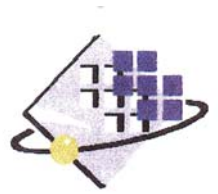




**Supélec**



N° d'ordre : 8213

**UNIVERSITE PARIS XI  
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY**

**THESE**

**Présentée pour obtenir**

**Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY**

**Par**

**Farag ABDULGALIL**

**Sujet :           COMMANDE NON LINÉAIRE DANS LES SYSTEMES  
                      DE FORAGE PETROLIER: CONTRIBUTION  
                      A LA SUPPRESSION DU PHENOMENE DE « STICK-SLIP »**

**Soutenue le 28 Février 2006 devant la Commission d'examen :**

<b>M.</b>	<b>S. HBAIEB</b>	
<b>Mme</b>	<b>F. LAMNABHI-LAGARRIGUE</b>	<b>Présidente</b>
<b>M.</b>	<b>D. MEHDI</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>M.</b>	<b>E. MENDES</b>	
<b>M.</b>	<b>M. M'SAAD</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Mme</b>	<b>H. SIGUERDIDJANE</b>	<b>Directeur de thèse</b>



*A la mémoire de mon père*  
*A ma famille*

# Remerciements

*Nombreux sont ceux que je voudrais remercier pour m'avoir aidé, soutenu ou accompagné durant ces trois années de thèse. C'est pour leur montrer toute ma reconnaissance que je leur dédie ces quelques lignes.*

*Ce travail a été effectué au sein du Département d'Automatique de Supélec dans lequel règne d'excellentes conditions de travail. J'adresse mes remerciements à Monsieur le Professor Patrick BOUCHER, Chef du Département, pour m'avoir accueilli et pour avoir mis à ma disposition tout ce qui a été nécessaire à la bonne réalisation de ce travail. Que tous les membres du département trouvent ici l'expression de ma gratitude. Leur gentillesse et leur disponibilité ont grandement contribué à rendre ma tâche facile et mon séjour agréable.*

*Cette thèse ne pourrait pas avoir été menée à bien sans la confiance, la patience et la générosité du Professor H. SIGUERDIDJANE, à qui je veux apporter mes remerciements tout particuliers. Elle a su m'aider, me soutenir et orienter mes recherches aux bons moments, avec un grand professionnalisme, rigueur et gentillesse. Je lui apporte ma plus sincère gratitude pour le temps précieux qu'elle m'a accordé tout au long de ces années.*

*Je remercie également Madame Françoise Lamnabhi-Lagarrigue, Directeur de Recherche au CNRS de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.*

*Je tiens à remercier Monsieur D. MEHDI, Professor à l'Université de Poitiers et Monsieur M. M'SAAD, Professor à l'École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de CAEN d'avoir accepté la charge de rapporter mon travail. Leurs questions et leurs commentaires pertinents m'ont permis de rendre plus claire ma rédaction et m'ont donné de nouvelles pistes de réflexion.*

*Je tiens également à remercier Monsieur E. MENDES, Professor à l'École Supérieure d'Ingénieurs en Systèmes Industriels Avancés de Valence, d'avoir accepté de juger ce travail.*

*Je remercie vivement Monsieur S. HABIEB, Ingénieur systèmes, Schlumberger, Clamart, pour ses précieux et remarques et pour avoir accepté de juger ce travail et d'avoir fait partie du jury.*

*Je souhaite exprimer aussi ma reconnaissance et un grand merci à Bilal, Joel et Mohamed pour les discussions enrichissantes que nous avons pu avoir, au cours de ces trois années.*

*Merci également à Josiane Dartron, secrétaire du Département d'Automatique pour son amitié, son efficacité, son sourire en toutes circonstances.*

*Je ne saurais oublier mes collègues et amis, avec lesquelles j'ai partagé des très beaux moments à Supélec. Merci et bonne chance à Andreas, Assia, Bastien, Boubekeur, Cristina, Ghizlane, Gino, Giuliana, Guillaume, Jean, Kahina, Karla, Lina, Luca, Mara, Marcelo, Miguel, Omar, Pedro, Rafaël, Séb, Simona, Sorin, Spilios, Thibaut, et Zak.*

*Je pense évidemment à mon frère le Docteur A. Mansour, pour ses conseils et ses aides dans le but que tout se passe bien pour moi. Pour tout cela, je le remercie.*

*Enfin, je ne saurais jamais suffisamment remercier ma mère, mes frères Haj Ali, Idris et Khaled, ainsi qu'à toute ma famille que je porte toujours avec moi dans ma pensée. Sans leur confiance immense en moi, sans leur aide et leur amour, je n'aurais pas pu aller au bout de mes projets. Qu'ils trouvent en moi l'enfant redevable toute sa vie.*



# Sommaire

Liste des publications	viii
Notations	x
Introduction générale	1
Contexte . . . . .	1
Contribution de la thèse . . . . .	2
Organisation du mémoire . . . . .	2
Chapitre 1 Système de forage rotary	5
1.1 Le forage rotary . . . . .	6
1.1.1 Description générale . . . . .	6
1.2 Principe de base du procédé de forage . . . . .	8
1.3 Paramètres de forage . . . . .	8
1.4 Éléments principaux d'un équipement de forage . . . . .	9
1.4.1 Le train de tiges . . . . .	9
1.4.2 Assemblage de fond BHA (Bottom Hole Assembly) . . . . .	10
1.4.3 Les trépanes . . . . .	10
1.4.4 Système induit . . . . .	11
1.5 Vibrations de train de tiges . . . . .	14
1.6 Les oscillations de type « stick-slip » . . . . .	16
Chapitre 2 Modélisation du forage rotary	19
2.1 Modélisation des frottements . . . . .	20
2.1.1 Généralités sur les frottements . . . . .	20
2.1.2 Modèles statiques classiques . . . . .	21
2.1.3 Modèles dynamiques . . . . .	23
2.2 Modèle mécanique du système . . . . .	26
2.2.1 Le train de tiges et le <i>BHA</i> . . . . .	27
2.2.2 Système induit . . . . .	28
2.3 Modèle mathématique du système . . . . .	29
2.3.1 Cas linéaire . . . . .	29
2.3.2 Cas non linéaire . . . . .	30
2.4 Conclusion . . . . .	31

<b>Chapitre 3</b>	<b>Commande Linéaire (<math>H_\infty</math>)</b>	<b>33</b>
3.1	Introduction . . . . .	34
3.2	Valeurs singulières et norme $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	34
3.2.1	Valeurs singulières . . . . .	34
3.2.2	Matrice de transfert et valeurs singulières . . . . .	35
3.2.3	Norme $\mathcal{H}_\infty$ d'un système linéaire stationnaire . . . . .	35
3.3	Commande $\mathcal{H}_\infty$ standard . . . . .	36
3.3.1	Problème standard . . . . .	36
3.3.2	Transformation Fractionnaire Linéaire . . . . .	37
3.3.3	Filtres de pondération . . . . .	40
3.4	Application au forage rotary . . . . .	42
3.4.1	Résultats de simulation . . . . .	45
3.5	Conclusion . . . . .	46
<b>Chapitre 4</b>	<b>Méthodes de commande non linéaires</b>	<b>47</b>
4.1	Linéarisation entrée-état . . . . .	48
4.2	Commande par modes glissants . . . . .	50
4.2.1	Systèmes à structure variable . . . . .	50
4.2.2	Conception de la commande par modes glissants . . . . .	51
4.2.3	Existence du mode glissant . . . . .	52
4.2.4	Synthèse de la commande . . . . .	54
4.3	Commande par Backstepping . . . . .	57
4.3.1	Principe du Backstepping . . . . .	57
4.3.2	Cas particulier du système de forage . . . . .	58
4.4	Observateur . . . . .	62
4.4.1	Observateur de Luenberger . . . . .	62
4.5	Conclusion . . . . .	63
<b>Chapitre 5</b>	<b>Commande du système de forage rotary</b>	<b>65</b>
5.1	Linéarisation par bouclage du forage rotary . . . . .	66
5.1.1	Réponse du système en boucle ouverte non commandée . . . . .	66
5.1.2	Synthèse de la commande linéarisante . . . . .	67
5.1.3	Résultats de simulation - discussion . . . . .	70
5.2	Application des modes glissants . . . . .	73
5.2.1	Surface de glissement . . . . .	73
5.2.2	Conception de la commande . . . . .	73
5.2.3	Comparaison avec le contrôleur linéarisant . . . . .	75
5.3	Application de la commande par Backstepping . . . . .	76
5.3.1	Synthèse robuste par Backstepping . . . . .	76
5.4	Calcul des gains pour l'observateur de Luenberger . . . . .	80
5.4.1	Résultats de simulation . . . . .	82
5.4.2	Contrôleur Backstepping robustifié . . . . .	84
5.5	Optimisation du correcteur Backstepping . . . . .	85
5.6	Conclusion . . . . .	90

<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>91</b>
Conclusion générale . . . . .	92
Perspectives . . . . .	93
<b>Annexes</b>	<b>95</b>
<b>Annexe A Modélisation de la ligne de transmission</b>	<b>97</b>
<b>Annexe B Quelques outils mathématiques : rappels</b>	<b>103</b>
B.1 Matrice jacobienne . . . . .	103
B.2 Difféomorphisme . . . . .	103
B.3 Dérivée de Lie . . . . .	104
B.4 Le degré relatif . . . . .	105
B.5 Crochet de Lie . . . . .	105
B.6 Théorème de Frobenius . . . . .	105
B.6.1 Exemple . . . . .	106
<b>Annexe C Algorithme d'optimisation de type sous-gradient</b>	<b>107</b>



# Liste des publications

Les travaux présentés dans ce mémoire ont donné lieu aux différentes communications scientifiques suivantes :

## Conférences internationales avec actes

1. F. Abdulgalil and H. Siguerdidjane, "Nonlinear friction compensation design for suppressing stick slip oscillations in oil well drillstrings", *In Proceedings of the 7th International Symposium on the Dynamics and Control of Process Systems, DYCOPS*, Boston, USA, July 5-8, 2004.
2. F. Abdulgalil and H. Siguerdidjane, "Nonlinear control design for suppressing stick slip oscillations in oil well drillstrings", *In Proceedings of the 5th Asian Control Conference, ASCCC*, Melbourne, Australia, July 20-23, 2004.
3. F. Abdulgalil and H. Siguerdidjane, "Input-state linearisation technique and nonlinear control in oil well drillstrings system", *In 6th IFAC Symposium on Non-linear Control Systems, NOLCOS*, Stuttgart, Germany, September 1-3, 2004.
4. F. Abdulgalil and H. Siguerdidjane, "Conception d'un contrôleur non linéaire pour l'atténuation des oscillations de stick-slip dans les systèmes de forage", *In Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA, Douz*, Tunisia, Novembre 20-24, 2004.
5. F. Abdulgalil and H. Siguerdidjane, "Backstepping Design for Controlling Rotary Drilling System", *2005 IEEE Conference on Control Applications*, Toronto, Canada, August 28-31, 2005.
6. F. Abdulgalil and H. Siguerdidjane, "PID based on Sliding Mode Control for Rotary Drilling System", *IEEE Conference on Computer as a tool*, Belgrade, Serbia, November 21-24, 2005.
7. B. Lassami and F. Abdulgalil and S. Font and H. Siguerdidjane, "Parametric Adjustment of a Backstepping Controller by Nonsmooth Optimization: Application to a Rotary Drilling System", *13th IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation*, Paris - Cachan, France, April 26-28, 2006.

## Conférences nationales avec actes

8. F. Abdulgalil and H. Siguerdidjane, "Suppression du phénomène de stick-slip d'un système de forage rotary par une commande backstepping", *Journées Doctorales et Nationales du GDR MACS 2005*, Lyon, France, Septembre 5-7, 2005.



# Notations

$I_m$	Courant de l'induit
$V_m$	Tension de l'induit
$R_m$	Résistance du moteur
$L_m$	Inductance du moteur
$V_{emf}$	Force contre-électromotrice
$K_e$	Coefficient de la force contre-électromotrice
$K_c$	Coefficient de couple
$Z_a$	Impédance d'armature
$n_m$	Nombres de dents de l'engrenage 1
$n_{rt}$	Nombres de dents de l'engrenage 2
$\phi_m$	Position angulaire de l'arbre moteur
$\Omega_m = \dot{\phi}_m$	Vitesse angulaire de l'arbre moteur
$\phi_{rt}$	Position angulaire de la table de rotation
$\Omega_{rt} = \dot{\phi}_{rt}$	Vitesse angulaire de la table de rotation
$J_m$	Inertie du moteur
$T_m$	Couple moteur
$T_1$	Couple appliqué sur $J_m$ par le réducteur
$1/n$	Coefficient de réduction
$F_c$	Force de frottement de Coulomb

$\mu$	Coefficient de Coulomb
$F_N$	Effort normal
$F_s$	Force de frottement de Stiction
$F$	Force de frottement visqueux
$F_v$	Coefficient de frottement visqueux
$v$	Vitesse de glissement relative
$F_e$	Force extérieures
$v_s$	Vitesse caractéristique du frottement de Stribeck
$F_{sk}$	Force de frottement de Stribeck
$g(v)$	Modèle des effets de Stribeck
$\phi_1$	Position angulaire du trépan
$\phi_2$	Position angulaire de la table de rotation
$\phi$	Écart angulaire relatif entre la table de rotation et le trépan, $\phi = \phi_2 - \phi_1$
$\Omega_1$	Vitesse angulaire du trépan, $\Omega_1 = \dot{\phi}_1$
$J_1$	Inertie équivalente d'une partie de l'inertie des tiges de forage et les masses tiges
$C_1$	Constante d'amortissement visqueux au niveau du <i>BHA</i>
$T_{tob}$	Couple non linéaire exercé sur le trépan « Torque On Bit »
$J_2$	Inertie équivalente de la table de rotation et du moteur électrique $J_m$ ainsi qu'une partie de l'inertie des tiges et celle de la transmission mécanique
$n$	Rapport de transmission
$C_2$	Constante d'amortissement visqueux de la table de rotation
$T_2$	Couple exercé sur la table de rotation
$\Omega_{ref}$	Vitesse angulaire de référence
$\Omega_2$	Vitesse angulaire de la table de rotation, $\Omega_2 = \dot{\phi}_2$
$u$	Variable de commande

$k$	Rigidité du train des tiges
$L$	Inductance du moteur
$R$	Résistance du moteur
$\dot{x}$	Dérivée temporelle de la grandeur $x$
$\hat{x}$	Estimée de la grandeur $x$
$e$	Erreur d'estimation, $e = x - \hat{x}$
$S$	Surface de glissement
$V$	Fonction de Lyapunov
$\mathcal{H}_\infty$	Commande H infini
$\ \cdot\ _\infty$	Norme $\mathcal{H}_\infty$
$\ \cdot\ _2$	Norme $\mathcal{H}_2$
$\bar{\sigma}(A)$	Plus grande valeur singulière de $A$
$\underline{\sigma}(A)$	Plus petite valeur singulière de $A$
$\mathcal{F}_L(\cdot, \cdot)$	Transformation linéaire fractionnaire inférieure
$\mathcal{F}_U(\cdot, \cdot)$	Transformation linéaire fractionnaire supérieure
$J(\cdot)$	Critère d'optimisation
$\theta$	Paramètre d'optimisation
$\xi$	Coefficient d'amortissement
$\omega$	Pulsation
$\mathbb{R}$	Ensemble des Réels
$\mathbb{C}$	Ensemble des Complexes
$I_n$	Matrice identité de dimension $n \times n$
$I$	Matrice identité avec la dimension définie par la contexte
$ \cdot $	Module

## Acronymes

BHA	Assemblage de fond « Bottom Hole Assembly »
ROP	Vitesse de progression « Rate of Penetration »
WOB	Le poids sur l'outil « Weight on Bit »
SCR	Silicon Controlled Rectifier
LTI	Linéaire invariant dans le temps « Linear Time Invariant »
LFT	Transformation Fractionnaire Linéaire « Linear Fractional Transformation »
LQG	Commande linéaire quadratique Gaussienne « Linear Quadratic Gaussian »
LPV	Linéaire à Paramètres Variables
CLF	Fonction de Lyapunov de Commande « Control Lyapunov Function »
SISO	Mono-entrée, Mono-sortie « Single Input Single Output »
MIMO	Multi-entrées, Multi-sorties « Multi Input Single Multi »
PID	Proportionnel Intégral Dérivé
PI	Proportionnel Intégral
NL	Non linéaire

# Introduction générale

## Contexte

L'importance considérable de l'énergie pétrolière au plan économique justifie la rude concurrence actuelle et la recherche constante d'innovations, dans ce secteur d'activité, qui permettent d'optimiser les procédures de prospection, d'extraction et de transport de cette ressource. Par ailleurs, la croissance des besoins en énergie pétrolière en raison des évolutions sociales, démographiques et des progressions technologiques conduit à mener des investigations poussées afin de satisfaire cette demande.

De plus, l'augmentation de la capacité de production, nécessite des moyens performants et fiables. Le système de forage rotary est à la base du processus d'extraction du pétrole. Il est crucial de souligner que la réduction du temps de forage ainsi que la préservation des équipements sont conditionnées par une conduite appropriée.

Un système de forage est un ensemble structurel dont l'objectif premier est de détruire de la matière, en général de la roche, afin de forer un puits. La structure de forage peut être perçue comme une poutre qui tourne en surface, à vitesse constante, et dont l'extrémité, fore par l'intermédiaire d'un outil. Sous certaines conditions de fonctionnement, la vitesse de rotation de cet outil prend des allures dites « stick-slip ». Ce phénomène se traduit par une oscillation particulière de la vitesse de rotation, l'outil s'arrête et repart soudainement en mouvement pour atteindre des vitesses supérieures au double de la vitesse moyenne imposée en surface.

L'effet du « stick-slip » sur les équipements du forage constitue la problématique principale. En effet, les oscillations engendrées peuvent souvent provoquer des niveaux de couples capables d'endommager le système de forage, rendant ainsi l'opération relativement coûteuse. Elles sont par ailleurs réputées pénalisantes vis-à-vis de l'avancement axial qui représente la performance instantanée du système. Différentes études ont été réalisées dans la littérature pour réduire ce phénomène à l'aide de plusieurs formes de lois de commande [29, 33, 35].

Dans la plus part de ces travaux, déjà existants, l'approche linéaire est prépondérante. On y trouve principalement des lois de commande de type Proportionnel Intégral (PI) [35], de type  $\mathcal{H}_\infty$  basées sur des modèles linéaires tangents [29], ou des régulateurs

issus des techniques de commande optimale [33]. En revanche, très peu de travaux de recherche ont été effectués pour traiter ce problème épineux par des approches non linéaires, car l'étude dans le domaine linéaire n'a pas pu conduire à des résultats très satisfaisants.

A l'heure actuelle, l'évolution matérielle des techniques d'implantation des stratégies de contrôle numérique permet de faire évoluer les lois de commande basées sur des correcteurs classiques PI, PID pour s'intéresser aux lois de commande plus avancées et offrant un peu plus de performances.

Dans ce contexte, ces travaux de thèse traitent du problème d'asservissement non linéaire du système de forage rotary afin d'évaluer le niveau d'amélioration des performances.

## Contribution de la thèse

Le travail réalisé dans le cadre de cette thèse a donc pour objectif d'apporter une réponse au problème généré par la présence des frottements secs, connus et que l'on appelle plus communément le phénomène « stick-slip » ou encore le collé-glissé. Pour cela, une modélisation puis des propositions de lois de commande atténuant cet effet sont suggérées. La contribution de la thèse comporte alors deux idées principales :

- L'étude du phénomène « stick-slip » et la modélisation de son comportement non linéaire, en vue d'améliorer l'efficacité du système de forage par l'élaboration de lois de commande adéquates. Ceci pourrait prolonger la durée de vie de l'outil et éviter des arrêts longs et coûteux (contraintes économiques) dans un gisement de pétrole.
- La synthèse de commandes non linéaires plus appropriées, permettant d'atteindre les performances demandées.

En effet, on montre qu'il est possible d'améliorer les performances du système à l'aide des méthodes non linéaires relativement avancées. La perspective étant par ailleurs de tendre vers un transfert de ces méthodes de l'état théorique à des applications industrielles, quoique la loi de commande devient un peu plus complexe, mais compte tenu de l'évolution très rapide des moyens informatiques, cette complexité relative ne le serait probablement pas dans un futur proche.

Pour cela, deux techniques de synthèse de loi de commande sont particulièrement considérées : la technique de linéarisation par bouclage et la commande par modes glissants. Comme un système de forage peut être soumis à des incertitudes paramétriques, on propose alors une synthèse de loi de commande utilisant une technique récursive, de type Backstepping pour leur prise en compte.

## Organisation du mémoire

Ce mémoire de thèse comporte cinq chapitres :

**Chapitre 1.** Dans ce chapitre, nous présentons les principes fondamentaux sur lesquels repose le système de forage rotary. Puisque toute méthode de commande vise, en premier lieu, la réduction des vibrations, on y décrit alors les différents types de vibrations existantes et en particulier la vibration de torsion.

**Chapitre 2.** Ce chapitre est consacré à la modélisation du système de forage. Il comporte en outre une analyse plus développée du frottement pour compléter celle décrite dans le chapitre précédent. Ce phénomène est prépondérant dans le comportement du système, et sa modélisation revêt un caractère capital. Cette étude a conduit à adopter une certaine forme de la non-linéarité des frottements, néanmoins présentée dans la littérature par plusieurs auteurs [5, 21, 29, 37] et ceci à partir d'un modèle du « stick-slip » décrit dans [29], on propose ici un modèle du système de forage, qui intègre la non-linéarité.

**Chapitre 3.** On s'intéresse dans ce chapitre à la commande  $\mathcal{H}_\infty$ , devenue une commande incontournable dans le domaine de la commande linéaire robuste. Cet intérêt est justifié par le besoin d'éliminer l'effet du « stick-slip » qui est néfaste pour le forage. Un rappel des éléments essentiels de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  est présenté ainsi que la technique du choix des filtres de pondération, qui reste le point important de cette synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ . Les résultats de simulation sont exposés.

**Chapitre 4.** Dans ce chapitre, on considère trois principales approches pour la commande :

- La première concerne la technique de linéarisation par bouclage, qui s'appuie sur les outils de la géométrie différentielle. C'est une technique qui est maintenant bien connue en théorie des systèmes mais cependant, elle s'avère toute nouvelle dans plusieurs domaines d'application et plus spécifiquement dans les forages pétroliers. Une fois le système linéarisé par bouclage et difféomorphisme, cette méthode peut tirer profit des acquis du linéaire [18, 27, 32].
- La deuxième repose sur : la technique par modes de glissements, qui impose une logique de commutation sur la commande et la dernière approche est celle du "Backstepping", procédure récursive qui s'applique aux systèmes non linéaires triangulaires. Bien que les modes glissants soient très connus et très appliqués en linéaire, ils le sont beaucoup moins en non linéaire. Quant à l'approche Backstepping, développée au début des années 90 [14, 15, 22], elle est encore moins connue au plan pratique et probablement pas du tout dans le domaine des forages pétroliers.

**Chapitre 5.** Ce dernier chapitre est dédié à l'application des trois types de commandes non linéaires décrites au chapitre 4, au système de forage pétrolier.

On montre que ces trois formes de commandes permettent de réaliser un bon suivi de trajectoire en boucle fermée. Les résultats de simulations sont comparés à ceux exposés dans la littérature avec un correcteur classique PID et un contrôleur synthétisé par la technique  $\mathcal{H}_\infty$ .

On y vérifie la robustesse de ces lois de commande en introduisant des incertitudes paramétriques, comme, sur l'amortissement de l'assemblage de fond, l'amortissement de la table de rotation et sur la longueur du train des tiges. Les essais montrent que le contrôleur synthétisé par la technique Backstepping permet de mieux gérer le compromis entre la robustesse et les performances demandées. Enfin, une optimisation des paramètres du correcteur Backstepping est réalisée afin d'améliorer encore plus les performances.

Une conclusion, les perspectives, quelques annexes contenant des compléments de définitions, des résultats de simulation et une bibliographie complètent ce document.

---

# Chapitre 1

## Systeme de forage rotary

Ce chapitre décrit le système de forage rotary : son principe, les éléments qui le composent ainsi que les différents types de vibrations pouvant se produire lors de la phase de forage.

Concernant ces effets de vibrations, on distingue trois classes de vibrations parasites répertoriées suivant leurs plans d'évolution, à savoir :

- les vibrations longitudinales
- les vibrations latérales
- les vibrations de torsion
- les vibrations hydrauliques

On s'intéresse en particulier aux oscillations de torsion provoquées par le phénomène « stick-slip », qui constitue la vibration la plus fréquente, ayant un effet néfaste sur le fonctionnement du système. Il est très utile de mentionner que la maîtrise de ce phénomène représente un objectif industriel des plus prioritaires.

## 1.1 Le forage rotary

### 1.1.1 Description générale

Un système de forage est composé de deux parties : l'installation de forage et de garniture, comme le montre le schéma simplifié de la figure 1.1 :

- L'installation de forage est la partie située à la surface du sol. Elle comprend une tour, appelée *derrick* ou mât, sur laquelle sont situés les équipements de levage et de plancher qui permettent la manutention, le vissage et dévissage des tiges et le changement de l'outil (*trépan*).
- La garniture désigne la partie souterraine du système de forage. Elle est constituée, de deux parties principales :
  - la partie haute formée du train des tiges (drillstrings),
  - la partie basse formée de l'assemblage de fond que l'on a coutume de désigner par BHA (« Bottom Hole Assembly »).

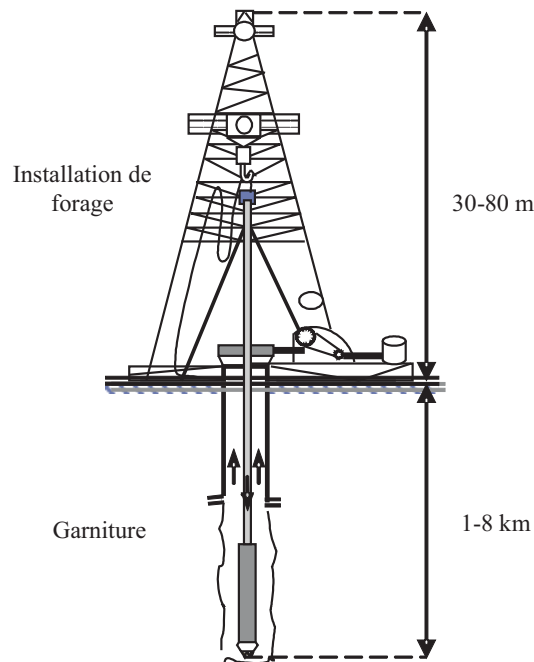


FIG. 1.1 – La plateforme de forage

L'installation de forage, conçue pour permettre la manoeuvre de la garniture de forage, inclus les systèmes suivants :

- un système de suspension,
- un système rotary,

- un système de circulation de boue,
- un système de production d'énergie,
- et enfin un système de contrôle du puits.

- **Le système de suspension**

Il est constitué du derrick pouvant atteindre 80 m de hauteur et d'un treuil motorisé situé au sol à sa base. Il sert à faire descendre et remonter l'équipement de forage. Il permet également de fixer le poids appliqué au trépan en retenant partiellement le poids de l'ensemble de la garniture.

- **Le système rotary**

Il est composé de toutes les parties qui permettent la transmission de la rotation à l'outil, c'est à dire, la table de rotation et sa motorisation, la tige d'entraînement ainsi que le train de tiges et la tête d'injection.

- **Le système de circulation de boue**

Il assure la circulation de la boue de forage et il est associé à une station de pompage servant au traitement du fluide de forage : la boue est en effet un mélange d'eau, d'argile et d'additifs. Une injection continue de boue dans le puits s'effectue pendant toute la durée du forage.

Les pompes à boue aspirent la boue des bassins par l'intermédiaire d'un tuyau flexible placé à l'intérieur du train de tiges et remontant par l'espace annulaire compris entre les tiges et le puits. La circulation de la boue contribue à la lubrification des pièces en mouvement, à leur refroidissement et à l'excavation par évacuation vers la surface des fragments de roches arrachés par le trépan ; mais aussi à l'équilibre hydrostatique du puits et éventuellement à la rotation du trépan au travers d'une turbine. Enfin, la boue est d'une grande utilité pendant l'opération de forage car son analyse fournit des éléments sur la nature géologique des milieux traversés.

- **Le système de production d'énergie**

L'énergie est produite par des moteurs à courant continu. Elle est transmise sous forme électrique ou mécanique vers les différents systèmes de l'installation.

- **Le système de contrôle du puits**

Il sert à détecter et gérer les apparitions soudaines des fluides sous pression ; ces irrptions, connues sous le nom de *kick*, peuvent être extrêmement violentes.

## 1.2 Principe de base du procédé de forage

Les puits de pétrole et de gaz sont forés principalement par le procédé de forage rotary. Le principe général du forage rotary consiste à mettre en rotation un outil en appliquant une force verticale orientée dans le sens d'avancement souhaité. Cet outil, appelé *trépan*, sert à tailler, strier et détruire la roche. La circulation continue de boue descendant par l'intérieur des tiges et remontant par l'espace annulaire compris entre les tiges et le trou évacue les débris de roche vers la surface. Cette boue joue un rôle important dans le travail d'attaque de la roche par le trépan.

## 1.3 Paramètres de forage

Les paramètres de forage sont les différents facteurs mécaniques et hydrauliques pouvant agir sur la vitesse de progression notée ROP (Rate of Penetration) ainsi que sur le comportement directionnel.

Le ROP correspond à la profondeur (en mètres) forée par heure. L'optimisation du ROP est un aspect très important dans l'analyse du processus de forage car c'est directement lié au temps passé sur une installation onshore ou offshore.

Les principaux paramètres mécaniques sont : le poids appliqué à l'outil, la vitesse de rotation et le couple exercé sur l'outil.

- **Le poids sur l'outil WOB (Weight on Bit)**

Ce paramètre désigne la force appliquée par la garniture sur l'outil suivant son axe de révolution. Cette force dépend du poids propre de la garniture, de la poussée d'Archimède due au fluide de forage et de la tension du câble de soutien de la garniture, en surface. Les grandeurs usuelles de WOB s'étendent typiquement entre  $10\text{ kN}$  et  $10^3\text{ kN}$  [37].

- **La vitesse de rotation**

Le choix de la vitesse de rotation dépend de celui du WOB. En surface, elle peut être précisément contrôlée mais elle peut être différente de la vitesse de rotation du trépan. Les vitesses de rotation usuelles se situent entre  $60$  et  $250\text{ RPM}$  (tours/min).

- **Le couple exercé sur l'outil  $T_{tob}$  (Torque On Bit)**

Ce paramètre correspond au couple transmis par la garniture au trépan suivant son axe de révolution. Compte tenu des frottements du train de tiges contre la paroi du puits, ce couple est nettement inférieur à celui mesuré en surface. Ainsi, le couple  $T_{tob}$  représente les effets combinés du couple réactif et des forces de frottement non linéaires sur la longueur du BHA.

## 1.4 Éléments principaux d'un équipement de forage

La figure 1.2 montre les éléments principaux qui composent un équipement de forage rotary. Le forage en mode dit "rotary" consiste à entraîner depuis la surface, un train de tiges transmettant au trépan, situé au fond du puits, un effort longitudinal de compression en fonctionnement normal (WOB) et un couple. Une certaine énergie est produite en surface pour maintenir cette rotation et permettre le travail de désagrégation de la roche par les taillants du trépan.

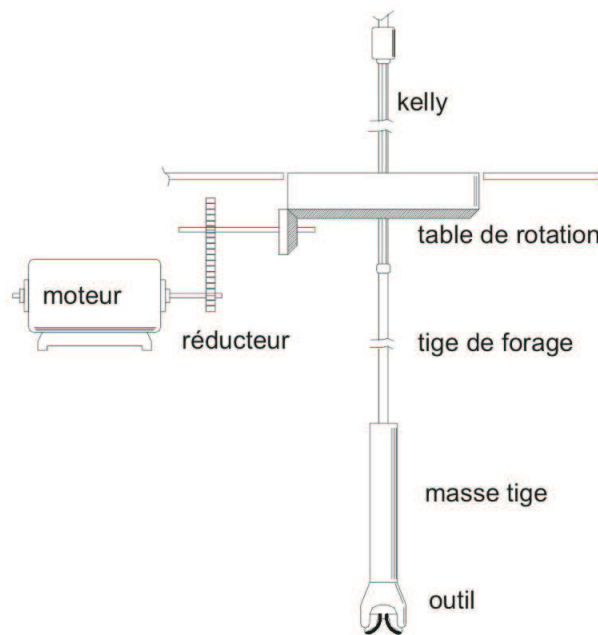


FIG. 1.2 – Schéma des éléments principaux du forage rotary

### 1.4.1 Le train de tiges

Cette partie de la garniture est constituée d'une série de tiges d'acier raccordées les unes aux autres par des joints filés coniques. Le train de tiges permet de contrôler l'outil par la transmission du couple moteur fourni en surface, par l'intermédiaire de la table de rotation. En outre, il fournit la pression nécessaire pour percer dans la formation et abraser les roches avec une force WOB suffisante. Cet ensemble peut atteindre une longueur de plusieurs kilomètres (1 à 8 *km*).

- **Les tiges de forage**

C'est un ensemble de tiges d'acier légères d'environ 10 *m* de longueur, d'un diamètre extérieur pouvant aller de 9 à 15 *cm* et d'une épaisseur de 1 *cm*. L'ensemble des tiges de forage, entraîné à partir de la table de rotation est sollicité en traction et en torsion.

## 1.4.2 Assemblage de fond BHA (Bottom Hole Assembly)

C'est la partie inférieure de la structure de garniture, constituée de l'outil, des stabilisateurs et des masses-tiges. La longueur de cet ensemble varie typiquement de 100 à 300 *m* en fonction de la pression recherchée.

- **Les masses-tiges**

Ce sont des tubes de fortes sections permettant d'exercer du poids sur le trépan. Les masses-tiges sont sollicitées en compression et en torsion. Les diamètres de ces tiges peuvent varier selon les puits, de 6 à 8 *cm* pour le diamètre intérieur et de 10 à 25 *cm* pour le diamètre extérieur pour une épaisseur de 6 à 16 *cm*, ce qui leur confère une bonne rigidité en torsion et en compression.

- **Les stabilisateurs**

Ce sont des tubes de longueur nettement plus faible que celle des masses-tiges et dont le diamètre extérieur est voisin de celui du trépan. Ils sont placés au niveau des masses-tiges et parfois intercalés entre deux masses-tiges pour assurer le centrage et le guidage de l'assemblage de fond. Ils maintiennent le trépan perpendiculaire à la formation, ce qui augmente sa performance.

## 1.4.3 Les trépons

Le trépan est monté à l'extrémité d'un train de tiges. C'est un outil qui sert à tailler et détruire la roche. Il existe différents types de trépons, chaque type étant choisi pour une opération de forage spécifique, en fonction de la nature de la formation (plus ou moins dure) et de la résistance mécanique des terrains (forabilité, stabilité des parois, comportement des argiles... ). La mécanique de l'outil de forage influence directement la vitesse de progression *ROP*. Les plus utilisés sont les trépons PDC (Polycrystalline Diamond Compact) qui contiennent des pastilles de diamant (figure 1.3). Lorsqu'ils sont en bon état, ce mode de rupture est plus efficace et favorise l'extraction naturelle des débris rocheux. Ils s'avèrent plus performants lorsqu'ils sont bien utilisés, en d'autres termes bien commandés, sinon ces performances se dégradent. Les trépons *PDC* forent la formation par cisaillement, ce qui exige, de manière significative, moins d'énergie que la rupture de formation basée sur la compression. Les *PDC* sont stables pour des vitesses de rotation élevées mais instables pour des vitesses faibles. Cette instabilité conduit à des vibrations d'auto excitation comme par exemple les vibrations de type « stick-slip » [7, 10].



FIG. 1.3 – Exemple d'outil PDC

#### 1.4.4 Système induit

Les systèmes de forage rotary, sont souvent équipés d'un système induit (figure 1.4), dont le comportement mécanique est régi par trois composantes : la table de rotation, un moteur électrique qui fournit le couple nécessaire au forage et une boîte de vitesse de rapport  $n$ .

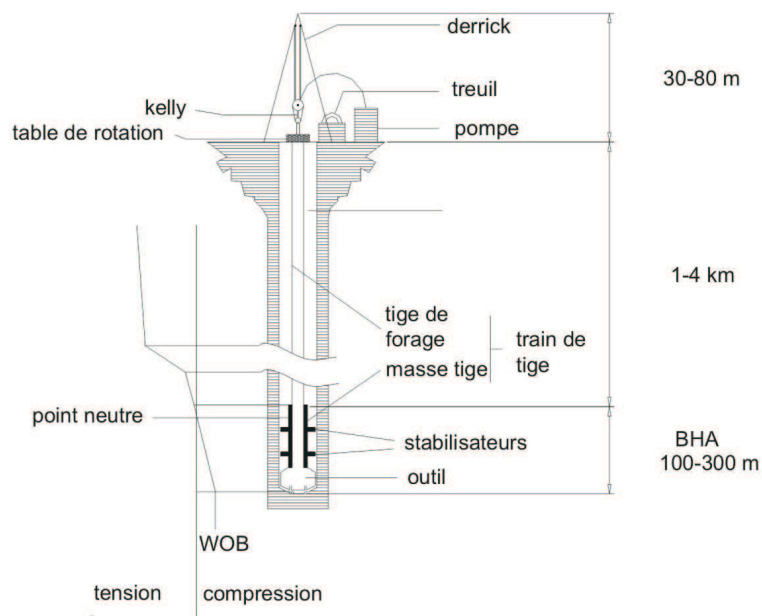


FIG. 1.4 – Système induit

- **La table de rotation**

La table de rotation fournit la puissance nécessaire, à travers le train de tiges, à l'outil

de forage. Les sources de dissipation de cette énergie incluent le frottement rotary et l'amortissement des vibrations.

• **Le moteur**

Dans les plate-formes pétrolières, on utilise des moteurs à courant alternatif (ac) ou à courant continu (dc). Les moteurs ac sont un peu plus difficiles à commander, car ils ont des caractéristiques non linéaires. Par ailleurs, en raison de leur coût, ils sont peu employés dans l'industrie pétrolière. De nombreuses plate-formes de forage sont équipées d'un moteur à courant continu à excitation séparée (figure 1.5).

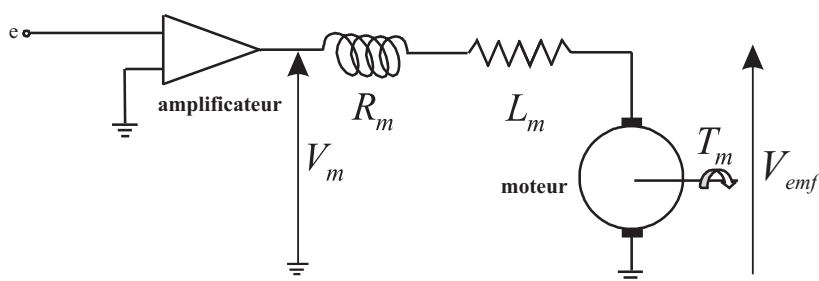


FIG. 1.5 – Moteur dc

L'équation électrique est :

$$L_m \frac{dI_m}{dt} + R_m I_m + V_{emf} = V_m \quad (1.1)$$

avec

$$V_{emf} = K_e \Omega_2 \quad (1.2)$$

$$T_m = K_c I_m \quad (1.3)$$

l'impédance d'armature  $Z_a$  est donnée par :

$$sL_m + R_m = Z_a \quad (1.4)$$

$s$  étant la variable de Laplace.

L'équation mécanique est :

$$J_m \dot{\Omega}_m = T_m - F_v \Omega_m \quad (1.5)$$

Pour faciliter la lecture, la liste des symboles est indiquée ci-dessous :

Paramètre	Description	Unité
$I_m$	Courant de l'induit	[A]
$V_m$	Tension de l'induit	[V]
$R_m$	Résistance du moteur	[ $\Omega$ ]
$L_m$	Inductance du moteur	[H]
$V_{emf}$	Force contre-électromotrice	[V]
$K_e$	Coefficient de la force contre-électromotrice	[V/rad/s]
$K_c$	Coefficient de couple	[Nm/A]
$J_m$	Inertie du moteur	[kgm <sup>2</sup> ]
$T_m$	Couple moteur	[Nm]
$\Omega_m$	Vitesse angulaire de l'arbre moteur	[rad/s]
$F_v$	Coefficient de frottement visqueux	[N/(m/s)]

TAB. 1.1 – Liste des symboles

Le moteur dc est généralement piloté par un convertisseur de puissance comme par exemple un pont de Graëtz ou encore un redresseur SCR (Silicon Controlled Rectifier).

Le réducteur utilisé (figure 1.6) a pour rapport de transmission  $n$  :

$$n = \frac{n_{rt}}{n_m} = \frac{\dot{\phi}_m}{\dot{\phi}_{rt}}. \quad (1.6)$$

Si on néglige les pertes dues aux frottements, on a

$$T_1 \dot{\phi}_m = T_2 \dot{\phi}_{rt} \quad (1.7)$$

d'où

$$n = \frac{\dot{\phi}_m}{\dot{\phi}_{rt}} = \frac{T_2}{T_1} \quad (1.8)$$

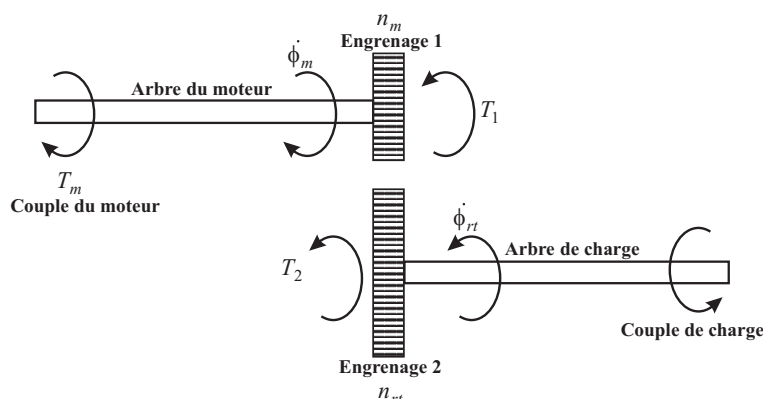


FIG. 1.6 – Réducteur

Paramètre	Description	Unité
$n_m$	Nombres de dents de l'engrenage 1	
$n_{rt}$	Nombres de dents de l'engrenage 2	
$\phi_m$	Position angulaire de l'arbre moteur	$[rad]$
$\phi_{rt}$	Position angulaire de la table de rotation	$[rad]$
$\Omega_{rt} = \dot{\phi}_{rt}$	Vitesse angulaire de la table de rotation	$[rad/s]$
$T_1$	Couple appliqué sur $J_m$ par le réducteur	$[Nm]$
$T_2 = nT_m$	Couple transmis par le réducteur	$[Nm]$
$1/n$	Coefficient de réduction	

TAB. 1.2 – Liste des symboles.

Un couple de charge important est exigé pour le forage rotary. Dans ce cas, le rapport de transmission doit être plus grand que 1 ;  $n > 1$ . Pour le modèle utilisé dans cette thèse,  $n = 7.2$ .

La dynamique du moteurs est très rapide par rapport à celle du système de forage. Nous avons donc choisi de concevoir la commande sans tenir compte de la modélisation du moteur.

## 1.5 Vibrations de train de tiges

Les vibrations de train de tiges (drillstrings) ont été étudiées dans la littérature durant ces dernières années [19, 34, 38]. Connaître le mode de la vibration est extrêmement utile car on peut alors trouver plus aisément un moyen de les compenser. Les vibrations

latérales dans l'assemblage de fond *BHA* sont nombreuses, cependant, elles sont rarement identifiées parce qu'elles n'influent pas au-delà d'un point dit de "non contrainte". Elles peuvent être limitées en évitant la vitesse de rotation critique et en plaçant de manière optimale les stabilisateurs [26]. Le type le plus violent de vibrations, comme on l'a déjà souligné, est celui du « stick-slip » (collé-glissé). Il est produit par le frottement non linéaire entre le trépan et la roche.

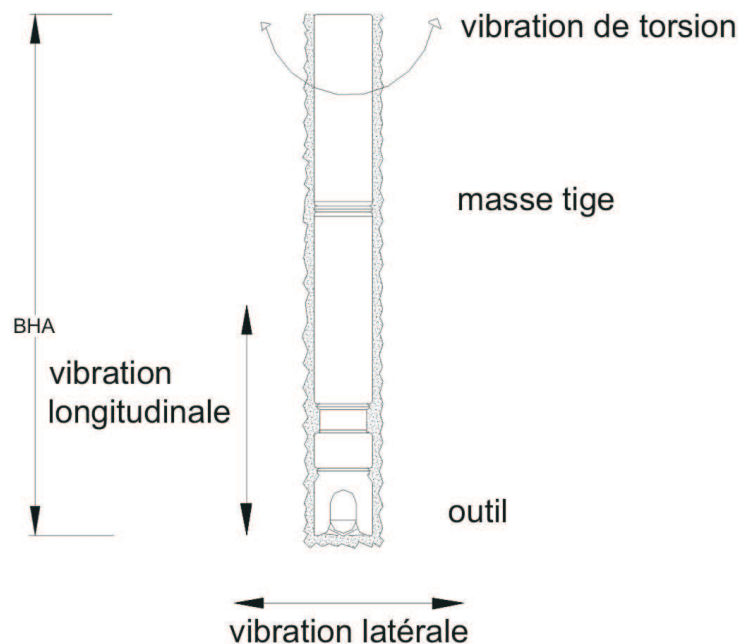


FIG. 1.7 – Vibration de train de tiges

La figure 1.7 exhibe certains modes des vibrations de train de tiges durant le processus de forage. On peut noter que le BHA est la partie la plus soumise aux vibrations. Celles du train de tiges peuvent être induites par le contact entre le trépan et la formation, le contact entre le train de tiges et le puits [9] et par l'auto-induit [12]. On peut distinguer les vibrations longitudinales, les vibrations latérales, les vibrations hydrauliques, et les vibrations de torsion. Ces vibrations peuvent engendrer une défaillance prématurée de l'équipement [34], une réduction de la vitesse de progression *ROP* et une augmentation du coût d'un puits [7].

- **Vibrations longitudinales**

Une vibration longitudinale se produit quand la vibration du milieu porteur est parallèle à la direction du transfert d'énergie. Les vibrations longitudinales sont des alternances de compressions et sont dues au rebondissement du trépan sur la formation pendant la rotation. Le mode de vibration longitudinale du train de tiges peut, dans certaines conditions de forage, dégénérer en rebonds avec séparation périodique au niveau du contact

outil-roche. Ce phénomène de rebond intervient surtout avec un outil de type tricône dont l'énergie se développe plutôt dans le sens longitudinal.

- **Vibrations latérales**

Cette vibration est aussi dite transversale, ou "whirling". Elle est causée par l'excentricité des tiges qui mènent aux forces centripètes pendant la rotation. Le mouvement de whirling synchrone, se caractérise par une même vitesse de rotation du mouvement de précision et du mouvement de l'outil sur lui-même. Ce type de vibration est auto limité par le puits, mais il peut conduire à un choc endommageant par contact avec la paroi du puits [20, 25].

- **Vibrations de torsion**

Ce type de vibrations est causé par le phénomène de « stick-slip » qui se produit quand une section de train de tiges est momentanément soumise à un frottement contre le puits. Les conséquences du « stick-slip » peuvent être assez graves dans la mesure où cela peut provoquer l'arrêt de la rotation du trépan. On s'intéresse dans cette thèse à ce dernier type de vibrations.

## 1.6 Les oscillations de type « stick-slip »

Une classe importante des vibrations de torsion est associée au phénomène du collé-glissé. Elles sont générées par frottement non linéaire entre le trépan et la roche. Aussi, comme le *PDC* se manifeste plutôt dans le sens transversal, cela conduit à la génération de vibrations latérales et oscillations. Cependant, celles-ci existent également lorsqu'on utilise des outils de type tricône.

La figure 1.8 illustre un cas réel d'oscillations persistantes, qui ont été mesurées dans un système de forage [37].

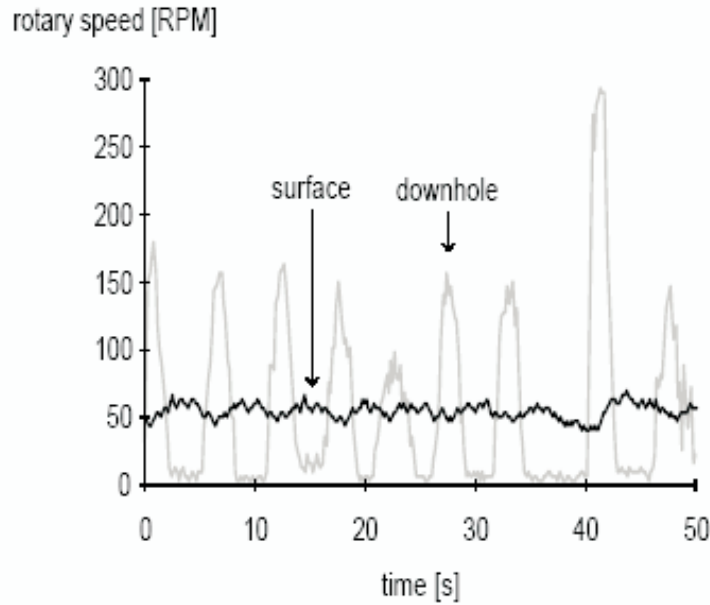


FIG. 1.8 – Stick-slip mesuré dans un gisement de pétrole

La courbe en noir montre la vitesse de la table de rotation (en surface) qui varie entre 45 et 65  $RPM$  ( $tr/min$ ) et la grise montre la vitesse de rotation du trépan (downhole). On peut remarquer que la vitesse de rotation du trépan peut atteindre 3 à 5 fois sa valeur nominale et avec une période d'oscillations de 1 à 5  $sec$ . Pendant cette période, le trépan arrive parfois à un arrêt complet tandis que dans le même temps, la table de rotation continue de tourner à une vitesse moyenne d'environ 55  $RPM$  ( $tr/min$ ), ce qui cause des fluctuations de torsion sur le train de tiges. Ce phénomène entraîne non seulement la défaillance du trépan due à une fatigue prématurée du train de tiges, mais aussi son usure prématurée en raison de sa vitesse élevée.



---

## Chapitre 2

# Modélisation du forage rotary

Ce chapitre présente tout d'abord, de manière non exhaustive, une étude de quelques modèles de frottements statiques et dynamiques. Leur prise en compte est indispensable en particulier à basse vitesse pour valider un cahier des charges et permettre l'analyse des problèmes générés par ce phénomène afin d'orienter les solutions permettant de les résoudre. Ensuite, nous présentons deux classes de modèles mathématiques associés au système de forage rotary : le premier modèle étudié est linéaire tandis que le second tient compte de la non linéarité due au phénomène de collé-glissé.

Pour cela on décompose le système en deux parties couplées :

1. le système induit ;
2. les trains de tiges et l'assemblage de fond.

Pour la modélisation des trains de tiges, on utilise celle d'une ligne de transmission ou la méthode des éléments finis.

Le modèle linéaire impose une valeur constante nulle ou arbitraire du couple de frottement sec  $T_{tob}$  entre le trépan et la roche, qui est à l'origine des oscillations. Cette invariance de la valeur de  $T_{tob}$  dans le modèle n'est pas sans effet, car les correcteurs linéaires synthétisés à partir de ce modèle, conduisent à des performances peu satisfaisantes.

Ceci nous conduit à proposer un modèle mathématique non linéaire approchant au mieux le comportement du couple de frottement sec  $T_{tob}$ . On termine ce chapitre par une analyse qualitative du phénomène de « stick-slip », afin de mieux compenser son effet.

## 2.1 Modélisation des frottements

Les frottements dans un système physique constituent un phénomène important car il se produit dans toutes les parties mécaniques : roulements, transmissions, systèmes hydrauliques, etc. Différents modèles physiques et mathématiques sont présentés dans la littérature pour la modélisation et l'analyse de ce phénomène qui peut s'avérer complexe [1, 2, 4, 6].

Tout contact entre deux solides peut être source de frottements. En effet, l'intégration d'un modèle convenable permet de mieux reproduire en simulation le procédé réel ou expérimental, et ainsi proposer des solutions plus adéquates.

### 2.1.1 Généralités sur les frottements

Le modèle de frottements utilisé pour un système physique dépend de ce dernier. On s'efforce de mettre en évidence l'essence de ce phénomène avec une complexité raisonnable.

Il existe différents types de frottements, on distingue : les frottements secs, et les frottements visqueux (figure 2.1). On se limite ici à la description des premiers.

La nature des modèles de frottements est différente. On y rencontre des modèles statiques ou des modèles dynamiques c'est-à-dire décrits par un système d'équations différentielles, ou algèbro-différentielles.

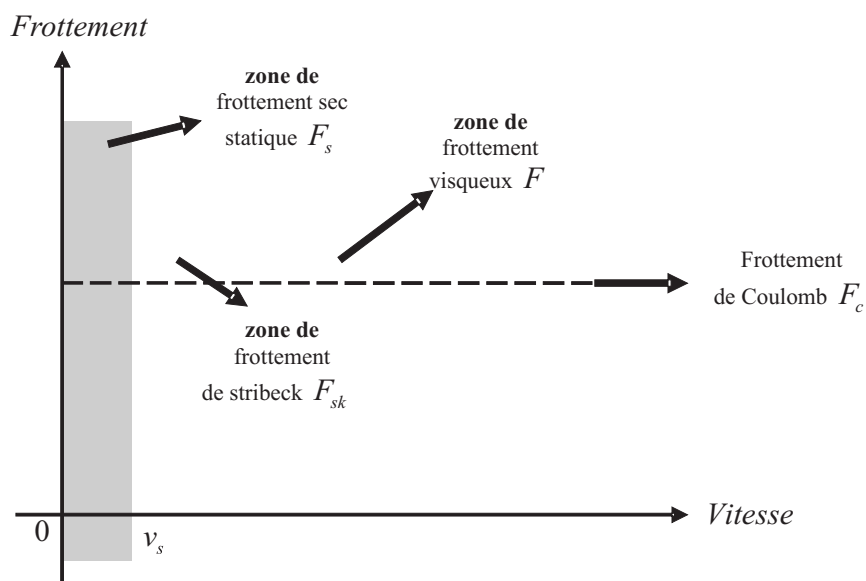


FIG. 2.1 – Différents phénomènes de frottements

## 2.1.2 Modèles statiques classiques

### 2.1.2.1 Frottements secs statiques

Ce type de frottements apparaît pour des vitesses très faibles ( $v < v_s$ ). Il est par conséquent très difficile de l'identifier, d'autant qu'il présente une forte dépendance au regard de certains paramètres comme la température, l'état des surfaces,.....etc.

Les frottements secs se manifestent par une force statique qui bloque le mouvement tant que les forces appliquées restent inférieures à un certain seuil appelé *force de stiction*. Celle-ci est responsable du phénomène de redécollage et est très nuisible comme déjà mentionné au chapitre précédent.

### 2.1.2.2 Frottements de Coulomb

Le modèle proposé par Coulomb au 18<sup>e</sup> siècle est le plus ancien et le plus simple des modèles de description de frottements secs. Celui-ci exprime le fait que deux surfaces en contact, animées l'une par rapport l'autre d'un mouvement tangent avec une vitesse de glissement relative  $v$ , exercent mutuellement une force parallèle et de sens opposé au déplacement, de norme  $F_c$  constante, égale au coefficient de Coulomb  $\mu$  multiplié par l'effort normal  $F_N$  (figure 2.2.a).

### 2.1.2.3 Frottements visqueux

La théorie de l'hydrodynamique conduit à l'expression de la force de frottement causée par la viscosité des fluides. La force de frottement visqueux  $F$  est :

$$F = F_v v \quad (2.1)$$

où  $F_v$  est le coefficient de frottement visqueux et  $v$  est la vitesse de glissement relative. Cette force est combinée avec le frottements de Coulomb comme le montre la figure 2.2.b.

Afin d'avoir une meilleure prise en compte des données expérimentales, la force de frottement visqueux peut dépendre de façon non linéaire de la vitesse  $v$  :

$$F = F_v |v|^{\delta_v} \operatorname{sgn}(v) \quad (2.2)$$

où :  $\delta_v$  est fonction de la géométrie de la surface en contact.

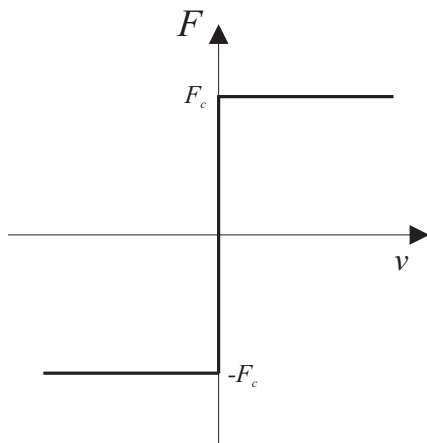
### 2.1.2.4 Frottements de stiction

C'est une description de la force de frottement au repos, cette force est plus élevée que les frottements de Coulomb. En dessous d'un certain seuil, cette force de frottement s'oppose aux forces extérieures et empêche tout mouvement, comme le montre la

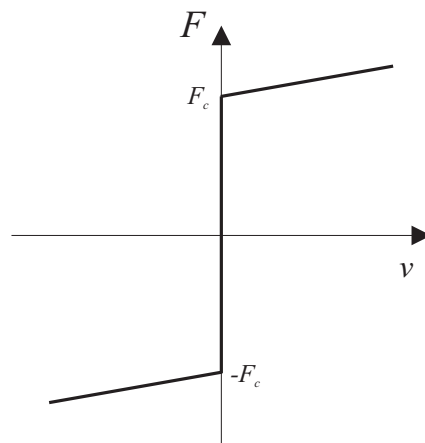
figure 2.2.c. Cette force est alors décrite en fonction de la résultante des forces extérieures  $F_e$  pour une vitesse nulle :

$$\begin{cases} F_e & \text{si } v = 0 \text{ et } |F_e| < F_s \\ F_s \operatorname{sgn}(F_e) & \text{si } v = 0 \text{ et } |F_e| \geq F_s \end{cases} \quad (2.3)$$

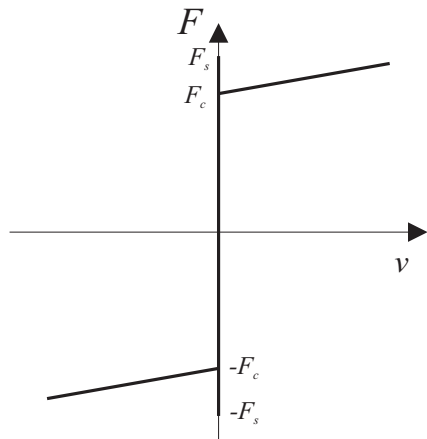
où  $F_s$  est la force de frottement de stiction (ou force de collage).



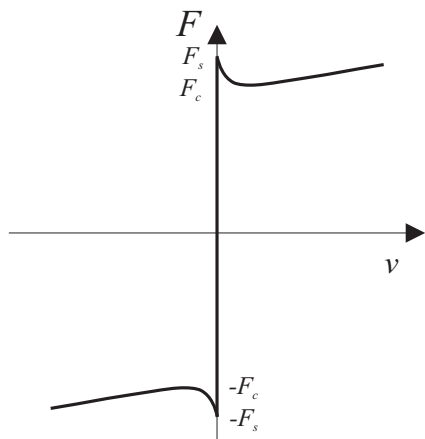
(a) Frottement de Coulomb



(b) Frottements visqueux



(c) Frottement de Coulomb avec force de collage



(d) Frottement de Stribeck

FIG. 2.2 – Modèles des frottements statiques

### 2.1.2.5 Frottements de Stribeck

La transition entre le frottement de stiction et le frottement de Coulomb se fait par une décroissance exponentielle de la force de frottement dans une plage de vitesses proches de zero, comme on peut le voir sur la figure 2.2.d. Cette décroissance correspond aux frottements de Stribeck. Une description plus générale du frottement est alors donnée par la fonction suivante :

$$\begin{cases} F(v) & \text{si } v \neq 0 \\ F_e & \text{si } v = 0 \text{ et } |F_e| < F_s \\ F_s \operatorname{sgn}(F_e) & \text{si } v = 0 \text{ et } |F_e| \geq F_s \end{cases} \quad (2.4)$$

Plusieurs paramétrisations de la fonction  $F(v)$  ont été proposées [1]. Une forme commune de  $F(v)$  est la fonction non linéaire suivante (de Bo et Pavlescu) :

$$F(v) = F_c + (F_s - F_c) e^{-|v/v_s|^{\delta_s}} \quad (2.5)$$

$\delta_s$  et  $v_s$  sont des paramètres empiriques,  $v_s$  est la vitesse caractéristique de Stribeck.

Pour Bo et Pavlescu  $1/2 \leq \delta_s \leq 1$ , Arstromg-Helouvry utilise  $\delta_s = 2$ .

## 2.1.3 Modèles dynamiques

Les modèles statiques ne considèrent que les forces de frottements à une vitesse constante, aussi ils s'avèrent insuffisants pour expliquer certains comportements liés à la dynamique interne comme par exemple le comportement élastique des surfaces en contact.

### 2.1.3.1 Modèle de frottements de Dahl

Un modèle de comportement unidimensionnel a été proposé par Dahl en 1968 [6], il décrit la variation de l'effort de frottement en fonction de la position et du signe de la vitesse.

Le modèle de Dahl a été construit de la manière suivante :

$$\frac{dF}{dx} = \sigma \left( 1 - \frac{F}{F_c} \operatorname{sgn} v \right)^\alpha \quad (2.6)$$

où  $x$  est le déplacement,  $F$  est la force de frottement. Le paramètre  $\sigma$  est homogène à un coefficient de raideur élastique qui relie la force à la contrainte. Il caractérise la rapidité avec laquelle  $F$  tend vers son asymptote. Enfin,  $\alpha$  est un paramètre empirique et il exprime la vigueur avec laquelle  $F$  change.

La relation précédente peut encore s'exprimer sous la forme d'une équation différentielle dans le domaine temporel :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx} v = \sigma \left( 1 - \frac{F}{F_c} \operatorname{sgn} v \right)^\alpha v \quad (2.7)$$

Pour le cas  $\alpha = 1$ , l'évolution de la force de frottement peut alors être formulée comme :

$$\frac{dF}{dt} = \sigma v - \frac{F}{F_c} |v|. \quad (2.8)$$

### 2.1.3.2 Modèle de frottements de Lugre

Ce type de frottements dynamiques représente les micro-déplacements pendant la phase de collage. Il agit seulement sur quelques dixièmes de millimètre [4].

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} z \\ g(v) = F_c + (F_s - F_c) e^{-v^2/v_s^2} \\ F = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + f(v) \end{cases} \quad (2.9)$$

où  $\sigma_0$  est une constante de raideur en collage,  $\sigma_1$  est un amortissement,  $g(v)$  est un modèle des effets de Stribeck et  $f(v)$  la force de frottement visqueux.

### 2.1.3.3 Modèle de frottements pour le forage rotary

La description des modèles de frottements des sections précédentes va apporter de l'aide quant au modèle de frottement qui sera retenu pour le système de forage rotary.

En réalité, on sait peu de choses au sujet des effets du « stick-slip », et plusieurs moyens ont été proposés dans la littérature pour analyser ce type de vibrations [5, 21, 29, 37]. Néanmoins, on sait que les frottements dans le système de forage s'expriment par une

relation non linéaire entre le couple exercé sur le trépan  $T_{tob}$  et sa vitesse de rotation  $\Omega_1$ .

Commençons par une analyse simple de ce phénomène. La figure 2.3 exhibe la relation entre la vitesse de rotation du trépan et le couple au trépan  $T_{tob}$ . L'augmentation du frottement à faible vitesse est connu comme un frottement statique et c'est la principale source des oscillations. Par contre, l'augmentation du frottement à vitesse élevée peut être contrôlée par l'amortissement. Plus précisément, dans cette figure, ce qui compte est le couple nécessaire pour mettre le trépan en rotation, et c'est ce qu'on appelle le couple statique  $T_s$ , qui est beaucoup plus grand que le frottement dynamique  $T_d$  ou le frottement de Coulomb. On devrait considérer que le modèle ci-dessous est seulement un moyen pouvant expliquer les oscillations observées sachant que d'autres mécanismes peuvent également causer des effets semblables.

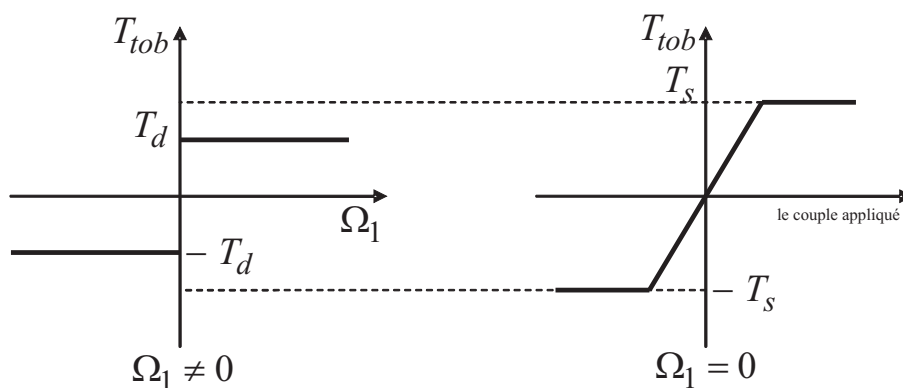


FIG. 2.3 – Modèle de Coulomb et frottement statique

Brièvement, le phénomène de collé-glissé peut s'expliquer de la manière suivante :

1. quand le trépan s'arrête suite, par exemple, à l'augmentation soudaine du WOB, le frottement nécessaire pour remettre le BHA en mouvement sera  $T_s$ ;
2. vu que la table de rotation continue à tourner à une certaine vitesse, et que le train de tiges – en raison de sa longueur – est assez flexible, ce dernier va se tordre jusqu'à ce que le couple du train de tiges atteigne la valeur des frottements statiques  $T_s$ . Le trépan commence alors à se mouvoir et l'écart  $T_s - T_d$  qui se présente comme une torsion du train de tiges va accélérer le BHA;
3. il dépasse alors sa vitesse nominale et par manque d'amortissement sur le trépan, il finira par s'arrêter, et le cycle se répète.

Le phénomène de « stick-slip » engendre une possibilité d'inversion des vitesses de rotation au niveau du trépan, cependant, comme on va le voir par la suite (Section 5.1.2), nous supposons que la rotation en sens inverse ne se produit pas, étant donné que la relation réelle entre le couple  $T_{tob}$  et la vitesse du trépan est très compliquée en pratique.

Ainsi, nous sommes seulement intéressés par la partie de la courbe à droite de l'axe vertical *i.e.*  $\Omega_1 > 0$ .

Plus récemment, certains auteurs [29] ont étudié le phénomène de « stick-slip » et en ont présenté un modèle non linéaire approximé mais qui convient relativement bien (figure 2.4), et que nous utiliserons tout au long de notre travail de recherche.

C'est un modèle qui, pour des vitesses élevées, s'approche du modèle de Coulomb et pour des vitesses très faibles, s'approche du modèle de Stribeck. L'expression analytique du couple de ces frottements est :

$$T_{tob} = -T_{tobdyn} \frac{2}{\pi} (\alpha_1 \Omega_1 e^{-\alpha_2 |\Omega_1|} + \arctan(\alpha_3 \Omega_1)) \quad (2.10)$$

avec  $T_{tobdyn} = 0,5 \text{ kNm}$ ,  $\alpha_1 = 9,5$ ,  $\alpha_2 = 2,2$ , et  $\alpha_3 = 35$ .

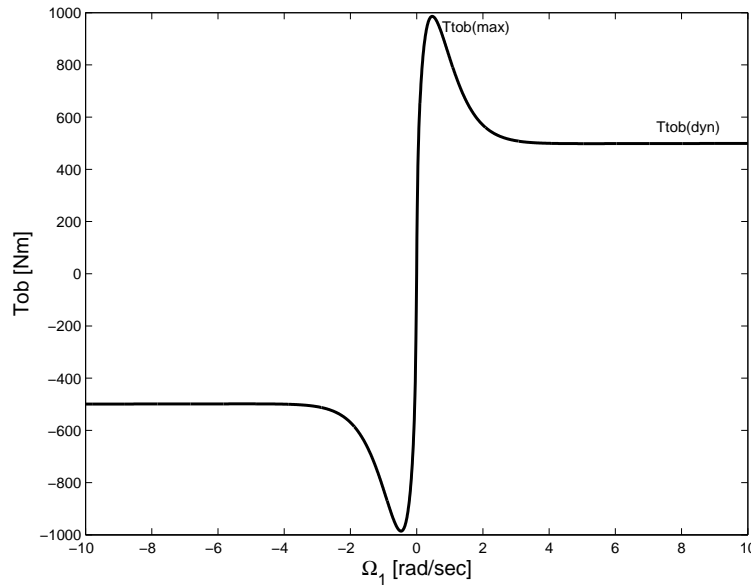


FIG. 2.4 – Le couple non linéaire  $T_{tob}$  en fonction de la vitesse de rotation du trépan  $\Omega_1$ .

## 2.2 Modèle mécanique du système

Le système de forage rotary peut être modélisé par deux inerties couplées par un pendule de torsion linéaire de constante de raideur  $k$ . Autrement dit, les tiges de forage sont représentées comme des ressorts de torsion et les masses-tiges se comportent comme un corps rigide. Ce pendule de torsion est lié à deux dispositifs d'amortissement visqueux de constantes  $C_1$  et  $C_2$ , comme indiqué par la figure 2.5.

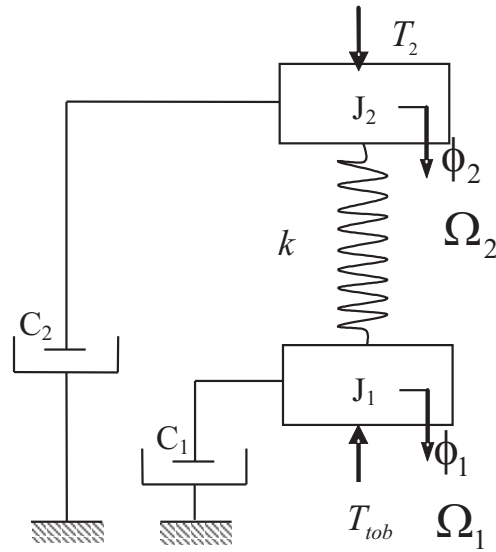


FIG. 2.5 – Modèle de forage rotary

L'assemblage de fond *BHA* est constitué de tubes à parois épaisses qui fournissent une force suffisante pour forer. Une tige d'entraînement transmet le couple moteur de la table de rotation à la tige de forage.

Ce modèle est valable sous l'hypothèse que les variations de la vitesse de rotation de la table sont négligeables devant celles du *BHA*. Cependant, la précision d'un modèle est généralement obtenue au détriment de sa simplicité.

Le choix se fait donc entre :

- les modèles linéaires pour lesquels de nombreuses méthodes de traitement sont connues mais possédant une plage de fonctionnement limitée ;
- les modèles non linéaires d'utilisation complexe mais possédant un domaine de validité étendu.

### 2.2.1 Le train de tiges et le *BHA*

En appliquant le théorème des moments, l'équation d'évolution de ce sous-système tiges et *BHA* est alors :

$$J_1 \dot{\Omega}_1 + C_1 \Omega_1 - k(\phi_2 - \phi_1) = T_{tob}(\Omega_1) \quad (2.11)$$

où la désignation des variables est fournie par la liste ci-dessous :

Paramètre	Description
$\phi_1$	Position angulaire du trépan
$\phi_2 = \phi_{rt}$	Position angulaire de la table de rotation
$\Omega_1 = \dot{\phi}_1$	Vitesse angulaire du trépan
$J_1$	Inertie équivalente d'une partie de l'inertie des tiges de forage et les masses tiges
$C_1$	Constante d'amortissement visqueux au niveau du <i>BHA</i>
$T_{tob}$	Couple non linéaire exercé sur le trépan

TAB. 2.1 – Liste des symboles.

### 2.2.2 Système induit

Le comportement mécanique du système induit est dominé par trois composantes : la table de rotation, un moteur électrique qui fournit le couple nécessaire au forage et une boîte de vitesses de rapport  $n$ . L'équation d'évolution de ce sous-système est

$$J_2 \dot{\Omega}_2 + C_2 \Omega_2 + k(\phi_2 - \phi_1) = T_2 \quad (2.12)$$

avec

$$J_2 = J_{rot} + n^2 J_m \quad (2.13)$$

La commande  $u$  est le couple  $T_2$  exercé sur la table de rotation. Ce couple est fourni par le moteur dc à travers la chaîne de transmission mécanique, auquel on retranche le terme  $C_2 \Omega_{ref}$  qui permet de mieux atténuer les oscillations dans le système. On a :

$$u = T_2 - C_2 \Omega_{ref}, \quad (2.14)$$

les différentes variables sont précisées dans la liste suivante :

Paramètre	Description
$J_2$	Inertie équivalente de la table de rotation et du moteur électrique $J_m$ ainsi qu'une partie de l'inertie des tiges et celle de la transmission mécanique
$n$	Rapport de transmission
$C_2$	Constante d'amortissement visqueux de la table de rotation
$T_2$	Couple exercé sur la table de rotation
$\Omega_{ref}$	Vitesse angulaire désirée
$\Omega_2 = \dot{\phi}_2$	Vitesse angulaire de la table de rotation
$u$	La commande

TAB. 2.2 – Liste des symboles.

## 2.3 Modèle mathématique du système

### 2.3.1 Cas linéaire

On s'attache dans un premier temps à l'étude du modèle linéaire. Les équations d'état du système complet sont obtenues à partir des équations (2.11) - (2.12) :

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\Omega}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\Omega}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k/J_1 & -C_1/J_1 & k/J_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k/J_2 & 0 & -k/J_2 & -C_2/J_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \Omega_1 \\ \phi_2 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ T_{tob}/J_1 \\ 0 \\ T_2/J_2 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Les vibrations du train de tiges sont décrites en termes de déplacement relatif entre le trépan et la table de rotation.

Il est donc possible de réduire ce système d'équations en définissant l'écart angulaire relatif entre la table de rotation et le trépan :  $\phi = \phi_2 - \phi_1$ .

En prenant comme variable d'état  $\phi$ , le système (2.15) devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{\Omega}_1 \\ \dot{\phi} \\ \dot{\Omega}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1/J_1 & k/J_1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -k/J_2 & -C_2/J_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \phi \\ \Omega_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{tob}/J_1 \\ 0 \\ T_2/J_2 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Si on suppose que le couple non linéaire  $T_{tob}$  est constant ou nul, en l'absence de frottements, alors le système (2.16) est linéaire.

## 2.3.2 Cas non linéaire

### 2.3.2.1 Les perturbations

L'origine des incertitudes est souvent due à une modélisation imparfaite du système. En effet, une perturbation est une grandeur que l'on ne connaît pas en général, ayant une action sur le système. Ces perturbations font parfois l'objet de caractéristiques particulières comme ici où l'on considère le cas des oscillations de collé-glissé qui est un phénomène non linéaire. Elles se traduisent de manière spectaculaire par une période d'environ 5s, durant laquelle l'outil s'arrête de tourner pendant plus d'une seconde, comme on l'a déjà décrit au chapitre précédent (cf. figure 1.8).

Les équations d'état du système non linéaire prennent alors la forme :

$$\Sigma_{NL} = \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.17)$$

avec comme vecteur d'état  $x = [\Omega_1 \ \phi \ \Omega_2]^T \in \mathbb{R}^3$  et comme vecteur de sortie  $y \in \mathbb{R}$ ,  $y = \Omega_1$ ,

et

$$f(x) = \begin{pmatrix} -\frac{C_1}{J_1}\Omega_1 + \frac{k}{J_1}\phi + \frac{1}{J_1}T_{tob} \\ \Omega_2 - \Omega_1 \\ -\frac{C_2}{J_2}\Omega_2 - \frac{k}{J_2}\phi + \frac{1}{J_2}\Omega_{ref} \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_2} \end{pmatrix}.$$

## 2.4 Conclusion

Nous avons aboutit à un modèle du système de forage rotary sous forme de représentation d'état. Cette modélisation considère la structure de l'équipement avec un système induit, le train de tiges et le *BHA* et inclut les frottements. On a exposé les modèles de frottements secs parmi les plus courants et décrit le modèle retenu pour représenter le phénomène de « stick-slip » qui peut se produire dans le système, durant toute la phase de forage. Ce phénomène a des effets importants sur le *ROP* et sur la durée de vie du trépan. La complexité du modèle non linéaire est due à la prise en compte, du couple exercé sur le trépan  $T_{lob}$ , qui est une fonction non linéaire de sa vitesse angulaire  $\Omega_1$ . La synthèse de lois de commande à partir de ce modèle non linéaire est traité au chapitre 5 selon trois techniques : linéarisation par bouclage, modes de glissements et l'approche "Backstepping".



---

## Chapitre 3

# Commande Linéaire ( $H_\infty$ )

Ce chapitre traite de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  en vue de mettre en évidence le niveau éventuel d'amélioration apporté par les méthodes de commandes non linéaires exposées au chapitre 5.

L'inconvénient des méthodes de commande linéaire classique comme le correcteur PID et moderne comme le LQG est qu'elles ne garantissent pas toujours la stabilité vis-à-vis des incertitudes. L'introduction de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  permet de garantir la stabilité en présence des erreurs de modélisation, au détriment parfois des performances, d'autant plus que le résultat obtenu est assez conservatif.

L'utilisation de la  $\mu$  synthèse permet de réduire ce conservatisme [8] (à condition de bien savoir où interviennent les incertitudes). Toutefois, l'ordre du contrôleur augmente. Une autre alternative consiste à spécifier les objectifs de commande par l'introduction de filtres de pondérations fréquentielles appliquées sur les différents signaux. Ils sont utilisés pour pondérer la commande et les sorties afin d'assurer les performances avec de bonnes marges de stabilité au système en boucle fermée. L'application de cette synthèse au problème du forage rotary reprend une partie des travaux déjà existants [29].

## 3.1 Introduction

La synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  par approche standard constitue une méthode de construction de correcteurs utilisant des outils fréquentiels. Le système en boucle fermée, décrit également par des incertitudes, doit satisfaire des exigences formulées en termes d'objectifs de commande. Celles-ci sont alors réalisées grâce à l'étude des marges de stabilité et au modelage des transferts entrée/sortie du modèle de synthèse de façon à ce que le système commandé possède de bonnes propriétés de stabilité. Le théorème du petit gain [39] est la base du développement des outils d'analyse qui permettent de mettre en oeuvre une stratégie de contrôle par optimisation  $\mathcal{H}_\infty$ .

## 3.2 Valeurs singulières et norme $\mathcal{H}_\infty$

### 3.2.1 Valeurs singulières

Soit  $A$  une matrice complexe;  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , les valeurs singulières de  $A$  sont définies par

$$\sigma_i(A) \triangleq \sqrt{\lambda_i(AA^*)} \geq 0 \quad (3.1)$$

Les valeurs singulières étant des réels, il est possible de les classer et on note :

$$\bar{\sigma}(A) = \sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \dots \geq \sigma_m(A) = \underline{\sigma}(A)$$

Nous avons les relations suivantes :

$$\bar{\sigma}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \quad (3.2)$$

$$\underline{\sigma}(A) = \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \quad (3.3)$$

On peut montrer par ailleurs que  $\bar{\sigma}(A)$  est une norme matricielle. On a en effet :

(i)  $\bar{\sigma}(A) = 0 \iff A = 0$

(ii)  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \bar{\sigma}(\lambda A) = |\lambda| \bar{\sigma}(A)$

(iii)  $\bar{\sigma}(A + B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B)$

(iv)  $\bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A) \cdot \bar{\sigma}(B)$

Les trois premières propriétés prouvent que  $\bar{\sigma}(A)$  est une norme pour  $A$ . La quatrième propriété montre que c'est en plus une norme multiplicative.

### 3.2.2 Matrice de transfert et valeurs singulières

Considérons un système linéaire représenté par sa matrice de transfert  $G(s)$  avec un vecteur d'entrée  $e(t)$  et un vecteur de sortie  $s(t)$  de dimensions respectives  $m$  et  $p$ . En réponse à une excitation harmonique  $e(t) = Ee^{j\omega t}$ ,  $E \in \mathbb{C}^m$ , la sortie du système s'écrit :

$$s(t) = G(j\omega)Ee^{j\omega t}$$

Pour un système monovariante, on définit, à partir de cette relation, le gain du système à la pulsation  $\omega$  par le module  $|G(j\omega)|$ . Dans le cas multivariante, on utilise la notion de valeurs singulières :

$$\underline{\sigma}(G(j\omega)) \leq \frac{\|s(t)\|_2}{\|e(t)\|_2} = \frac{\|G(j\omega)e(t)\|_2}{\|e(t)\|_2} \leq \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (3.4)$$

Les valeurs singulières  $\sigma_i(G(j\omega))$  constituent une généralisation aux systèmes multivariants de la notion de gain. Pour un système multivariante, le gain à une fréquence donnée sera compris entre les valeurs singulières inférieure et supérieure.

### 3.2.3 Norme $\mathcal{H}_\infty$ d'un système linéaire stationnaire

Soit un système linéaire stationnaire de représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

La matrice de transfert correspondante s'écrit  $G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ . On suppose que le système est stable, *i.e.*  $G(s) \in \mathbb{RH}_\infty^{n \times m}$ .

Nous donnons la définition suivante :

#### Définition 3.2.1

On définit la norme  $\mathcal{H}_\infty$  de  $G(s)$  par la quantité

$$\|G(s)\|_\infty \triangleq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (3.5)$$

$\|G(s)\|_\infty$  est la valeur la plus élevée du gain du système sur l'ensemble des pulsations. Pour un système monovariante, c'est la valeur la plus élevée de  $|G(j\omega)|$ .

Le calcul de  $\|G(s)\|_\infty$  n'est pas toujours aisé : si on se restreint à un nombre fini de pulsations, on n'obtient qu'une borne inférieure. Le théorème 3.3.1 de la section qui suit permet d'obtenir un majorant  $\gamma$  de  $\|G(s)\|_\infty$ .

### 3.3 Commande $\mathcal{H}_\infty$ standard

La commande  $\mathcal{H}_\infty$  est une commande relativement récente, mais elle a eu un fort retentissement important, car elle peut apporter une amélioration en ce qui concerne la robustesse. De plus, on dispose d'une panoplie de définitions et d'outils mathématiques (Riccati, LMI,...etc).

#### 3.3.1 Problème standard

La synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  utilise la notion de problème standard, qui est représenté sur la figure 3.1 : la matrice de transfert  $G(s)$  modélise les interactions dynamiques entre deux ensembles d'entrées et deux ensembles de sorties : le vecteur  $w$  représente des entrées extérieures, telles que signaux de référence, perturbations, bruits; le vecteur  $u$  représente les commandes; les signaux  $z$  sont choisis pour caractériser le bon fonctionnement de l'asservissement; enfin  $y$  représente les mesures disponibles pour élaborer la commande.

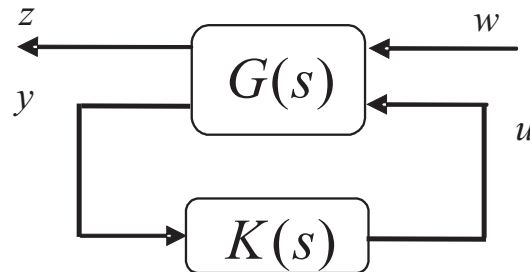


FIG. 3.1 – Problème  $\mathcal{H}_\infty$  standard

En effectuant une partition de la matrice  $G(s)$  de façon cohérente avec les dimensions de  $w$ ,  $u$ ,  $z$ ,  $y$  sur la figure 3.1, on a

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{zw}(s) & G_{zu}(s) \\ G_{yw}(s) & G_{yu}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Dans un problème de commande  $\mathcal{H}_\infty$ , on veut minimiser la norme  $\mathcal{H}_\infty$  du transfert entre les entrée exogènes  $w$  et les sorties exogènes  $z$  qui représentent, dans un problème

de robustesse, les éléments de connexion avec la matrice de transfert des incertitudes.

Cette réduction se fait par le biais d'un bouclage, entre les sorties de mesure  $y$  et les entrées de commande  $u$ , moyennant un transfert du correcteur  $K$ . On note le système bouclé  $G_{zw}$ .

On rappelle que la norme  $\mathcal{H}_\infty$  de  $G_{zw}$  entre  $w$  et  $z$  est :

$$\|G_{zw}\|_\infty = \sup_{w \in \mathcal{L}_2, w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}. \quad (3.7)$$

La méthode de calcul du correcteur  $\mathcal{H}_\infty$  standard, proposée par Doyle [39] (plus connue sous l'algorithme de Glover-Doyle), est rappelée ci-après. Cette méthode repose sur la forme standard d'état de  $G_{zw}$  suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u \end{aligned} \quad (3.8)$$

### 3.3.2 Transformation Fractionnaire Linéaire

La notion de bouclage en automatique est prépondérante, car grâce au bouclage nous pouvons stabiliser un système et lui imposer une dynamique. De même que le système peut être stabilisé par un correcteur  $K$  (figure 3.2.a), il peut être déstabilisé par des incertitudes de modélisation  $\Delta$  (figure 3.2.b).

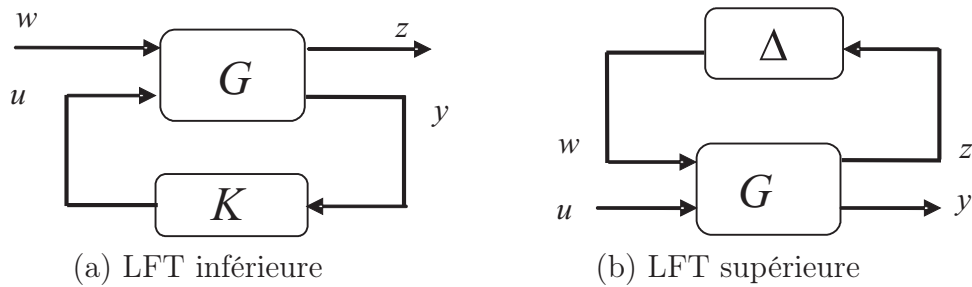


FIG. 3.2 – Transformation Fractionnaire Linéaire

Les bouclages présentés dans la figure 3.2 sont des Transformations Fractionnaires Linéaires, ou LFT (de l'anglais Linear Fractional Transformation); pour dire qu'elle est inférieure ou supérieure on rajoute l'indice  $\mathcal{L}$  ou  $\mathcal{U}$ . Sous forme transferts, les LFT  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}(G,K)$  (figure 3.2.a) et  $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(\Delta,K)$  (figure 3.2.b) s'écrivent :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{L}}(G,K) = G_{zw}(s) + G_{zu}K(s) (I - G_{yu}(s)K(s))^{-1} G_{yw}(s) \quad (3.9)$$

et

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(\Delta,K) = G_{yw}(s) + G_{yw}\Delta(s) (I - G_{zw}(s)\Delta)^{-1} G_{zw}(s) \quad (3.10)$$

Dans un problème  $\mathcal{H}_\infty$ , la valeur de  $\gamma$  n'est pas connue d'avance, alors la recherche de  $\gamma$  se fait par dichotomie. Afin que le problème  $\mathcal{H}_\infty$  puisse être résolu à chaque itération, des conditions doivent être vérifiées :

1.  $(A,B_2)$  est stabilisable et  $(C_2,A)$  est détectable
2.  $\text{rang}[D_{12}] = m_2$  et  $\text{rang}[D_{21}] = p_2$
3.  $\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n_G + m_2$
4.  $\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n_G + p_2$

D'après la condition 2, on peut toujours choisir les sorties et les entrées exogènes telles que  $D_{12}^T = [0 \ I]$  et  $D_{21} = [0 \ I]$ . Suivant la partition de  $D_{12}$ ,  $D_{22} = 0$  et  $D_{21}$ , on peut partitionner  $D_{11}$  comme suit :

$$D_{11} = \begin{pmatrix} D_{1111} & D_{1112} \\ D_{1121} & D_{1122} \end{pmatrix}.$$

On donne ci-dessous le théorème énoncé par Glover et Doyle [16], permettant de générer l'ensemble des correcteurs vérifiant la norme  $\mathcal{H}_\infty$  imposée par la condition de robustesse.

### Théorème 3.3.1

Soit  $\gamma > 0$ . Il existe un correcteur stabilisant le système (3.8) et vérifiant  $\|\mathcal{F}_{\mathcal{L}}(G,K)\|_\infty < \gamma$  si et seulement si :

- (a)  $\gamma > \max\{\bar{\sigma}([D_{1111}, D_{1112}]), \bar{\sigma}([D_{1111}^T, D_{1121}^T])\}$

(b) Il existe des solutions  $X_\infty \geq 0$  et  $Y_\infty \geq 0$  aux équations de Riccati telles que  $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$

Si les conditions (a) et (b) sont vérifiées, alors tout correcteur  $K$  stabilisant, pour lequel  $\|\mathcal{F}_L(G, K)\|_\infty < \gamma$  est donné par :

$$K = \mathcal{F}_L(K_a, \Phi) \quad (3.11)$$

avec  $\Phi \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty^1$ , vérifiant  $\|\Phi\|_\infty < \gamma$ , et  $K_a$  :

$$K_a : \left( \begin{array}{c|c} A_{K_a} & B_{K_a} \\ \hline C_{K_a} & D_{K_a} \end{array} \right) \quad (3.12)$$

avec :

$$\begin{aligned} B_{K_a} &= (B_{K_a1} B_{K_a2}) = (-K_{f_\infty3} + (B_2 + K_{f_\infty2})\hat{D}_{11} \quad (B_2 + K_{f_\infty2})\hat{D}_{12}) \\ C_{K_a} &= \begin{pmatrix} C_{K_a1} \\ C_{K_a2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (K_{c_\infty3} - \hat{D}_{11}(C_2 + K_{c_\infty2}))(I - \gamma^2 Y_\infty X_\infty)^{-1} \\ \hat{D}_{21}(C_2 + K_{c_\infty2})(I - \gamma^2 Y_\infty X_\infty)^{-1} \end{pmatrix} \\ A_{K_a} &= A + K_{f_\infty} C + B_{K_a2} \hat{D}_{12}^{-1} C_{K_a1} \\ D_{K_a} &= \begin{pmatrix} \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{D}_{21} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \hat{D}_{11} &= -D_{1121} D_{1111}^T (\gamma^2 I - D_{1111} D_{1111}^T)^{-1} D_{1112} - D_{1122} \\ \hat{D}_{12} \hat{D}_{12}^T &= I - D_{1121} (\gamma^2 I - D_{1111} D_{1111}^T)^{-1} D_{1121}^T \\ \hat{D}_{21}^T \hat{D}_{21} &= I - D_{1112}^T (\gamma^2 I - D_{1111} D_{1111}^T)^{-1} D_{1112}. \end{aligned}$$

---

1. Ensemble des transferts stables et propres

Le contrôleur le plus utilisé est le contrôleur central qui correspond au choix d'un transfert  $\Phi(s) = 0$ .

Dans le cas où  $D_{22}$  est non nul, le correcteur se déduit d'un contrôleur  $K_0$  obtenu pour  $D_{22} = 0$  par :

$$K = \mathcal{F}_U \left( K_0, \left( \begin{array}{c|c} -D_{22} & I \\ \hline I & 0 \end{array} \right) \right) \quad (3.13)$$

On garantit par cette relation (3.13) que :

$$\|\mathcal{F}_L(G_{D_{22}=0}, K_0)\|_\infty = \|\mathcal{F}_L(G, K)\|_\infty. \quad (3.14)$$

### 3.3.3 Filtres de pondération

La synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  est fréquentielle, donc toute spécification doit être imposée par l'intermédiaire d'un gabarit fréquentiel, ainsi les filtres n'auront pas seulement pour rôle de spécifier la variation fréquentielle de l'incertitude, mais aussi d'imposer des performances temporelles (figure 3.3). Ce dernier point représente l'inconvénient de l'utilisation de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ .

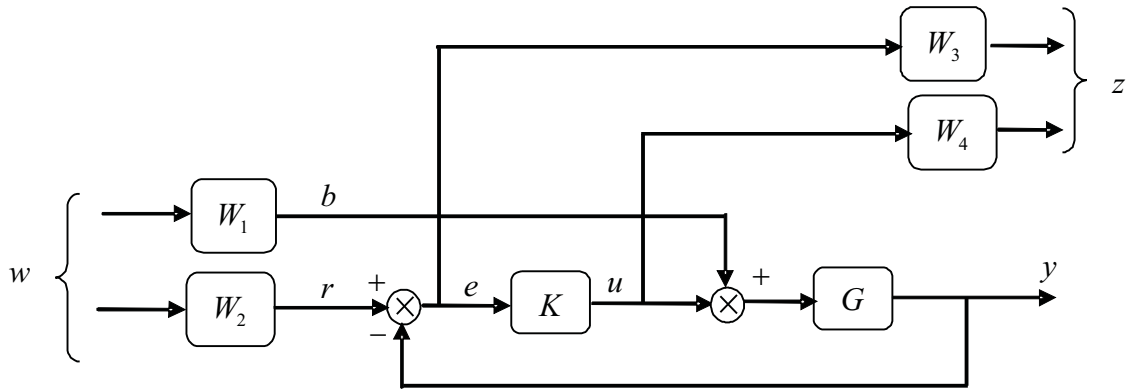


FIG. 3.3 – Exemple de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  par pondérations fréquentielles

On calcule aisément la matrice de transfert du système bouclé  $\mathcal{F}_L(G, K)$  (voir éq. 3.9).

avec  $w = (w_1, w_2)^T = (r, b)^T$  et  $z = (z_1, z_2)^T = (e, u)^T$ , on a

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}^* & H_{12}^* \\ H_{21}^* & H_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Le problème  $\mathcal{H}_\infty$  standard qui en découle après avoir introduit les fonctions de pondérations le suivant : déterminer un nombre  $\gamma > 0$ , et le correcteur  $K(s)$  stabilisant le système bouclé et assurant :

$$\left\| \begin{pmatrix} W_3 H_{11}^* W_2 & W_3 H_{12}^* W_1 \\ W_4 H_{21}^* W_2 & W_4 H_{22}^* W_1 \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma. \quad (3.16)$$

Bien que plusieurs techniques de choix des filtres aient été utilisées, elles restent souvent spécifiques à un système donné, d'autant plus que dans le cas multivariable la norme  $\mathcal{H}_\infty$  ne permet pas de séparer les contraintes entre les différentes paires d'entrées/sorties, le choix des filtres devient alors difficile, et il peut induire un correcteur d'ordre élevé.

Si on considère le transfert en boucle ouverte entre la consigne et l'erreur de régulation, l'interprétation fréquentielle des performances temporelles est d'avoir un gain élevé pour réduire l'erreur de régulation, et élargir la bande passante pour diminuer le temps de réponse (figure 3.4.a). Pour une synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  standard, l'interprétation sur la boucle ouverte  $GK$  est transposée sur la fonction de sensibilité  $\mathcal{S} = (I + GK)^{-1}$  (figure 3.4.b), en raisonnant par comportement asymptotique.

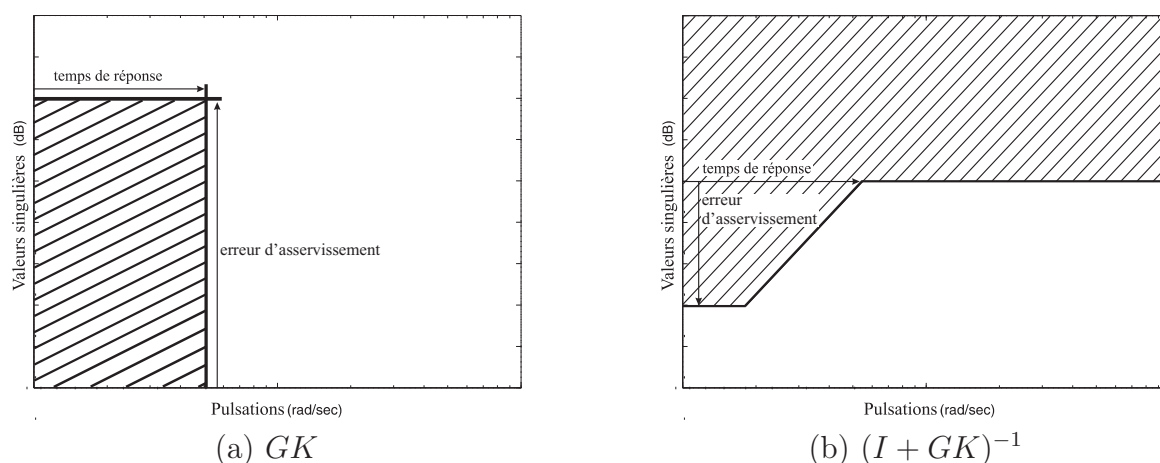


FIG. 3.4 – Traduction fréquentielle des spécifications temporelles

Dans [13] par exemple, on trouve une méthodologie pour la construction des filtres. Les filtres considérés sont du premier ou du deuxième ordre. Le premier ordre permet d'imposer des contraintes de types : roll-off, bande passante,...etc. Le deuxième ordre introduit une contrainte sur un intervalle de fréquences, pour, par exemple, contrôler un mode souple.

Le choix des filtres reste très difficile à concevoir surtout pour les problèmes de commande où des critères discordants doivent être considérés.

### 3.4 Application au forage rotary

Dans la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ , on considère comme entrées exogènes et sorties exogènes les variables :

$$\begin{aligned} w &= \begin{pmatrix} \Omega_{ref} \\ T_{tob} \end{pmatrix} \\ z &= \begin{pmatrix} \Omega_{ref} - \Omega_1 \\ u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les performances temporelles sont imposées par l'application d'un gabarit fréquentiel sur la fonction de sensibilité  $\mathcal{S}$  qui est donnée pour le système de forage par le transfert entre  $\Omega_{ref}$  et  $\Omega_{ref} - \Omega_1$ . Le rajout de la sortie exogène  $u$  traduit la considération du transfert  $K\mathcal{S}$ , ce qui permettra d'imposer un roll-off sur le système bouclé.

L'entrée  $T_{tob}$  a le rôle de spécifier la robustesse vis-à-vis de l'effet « stick-slip », qui dans une synthèse linéaire est défini par une bande passante.

D'après les hypothèses simplificatrices données dans le chapitre précédent (paragraphe 2.3.1), les matrices de la forme standard (3.8) du modèle linéaire (2.15) sont :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -C_1/J_1 & k/J_1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -k/J_2 & -C_2/J_2 \end{pmatrix} ; \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/J_1 \\ 0 & 0 \\ C_2/J_2 & 0 \end{pmatrix} ; \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/J_2 \end{pmatrix} \\ C_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad D_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad D_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad D_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v_{tob} \end{pmatrix} ; \quad D_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Le schéma général de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  est donné par la figure 3.5. Les points clés de cette synthèse sont la détermination des filtres  $V_{ref}$ ,  $V_{tob}$ ,  $W_p$  et  $W_u$ .

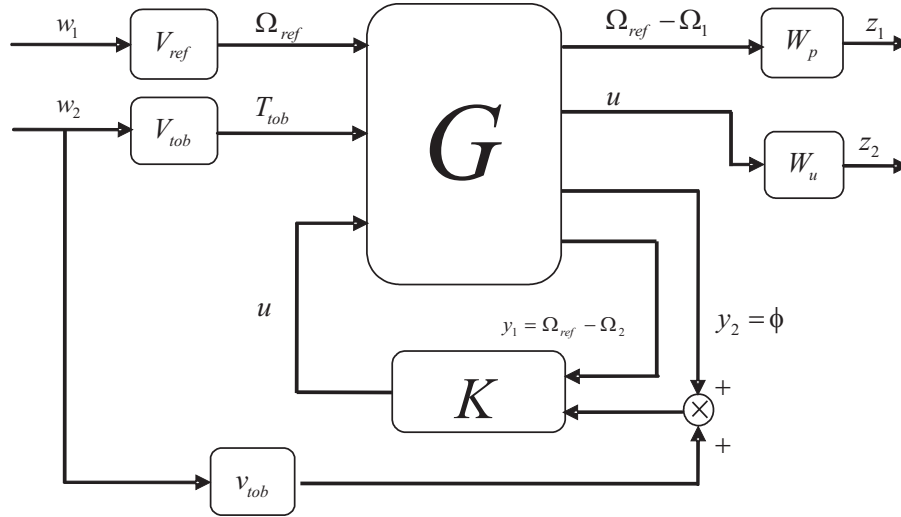


FIG. 3.5 – Structure de la commande  $\mathcal{H}_\infty$

La bouclé fermée généralisée devient

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_p H_{11}^* V_{ref} & W_p H_{12}^* V_{tob} \\ W_u H_{21}^* V_{ref} & W_u H_{22}^* V_{tob} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Les rôles des filtres de pondération  $W_p$  et  $W_u$  consistent à spécifier le comportement fréquentiel de la boucle fermée  $\mathcal{S}$  et  $K\mathcal{S}$ . En revanche, la fonction des filtres  $V_{ref}$  et  $V_{tob}$  est de définir la réponse fréquentielle des entrées associées.

Ainsi pour le filtre  $V_{ref}$ , nous le considérons unitaire, car la valeur imposée à  $\Omega_{ref}$  est un échelon de référence. Nous développerons dans ce qui suit le procédé de spécification des autres filtres.

- **Filtre  $W_p$**

Le filtre de pondération  $W_p$  agit sur les deux transferts  $\mathcal{S}$  et celui de l'entrée  $T_{tob}$  vers l'erreur d'asservissement. Concernant ce deuxième transfert, nous supposons que le choix du filtre  $V_{tob}$  permettra d'imposer un gabarit voulu. On se contente d'agir seulement sur la fonction de sensibilité. Nous garantissons ainsi :

$$\|\mathcal{S}\|_\infty < \frac{1}{|W_p|} \quad (3.19)$$

pour une valeur de  $\gamma$  égale à 1 et  $V_{ref} = 1$ .

Comme le montre la figure 3.4.b, le filtre  $W_p$  permet de spécifier deux types de performances, la première est la bande passante définie par l'emplacement du pôle et du gain à l'infini de l'inverse du filtre. La deuxième est l'erreur relative maximale qui dépend du gain statique de l'inverse du filtre. Posons :

$$\frac{1}{W_p(s)} = \kappa \frac{s + \alpha_1}{s + \alpha_2} \quad (3.20)$$

où  $\kappa$  est un gain.

On souhaite obtenir une réponse temporelle du système sans dépassement et que pour les instants supérieurs à  $T_d = 0,2 \text{ sec}$ , l'erreur statique ait une valeur inférieure à 1%. A partir de ces exigences, nous obtenons  $\alpha_2 = 5$  et  $\kappa = 100$ . Si nous imposons  $\alpha_1 = 0$ , nous aurons une erreur statique nulle. Nous pouvons cependant réduire la contrainte, en prenant  $\alpha_1 = 10^{-3}$ . Ainsi le filtre  $W_p$  est :

$$W_p(s) = \frac{s + 5}{100s + 0,1} \quad (3.21)$$

#### • Filtre $V_{tob}$

L'intérêt de ce filtre est de réduire le gain du transfert, entre la perturbation de l'effet « stick-slip » et l'erreur statique d'asservissement, au niveau de la bande passante de la réponse fréquentielle de cette perturbation. D'après [21], si la valeur de la référence est donnée par la formule suivante :

$$\Omega_{ref} = \frac{(T_{tobmax} - T_{tobdyn})\omega_d}{2k} \left[ \frac{\sqrt{\pi\xi} - \xi}{\pi\xi - \xi^2} \right] \quad (3.22)$$

où  $\omega_d = \sqrt{\frac{k}{J_1}}$  est la pulsation propre du système.

avec  $\xi = C_1/2J_1\omega_d$ , pour une valeur fixée de  $C_1$ , alors l'effet « stick-slip » est supposé disparaître.

Vu que la valeur de  $\Omega_{ref}$  peut être différente de celle donnée par l'expression (3.22), le but du filtre  $V_{tob}$  est de ramener  $\Omega_{ref}$  à celle donnée par (3.22) pour la fréquence propre

du « stick-slip ». Si on considère  $\Omega_{ref} = 10$  rad/sec, le filtre  $V_{tob}$  est :

$$V_{tob}(s) = 50.10^3 \frac{s^2 + s + 0.8}{s^2 + 50s + 0,8} \quad (3.23)$$

où la pulsation propre de l'effet « stick-slip » est égale à  $0.9$  rad/sec. La valeur  $50.10^3$  kNm est imposée par la limitation du couple moteur.

- **Filtre  $W_u$**

Comme nous l'avons mentionné précédemment, l'intérêt du filtre  $W_u$  est d'imposer un roll-off permettant de rejeter l'effet des bruits en hautes fréquences et prévenir d'une éventuelle saturation de la commande. Le filtre de roll-off est ainsi défini comme étant :

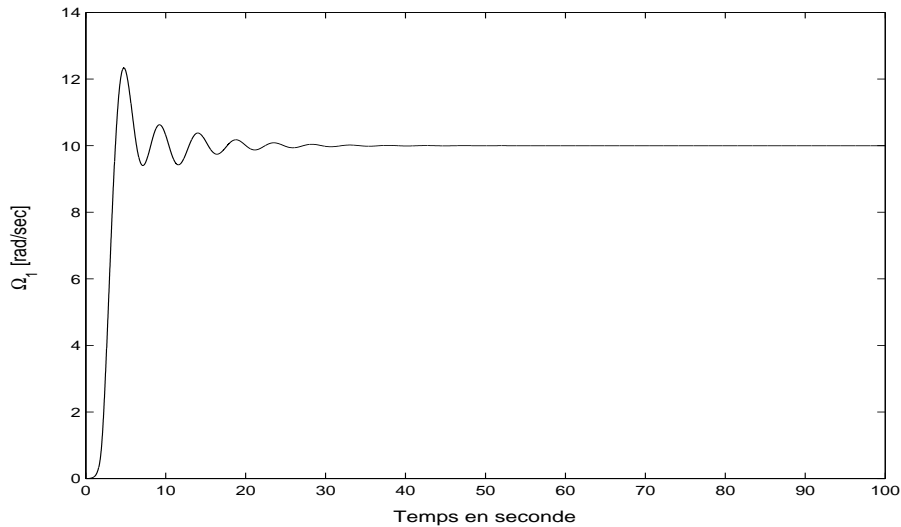
$$\frac{1}{W_u(s)} = \zeta \frac{s + \beta}{s}, \quad (3.24)$$

la valeur de  $\beta$  est donnée par la bande passante du roll-off imposée, soit  $\beta = 25$  rad/sec. La valeur de  $\zeta$  est déterminée par tâtonnement après vérification de la valeur du couple. Après plusieurs essais, nous avons opté pour la valeur  $\zeta = 500$ . Le filtre de  $W_u$  choisi est alors :

$$W_u(s) = \frac{s}{500(s + 25)} \quad (3.25)$$

### 3.4.1 Résultats de simulation

Le correcteur  $\mathcal{H}_\infty$  résultant de l'application des pondérations données ci-dessus, permet d'avoir des résultats acceptables, comme le montre la figure 3.6, quoique qu'il subsiste encore quelques oscillations sur cette réponse. On peut alors conclure que la commande  $\mathcal{H}_\infty$  a permis de réduire l'effet « stick-slip » mais elle ne garantit pas sa suppression.

FIG. 3.6 – Correcteur  $H_\infty$ 

Cette méthode de commande, demeure néanmoins intéressante et servira pour l'étude comparative avec d'autres méthodes de commande, réalisée au chapitre 5

### 3.5 Conclusion

Nous avons présenté la méthodologie d'application de la synthèse  $H_\infty$  au problème de forage, et tenté d'apporter une solution au problème du phénomène « stick-slip » en l'abordant par une approche fréquentielle. Cette approche ne permet pas de considérer la totalité de l'information que nous avons sur ce phénomène, vu le caractère linéaire ici considéré. Nous avons donc pu seulement atténuer son effet sans pour autant l'éliminer.

Dans les chapitres qui suivront, nous aborderons d'autres approches supposées mieux adaptées à ce problème.

---

# Chapitre 4

## Méthodes de commande non linéaires

Ce chapitre est essentiellement consacré à trois approches non linéaires que nous avons sélectionnées pour commander le système de forage rotary : linéarisation par bouclage, commande à structure variable et commande par Backstepping.

Aucune de ces approches n'a encore été appliquée dans le domaine des forages. La linéarisation par bouclage est relativement bien connue maintenant en théorie des systèmes non linéaires, néanmoins pour faciliter la lecture de ce document, quelques rappels sont donnés.

Ensuite, nous présentons de même un rappel sur les méthodes de commande à structure variable et commande par Backstepping. L'objectif est ici de souligner les idées sur lesquelles sont basées les lois de commande élaborées au Chapitre 5.

## 4.1 Linéarisation entrée-état

Comme déjà mentionné, la linéarisation par bouclage est aujourd'hui bien connue en théorie des systèmes non linéaires, le lecteur peut se référer, par exemple, aux ouvrages [18, 27, 32].

L'intérêt d'une telle approche est d'obtenir un comportement homogène quelque soit le point de fonctionnement : il sera possible ainsi de stabilier le système autour d'une trajectoire quelconque.

La linéarisation entrée-état d'un système non linéaire consiste à trouver une loi de commande non linéaire qui permet au système bouclé d'avoir un comportement linéaire comme indiqué par la figure 4.1.

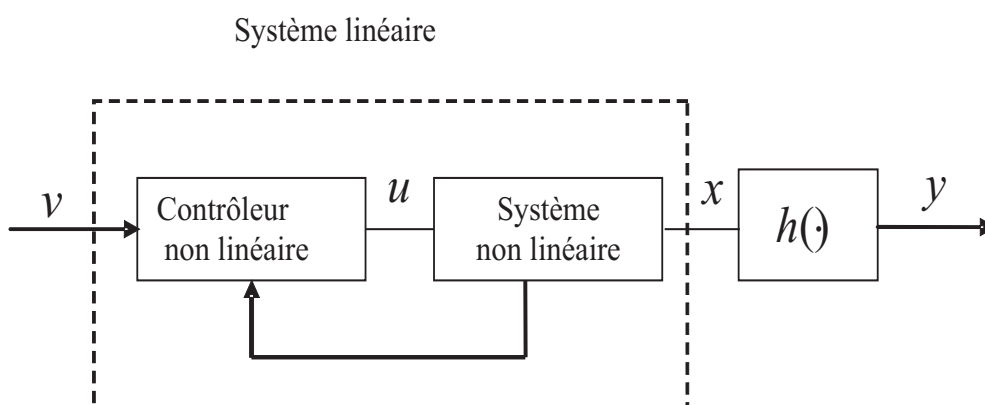


FIG. 4.1 – Linéarisation par bouclage

Dans ce cadre, nous considérons des systèmes non linéaires affines en la commande, c'est-à-dire décrits par une représentation d'état de la forme :

$$\Sigma_{NL} = \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}$  est l'entrée en commande du système,  $y(t) \in \mathbb{R}$  est la sortie,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des champs de vecteurs et enfin  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction non linéaire, supposée analytique.

Le but de la méthode de linéarisation est de trouver un bouclage statique de la forme :

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (4.2)$$

et un changement de variables

$$z = T(x) \quad (4.3)$$

qui transforme le système non linéaire  $\Sigma_{NL}$  en un système linéaire commandable, tel que les nouvelles variables d'état  $z$ , et la nouvelle entrée  $v$  vérifient un système d'équations linéaires stationnaires :

$$\dot{z} = Az + Bv \quad (4.4)$$

$$\text{où } A(n \times n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B(n \times 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

L'équation (4.4) est obtenue dans le cas où le degré relatif du système (4.1) est égale à la dimension de l'espace d'état, autrement dit dans les nouvelles coordonnées, l'équation d'état prend la forme normale :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= b(z) + a(z)u \end{aligned}$$

Lorsque la sortie  $y$  du système est une fonction non linéaire de la nouvelle variable  $z$ , le schéma bloc du système linéarisable entrée-état est celui de la figure 4.2.

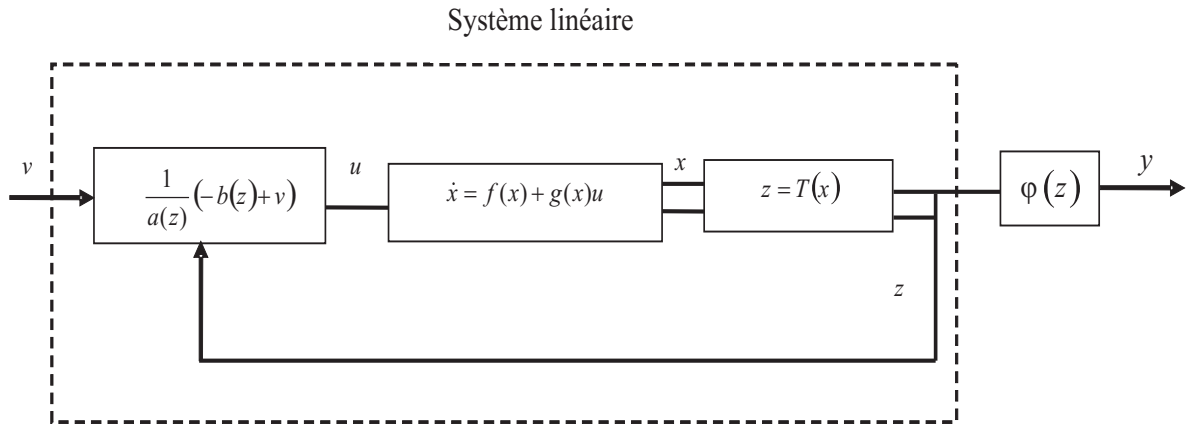


FIG. 4.2 – Boucle de linéarisation globale

Rappelons que les conditions à satisfaire pour qu'un système soit linéarisable par retour d'état statique sont fournies par le théorème suivant [32] :

**Théorème 4.1.1**

Le système 4.1 est linéarisable entrée-état si, et seulement si il existe une région  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  telle que les conditions suivantes soient satisfaites :

1. Les champs de vecteurs  $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{m-1} g\}$  sont linéairement indépendants sur  $\Omega$
2. L'ensemble  $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{m-2} g\}$  est involutive

La première condition peut être interprétée comme une simple condition de contrôlabilité pour le système non linéaire (4.1) et la deuxième condition signifie que le crochet de Lie de deux champs de vecteurs quelconques de l'ensemble  $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{m-2} g\}$  peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des autres champs de vecteurs de cet ensemble.

## 4.2 Commande par modes glissants

### 4.2.1 Systèmes à structure variable

Cette technique a connu un développement théorique au début des années 60 grâce à la résolution de l'équation différentielle à second membre discontinu par le mathématicien Russe A. Fillipov, suivie des recherches de S. Emelyanov en 1967 [11] et de V. Utkin en 1977 [36].

Le réglage par modes de glissement est un mode de fonctionnement particulier des systèmes de réglage à structure variable. Un système à structure variable est un système pouvant changer de structure en faisant commuter sa commande entre deux valeurs, suivant une logique de commutation bien spécifique  $\sigma(x)$  comme illustré par la figure 4.3.

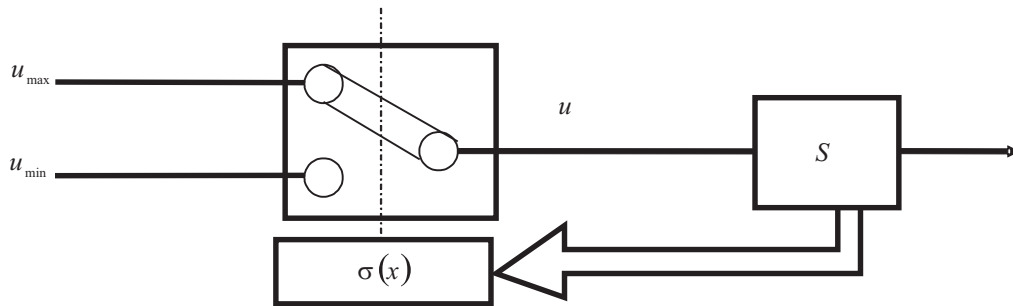


FIG. 4.3 – Système de réglage à structure variable avec changement de la structure par commutation

Dans ce cas, la commutation de commande entre deux valeurs est imposée par la loi suivante :

$$\begin{cases} u = u_{\max} & \text{pour } \sigma(x) > 0 \\ u = u_{\min} & \text{pour } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Pour les systèmes à structure variable, le choix adéquat des paramètres de chaque structure et une bonne définition de la logique de commutation sont essentiels. Sous certaines conditions, la commutation peut se faire à une très grande fréquence. Le système évolue alors en modes glissants. Le comportement dynamique du système est déterminé par la condition  $\sigma(x) = 0$ ;  $\sigma(x)$  étant la surface de glissement, le but est d'amener la trajectoire d'état du système vers cette surface et assurer le maintien du régime glissant jusqu'au point d'équilibre.

## 4.2.2 Conception de la commande par modes glissants

Synthétiser une loi de commande par modes glissants revient, en premier lieu, à choisir la surface de glissement qui permet la convergence de la trajectoire d'état du système vers le point d'équilibre désiré; en second lieu, à établir la condition d'existence du mode de glissement qui est reliée à la convergence de la trajectoire d'état vers le point d'équilibre, et en troisième lieu à déterminer la loi de commande qui aura pour rôle de maintenir les conditions de glissement (attractivité). En d'autres termes, la conception de la loi de commande par modes glissants est réalisée en trois étapes :

Étape 1 : Choix de la surface de glissement

Étape 2 : Élaboration de la condition de convergence

Étape 3 : Détermination de la loi de commande.

### 4.2.2.1 Choix de la surface de glissement

La surface de glissement est un hyperplan dans l'espace d'état global, et représente le comportement dynamique désiré. La trajectoire d'état du système doit atteindre cette surface. Il n'existe pas de critères spécifiques pour le choix d'une surface de glissement appropriée.

Soit un système à  $m$  entrées de commande, la surface est alors décrite par la forme suivante :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_m \end{bmatrix} = \beta x + \beta_d x_d \quad (4.6)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système,  $x_d \in \mathbb{R}^n$  désigne le vecteur d'état désiré,  $\beta \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est la matrice des gains définissant la dynamique de la surface de glissement et  $\beta_d \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est la matrice des gains du vecteur  $x_d$ ,

soit en décomposant la surface de glissement en  $m$  surfaces :

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j + \sum_{j=1}^n \beta_{dij} x_{dj}; \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.7)$$

Dans certains ouvrages [31], on trouve une forme de la surface de glissement qui est fonction de l'écart sur la variable à régler  $x$ , elle est donnée par :

$$\sigma(x) = \left[ \frac{d}{dt} + \lambda_x \right]^{r-1} e(x) \quad (4.8)$$

où l'écart sur la variable à régler est  $e(x) = (x - x_d)$ ,  $\lambda_x$  est une constante positive et  $r$  le degré relatif. La surface de glissement est fonction de l'application et de l'objectif visés.

### 4.2.3 Existence du mode glissant

Le domaine  $S$ , de  $\sigma = 0$ , est un domaine du mode glissant, si pour chaque  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\delta > 0$  tel que tout mouvement, au voisinage  $\delta$  de  $S_n$  (domaine de dimension  $n$ ), peut quitter le voisinage  $\varepsilon$  de  $S_n$ , seulement à travers le voisinage  $\varepsilon$  des bornes de  $S_n$  (figure 4.4).

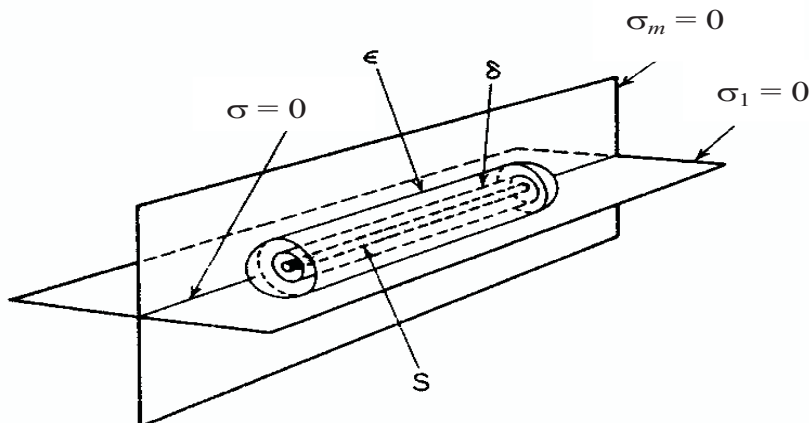


FIG. 4.4 – Définition du domaine de glissement

Les conditions d'existence du mode de glissement sont des critères qui permettent aux dynamiques du système de converger vers la surface de glissement et d'y rester

indépendamment des perturbations. Ces conditions d'existence peuvent être définies soit par la fonction directe de commutation, soit par la théorie de stabilité de Lyapunov.

**Théorème 4.2.1**

Soit  $\Omega$  l'espace d'état global de dimension  $n$ , et  $\sigma$  la surface de glissement d'ordre  $m$  associée au système. Soit  $D$  un sous espace de  $\Omega$  de dimension  $(n - m)$ . La condition suffisante pour que  $D$  soit un domaine du mode de glissement, est l'existence d'une fonction  $V(x, \sigma, t)$ , dite fonction de Lyapunov, continue, dérivable et qui satisfait les conditions suivantes :

I.  $V(x, \sigma, t)$  est définie positive :

$$\begin{cases} V(x, \sigma, t) > 0 & \sigma \neq 0 \\ V(x, \sigma, t) = 0 & \sigma = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

II. Pour  $\|\sigma\| \leq \rho$ , la fonction  $V(x, \sigma, t)$  est une fonction bornée :

$$h_\rho \leq V(x, \sigma, t) \leq H_\rho \quad (4.10)$$

avec  $h_\rho \geq 0$  et  $H_\rho > 0$

III.

$$\dot{V}(x, \sigma, t) < 0 \quad \forall x \in D \quad (4.11)$$

si  $x$  appartient à la surface de glissement alors  $\dot{V}(x, \sigma, t)$  n'existe pas.

La fonction de Lyapunov doit être choisie positive et décroissante, de manière à contraindre la trajectoire du système à toujours se diriger vers la surface de glissement. Par conséquent, l'idée est de choisir une fonction scalaire  $\sigma(x)$  qui garantit l'attraction de la variable  $x$  vers une valeur de référence et ceci par une commande  $u$  telle que :

$$V(x) = \frac{1}{2} \sigma^2(x) \quad (4.12)$$

et donc

$$\dot{V}(x) = \sigma(x) \dot{\sigma}(x). \quad (4.13)$$

#### 4.2.4 Synthèse de la commande

Une fois la surface de glissement  $\sigma$  choisie stable de sorte que la sortie  $y(t)$  du système converge vers une sortie désirée  $y_d(t)$ , et la convergence du mode glissant assurée, on élabore une commande qui forcera les états du système à atteindre le point d'équilibre, tout en maintenant la condition d'existence du mode glissant.

La commande  $u$  peut être décomposée en une somme de deux commandes,

$$u = u_N + u_{eq} \quad (4.14)$$

$u_{eq}$  étant la commande équivalente qui sert à maintenir l'état sur la surface de glissement  $\sigma(x) = 0$ , et  $u_N$  étant la commande stabilisante.

La dérivée totale par rapport au temps de cette surface est :

$$\dot{\sigma}(x) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x} \quad (4.15)$$

comme l'équation d'état est

$$\dot{x} = f(x,t) + g(x,t)u_{eq} + g(x,t)u_N \quad (4.16)$$

on a alors

$$\dot{\sigma}(x) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} [f(x,t) + g(x,t)u_{eq}] + \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x,t)u_N \quad (4.17)$$

En régime idéal, la dérivée de la surface est nulle, la commande appliquée au système est la commande équivalente  $u_{eq}$ , par conséquent

$$\begin{cases} u_N = 0 \\ \dot{\sigma}(x) = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

$$u_{eq} = - \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x,t) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x,t), \quad (4.19)$$

si la matrice  $\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x,t)$  est inversible.

Donc, en remplaçant la commande équivalente par son expression (4.19) dans (4.17) on obtient :

$$\dot{\sigma}(x) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x,t) u_N. \quad (4.20)$$

Nous choisissons, pour simplifier, une surface de glissement qui vérifie la relation :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x,t) = I \quad (4.21)$$

où  $I$  est la matrice identité,

ainsi

$$\dot{\sigma}(x) = u_N. \quad (4.22)$$

La commande discontinue est choisie de manière à satisfaire la condition suffisante d'existence des modes glissants. Il existe plusieurs formes pour cette commande où la condition d'existence est vérifiée dans les cas suivants :

I.

$$u_N = \begin{cases} \delta(x) \operatorname{sgn}(\sigma) & \text{si } \sigma \neq 0 \\ 0 & \text{si } \sigma = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

avec  $\delta(x) < 0$ ,

$$\sigma \dot{\sigma} = \delta \sigma \operatorname{sgn}(\sigma) < 0 \quad (4.24)$$

ou encore

$$\sigma \dot{\sigma} = \delta |\sigma| < 0. \quad (4.25)$$

II.

$$u_N = L \sigma \quad (4.26)$$

avec  $L$  matrice constante de dimension  $(m \times m)$  définie positive.

$$\sigma^T \dot{\sigma} = -\sigma^T L \quad \sigma < 0. \quad (4.27)$$

III.

$$u_N = - \sum_{i=1}^k \Psi_i x_i - \delta_0 (\sigma) \quad (4.28)$$

avec :  $1 \leq k \leq n - 1$

$$\Psi_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } x_i \sigma > 0 \\ \beta_i & \text{si } x_i \sigma < 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

avec  $\alpha_i > 0$  et  $\beta_i < 0$  et  $\delta_0$  scalaire positif infiniment petit,

$$\sigma^T \dot{\sigma} = -\sigma^T (\Psi_1 x_1 + \Psi_2 x_2 + \dots + \Psi_k x_k + \delta_0 \operatorname{sgn}(\sigma)) < 0 \quad (4.30)$$

IV.

$$u_N = (\sigma / \|\sigma\|) \rho \quad (4.31)$$

avec  $\rho < 0$ ,

$$\sigma^T \dot{\sigma} = \frac{\rho}{\|\sigma\|} < 0.$$

## 4.3 Commande par Backstepping

La méthode de Backstepping est un processus récursif et systématique de commande des systèmes non linéaires.

La méthodologie de construction d'une fonction de Lyapunov pour un système par cette technique a été développée au début des années 90 par R. Freeman et P. Kokotovic [14, 15], M. Krstic et *al.* [22].

### 4.3.1 Principe du Backstepping

L'idée principale de cette stratégie de commande repose sur la construction d'un algorithme qui permet en premier lieu de concevoir simultanément, pour un sous-système, la loi de commande passive (virtuelle), la dynamique d'adaptation ainsi que la fonction de Lyapunov qui garantit la stabilité. Ensuite, pour le deuxième sous système on calcule une nouvelle commande virtuelle et une deuxième fonction de Lyapunov; et ainsi de suite selon l'ordre du système. Enfin, en dernier lieu, on obtient l'expression de la commande qui garantit la stabilité globale et les performances du système.

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x,y) + g_1(x,y)y & (s_1) \\ \dot{y} = f_2(x,y) + g_2(x,y)u & (s_2) \end{cases} \quad (4.32)$$

$x$ ,  $y$  sont les variables d'état et  $u$  est la variable de commande. Les fonctions  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  sont continues telles que  $g_1(x,y) \neq 0$  et  $g_2(x,y) \neq 0$ , pour tout  $x$ ,  $y$ . Quand  $u = 0$ , on suppose que le système (4.32) a pour point d'équilibre l'origine (0,0).

Le Backstepping consiste à trouver une fonction de Lyapunov strictement assignable (CLF), définie positive et radialement non bornée qui garantit la stabilité asymptotique global au système (4.32).

Le but de cette procédure est de commander tout d'abord le sous-système  $s_1$  par l'intermédiaire de la variable  $y$ , appelée commande virtuelle, puis de commander le système globale par  $u$ .

Ainsi, on peut trouver une commande  $u$  stabilisante à partir de la fonction de Lyapunov strictement assignable au système (4.32) et ceci étape par étape.

**Étape 1 :** On considère le sous système  $s_1$ , avec  $y$  comme commande virtuelle. On suppose qu'il existe une fonction de Lyapunov  $V_1(x)$  choisie définie positive et radialement

non bornée et une fonction  $\phi(x)$  à trouver telle que :

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = L_{f_1}V_1(x) + L_{g_1}V_1(x)\phi(x) \leq -W(x) \quad (4.33)$$

où  $W(x)$  est une fonction définie positive.

Ainsi le sous-système  $s_1$  est asymptotiquement stable.

**Étape 2 :** On considère le système global (4.32). Pour trouver la commande stabilisante  $u$ , on introduit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_2(x,y) = V_1(x) + \frac{1}{2}(y - \phi(x))^2. \quad (4.34)$$

Sa dérivée totale par rapport au temps est :

$$\dot{V}_2 \leq W(x) + (y - \phi(x)) \left( f_2(x,y) + g_2(x,y)u - \frac{\partial \phi}{\partial x}(x) \right) \quad (4.35)$$

comme le but est de choisir une commande  $u$  qui rend la dérivée de la fonction de Lyapunov  $\dot{V}_2$  définie négative, on peut alors prendre

$$u(x,y) = \frac{1}{g_2(x,y)} \left( -\alpha(y - \phi(x)) - f_2(x,y) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x) \right) \quad (4.36)$$

avec  $\alpha$  une constante positive.

Ainsi, la fonction de Lyapunov  $V_2(x,y)$  est assignée pour assurer la stabilité asymptotique globale du système (4.32).

### 4.3.2 Cas particulier du système de forage

Pour le système de forage nous avons  $f_2(x,y) = 0$  et  $g_2(x,y) = 1$ . L'équation (4.32) prend alors la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)y & (s_1) \\ \dot{y} = u & (s_2) \end{cases} \quad (4.37)$$

où  $x, y$  sont les variables d'état et  $u$  est la variable de commande, les fonctions  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  appartiennent au domaine  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

Quand  $u = 0$ , on suppose que le système (4.37) a pour point d'équilibre l'origine.

Le système (4.37), représenté par le schéma de la figure 4.5, est triangulaire, il se présente sous une forme en cascade où la commande n'intervient que dans l'équation (s<sub>2</sub>).

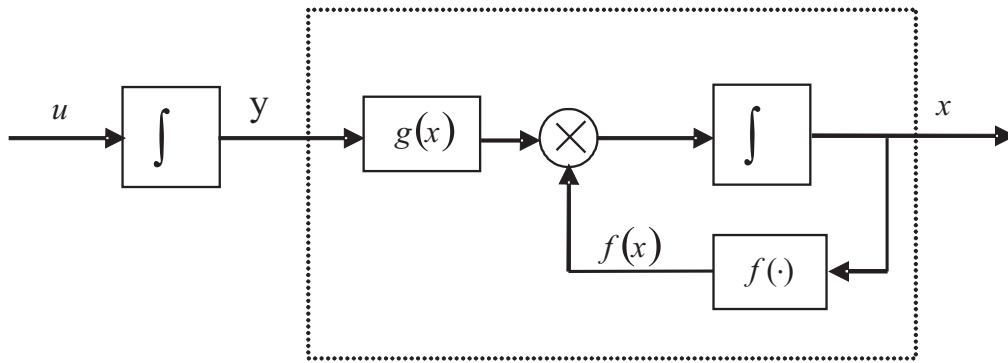


FIG. 4.5 – Schéma bloc du système

Soit  $\phi$  la commande stabilisante du premier sous-système, telle que :

$$\phi(0) = 0, \quad \dot{x} = f(x) + g(x)\phi(x). \quad (4.38)$$

On suppose qu'il existe une fonction de Lyapunov  $V(x)$  définie positive et vérifiant :

$$\frac{\partial V}{\partial x} [f(x) + g(x)\phi(x)] \leq -W(x), \quad \forall x \in D. \quad (4.39)$$

En ajoutant et soustrayant le terme  $g(x)\phi(x)$  dans le sous système  $s_1$ , on obtient :

$$\dot{x} = [f(x) + g(x)\phi(x)] + g(x)[y - \phi(x)] \quad (4.40)$$

comme indiqué par la figure 4.6.

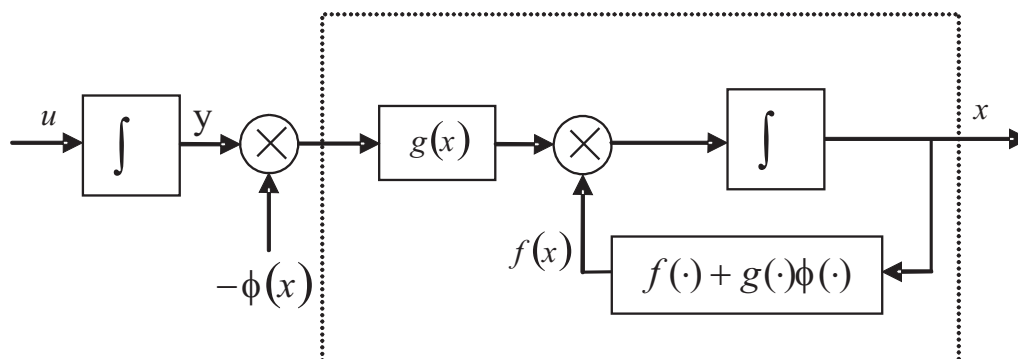


FIG. 4.6 – Schéma bloc du système modifié

On pose

$$z = y - \phi(x). \quad (4.41)$$

**Remarque :** Ce changement de variables permet d'avoir un point d'équilibre à l'origine pour  $z$ .

Le système (4.37) devient, comme montré par la figure 4.7 :

$$\begin{cases} \dot{x} = [f(x) + g(x)\phi(x)] + g(x)z \\ \dot{z} = u - \dot{\phi} \end{cases} \quad (4.42)$$

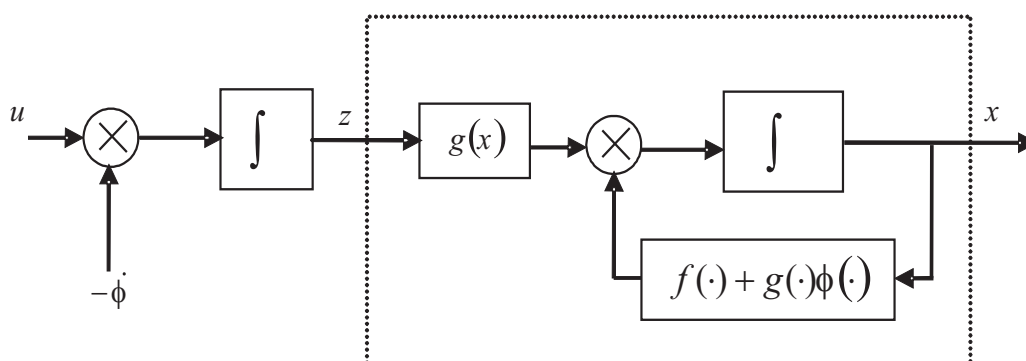


FIG. 4.7 – Schéma bloc du backstepping

Maintenant, si on suppose que  $v = u - \dot{\phi}$ , le système (4.37) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = [f(x) + g(x)\phi(x)] + g(x)z \\ \dot{z} = v \end{cases} \quad (4.43)$$

Le système (4.43) est équivalent à celui donné par l'équation (4.37), sauf qu'à présent la première partie de l'équation (4.43) est asymptotiquement stable quand  $z = 0$ . Cette caractéristique sera exploitée dans la synthèse de  $v$ .

Soit la fonction de Lyapunov candidate :

$$V_1(x) = V(x) + \frac{1}{2}z^2 \quad (4.44)$$

telle que :

$$\dot{V}_1 = \frac{\partial V}{\partial x}[f(x) + g(x)\phi(x)] + \frac{\partial V}{\partial x}g(x)z + zv, \quad (4.45)$$

en utilisant (4.39), on obtient,

$$\dot{V}_1 \leq -W(x) + \frac{\partial V}{\partial x}g(x)z + zv \quad (4.46)$$

en choisissant maintenant  $v = -\frac{\partial V}{\partial x}g(x) - kz$ ,  $k > 0$ , on a alors :

$$\dot{V}_1 \leq -W(x) - kz^2. \quad (4.47)$$

D'après le théorème de Lyapunov, le point  $z = 0$  est asymptotiquement stable, puisque  $\phi(0) = 0$ , alors le point  $(x = 0, y = 0)$  est aussi asymptotiquement stable, d'où :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}(f(x) + g(x)y) - \frac{\partial V}{\partial x}g(x) - k(y - \phi(x)) \quad (4.48)$$

Et si  $V(x)$  est radialement bornée, on peut donc conclure que l'origine est globalement stable.

## 4.4 Observateur

Dans le système de forage rotary, l'objectif principal est de commander la vitesse de rotation du trépan, seulement cette grandeur n'est pas mesurable. Pour la mise au point de la loi de commande, une estimation de la vitesse angulaire est nécessaire, on peut par exemple utiliser un observateur de Luenberger, dont on décrit ci-dessous la dynamique à titre de rappel.

### 4.4.1 Observateur de Luenberger

Quoique le système auquel on s'intéresse soit non linéaire, il s'avère ici suffisant d'utiliser un observateur linéaire.

Soit le système à asservir suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.49)$$

avec  $\dim(x) = n$ ,  $\dim(y) = q$  et  $C$  de rang  $q$ .

La dynamique de l'observateur est

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x}(t) + Bu(t) + LC(x - \hat{x}) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (4.50)$$

S'il n'y a aucune raison de penser qu'à  $t = 0$  l'état initial  $\hat{x}_0 = \hat{x}(0)$ , est le même que l'état initial  $x_0$  du système à asservir, il est en revanche logique d'exiger que  $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$  pour  $t \rightarrow \infty$ .

Introduisons l'erreur d'estimation :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (4.51)$$

$\hat{x}(t)$  est une bonne estimation de  $x(t)$  si  $e(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ .

On obtient :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) \tag{4.52}$$

On sait que, si la paire  $(A, C)$  est observable, alors on peut choisir la matrice de gain  $L$  de l'observateur de telle façon que  $A - LC$  ait toutes ses valeurs propres à parties réelles négatives, ce qui assure la convergence vers zéro de  $e(t)$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

La spécification du gain  $L$  peut être effectuée de différentes manières : placement des poles, solution stationnaire d'une équation de Riccati, solution d'une équation de Lyapunov, etc.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé certains outils mathématiques de synthèse d'une loi de commande non linéaire : la linéarisation par bouclage, la commande à structure variable et la commande par Backstepping.

La synthèse de ces lois de commande appliquées au problème de forage, font l'objet du prochain chapitre.



---

## Chapitre 5

# Commande du système de forage rotary

Ce chapitre est consacré à l'élaboration des commandes, par les trois approches présentées au chapitre précédent, dans l'objectif de réduire le phénomène épineux du « stick-slip ».

On montre l'apport de l'utilisation des méthodes de synthèses non linéaires par rapport au linéaire, qui reste un peu néanmoins limité dans le contexte de ce problème, même pour des approches modernes comme la commande  $\mathcal{H}_\infty$ .

Afin de mettre en évidence l'efficacité de certaines approches par rapport à d'autres, on y présente à la fin du chapitre une étude comparative, permettant de mieux situer le niveau d'apport de chacune. Cette étude comporte également une évaluation des performances temporelles et de robustesse paramétrique.

Les performances demandées sont :

- réduction significative des oscillations du « stick-slip »,
- dépassement très faible,
- temps de réponse  $\leq 4$  sec.

## 5.1 Linéarisation par bouclage du forage rotary

La méthode utilisée pour la synthèse de la loi de commande consiste à compenser par retour d'état la dynamique naturelle non linéaire du système.

L'objectif de commande fixé est de faire converger la vitesse de rotation du trépan  $\Omega_1$  vers une vitesse de référence  $\Omega_{ref}$  (de l'ordre de  $10 \text{ rad/sec}$ ) fourni par l'utilisateur et de supprimer, ou tout au moins de réduire, les oscillations du collé-glissé.

### 5.1.1 Réponse du système en boucle ouverte non commandée

Reprenons le modèle non linéaire décrit dans la section 2.3.2 :

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 = -\frac{C_1}{J_1}\Omega_1 + \frac{k}{J_1}\phi + \frac{1}{J_1}T_{tob}(\Omega_1) \\ \dot{\phi} = \Omega_2 - \Omega_1 \\ \dot{\Omega}_2 = -\frac{k}{J_2}\phi - \frac{C_2}{J_2}\Omega_2 + \frac{C_2}{J_2}\Omega_{ref} + \frac{1}{J_2}u \end{cases}$$

Pour réaliser les simulations nous avons utilisé les caractéristiques du système de forage rotary reportées dans le tableau 5.1 et qui sont empruntées à la référence [30].

Paramètre	Description	Valeur	Unité
$J_1$	Inertie de l'assemblage de fond + 1/3 de l'inertie du train des tiges	374	$kgm^2$
$J_2$	Inertie de la table de rotation + Inertie de l'induit	2122	$kgm^2$
$C_1$	Amortissement de l'assemblage de fond	0-50	$Nms/rad$
$C_2$	Amortissement de la table de rotation	425	$Nms/rad$
$k$	Rigidité du train des tiges	473	$Nm/rad$
$L$	Inductance du moteur	0.005	$H$
$R$	Résistance du moteur	0.01	$\Omega$

TAB. 5.1 – Valeurs numériques du système de forage

La figure 5.1 montre la vitesse du trépan du système non commandé, on peut observer les oscillations indésirables dues au phénomène de « stick-slip », qui durent plus que 40 secondes. Celles-ci peuvent endommager les trains de tiges et l'assemblage de fond si l'on n'adjoint pas un module de commande efficace.

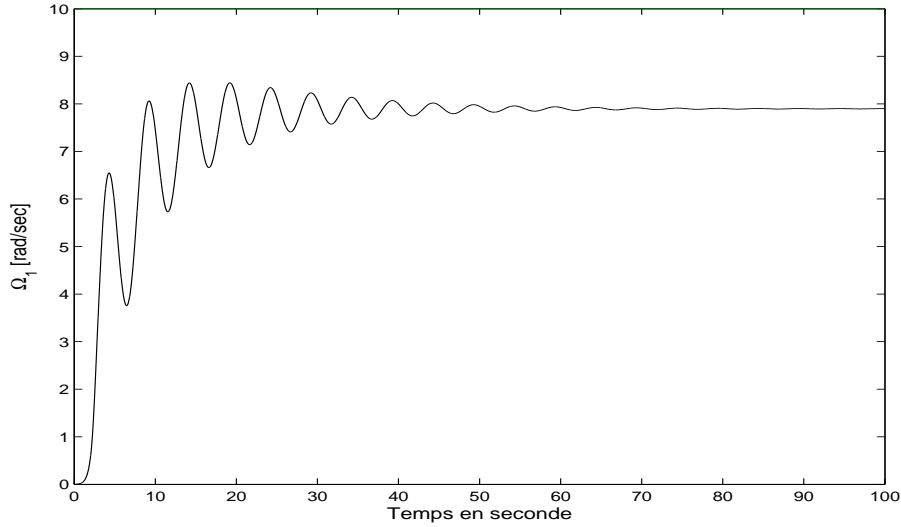


FIG. 5.1 – La vitesse angulaire du trépan du système non commandé

### 5.1.2 Synthèse de la commande linéarisante

La représentation d'état du système peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (5.1)$$

en posant comme vecteur d'état  $x = (\Omega_1 \ \phi \ \Omega_2)^T \in \mathbb{R}^3$  et comme vecteur de sortie  $y \in \mathbb{R}$ .

avec ici

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{C_1}{J_1}\Omega_1 + \frac{k}{J_1}\phi + \frac{1}{J_1}T_{tob} \\ \Omega_2 - \Omega_1 \\ -\frac{C_2}{J_2}\Omega_2 - \frac{k}{J_2}\phi + \frac{1}{J_2}\Omega_{ref} \end{pmatrix}$$

et

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_2} \end{pmatrix}.$$

Le choix de  $y = \Omega_2$ , qui aurait pu être plus judicieux car c'est la vitesse de la table de rotation, ne permet pas l'utilisation de cette technique tandis que si l'on choisit comme

sortie la vitesse angulaire du trépan, en d'autres termes  $h(x) = \Omega_1$ , l'élaboration de la loi de commande par cette technique, paraît alors envisageable, induisant une complexité de développements acceptable.

### 5.1.2.1 Conditions d'application de la commande linéarisante :

#### a. Condition de contrôlabilité et d'involutivité :

Les calculs de  $ad_f g$  et  $ad_f^2 g$  donnent :

$$ad_f g = \left( 0 \quad -\frac{1}{J_2} \quad \frac{C_2}{J_2^2} \right)^T$$

$$ad_f^2 g = \left( \frac{k}{J_1 J_2} \quad -\frac{C_2}{J_2^2} \quad -\frac{k}{J_2^2} + \frac{C_2^2}{J_2^3} \right)^T,$$

la matrice de commandabilité est donc :

$$(g, ad_f g, ad_f^2 g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{k}{J_1 J_2} \\ 0 & -\frac{1}{J_2} & -\frac{C_2}{J_2^2} \\ \frac{1}{J_2} & \frac{C_2}{J_2^2} & -\frac{k}{J_2^2} + \frac{C_2^2}{J_2^3} \end{pmatrix},$$

elle est de rang plein donc le système est commandable. On vérifie également que la condition d'involutivité est satisfaite dans la mesure où les champs de vecteurs qui la composent sont constants. Par conséquent, le système de forage (5.1) est linéarisable entrée-état.

On effectue alors le changement de coordonnées :

$$z_1 = \Omega_1 \tag{5.2}$$

Il vient :

$$z_2 = L_f z_1 = -\frac{C_1}{J_1} \Omega_1 + \frac{k}{J_1} \phi + \frac{1}{J_1} T_{lob}(\Omega_1) \tag{5.3}$$

et

$$z_3 = L_f^2 z_1 = H z_2 + \frac{k}{J_1} (\Omega_2 - \Omega_1). \tag{5.4}$$

Si  $\Omega_1 > 0$ , alors

$$H = -\frac{C_1}{J_1} - \frac{2T_{tobdyn}}{\pi J_1} \left( \alpha_1 e^{-\alpha_2 z_1} (1 - \alpha_2 z_1) + \frac{\alpha_3}{1 + \alpha_3^2 z_1^2} \right)$$

Ainsi la nouvelle représentation d'état est :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = Mz_2 + Hz_3 + \frac{k}{J_1}Q + \frac{k}{J_1 J_2}u \end{cases} \quad (5.5)$$

où :

$$Q = \frac{C_2 k}{J_1 J_2} (Hz_2 - z_3) + \left( \frac{C_1}{J_1} - \frac{C_2}{J_2} \right) z_1 + \left( \frac{k}{J_1} - \frac{k}{J_2} \right) \phi + \frac{C_2}{J_2} \Omega_{ref} - \frac{1}{J_1} T_{tob}(z_1)$$

$$M = a \left( \alpha_1 \alpha_2 e^{-\alpha_2 z_1} (\alpha_2 z_1 - 2) - \frac{2\alpha_3^3 z_1}{(1 + \alpha_3^2 z_1^2)^2} \right)$$

$$\text{et } a = \frac{-2T_{tobdyn}}{J_1 \pi}.$$

On en déduit la commande par retour d'état statique :

$$u = \frac{J_1 J_2}{k} \left( v - Mz_2 - Hz_3 - \frac{k}{J_1} Q \right) \quad (5.6)$$

où  $v$  représente la nouvelle entrée.

Comme le système présente une erreur statique, alors on choisit  $v = -d \int e dt$ , pour l'annuler;

$$e = z_1(t) - \Omega_{ref}(t) \text{ désigne cette erreur statique, } \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

$d$  est un gain, convenablement choisi, qui assure un comportement satisfaisant du système en boucle fermée, on trouve  $d = 0.016$ .

Le schéma-bloc du système commandé est donné par la figure 5.2.

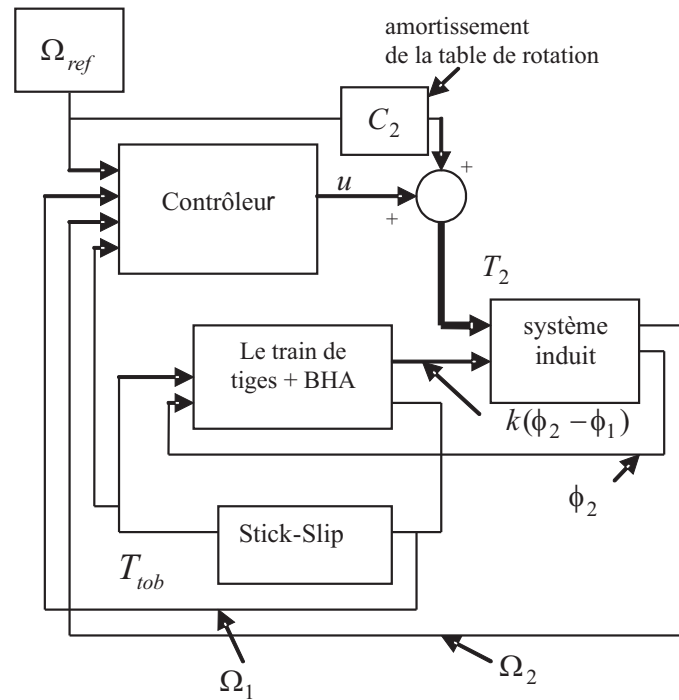


FIG. 5.2 – Schéma bloc de l'ensemble de l'installation

### 5.1.3 Résultats de simulation - discussion

La figure 5.4 illustre la réponse du système bouclé à un échelon de vitesse. On garde cependant à l'esprit que le but est d'assurer la convergence de la vitesse angulaire du trépan vers la référence, en annulant ou tout au moins en réduisant d'une manière significative le phénomène de « stick-slip » du trépan. En comparant la figure 5.4 avec la réponse du système sans commande (figure 5.3), on constate qu'avec ce correcteur, la vitesse angulaire du trépan atteint la vitesse désirée (10 rad/sec) sans dépassement et peu d'oscillations.

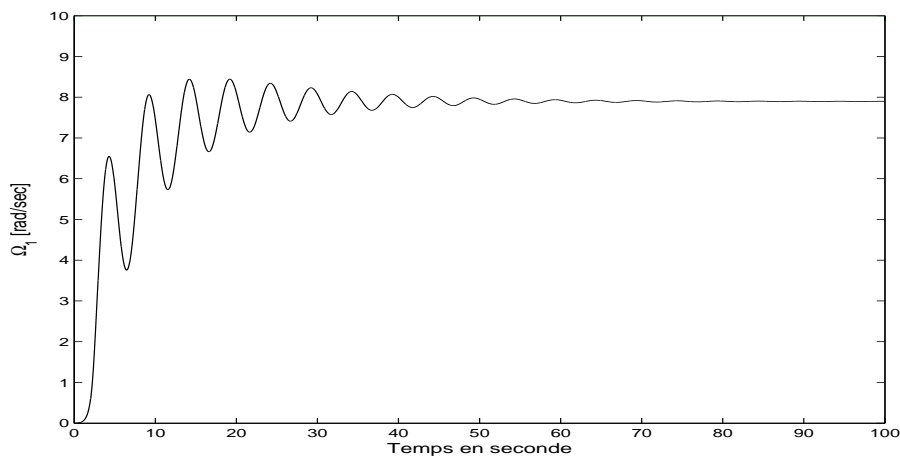


FIG. 5.3 – Vitesse angulaire du trépan du système non commandé

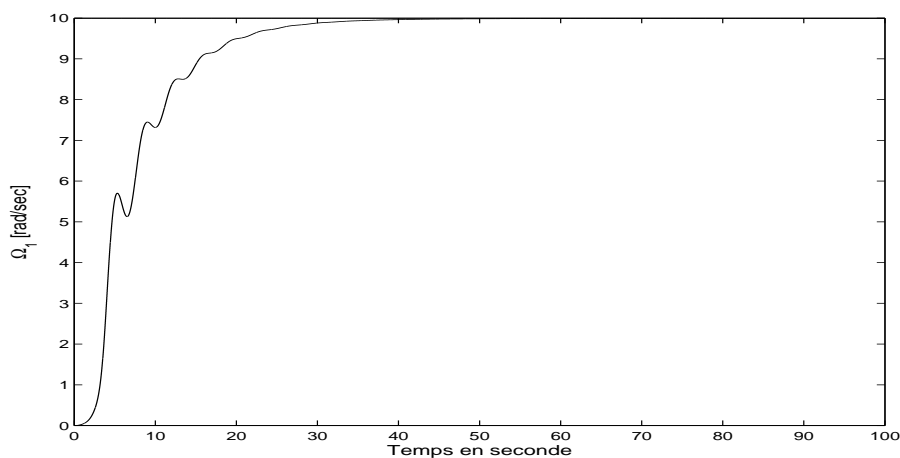


FIG. 5.4 – Vitesse angulaire du trépan en boucle fermée

En vue de souligner l'apport éventuel des techniques appliquées dans ce document, on a également reproduit les résultats des deux principales méthodes utilisées dans la littérature : le correcteur PI et le correcteur  $\mathcal{H}_\infty$ .

Pour le correcteur PI, sur la base du modèle linéaire tangent (2.16) décrit au paragraphe 2.3.1, on peut aisément montrer que la constante d'intégration  $T_i = 1.6$  s et l'action proportionnelle est  $K = 50$ . Pour le correcteur  $\mathcal{H}_\infty$ , en complétant les travaux déjà existants [29], on aboutit aux résultats présentés au chapitre 3.

Les figures (5.5), et (5.6) représentent les réponses en vitesse angulaire du trépan obtenus dans la littérature par le correcteur classique PI et la méthode  $\mathcal{H}_\infty$ , respectivement.

On peut observer que la réponse du système bouclé par un PI exhibe plus d'oscillations (figure 5.5), la méthode  $\mathcal{H}_\infty$  présente un dépassement important (figure 5.6).

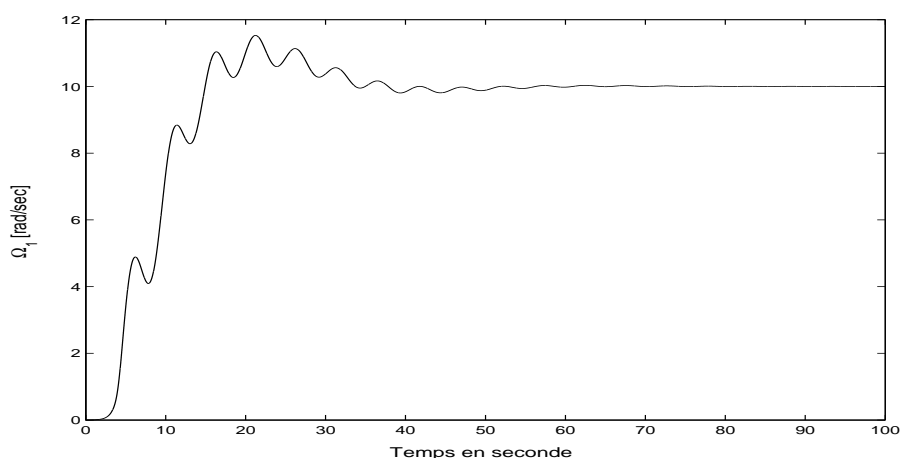


FIG. 5.5 – Correcteur PI

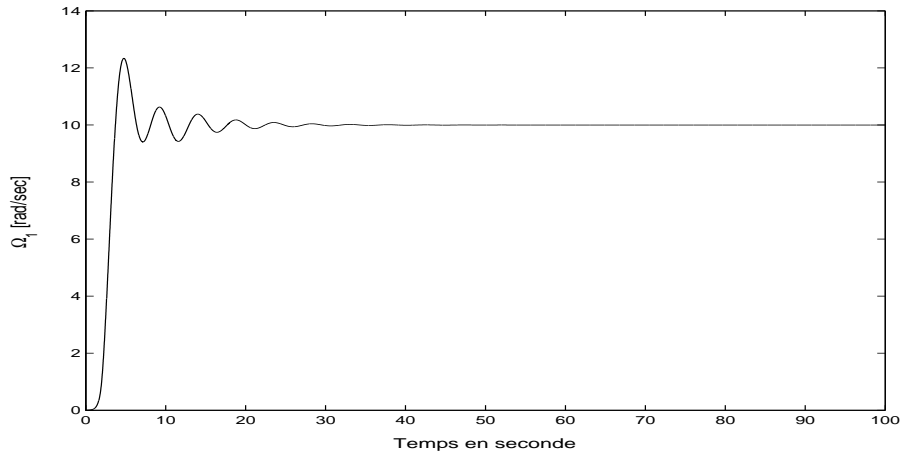


FIG. 5.6 – Correcteur  $\mathcal{H}_\infty$

On dresse alors un tableau de comparaison des résultats obtenus (Tab.5.2) avec notre méthodologie et ceux obtenus dans la littérature.

Méthode de commande	Temps de réponse	Dépassement
Linéarisation entrée état	19 s	nul
PI	32 s	18 %
$\mathcal{H}_\infty$	12 s	22 %

TAB. 5.2 – Comparaison entre les trois méthodes

Ce tableau met en évidence le fait que le correcteur par linéarisation entrée état, a permis un dépassement nul mais au prix d'un temps de réponse un peu plus long que celui du correcteur  $\mathcal{H}_\infty$ .

Pour conclure sur cette approche, la linéarisation entrée-état utilisée est principalement caractérisée par ; un comportement homogène dans tout le domaine de fonctionnement et permet de proposer une solution simple pour la stabilisation sans oscillations. Cependant, l'inconvénient lié à la linéarisation entrée-état est le problème de robustesse, même si les performances dynamiques obtenues sont supérieures à celles exposées dans la littérature. La question de la robustesse n'a pas été abordée dans la littérature et donc fera l'objet des commandes décrites dans les paragraphes qui suivent.

## 5.2 Application des modes glissants

Dans le but d'améliorer la commande par linéarisation par bouclage et difféomorphisme déterminée au paragraphe précédent, un contrôleur PID basé sur la théorie des modes de glissement est présenté. En effet, pour mémoire, il est connu que le point faible de la commande linéarisante par bouclage est lié à la robustesse.

### 5.2.1 Surface de glissement

La surface de glissement est en général un hyperplan dans l'espace d'état global, et représente le comportement dynamique désiré.

Soit  $s$  cette surface de glissement, on choisit :

$$\begin{aligned} s &= \lambda \epsilon \\ &= \lambda(\Omega_1 - \Omega_{ref}) \end{aligned} \tag{5.7}$$

où :  $\lambda$  est une constante positive,  $\epsilon$  est l'écart sur la variable à régler,  $\Omega_1$  la vitesse à régler et  $\Omega_{ref}$  la vitesse de référence.

### 5.2.2 Conception de la commande

La commande développée dans cette section se compose de deux termes :

- un premier terme correspondant à la loi de commande précédente,
- un deuxième terme correspondant à un PID synthétisé par la méthode du mode glissant,

c'est à dire :

$$u = u_{ee} + u_{sm} \tag{5.8}$$

avec  $u_{sm} = u_s + u_{PID}$ .

$u_{ee}$  correspond à la commande donnée par l'expression (5.6),  $u_s$  est le contrôleur de modes glissants et  $u_{PID}$  désigne le contrôleur PID. On a :

$$u_s = k \operatorname{sign}(s) \tag{5.9}$$

où  $k = 0.1$

$$u_{PID} = k_p \left( s + 1/T_i \int s \, dt + T_d \frac{ds}{dt} \right) \quad (5.10)$$

où  $k_p$ ,  $T_i$  et  $T_d$  désignent comme à l'accoutumée et respectivement le gain, la constante d'intégration et la constante de dérivation.

Pour analyser la stabilité de ce contrôleur, nous choisissons une fonction de Lyapunov candidate définie positive basée sur la dynamique de l'erreur du système, c'est à dire :

$$V = \frac{1}{2} s^2, \quad (5.11)$$

sa dérivée par rapport au temps est :

$$\dot{V} = s \dot{s}. \quad (5.12)$$

L'objectif du contrôleur est de réaliser la condition de glissement. Ceci est exprimé par l'équation suivante :

$$\dot{s} = -\lambda s. \quad (5.13)$$

Si  $s > 0$  alors  $\dot{s} < 0$  et inversement.

Supposons que, pour le gain proportionnel donné  $k_p$ , il existe respectivement un gain intégral  $k_i = k_p/T_i$ , et un gain dérivé  $k_d = k_p T_d$ , tels que la condition d'atteignabilité soit satisfaite, en d'autres termes, avec

$$u_{PID} = k_p s + k_i \int s \, dt + k_d \frac{ds}{dt}$$

Par conséquent, la loi de commande  $u_{PID}$  est choisie de telle sorte à ce que la trajectoire soit dirigée vers la surface de glissement. Les gains suivants,  $k_p = 2 \times 10^3$ ,  $k_i = 4 \times 10^3$  et  $k_d = 10 \times 10^3$  permettent d'atteindre la réponse souhaitée.

### 5.2.3 Comparaison avec le contrôleur linéarisant

Le schéma de la figure 5.7 illustre la commande  $u$  appliquée au système, le contrôleur par modes glissants  $u_{sm}$  est inséré en parallèle sur le contrôleur linéarisant entrée-état  $u_{ee}$ .

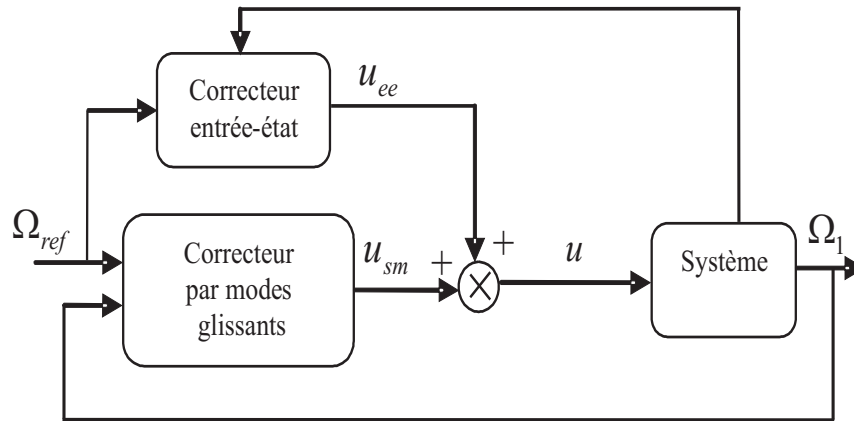


FIG. 5.7 – Schéma bloc du contrôleur

Les simulations réalisées montrent à l'évidence que les deux types de contrôleurs conduisent à une bonne réponse à un échelon de vitesse angulaire et sans oscillations du collé-glissé. Le contrôleur basé sur la technique de modes glissants s'avère cependant mieux adapté : pas d'oscillations, temps de montée rapide, comme le montre la figure 5.8.

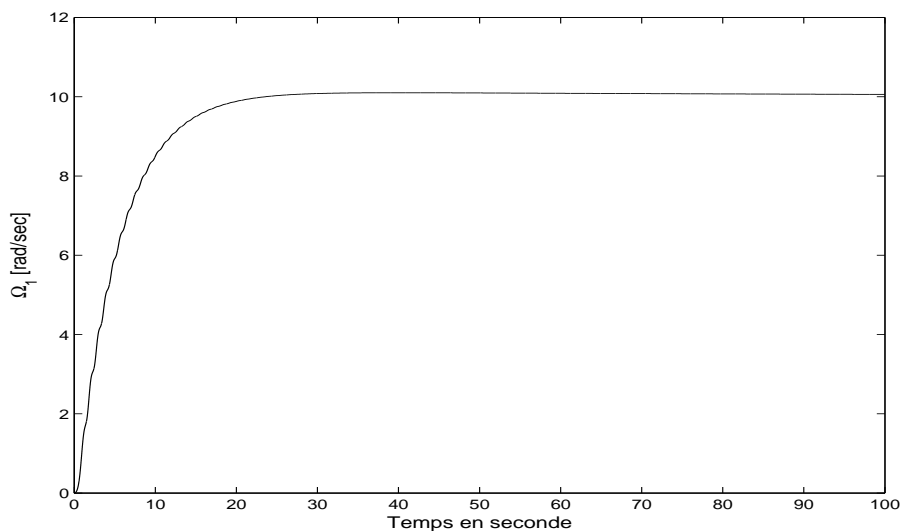


FIG. 5.8 – Réponse à un échelon de la vitesse angulaire du trépan ( $rad/sec$ ) en fonction du temps (en  $sec$ ) en boucle fermée, correcteur par modes de glissement

La figure 5.9 exhibe le signal de la commande appliquée au système. Cette commande

permet d'apporter une solution très intéressante pour le système de forage par rapport à la commande par linéarisation entrée-état présentée au paragraphe (5.1.3). L'hypothèse nécessaire pour mettre en œuvre ce type de commande porte sur le choix de la surface de glissement  $s$ .

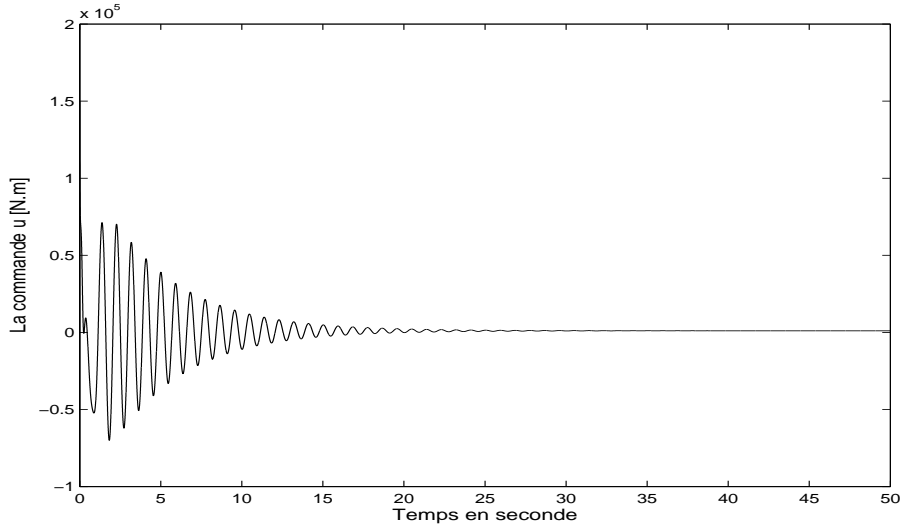


FIG. 5.9 – Signal de commande (en  $N.m$ ) en fonction du temps (en  $sec$ )

D'après les résultats obtenus, la commande par modes glissants sollicite le système, elle peut exciter donc des dynamiques non considérées. Bien que le filtrage de la commande permet de réduire cette excitation, il a l'inconvénient de réduire en même temps la robustesse de cette commande. Dans la section suivante nous exposerons l'approche par Backstepping de manière à prendre en compte la question de la robustesse, cette approche est modérée en effort de commande et découle de l'application de la fonction de Lyapunov.

## 5.3 Application de la commande par Backstepping

Pour les système non linéaires, le Backstepping est une procédure qui consiste à trouver une fonction de Lyapunov de commande (CLF) strictement assignable pour garantir la stabilité asymptotique globale du système considéré (cf. section 4.3).

### 5.3.1 Synthèse robuste par Backstepping

Reprenons encore une fois le modèle du système de forage :

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 = -\frac{C_1}{J_1}\Omega_1 + \frac{k}{J_1}\phi + \frac{1}{J_1}T_{tob}(\Omega_1) \\ \dot{\phi} = \Omega_2 - \Omega_1 \\ \dot{\Omega}_2 = -\frac{k}{J_2}\phi - \frac{C_2}{J_2}\Omega_2 + \frac{C_2}{J_2}\Omega_{ref} + \frac{1}{J_2}u \end{cases} \quad (5.14)$$

On introduit une transformation d'état afin de reformuler le problème de régulation en un problème de stabilisation. Les nouvelles variables sont définies comme étant :

$$\varepsilon = \Omega_1 - \Omega_1^d \quad (5.15)$$

$$z = \phi - \phi^d \quad (5.16)$$

et enfin

$$y = \Omega_2 - \Omega_2^d \quad (5.17)$$

$\varepsilon$  est le signal d'erreur et  $\Omega_1^d$  dénote la vitesse angulaire de référence du trépan,  $\Omega_2^d$  est la vitesse angulaire de référence de la table de rotation, enfin  $\phi^d$  représente l'écart angulaire de référence.

Par souci d'une certaine simplicité de calculs, ramenons le système (5.14) au système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \dot{\Omega}_1 - \dot{\Omega}_1^d \\ \dot{z} = -\Omega_1 + \Omega_2 - \dot{\phi}^d \\ \dot{y} = -\frac{k}{J_2}\phi - \frac{C_2}{J_2}\Omega_2 + \frac{C_2}{J_2}\Omega_{ref} - \dot{\Omega}_2^d + \frac{1}{J_2}u \end{cases} \quad (5.18)$$

Pour élaborer la loi de commande non linéaire du système global, on procède en 3 étapes :

Étape I :

On considère tout d'abord le premier sous-système  $\Sigma_1$

$$\Sigma_1 : \dot{\varepsilon} = -\frac{C_1}{J_1}\Omega_1 + \frac{k}{J_1}\phi + \frac{1}{J_1}T_{lob}(\Omega_1) - \dot{\Omega}_1^d \quad (5.19)$$

où  $\Omega_1^d$  est une constante. Ce sous-système peut être stabilisé en utilisant le déplacement angulaire  $\phi$  comme une commande virtuelle.

On introduit la fonction de Lyapunov CLF de commande :

$$V_0 = \frac{1}{2}\varepsilon^2, \quad (5.20)$$

sa dérivée est :

$$\dot{V}_0 = \varepsilon \dot{\varepsilon}. \quad (5.21)$$

La commande virtuelle  $\phi$  est maintenant choisie pour que la dérivée totale par rapport au temps de la fonction de Lyapunov soit négative ou nulle.

Ceci est assuré par :

$$\phi^d = -\frac{1}{k}T_{tot}(\Omega_1) + \frac{C_1}{k}\Omega_1^d. \quad (5.22)$$

On vérifie que la dérivée de la CLF est :

$$\dot{V}_0(\varepsilon, \phi^d) = -\frac{C_1}{J_1}\varepsilon^2 < 0 \quad (5.23)$$

Étant donné que  $\dot{V}_0$  est définie négative, la loi de commande virtuelle  $\phi^d$  stabilise bien le sous-système  $\Sigma_1$ .

Étape II :

Considérons maintenant le sous-système  $\Sigma_2$  formé par

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{\varepsilon} &= -\frac{C_1}{J_1}\varepsilon + \frac{k}{J_1}z \\ \dot{z} &= -\Omega_1 + \Omega_2 - \dot{\phi}^d \end{cases} \quad (5.24)$$

avec  $\Omega_2$  la seconde commande virtuelle.

On prend la CLF  $V_1$  telle que :

$$V_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 + z^2), \quad (5.25)$$

dont la dérivée totale par rapport au temps est :

$$\dot{V}_1 = (\varepsilon \dot{\varepsilon} + z \dot{z}) \quad (5.26)$$

qui conduit à l'expression

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \varepsilon \left( -\frac{C_1}{J_1}\varepsilon + \frac{k}{J_1}z \right) + z \left( -\Omega_1 + \Omega_2 - \dot{\phi}^d \right) \\ &= -\frac{C_1}{J_1}\varepsilon^2 + z \left( \frac{k}{J_1}\varepsilon - \Omega_1 + \Omega_2 - \dot{\phi}^d \right).\end{aligned}\tag{5.27}$$

Comme pour l'étape 1, on assigne strictement la fonction de Lyapunov  $V_1$  en prenant :

$$\Omega_2^d = \Omega_1 + \dot{\phi}^d - \gamma_1 z - \frac{k}{J_1}\varepsilon\tag{5.28}$$

avec  $\gamma_1$  une constante positive. Ainsi,  $\dot{V}_1$  devient :

$$\dot{V}_1 = -\frac{C_1}{J_1}\varepsilon^2 - \gamma_1 z^2 < 0.\tag{5.29}$$

Étape III :

On considère enfin le système complet de forage  $\Sigma_3$  :

$$\Sigma_3 : \begin{cases} \dot{\varepsilon} &= -\frac{C_1}{J_1}\varepsilon + \frac{k}{J_1}z \\ \dot{z} &= y - \gamma_1 z - \frac{k}{J_1}\varepsilon \\ \dot{y} &= -\frac{k}{J_2}\phi - \frac{C_2}{J_2}\Omega_2 + \frac{C_2}{J_2}\Omega_{ref} + \frac{1}{J_2}u - \dot{\Omega}_2^d \end{cases}\tag{5.30}$$

On choisit la fonction de Lyapunov de commande CLF candidate  $V_2$  :

$$V_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 + z^2 + y^2)\tag{5.31}$$

dont la dérivée totale par rapport au temps est :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2 &= (\dot{\varepsilon}\varepsilon + \dot{z}z + \dot{y}y) \\
 &= \left( \varepsilon \left( \frac{-C_1}{J_1} \varepsilon \right) + z(y - \gamma_1 z) + y \left( \frac{-k}{J_2} \phi - \frac{C_2}{J_2} \Omega_2 + \frac{C_2}{J_2} \Omega_{ref} + \frac{1}{J_2} u - \dot{\Omega}_2^d \right) \right)
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

De façon similaire aux précédentes étapes, on peut déduire la commande  $u$  qui rend la CLF  $V_2$  strictement assignable. Par ce moyen, on assure la stabilité asymptotique globale du système.

La loi de commande résultante est alors :

$$u = J_2 \left( \frac{k}{J_2} \phi + \frac{C_2}{J_2} (\Omega_2 - \Omega_{ref}) + \dot{\Omega}_2^d - \gamma_2 y - z \right) \tag{5.33}$$

avec  $\gamma_2$  une constante positive. On peut aisément montrer que :

$$\dot{V}_2 = \left( \frac{-C_1}{J_1} \varepsilon^2 - \gamma_1 z^2 - \gamma_2 y^2 \right) < 0, \tag{5.34}$$

assurant ainsi la convergence de la vitesse angulaire du trépan ( $\Omega_1$ ).

## 5.4 Calcul des gains pour l'observateur de Luenberger

Comme on l'a déjà mentionné dans la section 4.4 l'objectif principal est de commander la vitesse de rotation du trépan, seulement cette grandeur n'est pas mesurable. On détermine alors un observateur de Luenberger pour l'estimation de cette vitesse  $\Omega_1$ , qui s'avère ici suffisant.

Reprenons une nouvelle fois les équations dynamiques du modèle de forage rotary :

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 &= -\frac{C_1}{J_1} \Omega_1 + \frac{k}{J_1} \phi + \frac{1}{J_1} T_{tob}(\Omega_1) \\ \dot{\phi} &= \Omega_2 - \Omega_1 \\ \dot{\Omega}_2 &= -\frac{k}{J_2} \phi - \frac{C_2}{J_2} \Omega_2 + \frac{C_2}{J_2} \Omega_{ref} + \frac{1}{J_2} u \end{cases} \tag{5.35}$$

ou sous forme matricielle, pour le linéarisé tangent

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (5.36)$$

L'observateur de Luenberger décrit par le système d'équations différentielles d'état est :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + LC(x - \hat{x}) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (5.37)$$

Introduisons l'erreur d'estimation  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ .

On obtient :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) \quad (5.38)$$

Déterminons la matrice  $A$ , en linéarisant le système autour d'un point de fonctionnement ( $\Omega_1 = \Omega_2 = 10 \text{ rad/sec}$ ), on obtient la jacobienne de  $f$ , le champs de vecteur de dérive comme défini par l'équation (5.1),

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-C_1}{J_1} & \frac{k}{J_1} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-k}{J_2} & \frac{-C_2}{J_2} \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

Calculons les valeurs propres de la matrice  $[A - LC]$

$$\begin{aligned} \lambda I - (A - LC) &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{-C_1}{J_1} & \frac{k}{J_1} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-k}{J_2} & \frac{-C_2}{J_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda + \frac{C_1}{J_1} + L_1 & \frac{-k}{J_1} & 0 \\ 1 + L_2 & \lambda & -1 \\ L_3 & \frac{k}{J_2} & \lambda + \frac{C_2}{J_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on a alors

$$\det(\lambda I - (A - LC)) = \lambda^3 + \lambda^2(0.33 + L_1) + \lambda(1.53 + 1.3L_2 + 0.2L_1) + 0.33 + 0.2L_1 + 1.3L_3 + 0.3L_2$$

Pour déterminer les gains  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$ , on place les pôles en :

$$-5 + 5j, -5 \text{ et } -5 - 5j.$$

Par identification nous obtenons :  $L_1 = 14.7$ ,  $L_2 = 73.5$  et  $L_3 = 172.87$ .

## 5.4.1 Résultats de simulation

### 5.4.1.1 Système nominal

Les figures 5.10 et 5.12 montrent respectivement le comportement de la vitesse du trépan et du signal de commande. D'après la figure 5.10, on observe que la vitesse angulaire du trépan atteint la vitesse désirée ( $10 \text{ rad/sec}$ ) sans dépassement et sans oscillations « stick-slip ».

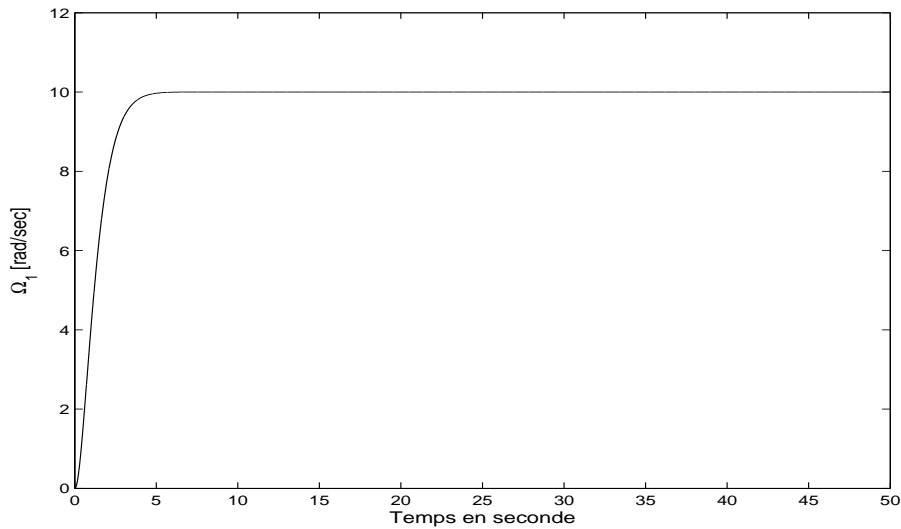


FIG. 5.10 – Réponse à un échelon de la vitesse angulaire du trépan ( $rad/sec$ ) en fonction du temps (en  $sec$ ) en boucle fermée, commande par Backstepping

#### 5.4.1.2 Étude comparative

Le tableau 5.3 reporte les valeurs des différents paramètres de comparaison obtenues par les trois méthodes de commande exposées dans ce chapitre avec celles existantes dans la littérature. Ce tableau permet de constater que les performances temporelles du système bouclé ont été améliorées par rapport aux réponses présentées dans la littérature. On observe que les trois correcteurs non linéaires synthétisés permettent l'annulation du dépassement. En outre, on constate, à travers ces résultats, que le contrôleur par Backstepping conduit à un temps de réponse le plus rapide (de l'ordre de  $4sec$ ).

Méthode de commande	Temps de réponse	Dépassement
PI	32 s	18 %
$\mathcal{H}_\infty$	12 s	22 %
Linéarisation entrée état	19 s	nul
Entrée état + PID basée sur le mode de glissement	15 s	nul
Backstepping	4 s	nul

TAB. 5.3 – Comparaison entre les trois méthodes

Pour compléter cette étude et afin d'améliorer les performances en termes de robustesse par rapport aux incertitudes, il est nécessaire d'inclure les incertitudes paramétriques lors du processus de robustification, comme on va le traiter dans le paragraphe suivant.

## 5.4.2 Contrôleur Backstepping robustifié

### 5.4.2.1 Système avec incertitudes

Pour tester la robustesse du dernier contrôleur, trois incertitudes paramétriques sont introduites, la première sur l'amortissement de l'assemblage de fond  $C_1$ , la deuxième sur l'amortissement de la table de rotation  $C_2$  et la troisième sur la longueur  $l$ .

$C_1$  peut varier dans l'intervalle  $0 \leq C_1 \leq 5000 \text{ Nms/rad}$  et  $C_2$  dans l'intervalle  $425 \leq C_2 \leq 5000 \text{ Nms/rad}$ . La longueur du train des tiges peut varier, quant à elle, entre 0 et 3500  $m$ .

La longueur nominale est  $l = 2000 \text{ m}$ . Définissons  $\Delta l$  comme l'incertitude de longueur du train des tiges, ainsi

$$-2000 \leq \Delta l \leq 1500 \text{ m} \quad (5.40)$$

ce qui affecte, par conséquent, la rigidité du train des tiges  $k$ .

Tous les changements de la longueur du train des tiges induisent un changement sur sa rigidité  $k$  telle que :

$$\Delta k = \frac{k\Delta l}{l(l + \Delta l)} \quad (5.41)$$

où  $\Delta k$  désigne l'incertitude sur la rigidité.

Les résultats de simulation du système soumis aux incertitudes paramétriques sur  $k$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  de la figure 5.11 montrent que la stabilisation et les performances exigées sont satisfaites. La courbe en tirets représente la vitesse angulaire du trépan du système nominal et les courbes en trait continu représentent le système soumis aux incertitudes.

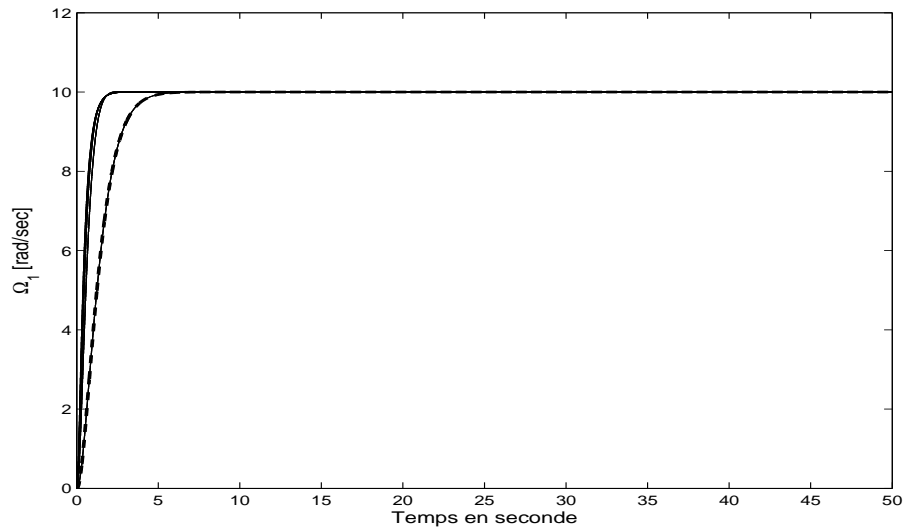


FIG. 5.11 – Réponse à un échelon de la vitesse angulaire du trépan

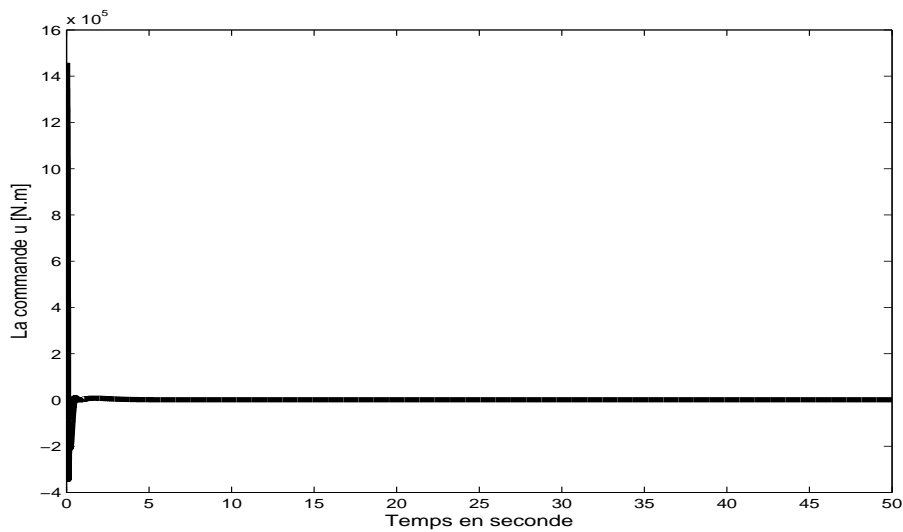


FIG. 5.12 – Signal de commande (en  $N.m$ ) en fonction du temps (en  $sec$ )

La synthèse du contrôleur non linéaire par la technique de Backstepping a permis de mieux garantir les performances du système de forage rotary. On obtient en effet des performances supérieures aux cas linéaires (commande  $\mathcal{H}_\infty$  et PID classique) ou encore à celles obtenues avec les deux autres contrôleurs non linéaires présentés.

## 5.5 Optimisation du correcteur Backstepping

Dans le but de relever encore le niveau de performances du correcteur que l'on vient d'étudier, nous présentons dans cette section, une approche d'optimisation générale en automatique pour la retouche de correcteurs. Cette approche permet d'améliorer

systématiquement les paramètres du correcteur afin de valider un cahier des charges donné. Les spécifications de ceux-ci sont souvent traduites via des gabarits temporels sur les différents signaux du système bouclé.

De nombreux auteurs se sont penchés sur cette question [3, 17, 22, 28] en particulier on peut citer les travaux de B. Lassami et S. Font [24] auxquels la formulation ci-dessous est liée à travers un travail réalisé en commun [23].

L'approche proposée se base sur la formulation du problème de commande sous forme d'un problème d'optimisation paramétrique générique.

La traduction mathématique des différentes spécifications d'un cahier des charges sous forme de contraintes temporelles permet de poser la problématique de recherche d'un correcteur sous forme d'un problème d'optimisation. Les paramètres du correcteur à retoucher sont désignés par un vecteur  $\theta$  qui représente le vecteur de variables de décision (figure 5.13).

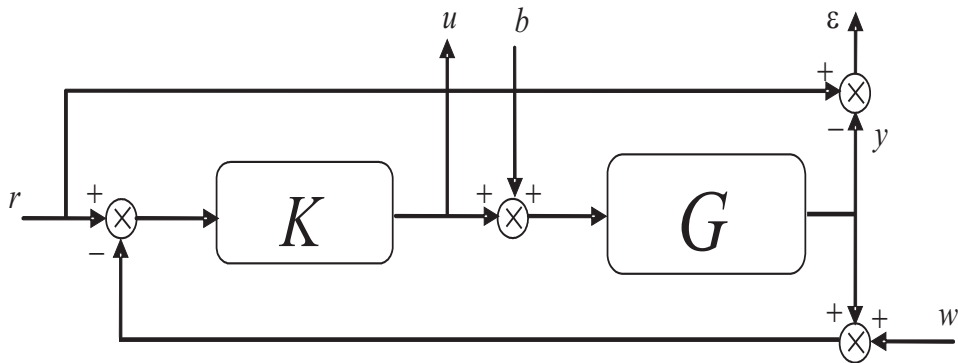


FIG. 5.13 – Système bouclé avec variables ajustables

Les signaux de la boucle fermée en réponse à une sollicitation donnée s'écrivent sous la forme :

$$s(K(\theta), G, r(t), t) = s(\theta, t) \quad (5.42)$$

Les critères classiques du cahier des charges tels que le temps de réponse  $T_r$  et le dépassement  $Dep$  sont également dépendants des paramètres  $\theta$ . Nous les noterons comme suit :

$$\alpha(s(\theta, t)) = \alpha(\theta) \quad (5.43)$$

où  $\alpha$  désigne un des critères classiques ( $T_r, Dep, \dots$ ).

En outre, les spécifications d'un cahier des charges temporel peuvent être formulées sous forme de contraintes de type gabarits en utilisant l'inégalité :

$$s_{\min}(t) \leq s(\theta, t) \leq s_{\max}(t) \quad \forall t > 0 \quad (5.44)$$

où  $s_{\min}(t)$  et  $s_{\max}(t)$  sont définies comme indiqué sur les figures (5.14), (5.15) et (5.16).

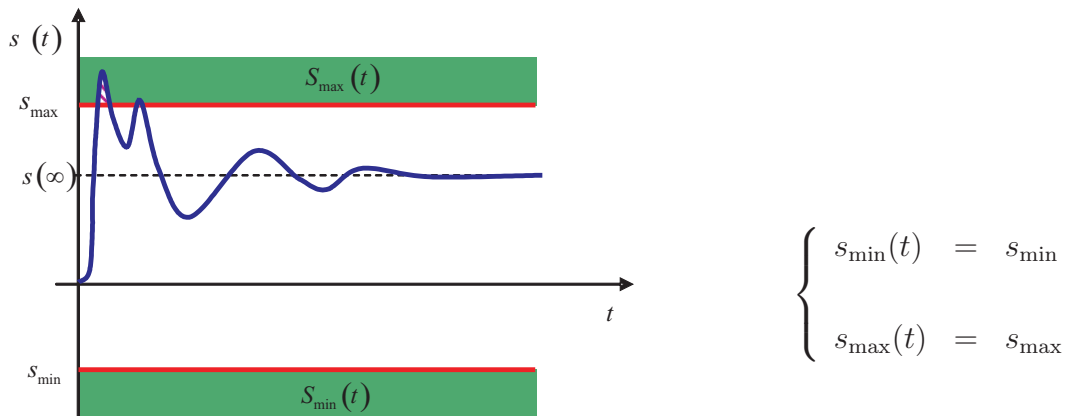


FIG. 5.14 – Gabarit min/max

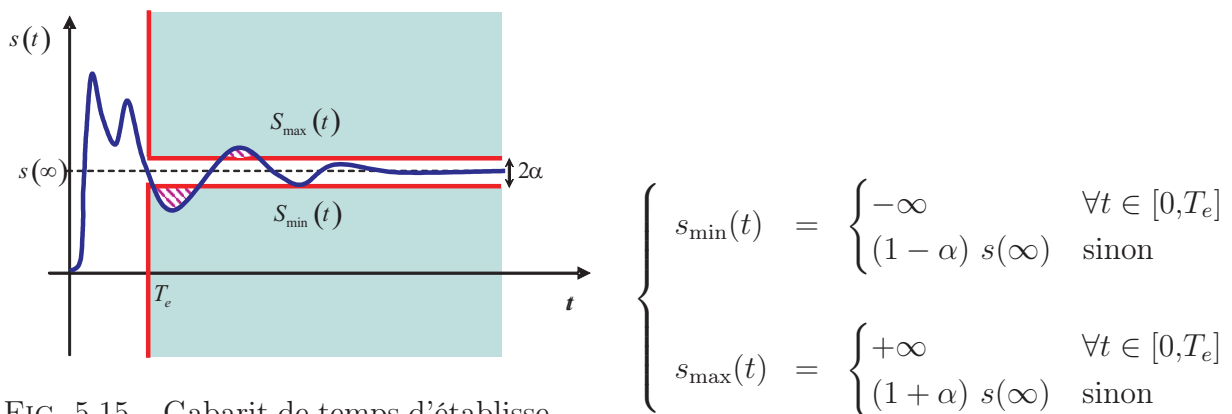


FIG. 5.15 – Gabarit de temps d'établissement

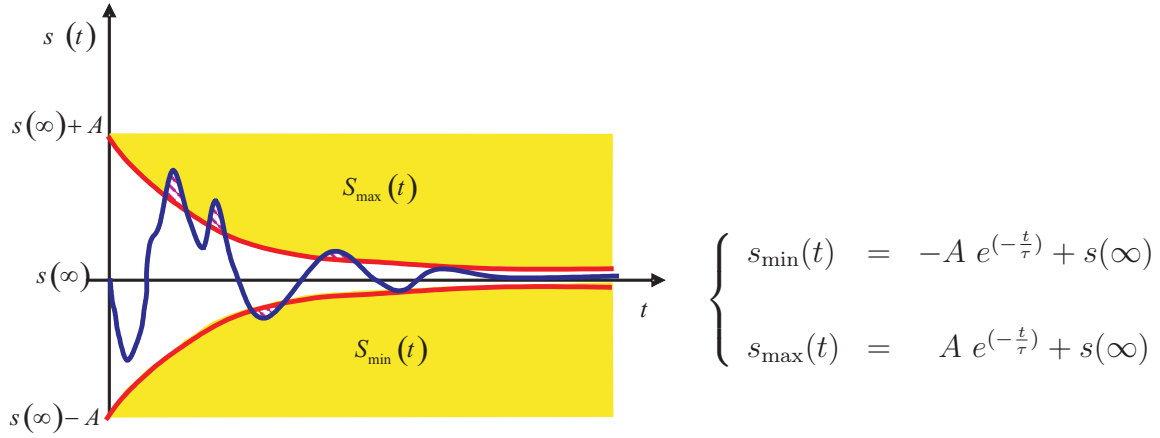


FIG. 5.16 – Gabarit de réjection

où  $\tau$  est une constante de temps.

D'une façon générale, un problème d'optimisation de correcteur comprend des contraintes sur des indicateurs de type  $\alpha$  et/ou des contraintes de type gabarit. Ces demandes se traduisent dans le domaine temporel sous l'une des formes suivantes :

$$\begin{cases} s_{\min}(t) \leq s(\theta, t) \leq s_{\max}(t) & \forall t > 0 \\ F(\alpha(\theta)) \leq 0 \end{cases} \quad (5.45)$$

Par exemple une demande de dépassement inférieur à 20% sera traduite par :  $F(Dep) = Dep - 0.2$ .

Les gabarits précédents peuvent être combinés afin de traduire un cahier des charges plus compliqué sur plusieurs signaux de la boucle fermée. Dans ce cas, les fonctions gabarit seront des fonctions définies par morceaux dans l'espace temps.

En conséquence, le problème d'optimisation du correcteur peut être formulé comme un problème de faisabilité non convexe avec des contraintes non linéaires sous la forme suivante :

$$\exists \theta / \begin{cases} F^{(i)}(\alpha(\theta)) \leq 0 \\ s_{\min}^{(i,j)}(t) \leq s^{(i)}(\theta, t) \leq s_{\max}^{(i,j)}(t) \quad \text{pour } t \in [t_l^{(j)}, t_h^{(j)}] \end{cases} \quad (5.46)$$

où  $i$  est l'indice du signal  $s^{(i)}$  de la boucle fermée et  $j$  est l'indice de l'intervalle de temps  $[t_l^{(j)}, t_h^{(j)}]$ .

Nous notons, ici, que ce type de problème est très difficile à résoudre parce qu'il est infini (la variable temps  $t$ ) et fait intervenir des variables implicites (les variables définies par le vecteur  $\alpha$ ) tel que le temps de réponse par exemple.

Pour contourner cette problématique, nous formulons le problème d'optimisation d'une manière équivalente mais approximative par un problème d'optimisation fini sans contraintes avec l'un des critères à minimiser suivant :

$$J(\theta) = \max_{k \in [k_{\min}, k_{\max}]} [s(\theta, t_k) - s_{\max}(t_k)] + \max_{k \in [k_{\min}, k_{\max}]} [s_{\min}(t_k) - s(\theta, t_k)] \quad (5.47)$$

$$J(\theta) = \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} [v_k |s(\theta, t_k) - s_{\max}(t_k)|_+ + w_k |s_{\min}(t_k) - s(\theta, t_k)|_+] \quad (5.48)$$

avec  $|f|_+ = \max(f, 0)$  où  $|f|_+$  est l'opérateur partie positive.

Les gabarits seront vérifiés si et seulement si leurs critères associés sont négatifs.

Nous remarquons que le problème d'optimisation formulé est non différentiable par construction (il fait apparaître des fonctions max, partie positive) et il peut aussi l'être quand le maximum est atteint sur plusieurs points simultanément.

Pour résoudre ce problème d'optimisation, nous avons utilisé un algorithme de descente de sous-gradient prenant en compte les particularités des critères différentiables presque partout [23]. Le cas contraint peut être traité avec l'ajout de pénalités avec des pondérations non linéaires non différentiables ce qui permet leur prise en compte exacte.

L'algorithme proposé, pour résoudre le problème formulé, ne nécessite que le calcul du gradient de la fonction critère  $J(\theta)$ . Ce dernier est calculé à partir de la technique des fonctions de sensibilité. Le lecteur peut se référer à l'annexe C pour plus de détails.

Les simulations réalisées hors ligne après optimisation du correcteur Backstepping, conduisent aux résultats de la figure 5.17.

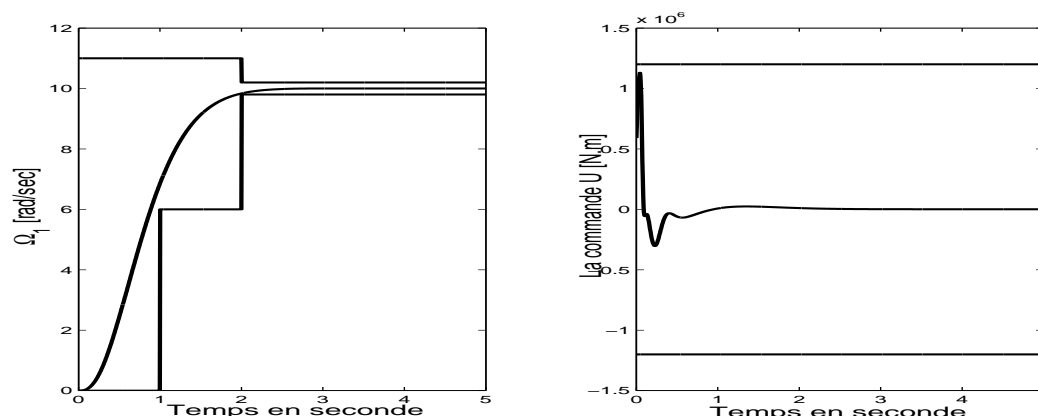


FIG. 5.17 – Réponses temporelles du système retouché

On constate que l'approche d'optimisation proposée est efficace et qu'elle est bien adaptée à la problématique d'optimisation générale liée au cahier des charges. En outre, en comparant avec les résultats obtenus avec le contrôleur Backstepping dans la section précédente, on peut noter un gain en performances du système de forage après la retouche des paramètres du contrôleur.

En effet, on avait une commande atteignant  $1.45 \times 10^6 \text{ Nm}$  (figure 5.12), maintenant on a une amplitude maximale de  $1.2 \times 10^6 \text{ Nm}$ . Le temps de réponse était de  $4 \text{ sec}$ , tandis que dans ce cas il est de  $2 \text{ sec}$  (figure 5.17).

## 5.6 Conclusion

Ce chapitre a mis en évidence l'efficacité des commandes non linéaires dont l'objectif est d'une part de faire converger la vitesse de rotation du trépan  $\Omega_1$  vers une vitesse de référence  $\Omega_{ref}$ , et d'autre part de supprimer les oscillations de « stick-slip » qui sont très néfastes pour le trépan et qui par conséquent, rende l'opération de forage dans les puits de pétrole et du gaz inefficace et très coûteuse.

La commande classique linéaire et la commande par la technique  $\mathcal{H}_\infty$  ont été présentées comme des commande de "base" afin de mieux souligner l'apport des trois méthodes non linéaires étudiées.

L'issue de cette application est concluante tant sur les performances temporelles que sur la robustesse. Pour le problème de forage, au plan théorique, l'étude comparative montre la supériorité de la synthèse par Backstepping sur les approches données dans la littérature, ainsi que sur les deux autres approches non linéaires.

Enfin, en vue de répondre à un cahier des charges spécifique, les paramètres du correcteur Backstepping obtenus ont été optimisés, ce qui a conduit à augmenter encore un peu plus les performances du contrôleur.

# Conclusion générale et perspectives

## Conclusion générale

Le problème de commande d'un système de forage demeure encore non complètement maîtrisé, car en dépit de son aspect applicatif (contraintes d'implémentation) imposant la recherche de solutions simples (correcteur PI, PID et  $\mathcal{H}_\infty$ ), nous avons mené des investigations sur un système complexe contenant des non-linéarités fortes pouvant induire la destruction du matériel de forage.

La problématique principale de cette thèse consiste à élaborer un ensemble de stratégies de commande avancées pour améliorer les performances du trépan.

Comme les forces de frottement ont ici une importance capitale dans la modélisation du système de forage, nous avons commencé par l'étude de différents modèles de frottements. Cette étude nous a mené à adopter un modèle qui met en évidence l'essence de ce phénomène avec une complexité raisonnable afin de représenter au mieux ses effets. Ce modèle de frottement est appelé effet du « stick-slip ». La prise en compte de la non-linéarité a conduit à une modélisation globale du forage rotary approchant donc au mieux le comportement réel de la plate-forme pétrolière.

L'inconvénient des méthodes linéaires classique comme le PID et moderne comme le LQG est qu'elles ne garantissent pas la stabilité vis-à-vis des incertitudes. Même si des approches linéaires comme la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  permettent de prendre en considération des incertitudes sur le modèle linéarisé, elles ne permettent pas de prendre en compte la totalité de l'information que nous avons sur le « stick-slip », vue que le comportement non linéaire de celui-ci a été linéarisé. Ensuite, différentes méthodes de synthèse nous ont amenés à l'élaboration de nouvelles lois de commande, encore jamais appliquées, à notre connaissance, à cette problématique.

L'application de méthodes de synthèse non linéaire (linéarisation par bouclage, mode glissant et Backstepping), a montré leur intérêt. Elles ont permis de réduire efficacement les oscillations du « stick-slip » améliorant ainsi d'une manière marquante les réponses temporelles mais aussi la robustesse (Backstepping) par rapport aux méthodes de type PI et  $\mathcal{H}_\infty$  basées sur des modèles linéaires tangents.

Une comparaison entre les méthodes non linéaires proposées a montré la supériorité de la synthèse par backstepping, où la question de robustesse a pu être considérée, pour des incertitudes paramétriques.

Enfin, grâce à la retouche du correcteur Backstepping par une optimisation de ses paramètres, les performances ont été améliorées.

Au final, on peut conclure que d'un point de vue théorique, la commande par Backstepping s'avère la plus appropriée au regard du cahier des charges. Il subsiste néanmoins à l'heure actuelle, le problème de la complexité de cette commande en vue d'une implémentation et ceci par rapport à la simplicité de celle d'un PI ou PID.

## Perspectives

Le travail effectué nous a permis non seulement d'avoir des réponses aux questions posées par l'industriel, mais également d'ouvrir des perspectives concernant la synthèse de commande par Backstepping. Il serait intéressant de poursuivre ce travail sur les points suivants :

- ▷ La perspective la plus directe consiste à valider cette méthodologie sur un système de forage réel.
- ▷ On peut envisager d'étendre la méthodologie de commande par Backstepping à d'autres formes de modèles de forage non linéaires.
- ▷ Un autre axe à étudier est la prise en compte d'autres types d'incertitudes, comme par exemple les incertitudes structurées sur différents paramètres du modèle de forage. Ces incertitudes prennent en compte le fait qu'un système physique ne peut être modélisé que de façon imparfaite.
- ▷ Enfin, sachant qu'en réalité, on sait peu de choses au sujet des vibrations du « stick-slip », il est important d'explorer d'autres domaines scientifiques spécialisés sur la question, comme la mécanique des solides et la mécanique des milieux pour bien concevoir des modèles de frottements non considérés ici, bien que le modèle pris en compte dans ce document s'avère suffisant dans un contexte de commande de forage.



# Annexes



# Annexe A

## Modélisation de la ligne de transmission

Nous présentons dans cette annexe le modèle complet d'une ligne de transmission, à partir duquel découle le modèle générique présenté au chapitre 2, modèle suffisant pour répondre aux objectifs de la thèse.

Dans cette méthode, on suppose que la tige de forage est un ensemble d'éléments dynamiques, linéaires et consécutifs. Considérons la figure A.1 dans laquelle une section infinitésimale de la tige de forage est illustrée [29] et [37].

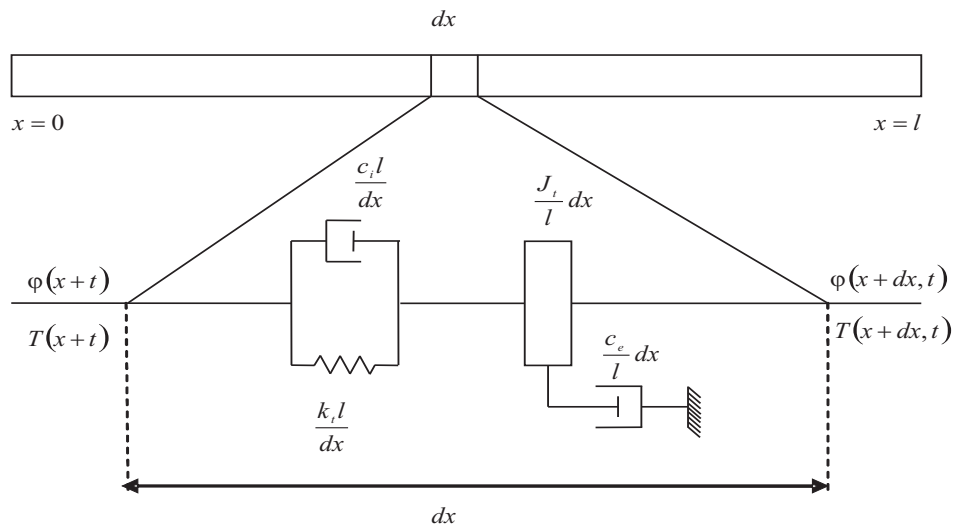


FIG. A.1 – Modélisation de la ligne de transmission

L'inertie totale du train de tiges  $J_t$  est supposée divisée en sections d'inertie  $\frac{J_t}{l} dx$ . La même hypothèse est utilisée pour l'amortissement externe  $c_e$  le long du train de tiges. Le ressort à torsion du train de tiges totale  $k_t$ , ainsi que l'amortissement interne  $c_i$  sont considérés comme étant un nombre infini de ressorts de torsion  $\frac{k_t l}{dx}$ , et d'amortisseurs  $\frac{c_i l}{dx}$  reliés mécaniquement en parallèle.

Les équations du petit déplacement pour cette section infinitésimale peuvent facilement être déduites comme ce qui suit.

Pour le couple à l'extrémité droite de la section, on a :

$$T(x + dx, t) = T(x, t) + \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} dx \quad (\text{A.1})$$

Pour le couple à l'extrémité gauche, on a :

$$T(x, t) = \frac{c_i l \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + k_t l \varphi(x, t)}{dx}, \quad (\text{A.2})$$

L'application de la loi de Newton à l'inertie amortie donne :

$$\frac{J_t}{l} dx \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} + \frac{c_e}{l} dx \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = T(x + dx, t) - T(x, t) \quad (\text{A.3})$$

En substituant les équations (A.1) et (A.2), dans l'équation (A.3) et en réarrangeant les termes, on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{J_t}{l} dx \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} + \frac{c_e}{l} dx \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \left( c_i l \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + k_t l \varphi(x, t) \right)}{\partial x^2} \quad (\text{A.4})$$

Sachant que  $\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \Omega(x, t)$ , en appliquant la transformée de Laplace, ( $s$  est la variable de Laplace), on obtient :

$$\frac{\partial^2 \Omega(x, s)}{\partial x^2} = \frac{1}{\eta^2} \Omega(x, s) \quad (\text{A.5})$$

avec  $\eta = \pm \sqrt{\frac{c_i s + k_t}{J_t s^2 + c_e s}}$ .

---

Le paramètre  $\eta$  est homogène à une longueur, et peut être interprété comme étant la longueur d'onde complexe de l'onde vibrante dans le train des tiges.

Maintenant, il est facilement vérifiable que la vitesse de rotation à gauche et à droite de la section de tige est telle que :

$$\Omega(x = 0, s) = v(s) \left( \frac{T(x = l, s) - \cosh(x/\eta)T(x = 0, s)}{\sinh(x/\eta)} \right) \quad (\text{A.6})$$

$$\Omega(x = l, s) = v(s) \left( \frac{\cosh(x/\eta)T(x = l, s) - T(x = 0, s)}{\sinh(x/\eta)} \right) \quad (\text{A.7})$$

avec

$$v(s) = \sqrt{\frac{s}{(sJ_t + c_e)(sc_i + k_t)}} \quad (\text{A.8})$$

Bien que (A.6) et (A.7) donnent la solution générale pour chaque section infinitésimale  $dx$  le long de la coordonnée  $x$  du train des tiges, la solution générale  $\Omega(x, s)$  n'est pas valable aux bornes de l'intervalle, *e.g.* à  $x = 0$  et  $x = l$ .

Pour le train des tiges, les conditions de bord sont formées comme :

- $x = 0$  : l'inertie amortie de l'assemblage de fond *BHA*, qui est excitée par le couple de frottement  $T_{tob}$ .
- et  $x = l$  : l'inertie amortie de la table de rotation, qui est excitée par le couple moteur  $T_2$ .

Les fonctions décrivant  $T_2$  et  $T_{tob}$ , n'étant pas connues, la solution générale  $\Omega(x, s)$  ne peut donc pas être donnée. D'autre part, en utilisant la méthode de modélisation de la ligne de transmission, certaines valeurs de paramètres peuvent être estimées dans le cas de discontinuités locales du modèle du train de tiges continue.

L'adaptation du modèle discret s'obtiendrait en effectuant un bilan d'énergie ou de puissance entre les deux modèles en zéro (figure A.2).

En supposant que les vitesses de rotation à  $x = 0$  et  $x = l$  sont les mêmes pour les deux modèles principaux, et que la seule quantité à adapter est le couple  $T(x, s)$ ; en réécrivant les équations (A.6) et (A.7), on obtient :

$$T(x = 0, s) = -\frac{\Omega(x = 0, s)}{v \tanh(x/\eta)} + \frac{\Omega(x = l, s)}{v \sinh(x/\eta)} \quad (\text{A.9})$$

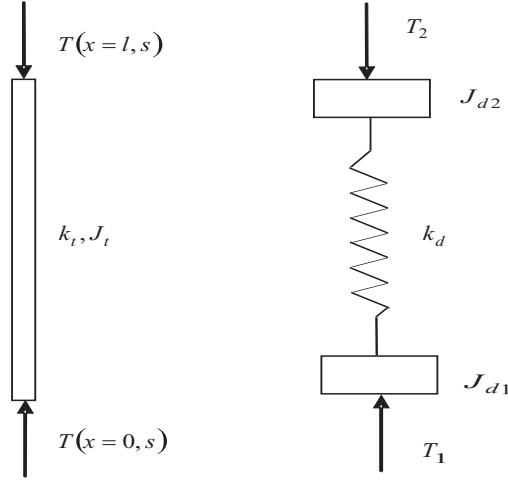


FIG. A.2 – Modèle du train de tiges continue à gauche et discret à droite

$$T(x = l, s) = -\frac{\Omega(x = 0, s)}{v \sinh(x/\eta)} + \frac{\Omega(x = l, s)}{v \tanh(x/\eta)} \quad (\text{A.10})$$

Les équations équivalentes pour le modèle discret sont :

$$T_1(s) = -\left(\frac{k_d}{s} + sJ_{d1}\right)\Omega_1(s) + \frac{k_d}{s}\Omega_2(s) \quad (\text{A.11})$$

$$T_2(s) = -\frac{k_d}{s}\Omega_1(s) + \left(\frac{k_d}{s} + sJ_{d1}\right)\Omega_2(s) \quad (\text{A.12})$$

Notons que toutes les vitesses sont définies comme des fluctuations autour d'une vitesse de référence.

Maintenant, nous définissons les erreurs de couple par :

$$\varepsilon_1 = T(x = 0, s) - T_1(s) \quad (\text{A.13})$$

---


$$\varepsilon_2 = T(x = l, s) - T_2(s) \quad (\text{A.14})$$

Rappelons que seul le cas sans pertes est considéré ici, impliquant  $c_i = c_e = 0$ , donc  $\eta = \frac{1}{s} \sqrt{\frac{k_t}{J_t}}$  et  $v = \frac{1}{\sqrt{J_t k_t}}$ .

En multipliant (A.13) et (A.14) par  $x/\eta \sinh(x/\eta)$ , et en substituant  $\Omega(x = 0, s) = \Omega_1(s)$ ,  $\Omega(x = l, s) = \Omega_2(s)$ , les fonctions de l'erreur apparaissent avec les expressions suivantes :

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \frac{xsJ_t \cosh\left(\frac{xs\sqrt{J_t/k_t}}{l}\right) + \sqrt{J_t/k_t}(k + s^2 J_{d1})x \sinh\left(\frac{xs\sqrt{J_t/k_t}}{l}\right)}{l} \Omega_1 \quad (\text{A.15})$$

$$+ \frac{xsJ_t - \sqrt{J_t/k_t}k \sinh\left(\frac{xs\sqrt{J_t/k_t}}{l}\right)}{l} \Omega_2$$

et

$$\tilde{\varepsilon}_2 = \frac{xsJ_t - \sqrt{J_t/k_t} \sinh\left(\frac{xs\sqrt{J_t/k_t}}{l}\right)}{l} \Omega_1 \quad (\text{A.16})$$

$$+ \frac{xsJ_t \cosh\left(\frac{xs\sqrt{J_t/k_t}}{l}\right) + \sqrt{J_t/k_t}(k + s^2 J_{d2})x \sinh\left(\frac{xs\sqrt{J_t/k_t}}{l}\right)}{l} \Omega_2$$

Les équations (A.15) et (A.16) sont équivalentes aux équations (A.13) et (A.14). En utilisant un développement de Taylor autour de  $s = 0$  et pour  $x = l$ , il découle :

$$\tilde{\varepsilon}_1 \approx \left[ \left( \frac{J_t k}{k_t - J_t} \right) s + \left( \frac{J_t J_{d1}}{k_t} + \frac{J_t^2 k}{6k_t^2} - \frac{J_t^2}{2k_t} \right) s^3 \right] \Omega_1 + \left[ \left( J_t - \frac{J_t k}{k_t} \right) s - \frac{J_t^2 k}{6k_t^2} s^3 \right] \Omega_2 \quad (\text{A.17})$$

$$\tilde{\varepsilon}_2 \approx \left[ \left( J_t - \frac{J_t k}{k_t} s \right) + \left( \frac{J_t^2}{2k_t} - \frac{J_t J_{d2}}{k_t} - \frac{J_t^2 k}{6k_t^2} \right) s^3 \right] \Omega_2 + \left[ \left( \frac{J_t k}{k_t} - J_t \right) s + \frac{J_t^2 k}{6k_t^2} s^3 \right] \Omega_1 \quad (\text{A.18})$$

Si on pose que la rigidité  $k_d$  du modèle discret est égale à la rigidité totale  $k_t$  du modèle de transmission, alors les solutions "non triviales" obtenues pour les paramètres du modèle discret sont données comme fonctions de  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  :

$$\Omega_1 \left( J_{d1} - \frac{1}{3} J_t - \frac{1}{6} J_t \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) = 0, \quad (\text{A.19})$$

$$\Omega_2 \left( J_{d2} - \frac{1}{3} J_t - \frac{1}{6} J_t \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \right) = 0. \quad (\text{A.20})$$

Les moments d'inerties  $J_{d1}$  et  $J_{d2}$  peuvent être obtenues à partir des équations (A.19) et (A.20) respectivement, à condition que  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  soient disponibles.

$$J_{d1} = \frac{1}{3} J_t + \frac{1}{6} J_t \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \quad (\text{A.21})$$

$$J_{d2} = \frac{1}{3} J_t + \frac{1}{6} J_t \frac{\Omega_1}{\Omega_2}. \quad (\text{A.22})$$

---

## Annexe B

# Quelques outils mathématiques : rappels

### B.1 Matrice jacobienne

La matrice jacobienne de la fonction vectorielle  $h(x(t)) \in \mathbb{R}^p$  est :

$$\frac{\partial h(x(t))}{\partial x(t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(x(t))}{\partial x_1(t)} & \cdots & \frac{\partial h_1(x(t))}{\partial x_i(t)} & \cdots & \frac{\partial h_1(x(t))}{\partial x_n(t)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_i(x(t))}{\partial x_1(t)} & \cdots & \frac{\partial h_i(x(t))}{\partial x_i(t)} & \cdots & \frac{\partial h_i(x(t))}{\partial x_n(t)} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p(x(t))}{\partial x_1(t)} & \cdots & \frac{\partial h_p(x(t))}{\partial x_i(t)} & \cdots & \frac{\partial h_p(x(t))}{\partial x_n(t)} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

### B.2 Difféomorphisme

Un difféomorphisme est une transformation permettant de réaliser un changement de coordonnées. Une fonction  $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , définie dans un sous espace  $\Delta$  de  $\mathbb{R}$  est appelée difféomorphisme si la fonction  $\Phi$  est de classe  $C^\infty$  et si son inverse  $\Phi^{-1}$  existe et est de classe  $C^\infty$ .

L'effet du changement de coordonnées sur un système non linéaire peut être analysé de la manière suivante : on considère le système non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

et le changement de coordonnées :

$$z = \Phi(x) \tag{B.3}$$

On a

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} (f(x) + g(x)u) \tag{B.4}$$

Le système non linéaire est transformé en un autre système non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{z} = \bar{f}(z) + \bar{g}(z)u \\ y = \bar{h}(z) \end{cases} \tag{B.5}$$

avec :

$$\bar{f}(z) = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} f(x) \right)$$

$$\bar{g}(z) = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} g(x) \right)$$

$$\bar{h}(z) = (h(x)).$$

### B.3 Dérivée de Lie

La dérivée de Lie du vecteur  $\tau(x(t))$  le long du champ de vecteurs  $f(x(t))$  est :

$$L_f \tau(x(t)) = \frac{\partial \tau(x(t))}{\partial x(t)} f(x(t)) \tag{B.6}$$

avec les opérations suivantes :

$$L_g L_f \tau(x(t)) = \frac{\partial L_f \tau(x(t))}{\partial x(t)} g(x(t)) \tag{B.7}$$

$$L_f^k \tau(x(t)) = \frac{\partial L_f^{k-1} \tau(x(t))}{\partial x(t)} f(x(t)) \quad (\text{B.8})$$

## B.4 Le degré relatif

Le degré relatif d'un système non linéaire est  $\rho$ , ( $1 \leq \rho \leq n$ ), dans une région  $D_0 \subset D$ , si  $\forall x \in D_0$  on a :

$$L_g L_f^{i-1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \rho - 1; \quad L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0 \quad (\text{B.9})$$

Le degré relatif correspond ainsi au nombre de dérivations de la sortie nécessaires pour faire apparaître explicitement la commande.

## B.5 Crochet de Lie

Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs  $f(x(t))$  et  $g(x(t))$  est :

$$[f(x(t)), g(x(t))] = L_f g(x(t)) - L_g f(x(t)) = \frac{\partial g(x(t))}{\partial x(t)} f(x(t)) - \frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)} g(x(t)) \quad (\text{B.10})$$

## B.6 Théorème de Frobenius

Le théorème de Frobenius est important dans le traitement formel de technique de linéarisation par bouclage pour des systèmes non linéaires d'ordre  $n$ .

### Définition B.6.1

Une distribution  $\Delta = \text{span}(\tau_1, \dots, \tau_n)$  sur une variété  $M$  de dimension  $m$  est involutive si :  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$[\tau_i, \tau_j] = \sum_{k \in \{1, \dots, n\}} f_{ij}^k(x) \tau_k \quad (\text{B.11})$$

où les  $f_{ij}^k(x)$  représentent des fonctions  $C^\infty$  définies de  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Théorème B.6.1 (Théorème de Frobenius)**

Une distribution  $\Delta$  sur une variété  $M$  de dimension  $m$  est complètement intégrable si et seulement si elle est involutive.

**B.6.1 Exemple**

On considère les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$2x_3 \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0 \tag{B.12}$$

$$-x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} - 2x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} = 0 \tag{B.13}$$

L'ensemble des champs de vecteurs associé est  $\{f_1, f_2\}$  avec

$$f_1 = (2x_3 \quad -1 \quad 0)^T \quad f_2 = (-x_1 \quad -2x_2 \quad x_3)^T$$

Nous vérifions l'involutivité de l'ensemble des champs de vecteurs  $\{f_1, f_2\}$  afin de déterminer si cet ensemble d'équations aux dérivées partielles est solvable ou encore complètement intégrable.

on trouve

$$[f_1, f_2] = (-4x_3 \quad 2 \quad 0)^T \tag{B.14}$$

alors comme  $[f_1, f_2] = -2f_1 + 0f_2$ , donc l'ensemble des champs de vecteurs est involutif.

---

## Annexe C

# Algorithme d'optimisation de type sous-gradient

L'algorithme utilisé pour ce travail s'appuie sur une collaboration avec B. Lassami et S. Font consolidé par la rédaction d'une communication. Cette communication sera présentée à la conférence (IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation, Paris -Cachan, France, 2006). Pour plus de détails sur cet algorithme, on peut se reporter aux travaux de thèse de B. Lassami qui seront présentés dans un futur proche.



## Table des figures

1.1	La plateforme de forage . . . . .	6
1.2	Schéma des éléments principaux du forage rotary . . . . .	9
1.3	Exemple d'outil PDC . . . . .	11
1.4	Système induit . . . . .	11
1.5	Moteur dc . . . . .	12
1.6	Réducteur . . . . .	14
1.7	Vibration de train de tiges . . . . .	15
1.8	Stick-slip mesuré dans un gisement de pétrole . . . . .	17
2.1	Différents phénomènes de frottements . . . . .	20
2.2	Modèles des frottements statiques . . . . .	22
2.3	Modèle de Coulomb et frottement statique . . . . .	25
2.4	Le couple non linéaire $T_{lob}$ en fonction de la vitesse de rotation du trépan $\Omega_1$ . . . . .	26
2.5	Modèle de forage rotary . . . . .	27
3.1	Problème $\mathcal{H}_\infty$ standard . . . . .	36
3.2	Transformation Fractionnaire Linéaire . . . . .	37
3.3	Exemple de synthèse $\mathcal{H}_\infty$ par pondérations fréquentielles . . . . .	40
3.4	Traduction fréquentielle des spécifications temporelles . . . . .	41
3.5	Structure de la commande $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	43
3.6	Correcteur $H_\infty$ . . . . .	46
4.1	Linéarisation par bouclage . . . . .	48
4.2	Boucle de linéarisation globale . . . . .	49
4.3	Système de réglage à structure variable avec changement de la structure par commutation . . . . .	50
4.4	Définition du domaine de glissement . . . . .	52
4.5	Schéma bloc du système . . . . .	59
4.6	Schéma bloc du système modifié . . . . .	60
4.7	Schéma bloc du backstepping . . . . .	60
5.1	La vitesse angulaire du trépan du système non commandé . . . . .	67
5.2	Schéma bloc de l'ensemble de l'installation . . . . .	70
5.3	Vitesse angulaire du trépan du système non commandé . . . . .	70
5.4	Vitesse angulaire du trépan en boucle fermée . . . . .	71

5.5	Correcteur PI . . . . .	71
5.6	Correcteur $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	72
5.7	Schéma bloc du contrôleur . . . . .	75
5.8	Réponse à un échelon de la vitesse angulaire du trépan ( <i>rad/sec</i> ) en fonction du temps (en <i>sec</i> ) en boucle fermée, correcteur par modes de glissement . .	75
5.9	Signal de commande (en <i>N.m</i> ) en fonction du temps (en <i>sec</i> ) . . . . .	76
5.10	Réponse à un échelon de la vitesse angulaire du trépan ( <i>rad/sec</i> ) en fonction du temps (en <i>sec</i> ) en boucle fermée, commande par Backstepping . . . . .	83
5.11	Réponse à un échelon de la vitesse angulaire du trépan . . . . .	85
5.12	Signal de commande (en <i>N.m</i> ) en fonction du temps (en <i>sec</i> ) . . . . .	85
5.13	Système bouclé avec variables ajustables . . . . .	86
5.14	Gabarit min/max . . . . .	87
5.15	Gabarit de temps d'établissement . . . . .	87
5.16	Gabarit de réjection . . . . .	88
5.17	Réponses temporelles du système retouché . . . . .	90
A.1	Modélisation de la ligne de transmission . . . . .	97
A.2	Modèle du train de tiges continue à gauche et discret à droite . . . . .	100

# Bibliographie

- [1] B. Armstrong-Hélouvry. *Control of Machines with Friction*. 1991.
- [2] P. A. Bliman. *Etude mathématique d'un modèle de frottement sec : le modèle de P. R. Dahl*. Thèse de doctorat, Université de Paris IX-Dauphine, Mars 1990.
- [3] S. Boyd and C. Barrat. *Linear Controller Design. Limits of performance*. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice-Hall, 1991.
- [4] C. Canudas De Wit, H. Olsson, K. J. Astrom, and P. Lischinsky. A new model for control of systems with frictions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3):419–425, 1995.
- [5] S. J. Cull and R. W. Tucker. On the modelling of Coulomb friction. *Journal of Phys. and Math.*, 32:2103–2113, 1999.
- [6] P. R. Dahl. A solid friction model. *The Aerospace Cororation*, pages 3107–3118, 1968.
- [7] D. Dareing, J. Tlusty, and C. Zamudio. Self-excited vibrations induced by drag bits. *Journal of Energy Resources Technology, Transactions of the ASME*, 1990.
- [8] J. C. Doyle. Structured uncertainty in control system design. *Proceedings of the 24th Conference on Decision and Control*, pages 260–265, 1985.
- [9] V. Dunayevsky, F. Abbassian, and A. Judzis. Dynamics stability of drillstrings under fluctuating weight on bit. *SPE, Drilling and Completion*, 8(2):84–92, 1993.
- [10] M. Elsayed and L. Washington. Drillstrings stability based on variable material specific force and using sharp three-insert polycrystalline diamond compact (pdc) coring bit. *Journal of Energy Resources Technology*, 123(2):138–143, 2001.

- [11] S. V. Emelyanov. *Variable structure control systems*. Nauka, Moscow, 1967.
- [12] I. Finnie and J. Bailey. An experimental study of drillstring vibrations. *Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME*, 82(2):129–135, 1960.
- [13] S. Font. *Méthodologie pour prendre en compte la robustesse des systèmes asservis: optimisation  $H_\infty$  et approche symbolique de la forme standard*. Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay, 1995.
- [14] A. R. Freeman and P. V. Kokotovic. Tools and procedures for robust control of nonlinear systems. In *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3458–3463, 1994.
- [15] A. R. Freeman and P. V. Kokotovic. Robust integral control for a class of uncertain nonlinear systems. pages 2245–2250, 1995.
- [16] K. Glover and J. C. Doyle. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an  $\mathcal{H}_\infty$  norm bound and relations to risk sensitivity. *Systems and Control Letters*, 11:167–172, 1988.
- [17] S. Hbaieb. *Analyse de cahier des charges en automatique par optimisation convexe*. Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay, 2002.
- [18] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition edition, 1989.
- [19] J. D. Jansen. Non linear rotor dynamics as applied to oilwell drillstring vibrations. *Journal of Sound and Vibrations*, 147(1):115–135, 1991.
- [20] J. D. Jansen. Whirl and chaotic motion of stabilized drill collars. *Journal of SPE Drilling Engineering*, 7(2):107–114, 1992.
- [21] J. D. Jansen. *Nonlinear dynamics of oilwell drillstrings*. PhD thesis, Delft University, March 1993.
- [22] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. V. Kokotovic. *Nonlinear and adaptive control design*. Wiley Interscience, 1995.

- [23] B. Lassami, F. Abdulgalil, S. Font, and H. Siguerdidjane. Parametric ajustement of a backstepping controller by nonsmooth optimization : Application to drilling system. In *13th IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation*, Paris - Cachan, France, April 2006.
- [24] B. Lassami and S. Font. Optimisation générale pour la retouche de correcteurs : Approche par sous-gradient. In *Journées Doctorale d'Automatique JDMACS/JNMACS*, Lyon, France, Septembre 2005.
- [25] J. Mason and B. Sprawls. Addressing BHA whirl: the culprit in mobile bay. *Journal of SPE Drilling and Completion*, 13(4):231–236, 1998.
- [26] J. W. Nicholson. An integrated approach to drilling dynamics planning, identification and control. In *Proceedings of the IADC/SPE Drilling Conference*, pages 67–83, 1994.
- [27] H. Nijmeijer and A. J. Van der Schaft. *Nonlinear dynamical control systems*. Springer-Verlag, 1990.
- [28] E. Rosenwasser and R. Yusupov. *Sensitivity of Automatic Control Systems*. CRC Press Control Series, Boca Raton, 2000.
- [29] A. F. A. Serrarens.  $\mathcal{H}_\infty$  Control as applied to torsional drillstring dynamics. Master's thesis, Eindhoven University of Technology, 2002.
- [30] A. F. A. Serrarens, M. J. G. Van de Molengraft, J. J. Kok, and L. Van den Steen.  $\mathcal{H}_\infty$  control for suppressing stick slip in oil well drillstrings. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18(2):19–30, 1998.
- [31] J. E. Slotine. The robust control of robot manipulators. *International Journal of Robotics Research*, 4:49–63, 1985.
- [32] J. E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, 1991.
- [33] A. T. Smit. *Using of optimal control techniques to dampen torsional drillstrings vibrations*. Master's thesis, University of Twente, March 1995.

- [34] P. D. Spanos, A. M. Chevallier, N. P. Politis, and M. L. Payne. Oil well drilling: a vibrations perspective. *The Shock and Vibration Digest*, 35(2):81–99, 2003.
- [35] R. W. Tucker and C. Wang. On the effective control of torsional vibrations in drilling systems. *Journal of Sound and Vibration*, 224(1):101–122, 1999.
- [36] V. I. Utkin. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(2):212–222, 1977.
- [37] L. Van Den Steen. *Suppressing stick slip induced drill string oscillation: hyperstability approach*. PhD thesis, University of Twente, 1997.
- [38] A. S. Yigit and A. P. Christoforou. Coupled torsional and bending vibrations of actively controlled drillstrings. *Journal of Sound and Vibration*, 234:67–83, 2000.
- [39] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. 1996.