Germes d'un champ gaussien stationnaire

Xavier Guyon
SAMOS ([1]), Université Paris 1
guyon@univ-paris1.fr

Résumé : Nous donnons des conditions suffisantes assurant qu'une suite de processus gaussiens stationnaires sur $\mathbf{Z}^d$ (un germe) converge vers un processus gaussien stationnaire sur $\mathbf{R}^d$. Nous nous concentrons ici sur les cas $d = 1$ et $d = 2$ et sur les germes markoviens.

Mots clés : Processus gaussien stationnaire, champ gaussien sur $\mathbf{Z}^d$ ou sur $\mathbf{R}^d$, squelette d'un processus, germe discret d'un champ, modèle Auto-Régressif (AR), auto-régression conditionnelle (CAR), densité spectrale, modèle de Markov.

Classification AMS : 60G15, 60G60, 62M30

1 Introduction

Un champ gaussien stationnaire centré $X = (X_t, t \in \mathbf{R}^d)$ à *indice continu* sur $\mathbf{R}^d$ est caractérisé par sa covariance r ou par sa mesure spectrale F. On supposera que F est absolument continue, de densité spectrale f.

Soient $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_d) \in (\mathbf{R}^{+*})^d$ ($\mathbf{R}^{+*} =]0, +\infty[$) un pas de discrétisation de $\mathbf{R}^d$, $k\Delta = (k_1\Delta_1, k_2\Delta_2, \cdots, k_d\Delta_d)$ le point générique du maillage discret associé à Δ, $k \in \mathbf{Z}^d$. Le squelette de X sur ce maillage est le processus à *indice discret* $X_\Delta = (X_{k\Delta}, k \in \mathbf{Z}^d)$. Sa covariance vaut $r_\Delta(k) = r(k\Delta), k \in \mathbf{Z}^d$; la correspondance entre r et f permet d'identifier sa densité spectrale f_Δ de X_Δ : si $T = [-\pi, \pi[^d$ est le tore de dimension d, notant $\frac{\mu}{\Delta} = (\frac{\mu_l}{\Delta_l})_{l=1,d}$ pour $\mu \in \mathbf{R}^d$ et $|\Delta| = \prod_{l=1,d} \Delta_l$, on a :

$$f_\Delta(\lambda) = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{n \in \mathbf{Z}^d} f(\frac{\lambda + 2n\pi}{\Delta}) \text{ si } \lambda \in T$$

$\Delta \to 0$ signifie que toutes les coordonnées de Δ tendent vers 0. On dira que $(X_\Delta, \Delta \to 0)$ est le *germe canonique* du processus à temps continu X.

Le problème qui nous intéresse ici est inverse : étant donné un germe spectral discret, c'est-à-dire une suite $(X^{(n)}, n \to \infty)$ de processus gaussiens stationnaires sur $\mathbf{Z}^d$, à quelles conditions existe-t-il un processus X sur $\mathbf{R}^d$ qui en soit la limite ? Nous allons donner des réponses partielles à cette question, ce qui permettra d'interpréter les modèles à temps continu en terme de germes de markoviens, et fournira de nouvelles procédures de simulation d'un champ à indice continu.

L'étude des modèles sur $\mathbf{R}^d$, en particulier sur $\mathbf{R}^2$, est l'objet de la géostatistique (Cressie [5], Wackernagel [24]). Deux figures pionnières dans l'étude des champs sur $\mathbf{R}^2$ sont Whittle [25] et Matheron [18]. La modélisation par champ à temps continu est utilisé dans de nombreux domaines, par exemple en prospection minière (Krige, travaux de l'école des mines de Fontainebleau), en science de l'environnement (Monestiez, Sampson et Guttorp [19], Monestiez et Perrin [20], Perrin et Senoussi [21]), en hydrologie (Jones [12], Vecchia [23], Jones et Vecchia [13]). Outre les techniques statistiques habituelles du maximun de vraisemblance, les champs à indice continu sur $\mathbf{R}^d$, $d \geq 2$, offrent des outils spécifiques, à savoir une famille de variations quadratiques utile à l'estimation et à l'identification de modèle (Guyon [8], Leon et Ortega [17], Guyon et Perrin [10]). Lantuéjoul [16] donne une présentation très complète des techniques de simulation en géostatistique. Quant aux champs de Markov sur $\mathbf{Z}^d$, ils doivent leur

[1]SAMOS, Université Paris 1, Centre PMF, 90 rue de Tolbiac, 75634 Paris Cedex 13

développement à l'école anglo-saxonne (Besag [2], [3]; Ripley [22]) et aux frères Geman ([6], [7]) qui ont mis en place les outils stochastiques de l'imagerie numérique (cf. aussi [9]).

Le §2 explicite la condition nécessaire fondamentale que vérifie la suite des densités spectrales du germe canonique d'un processus. Cette condition est alors utilisée pour donner des conditions suffisantes assurant la convergence de germes markoviens discrets sur $\mathbf{Z}$ (§3) et sur $\mathbf{Z}^2$ (§4).

2 Convergence spectrale d'un germe canonique

Soient $n = (n_1, n_2, \cdots, n_d) \in (\mathbf{N}^*)^d$ un multi-indice et $\Delta \in (\mathbf{R}^{+*})^d$ un pas fixé. On notera f_n^X la densité spectrale (sur T) de la trace $X_{\frac{\Delta}{n}}$ de X (de densité spectrale f sur $\mathbf{R}^d$) sur le maillage de pas $\frac{\Delta}{n} = (\frac{\Delta_1}{n_1}, \frac{\Delta_2}{n_2}, \cdots, \frac{\Delta_d}{n_d})$. Pour $\lambda \in T$ et $\langle k, \lambda\rangle = \sum_1^d k_i\lambda_i$, on a :

$$f_n^X(\lambda) = \sum_{Z^d} r(k\frac{\Delta}{n}) \exp i\langle k, \lambda\rangle$$

Fixons $\mu \in \mathbf{R}^d$. Pour n grand assurant que $\frac{\Delta}{n}\mu \in T$, on a :

$$f_n^X(\frac{\Delta}{n}\mu) \times \frac{\Delta_1}{n_1} \times \frac{\Delta_2}{n_2} \times \cdots \times \frac{\Delta_d}{n_d} = \sum_{\mathbf{Z}^d} r(k\frac{\Delta}{n}) \exp i\langle k, \frac{\Delta}{n}\rangle \times \frac{\Delta_1}{n_1} \times \frac{\Delta_2}{n_2} \times \cdots \times \frac{\Delta_d}{n_d}$$

Si r est continue et dans $L^1(\mathbf{R}^d)$ (L^1 pour la mesure de Lebesgue), le membre de droite de l'égalité précédente tend vers $f(\mu)$ si $n \to \infty$. Donc pour tout $\mu \in \mathbf{R}^d$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} f_n^X(\frac{\Delta}{n}\mu) \times \frac{\Delta_1}{n_1} \times \frac{\Delta_2}{n_2} \times \cdots \times \frac{\Delta_d}{n_d} = f(\mu)$$

On a donc :

Proposition 1 *Soit X un processus gaussien stationnaire sur $\mathbf{R}^d$ de densité spectrale f et de covariance r. Si r est continue et dans L^1, la suite de densité spectrale (f_n^X) du processus discrétisé aux pas $(\frac{\Delta}{n})$ vérifie, pour tout $\mu \in \mathbf{R}^d$:*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\Delta}{n}\right| f_n^X(\frac{\Delta}{n}\mu) = f(\mu) \tag{1}$$

Considérons $(X^{(n)})$ une suite de processus gaussiens centrés et stationnaires sur $\mathbf{Z}^d$, de densités spectrales (f_n). On dira que le germe $(X^{(n)})$ tend vers X de densité spectrale f si la condition (1) est satisfaite. Le résultat de la proposition est donc une condition nécessaire que doit satisfaire toute suite (f_n) sur T afin d'être un germe possible pour X de spectre f sur $\mathbf{R}^d$. La convergence de $(X^{(n)})$ vers X est assurée sous les deux conditions suivantes,

$$\begin{aligned} (I) \quad &: \quad \forall\mu \in \mathbf{R}^d,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^d} f_n(\frac{\mu}{n}) \text{ existe, valant } f(\mu) \\ (II) \quad &: \quad f \geq 0 \text{ et } f \in L^1(\mathbf{R}^d) \end{aligned}$$

Afin de simplifier la présentation, on prendra $\Delta_l \equiv 1$ et $n_l \equiv n$ pour $l = 1, d$.

3 Suite de schémas AR sur $\mathbf{Z}$ $(d = 1)$

3.1 Schémas $AR(1)$

Considérons la suite de processus $AR(1)$ stationnaires indexée par n :

$$X_k^{(n)} = \rho_n X_{k-1}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)},\ k \in \mathbf{Z},\ Var(X_k^{(n)}) = \sigma^2 \tag{2}$$

de variance constante et de corrélation aux plus proches voisins ρ_n, $|\rho_n| < 1$. Dans cette représentation, $(\varepsilon_k^{(n)})_k$ est le bruit blanc d'innovation de $X^{(n)}$ ($Cov(X_k^{(n)}, \varepsilon_l^{(n)}) = 0$ si $l > k$), $Var(\varepsilon_k^{(n)}) = \sigma_n^2 = (1-\rho_n^2)\sigma^2$. La densité spectrale de $X^{(n)}$ vaut :

$$f_n(\lambda) = \frac{\sigma_n^2}{|1-\rho_n e^{i\lambda}|^2} = \frac{\sigma_n^2}{(1+\rho_n^2) - 2\rho_n \cos\lambda},\ \lambda \in T = [-\pi, +\pi[$$

Prenant le développement de Taylor de f_n en 0 et notant $o(1)$ une suite tendant vers 0 si $n \to \infty$, on a :

$$\frac{1}{n} f_n(\frac{\mu}{n}) = \frac{n\sigma_n^2}{n^2(1-\rho_n)^2 + \rho_n \mu^2 + o(1)}$$

Soit ρ_0 un point d'accumulation de la suite (ρ_n). Si $\rho_0 \neq 1$, et en se plaçant sur la sous-suite tendant vers ρ_0, on obtient :

$$\forall \mu \in \mathbf{R} :\ \frac{1}{n} f_n(\frac{\mu}{n}) \simeq \frac{\sigma^2(1-\rho_0^2)}{n(1-\rho_0)^2 + \rho_0 \frac{\mu^2}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

La limite est donc $f \equiv 0$; mais f n'est pas acceptable puisque le processus limite doit être de variance $\sigma^2 > 0$. Donc, nécessairement, (ρ_n) converge et $\rho_n \to 1$. On a alors l'équivalence :

$$\frac{1}{n} f_n(\frac{\mu}{n}) \simeq g_n(\mu) = \frac{2a_n\sigma^2}{a_n^2 + \mu^2},\ \text{avec } a_n = n(1-\rho_n)$$

La convergence de $(\frac{1}{n} f_n(\frac{\mu}{n}))$ implique celle de (a_n). Montrons que la seule possibilité est que $a_n \to \alpha > 0$ fini, cette condition assurant la convergence du germe discret. En effet :

(i) si $a_n \to 0$ ou si $a_n \to +\infty$, la limite est $f(\mu) = 0$, et f n'est pas acceptable.

(ii) si $\alpha > 0$, $\frac{1}{n} f_n(\frac{\mu}{n}) \to f(\mu) = \frac{2\alpha\sigma^2}{\alpha^2+\mu^2}$: cette densité acceptable est celle de la diffusion de Ornstein-Uhlenbeck (notée par la suite O.U.).

Proposition 2 *La suite de schémas AR(1) définie par (2) converge vers un modèle à temps continu si et seulement si $\rho_n = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$. Dans ce cas, le processus limite est la diffusion stationnaire de Ornstein-Uhlenbeck.*

Remarques :

(1) Une autre approche (qui prévaut pour l'étude des schémas spatiaux sur $\mathbf{Z}^d$, $d \geq 2$) utilise la représentation markovienne bilatérale d'un $AR(1)$: un $AR(1)$ admet également la représentation markovienne bilatérale $CAR(1)$ (Conditional AR, Ripley [22], Guyon [9]) :

$$X_k^{(n)} = \alpha_n(X_{k-1}^{(n)} + X_{k+1}^{(n)}) + e_k^{(n)} \text{ avec } Cov(e_k^{(n)}, X_l^{(n)}) = 0 \text{ si } l \neq k$$

$\alpha_n = \frac{\rho_n}{1+\rho_n^2}$, $(1+\rho_n^2)Var(e_k^{(n)}) = \sigma_n^2$. Dans cette représentation, $(e_k^{(n)})_k$ est un bruit coloré. Si $n \to \infty$, $\frac{1}{n} f_n(\frac{\mu}{n}) \simeq Var(e_n)\{n(1-2\alpha_n)^2 + \alpha_n \frac{\mu^2}{n}\}^{-1}$ et les conditions $1 - 2\alpha_n \simeq \frac{\alpha^2}{2n^2}$ et $Var(e_n) \simeq \frac{\alpha\sigma^2}{n}$, $\alpha > 0$, assurent la convergence du germe CAR discret. Ces conditions sont équivalentes à celles obtenues à partir de la représentation $AR(1)$.

(2) La correspondance "*continu $\to$ discret*" est classique, s'identifiant au schéma de discrétisation d'Euler pour une diffusion (Kloeden et Platen [14]). Le processus de O.U., de covariance $r(t) = \sigma^2 \exp(-\alpha t)$, $\alpha > 0$, est la solution stationnaire de l'équation différentielle stochastique $dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma\sqrt{2\alpha} dW_t$, où W est un brownien standard. Il suffit d'écrire l'équation aux différences aux points t et $t + \frac{1}{n}$ pour obtenir le schéma discret $AR(1)$ approchant :

$$X_{k+1}^{(n)} = (1 - \frac{\alpha}{n}) X_k^{(n)} + \varepsilon_{k+1}^{(n)} \text{ avec } Var(\varepsilon_k^{(n)}) = \frac{2\alpha\sigma^2}{n}$$

3.2 Limite de schémas $AR(p)$ (ou $CAR(p)$)

Considérons une suite d'$AR(p)$ à variance constante et de représentation $CAR(p)$:

$$X_k^{(n)} = \sum_{j=1,p} \alpha_j^{(n)}(X_{k-j}^{(n)} + X_{k+j}^{(n)}) + e_k^{(n)}, \text{ avec } Cov(e_k^{(n)}, X_l^{(n)}) = 0 \text{ si } l \neq k \tag{3}$$

$Var(e_k^{(n)}) = \sigma_n^2$. La densité spectrale f_n de $X^{(n)}$ vaut :

$$f_n(\lambda) = \sigma_n^2[1 - 2\sum_{j=1,p} \alpha_j^{(n)} \cos(j\lambda)]^{-1}$$

En dimension $d = 1$, une condition nécessaire et suffisante d'existence et de stationnarité pour $X^{(n)}$ est que f_n soit > 0 (Künsch [15]; Guyon, Propriété 4.9, [9]). Le developpement de Taylor de f_n en 0 donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}f_n(\frac{\mu}{n}) &= \frac{\sigma_n^2}{n}\{B_n + A_n\frac{\mu^2}{n^2} + C_n\frac{\mu^4}{n^4} + o(\frac{1}{n^4})\}^{-1} \qquad (4)\\ \text{avec } A_n &= \sum_{j=1,p} j^2\alpha_j^{(n)},\ B_n = 1 - 2\sum_{j=1,p}\alpha_j^{(n)} \text{ et } C_n = \sum_{j=1,p} j^4\alpha_j^{(n)} \end{aligned}$$

Donnons deux conditions assurant la convergence de $(\frac{1}{n}f_n(\frac{\mu}{n}))$.

(1) $\lim_n A_n = \alpha \neq 0$

La convergence est assurée si $B_n \simeq \frac{\beta}{n^2}$ et $\sigma_n^2 \simeq \frac{\kappa}{n}$, $\kappa > 0$, et $\lim_n \frac{1}{n}f_n(\frac{\mu}{n}) = \frac{\kappa}{\alpha\mu^2+\beta} = f(\mu)$. La positivité de f exige $\alpha = a^2 > 0$ et $\beta = b^2 > 0$. La limite spectrale est celle d'un processus de O.U.. La condition $B_n = \sum_j \alpha_j^{(n)} = \frac{1}{2} - \frac{b^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ traduit que $\alpha^{(n)} \to \alpha$, où α vérifie $\sum_j \alpha_j = \frac{1}{2}$; α est un point frontière du domaine de stationnarité d'un $CAR(p)$.

Une dégénérescence de dimension apparaît : pour $p \geq 2$, les $(p+1)$ paramètres de départ se réduisent à 2 à la limite : il y a donc toute une famille de $CAR(p)$ discrets convergents vers un même processus de O.U..

(2) : $\lim_n A_n = 0$

(i) Si $A_n \to 0_+$ moins vite que n^{-2}, $\frac{1}{n}f_n(\frac{\mu}{n}) \simeq \sigma_n^2\{nB_n + \mu^2\frac{A_n}{n}\}^{-1}$. L'existence d'une limite est assurée si $B_n \simeq b^2\frac{A_n}{n^2}$ et $\frac{n}{A_n}\sigma_n^2 \to \kappa$, donnant $f(\mu) = \kappa\{\mu^2 + b^2\}^{-1}$.

(ii) Si $A_n \simeq \frac{c}{n^2}$ et si $C_n \to -l \neq 0$, $\frac{1}{n}f_n(\frac{\mu}{n}) \simeq n^3\sigma_n^3\{n^4B_n + c\mu^2 + \frac{l}{12}\mu^4\}^{-1}$. Une condition de convergence vers une densité spectrale est :

$$1 - 2\sum_{j=1,p}\alpha_j^{(n)} \simeq \frac{b^2}{n^4},\ b^2 > 0,\ l > 0,\ b^2 l < 3c^2 \text{ et } \sigma_n^2 \simeq \frac{\kappa}{n^3}$$

La densité spectrale limite vaut $f(\mu) = \frac{\kappa}{b^2+c\mu^2+\frac{l}{12}\mu^4}$. $A_n = o(n^{-2})$ correspond à $c = 0$.

Proposition 3 *Le germe discret $AR(p)$ défini par (3) converge vers un processus à temps continu de densité spectrale f sous l'une des conditions suivantes :*

(1) $1 - 2\sum_{j=1}^p \alpha_j^{(n)} \simeq \frac{b^2}{n^2}$, $b^2 > 0$, $\sum_{j=1}^p j^2\alpha_j^{(n)} \to a^2 > 0$ *et* $\sigma_n^2 \simeq \frac{\kappa}{n}$, $\kappa > 0$; $f(\mu) = \frac{\kappa}{a^2\mu^2+b^2}$.

(2) $1 - 2\sum_{j=1}^p \alpha_j^{(n)} \simeq \frac{b^2}{n^4}$, $b^2 > 0$, $\sum_{j=1}^p j^2\alpha_j^{(n)} \simeq \frac{c}{n^2}$, $\sum_{j=1}^p j^4\alpha_j^{(n)} \to -l < 0$ *avec* $b^2 l > 3c^2$, *et* $\sigma_n^2 \simeq \frac{\kappa}{n}^3$, $\kappa > 0$; $f(\mu) = \frac{\kappa}{b^2+c^2\mu^2+\frac{l}{12}\mu^4}$.

Remarques.

(1) Le $CAR(2)$ de paramètres $\alpha_1^{(n)} = \frac{2}{3} - \frac{c}{3n^2} - \frac{2b^2}{3n^4} + o(\frac{1}{n^4})$, $\alpha_2^{(n)} = -\frac{1}{6} + \frac{c}{3n^2} + \frac{b^2}{6n^4} + o(\frac{1}{n^4})$ vérifie la condition (2) de la proposition précédente avec $l = 2$ dès que $2b^2 > 3c^2$ et $\sigma_n^2 \simeq \frac{\kappa}{n^3}$.

(2) Un cas particulier d'un tel $CAR(2)$ est donné par un modèle $AR(1)$ bilatéral et isotropique aux deux plus proches voisins :

$$X_k^{(n)} = a_n(X_{k-1}^{(n)} + X_{k+1}^{(n)}) + \varepsilon_k^{(n)}, \text{ avec } \varepsilon^{(n)} \text{ un bruit blanc}$$

Mais $\varepsilon^{(n)}$ n'est pas le bruit blanc d'innovation de $X^{(n)}$. $X^{(n)}$ est un $CAR(2)$ de paramètres $\alpha_1^{(n)} = \frac{2a_n}{1+2a_n^2}$ et $\alpha_2^{(n)} = -\frac{a_n^2}{1+2a_n^2}$. Sous les conditions $1-2a_n \simeq \frac{d^2}{n^2}$ et $4n^3 Var(\varepsilon_k^{(n)}) \to \kappa$, la densité spectrale limite est $f(\mu) = \frac{\kappa}{(d^2+\mu^2)^2}$. L'équation aux différences finies et l'équation différentielle stochastique formelle associées aur schéma $AR(1)$ bilatéral sont respectivement, notant $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ et $\overset{\circ}{W}_t \times dt = W(dt)$ le bruit blanc gaussien continu :

$$\begin{aligned}
\Delta^2 X_t &= -\frac{d^2}{2n^2}(X_{k-1}^{(n)} + X_{k+1}^{(n)}) + 2\varepsilon_k^{(n)} \\
\frac{\partial^2}{\partial t^2} X_t - d^2 X_t &= \kappa \overset{\circ}{W}_t \text{ avec } X_0 \sim \mathcal{N}(0, \frac{\pi\kappa}{d^3})
\end{aligned}$$

(3) D'autres germes $CAR(2)$ convergents peuvent s'obtenir en faisant intervenir le terme d'ordre 4 (ou des termes au-delà) dans le développement (4) de $\frac{1}{n} f_n(\frac{\mu}{n})$. L'écriture différentielle formelle du processus X associé fera alors intervenir des dérivées de X d'un ordre > 2.

4 Suite de schémas sur $\mathbf{Z}^2$

4.1 La diffusion de O.U. factorisante

Considérons le modèle AR causal et factorisant sur $\mathbf{Z}^2$:

$$X_{st}^{(n)} = a_n X_{s-1,t}^{(n)} + b_n X_{s,t-1}^{(n)} - a_n b_n X_{s-1,t-1} + \varepsilon_{st}^{(n)},\ \varepsilon^{(n)} \text{ i.i.d. } \mathcal{N}(0, \sigma_n^2),\ (s,t) \in \mathbf{Z}^2$$

La densité spectrale de $X^{(n)}$ factorise : $f_n(\lambda, \mu) = h_n(\lambda) h_n(\mu)$. Utilisant les résultats du §3.1, on montre que $(\frac{1}{n^2} f_n(\frac{\lambda}{n}, \frac{\mu}{n}))$ converge vers une densité spectrale sur $\mathbf{R}^2$ si et seulement si :

$$1 - a_n \simeq \frac{a}{n},\ a > 0,\ 1 - b_n \simeq \frac{b}{n},\ b > 0 \text{ et } \sigma_n^2 \simeq \frac{4ab\sigma^2}{n^2}$$

où $\sigma^2 = Var(X^{(n)})$. Notant $\Delta_1 X_{st} = X_{st} - X_{s-1,t}$, $\Delta_2 X_{st} = X_{st} - X_{s,t-1}$, le modèle AR peut encore s'écrire

$$\Delta_1 \Delta_2 X_{st} \simeq -\frac{a}{n} \Delta_2 X_{s-1,t} - \frac{b}{n} \Delta_1 X_{s,t-1} + \varepsilon_{s,t}^{(n)}$$

L'équation différentielle formelle associée est :

$$X(ds, dt) + aX(s, dt)ds + bX(ds, t)dt + abX(s,t)dsdt = 2\sqrt{ab} W(ds, dt)$$

où W est le drap brownien sur $\mathbf{R}^2$ (le processus gaussien à accroissements indépendants, $Var(W(A)) = |A|$ pour A borélien de mesure de Lebesgue $|A| < \infty$). Le spectre du processus de O.U. factorisant est :

$$f(\lambda, \mu) = \frac{4ab\sigma^2}{(a^2 + \lambda^2)(b^2 + \mu^2)},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$$

4.2 Modèle AR bilatéral et isotropique aux 4 voisins

C'est le modèle :

$$X_{st}^{(n)} = a_n(X_{s-1,t}^{(n)} + X_{s,t-1}^{(n)} + X_{s+1,t}^{(n)} + X_{s+1,t}^{(n)}) + \varepsilon_{st}^{(n)},\ (s,t) \in \mathbf{Z}^2 \text{ et } \varepsilon^{(n)} \text{ i.i.d. } \mathcal{N}(0, \sigma_n^2) \quad (5)$$

Sa densité spectrale valant $f_n(\lambda, \mu) = \sigma_n^2 \left|1 - 2a_n(\cos(\lambda) + \cos(\mu))\right|^{-2}$, on a :

$$\frac{1}{n^2} f_n(\frac{\lambda}{n}, \frac{\mu}{n}) \simeq \frac{\sigma_n^2}{n^2(1 - 4a_n + a_n \frac{\lambda^2+\mu^2}{n^2})^2} \to f(\lambda, \mu) = \frac{\kappa}{(a^2 + \lambda^2 + \mu^2)^2}$$

dès que : (i) $a_n \simeq \frac{1}{4}(1-\frac{a^2}{4n^2})$, $a^2>0$ et (ii) $\sigma_n^2 \simeq \frac{\kappa}{16n^2}$. f est la densité spectrale d'un processus X sur $\mathbf{R}^2$ de variance $\frac{\pi\kappa}{a^2}$ dont la covariance isotropique :

$$r(u,v) = \frac{\pi\kappa}{a} dK_1(ad), \text{ où } d^2 = u^2+v^2$$

s'exprime à partir de K_1, la fonction de Bessel modifiée de $2^{ème}$ type (Whittle [25], Heine [11], Abramovitz et Stegun [1]).

L'équation aux différences associée à (5) et l'équation différentielle stochastique du processus limite X sont respectivement :

$$\{(\Delta_1)^2 + (\Delta_2^2)\}X_{st} + \tfrac{a^2}{4n^2}(X^{(n)}_{s-1,t} + X^{(n)}_{s,t-1} + X^{(n)}_{s+1,t} + X^{(n)}_{s+1,t}) = 4\varepsilon^{(n)}_{st} \text{ avec } (s,t)\in\mathbf{Z}^2$$
$$\Delta^2 X_{uv} + a^2 X_{uv} = \sqrt{\kappa}\,\overset{\circ}{W}_{uv} \text{avec } (u,v)\in\mathbf{R}^2$$

où : $\Delta_1 X_{st} = X_{st} - X_{s-1,t}$, $\Delta_2 X_{st} = X_{st} - X_{s,t-1}$, $\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ et $\overset{\circ}{W}$ est le bruit blanc sur $\mathbf{R}^2$ définit formellement par $W(du,dv) = \overset{\circ}{W}_{uv} \times dudv$.

Proposition 4 *Le germe AR isotropique aux 4-plus proches voisins (5) converge vers le processus X de densité spectrale $f(\lambda,\mu) = \frac{\kappa}{(a^2+\lambda^2+\mu^2)^2}$ dès que $a_n \simeq \frac{1}{4}(1-\frac{a^2}{4n^2})$, $a^2>0$ et $\sigma_n^2 \simeq \frac{\kappa}{16n^2}$.*

4.3 Non-convergence du CAR isotropique aux 4-plus proches voisins

Contrairement au modèle AR, le germe markovien CAR aux 4-plus proches voisins (ppv) ne passe pas à la limite (cf. Besag et Moran [4]). On obtient facilement ce résultat en examinant la condition nécessaire de convergence de la suite spectrale du germe du modèle markovien :

$$X^{(n)}_{st} = a_n(X^{(n)}_{s-1,t} + X^{(n)}_{s,t-1} + X^{(n)}_{s+1,t} + X^{(n)}_{s+1,t}) + e^{(n)}_{st} \text{ où } Cov(e^{(n)}_{st}, X^{(n)}_{kl}) = 0 \text{ si } (s,t)\neq(k,l) \quad (6)$$

$Var(e^{(n)}_{st}) = \sigma_n^2$. Puisque $f_n(\lambda,\mu) = \sigma_n^2(1-2a_n(\cos(\lambda)+\cos(\mu))^{-1}$, on obtient :

$$\frac{1}{n^2} f_n(\frac{\lambda}{n},\frac{\mu}{n}) = \frac{n^{-2}\sigma_n^2}{(1-4a_n) + \frac{a_n}{n^2}(\lambda^2+\mu^2) + o(\frac{1}{n^2})}$$

La convergence de $(\frac{1}{n^2}f_n(\frac{\lambda}{n},\frac{\mu}{n}))$ impose deux conditions : (i) $1-4a_n \simeq \frac{a^2}{n^2}$, $a^2>0$ et (ii) $\sigma_n^2 \to \kappa > 0$. La limite $f(\lambda,\mu) = \kappa(a^2+\lambda^2+\mu^2)^{-1}$ n'étant pas intégrable, le schéma markovien (6) ne converge pas.

Proposition 5 *Un germe markovien isotropique aux 4-plus proches voisins ne converge jamais.*

4.4 Germes markoviens généraux sur $\mathbf{Z}^2$

Un modèle gaussien et markovien $X^{(n)}$ sur $\mathbf{Z}^2$ est caractérisé par un sous-ensemble $L\subset\mathbf{Z}^2$, L symétrique ($L=-L$) fini. L est la portée de Markov de X (Ripley [22], Guyon [9]). Notons : $M = L\cap(\mathbf{Z}^2)^+$ où $(\mathbf{Z}^2)^+ = \{(s,t)\in\mathbf{Z}^2,\ (s>0 \text{ et } t\geq 0) \text{ ou } (\ t>0)\}$ le demi voisinage positif de Markov. X admet la représentation :

$$X^{(n)}_{st} = \sum_M a^{(n)}_{kl}(X^{(n)}_{s-k,t-l} + X^{(n)}_{s+k,t+j}) + e^{(n)}_{st},\ E(e^{(n)}_{st}X^{(n)}_{uv}) = 0 \text{ si } (s,t)\neq(u,v) \quad (7)$$

$e^{(n)}$ est un bruit coloré de variance σ_n^2. Si f_n est la densité spectrale de $X^{(n)}$, et si $n\to\infty$, on obtient pour $\frac{1}{n^2}f_n(\frac{\lambda}{n},\frac{\mu}{n}) = D_n^{-1}$:

$$\begin{aligned}
D_n &= B_n + A_{1n}\lambda^2 + A_{2n}\mu^2 + A_{3n}\lambda\mu + C_n(\lambda,\mu) + (\lambda^2+\mu^2)^3 o(1), \text{ où :}\\
B_n &= \frac{n^2}{\sigma_n^2}(1-2\sum_M a^{(n)}_{kl}),\ A_{1n} = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_M k^2 a^{(n)}_{kl},\ A_{2n} = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_M l^2 a^{(n)}_{kl}\\
A_{3n} &= \frac{2}{\sigma_n^2}\sum_M kl a^{(n)}_{kl} \text{ et } C_n(\lambda,\mu) = -\frac{1}{12n^2\sigma_n^2}\sum_M (k\lambda+l\mu)^4 a^{(n)}_{kl}
\end{aligned}$$

Un argument d'intégrabilité montre qu'il est nécessaire de faire intervenir le terme d'ordre 4, $C_n(\lambda,\mu)$. Plaçons nous sur une sous-suite convergente de paramètres, (C_0) : $(a^{(n)}) \to a$. Les conditions suivantes assurent alors la convergence $(\frac{1}{n^2}f_n(\frac{\lambda}{n},\frac{\mu}{n})) \to f(\lambda,\mu)$:

$$\begin{aligned}(C_1) \quad &: \quad n^2\sigma_n^2 \to \kappa > 0,\ (C_2) : 1-2\sum_M a_{kl}^{(n)} \simeq \frac{A^2}{n^4}\\ (C_3) \quad &: \quad \sum_M k^2 a_{kl}^{(n)} \simeq \frac{a}{n^2},\ \sum_M l^2 a_{kl}^{(n)} \simeq \frac{c}{n^2},\ \sum_M kl a_{kl}^{(n)} \simeq \frac{b}{n^2}\end{aligned}$$

avec, pour $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$:

$$f(\lambda,\mu) = \kappa\{A^2 + a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2 - \frac{1}{12}\sum_M (k\lambda+l\mu)^4 a_{kl}\}^{-1} \tag{8}$$

Proposition 6 *Sous les conditions $(C_0 - C_3)$, le germe markovien (7) converge vers le processus gaussien de densité spectrale (8) à condition que f soit positive et intégrable.*

Remarques.

(1) Pour ce germe, quelle que soit la portée de Markov, le modèle limite dépendra au plus de 9 paramètres.

(2) D'autres germes convergents peuvent être obtenus en faisant intervenir le terme d'ordre 6 (ou des termes au-delà) dans le développement de $n^2\{f_n(\frac{\lambda}{n},\frac{\mu}{n})\}^{-1}$. En allant jusqu'à l'ordre 6, les conditions suivantes se substituent alors aux conditions (C) :

$$\begin{aligned}(C_1) \quad &: \quad n^4\sigma_n^2 \to \kappa;\ (C_2) : 1-2(\sum a_{k,l}^{(n)}) \simeq \frac{A^2}{n^6}\\ (C_3) \quad &: \quad \sum_M k^2 a_{kl}^{(n)} \simeq \frac{a}{n^4},\ \sum_M l^2 a_{kl}^{(n)} \simeq \frac{c}{n^4},\ \sum_M kl a_{kl}^{(n)} \simeq \frac{b}{n^4}\end{aligned}$$

Mais il faut y ajouter la condition (C_4) : $\sum_M k^i l^{4-i} a_{kl}^{(n)} \simeq \frac{d_i}{n^4}$, $i=0,5$. Ceci fait un total de 10 équations et impose que le voisinage L soit assez grand. Il faut ensuite identifier f et s'assurer que f est positive et intégrable.

4.5 Exemples

4.5.1 Modèles markoviens à 4 voisins

On a vu que le schéma markovien aux 4-plus proches voisins "ne passait pas à la limite". Ce résultat reste valable pour le modèle général à 4 voisins associé à $M = \{(k_1,l_1),(k_2,l_2)\}$ à condition que l'origine ne soit pas alignée avec M. En effet, (C_3) donne : $k_1^2 a_1^{(n)} + k_2^2 a_2^{(n)} \to 0$, $l_1^2 a_1^{(n)} + l_2^2 a_2^{(n)} \to 0$, $k_1 l_1 a_1^{(n)} + k_2 l_2 a_2^{(n)} \to 0$. Deux cas se présentent :

(i) Si $k_1^2 l_1^2 \neq k_2^2 l_2^2$, alors, $a_1^{(n)}$ et $a_2^{(n)} \to 0$ et on conclut aisément.

(ii) Sinon, supposons que $k_1^2 l_1^2 = k_2^2 l_2^2$. Les points $(0,0)$, (k_1,l_1) et (k_2,l_2) n'étant pas alignés, $k_1^2 k_2 l_2 \neq k_1 k_2^2 l_1$, et donc, ici aussi, $a_1^{(n)}$ et $a_2^{(n)} \to 0$.

Si l'origine est alignée avec M, le germe markovien peut converger. En effet, dans ce cas $k_1^2 \neq k_2^2$ (ou $l_1^2 \neq l_2^2$). (C_3) se réduit à : $k_1^2 a_1^{(n)} + k_2^2 a_2^{(n)} \to 0$, et (C_2) donne : $a_1^{(n)} + a_2^{(n)} \to \frac{1}{2}$. On en déduit $a^{(n)} \to \frac{2}{r^2-1}(r^2,1)$ avec $r = \frac{k_2}{k_1}$. Si M_1 est le point le plus proche de l'origine, $r^2 > 1$, $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ et $|a_2| < a_1$. Sous les conditions (C), la limite est $f(\lambda,\mu) = \kappa\{A^2 + a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2 - \frac{r^2}{6}(k_1\lambda + l_1\mu)^4\}^{-1}$, acceptable dès que les paramètres assurent la positivité et l'intégrabilité de f.

4.5.2 Modèle de Markov à 6 voisins

(1) Le germe $f_n(\lambda,\mu)=\sigma_n^2\{1-2(a_n\cos\lambda+b_n\cos\mu+c_n\cos(\lambda+\mu))\}$ est associé à $M=\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$. Il ne converge jamais. En effet, les conditions (C) impliquent : $a_n+b_n\to 0$, $b_n+c_n\to 0$ et $c_n\to 0$: dans ce cas, il n'existe pas de limite non-triviale pour la suite $(\frac{1}{n^2}f_n(\frac{\lambda}{n},\frac{\mu}{n}))$.

(2) Par contre le germe $f_n(\lambda,\mu)=\sigma_n^2\{1-2(a_n\cos\lambda+b_n\cos\mu+c_n\cos 2\lambda)\}$, qui est associé à $M=\{(1,0),(0,1),(2,0)\}$, converge dès que $\frac{2}{3}-a_n\simeq\frac{a+4c}{3n^2}$, $b_n\simeq\frac{c}{n^2}$ et $c_n+\frac{1}{6}\simeq\frac{a+c}{3n^2}$. Pour le coefficient A^2 donné par (C_2), on obtient la limite $f(\lambda,\mu)=\kappa\{A^2+a\lambda^2+c\mu^2+\frac{\lambda^4}{6}\}^{-1}$, qui est >0 et intégrable dès que a et $c>0$.

4.5.3 D'autres modèles de Markov

Résumons les résultats concernant trois modèles : pour chacun, nous figurons les conditions (C) assurant la convergence du germe et donnons la limite $f(\lambda,\mu)$. Positivité et intégrabilité de f doivent être vérifiées.

Markov aux 8-ppv : $M=\{(1,0),((0,1),(1,1),(-1,1)\}$; paramètres (a_n,b_n,c_n,d_n).
(C) : $a_n+c_n+d_n=\frac{a}{n^2}$, $b_n+c_n+d_n=\frac{c}{n^2}$, $c_n-d_n=\frac{b}{n^2}$, $1-2(a_n+b_n+c_n+d_n)=\frac{A}{n^4}$.
Alors, $(a_n,b_n,c_n,d_n)\to(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$ et

$$f(\lambda,\mu)=\kappa\{A^2+a\lambda^2+2b\lambda\mu+c\mu^2+\tfrac{1}{4}\lambda^2\mu^2\}^{-1}$$

f factorise si $b=0$ et $A^2=4ac>0$: on retrouve le processus de O.U. factorisant.

Markov à 8 voisins axiaux : $M=\{(1,0),(2,0),(0,1),(0,2)\}$; paramètres (a_n,b_n,c_n,d_n).
(C) : $a_n+4c_n=\frac{a}{n^2}$, $b_n+4d_n=\frac{c}{n^2}$, $1-2(a_n+b_n+c_n+d_n)=\frac{A}{n^4}$.
On dispose d'un degré de liberté $\alpha=\lim_n a_n$: $(a_n,b_n,c_n,d_n)\to(\alpha,\frac{2}{3}-\alpha,-\frac{\alpha}{4},-\frac{1}{6}+\frac{\alpha}{4})$

$$f(\lambda,\mu)=\kappa\{A^2+a\lambda^2+c\mu^2+\frac{1}{6}(\lambda^4+\mu^4)\}^{-1}$$

Markov aux 12-ppv : $M=\{(1,0),(0,1),(2,0),(0,2),(1,1),(-1,1)\}$, $(a_n,b_n,c_n,d_n,e_n,f_n)$. (C_2) et (C_3) donnent 4 équations pour 6 paramètres. On dispose de deux degrés de liberté $\alpha=\lim a_n$ et $\beta=\lim b_n$:
$(a_n,b_n,c_n,d_n,e_n,f_n)\to(\alpha,\beta,\gamma=-\frac{1}{4}+\frac{\alpha+3\beta}{8},\delta=-\frac{1}{4}+\frac{3\alpha+\beta}{8},\varepsilon=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}(\alpha+\beta),\varepsilon)$

$$f(\lambda,\mu)=\kappa\{A^2+a\lambda^2+2b\lambda\mu+c\mu^2-(\gamma\lambda^4+\delta\mu^4+\varepsilon\lambda^2\mu^2)\}^{-1}$$

La discussion sur la positivité de f commencera par celle de la partie de degré 4 de son dénominateur. Pour des valeurs particulières, on retrouve des modèles étudiés auparavant : par exemple la diffusion de O.U. ($\alpha=\beta=\frac{1}{2}$), le processus $AR(1)$ isotropique aux 4-ppv ($\alpha=\beta=\frac{2}{5}$).

References

[1] Abramovitz M. et Stegun A., 1965, *Handbook of mathematical functions*, Dover

[2] Besag J., 1974, Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems, JRSS B, 36, 192-225

[3] Besag J., 1986, On the statistical analysis of durty pictures, JRSS B, 48, 259-279

[4] Besag J. et Moran P.A.P., 1975, On the estimation and testing of spatial interaction in gaussian lattice processes, Biometrika, 62, 555-562

[5] Cressie N., 1991, *Statistics for spatial data*, Wiley

[6] Geman D. et Geman S., 1984, Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the bayesian restoration of images, IEEE-PAMI, 6, 721-741

[7] Geman S., 1990, *Random fields and inverse problems in imaging*, LNM n°1427, Springer

[8] Guyon X., 1987, Variations de champs gaussiens stationnaires : application à l'identification, Proba. and Rel. Fields, 75, 179-193

[9] Guyon X., 1993, *Champs aléatoires sur un réseau*, Masson

[10] Guyon X. et Perrin O., 2000, Identification of space deformation using linear and superficial quadratic variations, Statistics & Probability Letters, 47, 307-316

[11] Heine V., 1955, Models for two-dimensional stationary stochastic processes, Biometrika, 42, 170-178

[12] Jones R.H., 1989, Fitting a stochastic partial differential equation to aquifer data, Stochastic Hydrology Hydraulics, 3, 85-96

[13] Jones R.H. et Vecchia A.V., 1993, Fitting continuous ARMA models to unequally spaced spatial data, JASA, Vol. 88, 423, 947-954

[14] Kloeden P.E. et Platen E., 1992, *Numerical solutions of stochastic differential equations*, Springer

[15] Künsch H.R., 1981, Thermodynamics and statistical analysis of gaussian random fields, Z.f.W., 58, 407-421

[16] Lantuéjoul C., 2001, *Geostatistical Simulation. Models and Algorithms,* Springer

[17] Leon J.R. et Ortega J., 1989, Weak convergence of different types of variations for biparametric gaussian processes, Col. Math. Soc. J. Bolyai, Vol. 57, Limit Th. in Proba. and Stat., Pecs, Hungary, 349-364

[18] Matheron G., 1973, The intrinsic random function and their applications, A.A.P., 5, 439-468

[19] Monestiez P., Sampson P.D. et Guttorp P., 1993, Modeling of hetergeneous spatial correlation structure by spatial deformation, Cahier de Géostatistique, Fasc. 3, Ecole des Mines de Fontainebleau.

[20] Monestier P. et Perrin O., 2000, Modelling of non-startionnarity spatial structure using parametric radial basis deformation, Geostat. for Env. Appl., 10, 175-186

[21] Perrin O. et Senoussi R., 2000, Reducing non-stationarity random fields to stationarity and isotropy using a space deformation, Stat. and Proba. Letters, 48, 23-31

[22] Ripley B., 1981, *Spatial statistics,* Wiley

[23] Vecchia A.V., 1985, A general class of models for stationary two-dimensional random processes, Biometrika, 72, 281-291

[24] Wackernagel H., 1998, *Multivariate Geostatistics,* Springer

[25] Whittle P., 1954, On stationary processes in the plane, Biometrika, 41, 434-449