V}_n^\alpha)$. L'assertion (ii) est alors une conséquence du théorème 2.2.

Montrons à présent que $(ii) \Rightarrow (i)$.

Commençons par démontrer le résultat pour des variables aléatoires $(\mathbf{X}_n)$ symétriques. Pour k variant de 1 à n, posons $\mathbf{Y}_{nk} := \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\{|\mathbf{X}_k| \leqslant n^\alpha\}}$ et $\mathbf{Z}_{nk} := \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\{|\mathbf{X}_k| > n^\alpha\}}$. Désignons par $\mathbf{U}_n$ et $\mathbf{W}_n$ les sommes de Cesàro d'ordre α associés respectivement à $(\mathbf{Y}_{nk})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et à $(\mathbf{Z}_{nk})_{1 \leqslant k \leqslant n}$.

On montre facilement que $(\mathbf{W}_n, \mathcal{F}_n)$ est une quasimartingale. Montrons que $(\mathbf{U}_n, \mathcal{F}_n)$ est un amart.

Soient $N > M > 0$ et $\tau \in \mathcal{T}$, $\tau \in [M, N]$. Donnons–nous un entier r tel que $r(1-\alpha) > 1$, $r > \frac{1}{\alpha}$ et $r > 4$. Par l'inégalité de Hölder,

$$\left| \int_{\mathcal{T}} \mathbf{U}_{\mathcal{T}} d\mathbb{P} \right| = \left| \sum_{n=M}^{N} \int_{\mathcal{T}=n} \mathbf{U}_n d\mathbb{P} \right| \leqslant \sum_{n=M}^{N} \left(\mathbb{P}(\mathcal{T}=n)\right)^{1-\frac{1}{r}} \left(\mathbb{E}|\mathbf{U}_n|^r\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{1}$$

On majore $\mathbb{E}|\mathbf{U}_n|^r$ à l'aide de l'inégalité de Rosenthal ([9]) :

$\mathbb{E}|\mathbf{U}_n|^r \leqslant C(r) \left(B_n^{r/2} + M_{r,n}\right)$, où $B_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left(\frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \mathbf{Y}_{n,k}\right)^2$ et $M_{r,n} := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left|\frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \mathbf{Y}_{n,k}\right|^r$.

Il résulte des hypothèses faites sur r et α que $B_n^{r/2} \leqslant c(r) n^{-\gamma}$ pour un certain $\gamma > 1$.

Il reste à traiter $M_{r,n} \leq c(r) \dfrac{1}{n^{r\alpha}} \mathbb{E}|\mathbf{Y}_{n1}|^r$. On écrit :

$$\frac{1}{n^{r\alpha}} \mathbb{E}|\mathbf{Y}_{n1}|^r = \frac{1}{n^{r\alpha}} r \int_0^{+\infty} x^{r-1} \mathbb{P}(|\mathbf{Y}_{n1}| > x) dx \leqslant \frac{1}{n^{r\alpha}} r \int_0^{n^\alpha} x^{r-1} \mathbb{P}(|\mathbf{X}_1| > x) dx.$$

Le changement de variable $u = \dfrac{x}{n^\alpha}$ donne alors $\dfrac{1}{n^{r\alpha}} \mathbb{E}|\mathbf{Y}_{n1}|^r \leqslant r \displaystyle\int_0^1 u^{r-1} \mathbb{P}\left(\frac{|\mathbf{X}_1|}{n^\alpha} > u\right) du.$

Par interversion des signes $\sum$ et $\int$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{r\alpha}} \mathbb{E}|\mathbf{Y}_{n1}|^r \leqslant r \int_0^1 u^{r-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{|\mathbf{X}_1|^{\frac{1}{\alpha}}}{u^{\frac{1}{\alpha}}} > n\right) \leqslant r \int_0^1 u^{r-1} \frac{\mathbb{E}|\mathbf{X}_1|^{\frac{1}{\alpha}}}{u^{\frac{1}{\alpha}}} du < +\infty \quad car \ \frac{1}{\alpha} + 1 - r < 1.$$

Notons que l'on a utilisé le fait que si $\mathbf{T}$ est une v.a. positive,

$$\mathbb{E}(\mathbf{T}) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\mathbf{T} > x)dx = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_i^{i+1} \mathbb{P}(\mathbf{T} > x)dx \geqslant \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathbf{T} > i+1).$$

Finalement, les séries ayant pour termes généraux $\frac{1}{n^{r\alpha}}\mathbb{E}|\mathbf{Y}_1|^r$ et $n^{-\gamma}$ sont toutes deux convergentes, donc $\left((\mathbb{E}|\mathbf{U}_n|^r)^{\frac{1}{r}}\right)_n \in \ell^r$. Comme $\left((\mathbb{P}(\tau = n))^{1-\frac{1}{r}}\right)_n \in \ell^{\frac{r-1}{r}}$, le membre de droite de (1) est fini par l'inégalité de Hölder dans ℓ^r, et donc $\lim_{M\to+\infty} \sup_{\tau \geqslant M} \mathbb{E}(\mathbf{W}_\tau) = 0$. La suite $(\mathbf{W}_n)$ est donc un amart.

Montrons que le résultat reste vrai pour des variables aléatoires $\mathbf{X}_n$ non nécéssairement symétriques. Soit $(\mathbf{X'}_n)$ une suite de v.a. i.i.d., de même loi que $(\mathbf{X}_n)$, indépendante de la suite $(\mathbf{X}_n)$. Soient $(\mathbf{V}_n)$ et $(\mathbf{V'}_n)$ les sommes de Cesàro associées. Alors par le raisonnement précédent, $(\mathbf{V}_n - \mathbf{V'}_n)$ est un amart pour la filtration $(\mathcal{F}''_n)$ où $\mathcal{F}''_n$ est la tribu engendrée par les variables $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n, \mathbf{X'}_1, \ldots, \mathbf{X'}_n$. Le résultat attendu découle du fait qu'un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$ en est encore un pour la filtration $(\mathcal{F}''_n)$.

Remarque : On pourra remarquer que la démonstration précédente fournit une nouvelle preuve de l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ du théorème 2.2.

Références

[1] Y.S. Chow, T.L. Lai, Limiting behaviour of weighted sums of independent identically distributed random variables, Ann. Probab. 1 (1973), 810–823.

[2] B. Davis, Stopping Rules for S_n/n, and the Class $L \log L$,Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 17 (1971), 147–150.

[3] Y. Déniel, Y. Derriennic, Sur la convergence presque sûre, au sens de Cesàro d'ordre α, $0 < \alpha < 1$, de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, Probab. Th. Rel. Fields 79 (1988), 629–636.

[4] G.A. Edgar, L. Sucheston, Stopping times and directed processes, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 47, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[5] A. Gut, An introduction to the theory of asymptotic martingales, in Amarts and set function processes, Lecture Notes in Mathematics, Vol 1042, Springer, Berlin, 1983.

[6] B. Heinkel, When is $\frac{|\mathbf{S}_n|^p}{n^p}$ an amart ?, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 32 (1996), 445–453.

[7] G.G. Lorentz, Borel and Banach properties of methods of summation, Duke Math. J. 22 (1955), 129–141.

[8] J. Marcinkiewicz, A. Zygmund, Sur les fonctions indépendantes, Fund. Math. 29 (1937), 60–90.

[9] H.P. Rosenthal, On the subspace of L_p $(p > 2)$ spanned by sequences of independant random variables, Israel J. Math. 8 (1970), 273–303.