DOI : 10.1051/ps:2003017

Diffusion linéaire à régime stationnaire

Xavier Guyon*, Serge Iovleff*, Jian-Feng Yao**
* SAMOS, Université Paris 1 et **IRMAR, Université de Rennes 1
guyon@univ-paris1.fr

February 14, 2002

Abstract

Soit Y une diffusion de Ornstein-Uhlenbeck gouvernée par un régime X : $dY_t = -a(X_t)Y_t dt + \sigma(X_t)dW_t, Y_0 = y_0$. On établit que $\alpha = E_\mu(a(X_0)) < 0$ est une condition suffisante d'ergodicité de Y lorsque X est stationnaire de loi invariante μ. Puis on s'intéresse à l'existence de moments pour la loi invariante de Y. Utilisant les résultats de Brandt sur les modèles à coefficient aléatoire, et le fait que Y est, conditionnellement à X, gaussien, on établit simplement une condition d'existence du moment d'ordre $s \geq 0$ lorsque X est un processus de saut markovien à nombre fini d'états. On retrouve un résultat de Basak et altri établi à l'aide de techniques de contrôle de système linéaire.

Mots clés : diffusion de Ornstein-Uhlenbeck à régime stationnaire, modèle à coefficient aléatoire, processus markovien de sauts, ergodicité, moment de la loi invariante.

Classification AMS : 60J60, 60J75

1 Introduction

Les modèles à temps discret $Y = (Y_n, n \in \mathbf{N})$ gouvernés par une chaîne de Markov $X = (X_n, n \in \mathbf{N})$ sont bien adaptés aux situations où un régime autonome X module la dynamique de Y. Ces modèles, relativement parcimonieux en nombre de paramètres, élargissent significativement le cas d'un régime unique. Parmi eux, les modèles auto-régressifs à régime markovien (switching Markov AR model) sont les plus populaires. Leur utilisation en économétrie est due à Hamilton ([7, 8]). Leur étude statistique (cf. par exemple [8], [15], [9], [10]) a précédé les études probabilistes. L'ergodicité a été étudiée par Francq et Roussignol [6] et par Yao et Attali [17]. Dans ce dernier travail, les auteurs donnent :

(i) des conditions de stabilité d'un AR non-linéaire Y à régime markovien X;

(ii) des conditions d'existence d'un moment d'ordre $s \geq 0$ pour la loi de Y.

Ces deux résultats, obtenus sous des conditions de sous-linéarité ou de Lipshitz pour la fonction d'auto-régression, sont préalables à toute étude asymptotique.

Notre objectif est d'établir des résultats (i) et (ii) pour une diffusion de Ornstein-Uhlenbeck (notée O.U.) $Y = (Y_t, t \geq 0)$ à régime $X = (X_t, t > 0)$. On obtient une condition générale de stabilité (i) de Y si le régime X est stationnaire. La question (ii) est étudiée par Basak, Bisi et Ghosh [1] pour X un processus de saut markovien à nombre fini d'états, Y étant multidimensionnelle. Leur approche utilise la stabilité et le contrôle de systèmes linéaires à saut, perturbés ou non (cf. Mariton [14], Ji et Chizeck [12]). Notre approche de cette question (ii) est différente : elle repose d'une part sur l'utilisation d'une représentation $AR(1)$ à coefficient aléatoire de $Y^{(\delta)} = (Y_{n\delta}, n \in \mathbf{N})$, d'autre part sur les résultats d'ergodicité de Brandt [3] pour les modèles à coefficient aléatoire, et enfin sur l'utilisation du caractère *conditionnellement gaussien* de Y. Nous obtenons ainsi une condition suffisante d'existence de moment d'ordre $s > 0$ pour la loi invariante de Y. Quelques manipulations simples montrent que cette condition est équivalente à celle donnée par [1].

Le modèle de diffusion à régime X est présenté au §2. On établit au §3 la condition (i) d'ergodicité de Y si le régime X est stationnaire. Le §4 établit (ii), l'existence d'un moment d'ordre $s \geq 0$ pour la loi invariante de Y lorsque X est un processus de saut markovien à nombre fini d'états.

2 Diffusion linéaire à régime stationnaire

On dira qu'un processus à temps continu $S = (S_t)_{t\geq 0}$ est *ergodique* s'il existe une mesure de probabilité ν telle que quand $t \to \infty$, la loi de S_t converge faiblement vers ν indépendamment de la loi initiale de S_0. ν sera appelée la *loi limite* de S. Si S est un processus de Markov, ν est la loi invariante de S et elle est unique.

Nous définissons une diffusion Y à régime X en deux étapes. On se donne d'abord un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$, dit de *régime*. On supposera toujours par la suite que X est stationnaire, à valeur réelle et défini sur un espace de probabilité $(\Omega, , Q)$.

Soit ensuite $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien (MB) standard défini sur un espace de probabilité $(\Theta, \mathcal{B}, Q')$, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)$ la filtration du MB. On considérera l'espace produit $(\Omega \times \Theta, \times \mathcal{B}, Q \otimes Q')$, $\mathbb{P} = Q \otimes Q'$ et $\mathbb{E}$ l'espérance associée. Conditionnellement à X, $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ est un processus de diffusion à valeur réelle défini, pour tout $\omega \in \Omega$, par :

1. Y_0 est une v.a. définie sur $(\Theta, \mathcal{B}, Q')$, $\mathcal{F}_0$-mesurable ;
2. Y est solution de l'EDS linéaire

$$dY_t = a(X_t)Y_t dt + \sigma(X_t)dW_t \ , \quad t \geq 0. \tag{1}$$

Ainsi (Y_t) est une diffusion linéaire à coefficients aléatoires fonctions d'un processus "exogène" (X_t). Ici a et σ sont deux fonctions mesurables à valeurs réelles. L'existence et l'unicité d'une solution forte pour l'Eq. (1) est assurée par la condition **[S]** suivante (voir [13], §5.6 ou [16]), condition que nous supposerons vérifiée par la suite :

[S] : Q-p.s, $t \mapsto a(X_t(\omega))$ et $t \mapsto \sigma(X_t(\omega))$ sont localement bornées.

Notons pour $0 \leq s \leq t$,

$$\Phi(s,t) = \Phi_{s,t}(\omega) = \exp \int_s^t a(X_u)du \ .$$

Le processus Y admet la représentation ([13]) :

$$Y_t = Y_t(\omega) = \Phi(0,t) \left[Y_0 + \int_0^t \Phi(0,u)^{-1}\sigma(X_u)dW_u \right]$$

et pour $0 \leq s \leq t$, Y vérifie la relation de récurrence

$$\begin{aligned} Y_t &= \Phi(s,t) \left[Y_s + \int_s^t \Phi(s,u)^{-1}\sigma(X_u)dW_u \right] \\ &= \Phi(s,t)Y_s + \int_s^t \left[\exp \int_u^t a(X_v)dv \right] \sigma(X_u)dW_u \ . \end{aligned}$$

Il est commode de réécrire cette récurrence sous la forme

$$Y_t(\omega) = \Phi_{s,t}(\omega)Y_s(\omega) + V_{s,t}(\omega)^{1/2}\, \xi_{s,t} \ , \tag{2}$$

où $\xi_{s,t}$ est une variable gaussienne centrée réduite, fonction de $(W_u, s \leq u \leq t)$ et

$$V_{s,t}(\omega) = \int_s^t \exp\left[2 \int_u^t a(X_v)dv \right] \sigma^2(X_u)du \ . \tag{3}$$

Pour $\delta > 0$, nous appellerons *discrétisation à pas δ* de Y le processus à temps discret $Y^{(\delta)} = (Y_{n\delta})_n$ où $n \in \mathbb{N}$. Notre étude de Y est basée sur celle de ses discrétisations $(Y^{(\delta)})$.

3 Ergodicité de Y et existence d'une solution stationnaire

3.1 Ergodicité des processus discrétisés $Y^{(\delta)}$

Dans cette section, on fixe $\delta > 0$ et on considère le processus discrétisé $Y^{(\delta)}$. D'après Eq. (2), pour $n \geq 0$,

$$Y_{(n+1)\delta}(\omega) = \Phi_{n+1}(\omega) Y_{n\delta}(\omega) + V_{n+1}(\omega)^{1/2} \xi_{n+1} , \tag{4}$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}(\omega) &= \exp \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} a(X_u(\omega)) du , \\ V_{n+1}(\omega) &= \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} \exp \left[2 \int_u^{(n+1)\delta} a(X_v(\omega)) dv \right] \sigma^2(X_u(\omega)) du , \end{aligned}$$

où (ξ_n) est une suite i.i.d gaussienne réduite définie sur $(\Theta, \mathcal{B}, Q')$.

L'équation (4) définit un modèle AR(1) à coefficients aléatoires, la suite des coefficients $(\Phi_n, V_n^{1/2} \xi_n)$ étant stationnaire. On peut alors étendre (4) sur $\mathbb{Z}$.

Proposition 1 *Supposons que les fonctions mesurables a et σ vérifient les conditions suivantes :*

1. $\int |a(x)| \mu(dx) < \infty$ *et* $\alpha := \int \mu(dx) a(x) < 0$;
2. $\int \log^+ \sigma^2(x) \mu(dx) < \infty$.

Alors,

(i) il existe une unique solution stationnaire $(\tilde{Y}_{n\delta})$ satisfaisant sur $\mathbb{Z}$ l'Eq. 4 et donnée par

$$\tilde{Y}_{n\delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_n \Phi_{n-1} \cdots \Phi_{n-k+1} V_{n-k}^{1/2} \xi_{n-k} , \qquad n \in \mathbb{Z} .$$

(ii) Si $Y^{(\delta)}$ est une suite satisfaisant l'Eq. 4 pour $n \geq 0$, de valeur initiale une v. a. Y_0 quelconque, alors p.s.

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log |Y_{n\delta} - \tilde{Y}_{n\delta}| \leq \alpha\delta < 0 .$$

Preuve. (i). C'est une conséquence du Theorème 1 de Brandt [3] dont nous vérifions les conditions d'application, à savoir :
(a) $\mathbb{E} \log^+ |\Phi_0| < \infty$; (b) $\mathbb{E} \log^+ |V_0^{1/2} \xi_0| < \infty$; (c) $\gamma_1 := \mathbb{E} \log |\Phi_0| < 0$.
Pour $x, y, a > 0$, $\log^+ x = \max(0, \log x)$ vérifie $\log^+(xy) \leq \log^+ x + \log^+ y$ et $\log^+ x^a = a \log^+ x$.

(c) : en utilisant le théorème de Fubini et l'hypothèse 1), on obtient :

$$\gamma_1 = \mathbb{E} \log |\Phi_0| = \mathbb{E} \int_0^\delta a(X_u) du = \int_0^\delta \mathbb{E} a(X_u) du = \delta\alpha < 0 .$$

(a) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \log^+ |\Phi_0| &= \mathbb{E} \log^+ \exp \int_0^\delta a(X_u) du \leq \mathbb{E} \log^+ \exp \int_0^\delta |a(X_u)| du \\ &= \mathbb{E} \int_0^\delta |a(X_u)| du = \delta \, \mathbb{E} |a(X_0)| < \infty . \end{aligned}$$

(b) : $\mathbb{E}\log^+|V_0^{1/2}\,\xi_0| \leq \mathbb{E}\log^+ V_0^{1/2} + \mathbb{E}\log^+|\xi_0|$.

Le deuxième terme du majorant est fini puisque ξ_0 est gaussien. Pour le premier terme :

$$\begin{aligned} V_0 &= \int_0^\delta \exp\left[2\int_u^\delta a(X_v)dv\right]\sigma^2(X_u)du \leq \int_0^\delta \exp\left[2\int_u^\delta |a(X_v)|dv\right]\sigma^2(X_u)du \\ &\leq \int_0^\delta \exp\left[2\int_0^\delta |a(X_v)|dv\right]\sigma^2(X_u)du = \exp\left[2\int_0^\delta |a(X_v)|dv\right]\int_0^\delta \sigma^2(X_u)du\ . \end{aligned} \tag{5}$$

D'où

$$\log^+ V_0 \leq 2\int_0^\delta |a(X_v)|dv + \log^+\int_0^\delta \sigma^2(X_u)du\ .$$

Le premier terme est d'espérance finie d'après l'hypothèse (1). Pour le second terme, $\log^+$ étant concave

$$\begin{aligned} \log^+\int_0^\delta \sigma^2(X_u)du &= \log^+\left\{\delta\int_0^\delta \sigma^2(X_u)(du/\delta)\right\} \\ &\leq \log^+\delta + \log^+\int_0^\delta \sigma^2(X_u)(du/\delta) \\ &\leq \log^+\delta + \int_0^\delta \log^+\sigma^2(X_u)(du/\delta)\ , \end{aligned}$$

qui est d'espérance finie d'après l'hypothèse (2).

(ii). On a pour $n \geq 1$,

$$Y_{n\delta} - \tilde{Y}_{n\delta} = \Phi_n \cdots \Phi_1(Y_0 - \tilde{Y}_0).$$

Les hypothèses entraînent que p.s.

$$\lim_n \frac{1}{n}\log|\Phi_n\cdots\Phi_1| = \gamma_1 < 0\ .$$

La conclusion s'en déduit immédiatement. ∎

Une conséquence de la proposition est que sous la loi $\mathbb{P}$, si on note ν la loi commune des $\tilde{Y}_{n\delta}$, pour toute solution $Y^{(\delta)} = (Y_{n\delta}),\ n \geq 0$ de l'Eq. (4), $Y_{n\delta}$ converge en loi vers ν quand $n \to \infty$: $Y^{(\delta)}$ est ergodique.

3.2 Ergodicité du processus Y

Dorénavant, on *choisira* le pas δ dans la suite (2^{-m}) pour des entiers $m \geq 1$. Sous les conditions de la Proposition 1, $Y^{(2^{-m})}$ est ergodique, et pour $m' \geq m$, les processus discrétisés $Y^{(2^{-m})}$ et $Y^{(2^{-m'})}$ ont la même loi limite. Si Y est ergodique, sa loi limite est nécessairement celle de tous ses processus discrétisés $Y^{(\delta)}$. Nous allons établir l'ergodicité de Y en évaluant l'écart entre Y et ses discrétisés $Y^{(\delta)}$.

Proposition 2 *Sous les conditions de la proposition 1 et si*

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^\delta \sigma^2(X_u)du = 0\ , \quad \textit{en probabilité} \tag{6}$$

alors la diffusion linéaire Y à régime X définie par 1 est ergodique.

Preuve. Soit ν la loi limite commune des processus discrétisés. Soit $\varepsilon > 0$ fixé et choisissons A_ε tel que $\nu\{x : |x| \geq A_\varepsilon\} \leq \varepsilon$. On notera $c = \mathbb{E}[|a(X_0)|]$. Pour $\delta = 2^{-m}$ et $t > 0$, soit n_t le plus grand multiple de δ inférieur à t. On a $n_t < t \leq n_t + \delta$. La relation de récurrence (2) s'écrit :

$$Y_t - Y_{n_t} = [\Phi(n_t, t) - 1]\,Y_{n_t} + e_t\ ,$$

avec $e_t = V_{n_t,t}^{1/2}\xi_{n_t,t}$. Nous avons :

$$\mathbb{P}\left(|Y_t - Y_{n_t}| \geq 2\varepsilon\right) \leq \ \mathbb{P}\left(|[\Phi(n_t,t) - 1]Y_{n_t}| \geq \varepsilon\right) + \ \mathbb{P}\left[|e_t| \geq \varepsilon\right] \ . \tag{7}$$

(1). Contrôle de $|e_t|$: On a pour $K \geq 0$

$$\{|e_t| \geq \varepsilon\} = \{|e_t| \geq \varepsilon, |\xi_{n_t,t}| \leq K\} \cup \{|e_t| \geq \varepsilon, |\xi_{n_t,t}| > K\} \ .$$

$\xi_{n_t,t}$ étant gaussienne réduite, on fixe un $K > 0$ tel que $\mathbb{P}(|\xi_{n_t,t}| > K) \leq \varepsilon$. D'où

$$\mathbb{P}\left[|e_t| \geq \varepsilon\right] \leq \ \mathbb{P}\left[V_{n_t,t}^{1/2} \geq \frac{\varepsilon}{K}\right] + \varepsilon \ .$$

D'autre part, de façon analogue à Eq. (5),

$$0 \leq V_{n_t,t} \leq \exp\left[2\int_{n_t}^{n_t+\delta} |a(X_v)|dv\right] \int_{n_t}^{n_t+\delta} \sigma^2(X_u)du \ .$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}\left[V_{n_t,t} \geq (\varepsilon/K)^2\right] \leq \ \mathbb{P}\left(\exp\left[2\int_{n_t}^{n_t+\delta} |a(X_v)|dv\right] \geq 2\right) + \ \mathbb{P}\left(\int_{n_t}^{n_t+\delta} \sigma^2(X_u)du \leq (\varepsilon/K)^2/2\right) \ .$$

Par l'inégalité de Markov, le premier terme est majoré par $2c\delta/\log(2)$; le deuxième tend vers 0 quand $\delta \to 0$ d'après l'hypothèse. Il existe donc un δ_1 tel que pour tout $\delta \leq \delta_1$, on a

$$\mathbb{P}\left[|e_t| \geq \varepsilon\right] \leq 3\varepsilon \ . \tag{8}$$

(2). Contrôle du premier terme : utilisant le fait que $|e^x - 1| \leq e^{|x|} - 1$, on a, pour $s > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[|\Phi(n_t,t) - 1| \geq s\right] &\leq \ \mathbb{P}\left[\left|\int_{n_t}^{t} a(X_u)du\right| \geq \log(s+1)\right] \\
&\leq \ \log(s+1)^{-1} \ \mathbb{E}\left|\int_{n_t}^{t} a(X_u)du\right| \leq \log(s+1)^{-1} \ \mathbb{E}\int_{n_t}^{(n_t+\delta)} |a(X_u)|du \\
&= \ (c\delta)/\log(s+1) \ .
\end{aligned} \tag{9}$$

Par ailleurs, on déduit de la décomposition

$$\{|[\Phi(n_t,t) - 1]Y_{n_t}| \geq \varepsilon\} = \{|[\Phi(n_t,t) - 1]Y_{n_t}| \geq \varepsilon, |Y_{n_t}| < A_\varepsilon\} \cup \{|[\Phi(n_t,t) - 1]Y_{n_t}| \geq \varepsilon, |Y_{n_t}| \geq A_\varepsilon\} \ ,$$

que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[|[\Phi(n_t,t) - 1]Y_{n_t}| \geq \varepsilon\right] &\leq \ \mathbb{P}\left[|\Phi(n_t,t) - 1| \geq \varepsilon/A_\varepsilon\right] + \ \mathbb{P}\left[|Y_{n_t}| \geq A_\varepsilon\right] \\
&\leq \ (c\delta)/\log((\varepsilon/A_\varepsilon) + 1) + \ \mathbb{P}\left[|Y_{n_t}| \geq A_\varepsilon\right] \ .
\end{aligned}$$

Choisissons un δ tel que $\delta \leq \delta_1$ et $c\delta\log((\varepsilon/A_\varepsilon) + 1)^{-1} < \varepsilon$. Avec ce δ, on a

$$\mathbb{P}\left[|[\Phi(n_t,t) - 1]Y_{n_t}| \geq \varepsilon\right] \leq \ \mathbb{P}\left[|Y_{n_t}| \geq A_\varepsilon\right] + \varepsilon \ . \tag{10}$$

(3). fin de la preuve : En résumé, des estimations (8)-(10) on obtient que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists A_\varepsilon$, $\exists\delta$, $\forall t > 0$, $\exists n_t$, tels que $\nu\{|x| \geq A_\varepsilon\} \leq \varepsilon$, $n_t < t \leq t + \delta$ et

$$\mathbb{P}\left(|Y_t - Y_{n_t}| \geq 2\varepsilon\right) \leq \ \mathbb{P}\left[|Y_{n_t}| \geq A_\varepsilon\right] + 4\varepsilon \ .$$

Considérons maintenant une suite $(Y_{t_k})_k$ avec $t_k \to \infty$. L'inégalité précédente en $t = t_k$ donne:

$$\mathbb{P}\left(\left|Y_{t_k} - Y_{n_{t_k}}\right| \geq 2\varepsilon\right) \leq \ \mathbb{P}\left[|Y_{n_{t_k}}| \geq A_\varepsilon\right] + 4\varepsilon \ .$$

D'où

$$\limsup_{k\to\infty}\ \mathbb{P}\left(\left|Y_{t_k}-Y_{n_{t_k}}\right|\geq 2\varepsilon\right)\leq \nu\{|x|\geq A_\varepsilon\}+4\varepsilon\leq 5\varepsilon\ .$$

Notons $C(\nu)$ l'ensemble des points de continuité de la f.d.r F_ν de la loi ν. Soit $x\in C(\nu)$, et choisissons $\epsilon>0$ tel que $x\pm 2\epsilon\in C(\nu)$. Nous avons

$$\mathbb{P}(Y_{t_k}\leq x)\leq\ \mathbb{P}(Y_{n_{t_k}}\leq x+2\varepsilon)+\ \mathbb{P}\left(\left|Y_{t_k}-Y_{n_{t_k}}\right|\geq 2\varepsilon\right)\ ,$$

et de façon analogue

$$\mathbb{P}(Y_{n_{t_k}}\leq x-2\varepsilon)\leq\ \mathbb{P}(Y_{t_k}\leq x)+\ \mathbb{P}\left(\left|Y_{t_k}-Y_{n_{t_k}}\right|\geq 2\varepsilon\right)\ .$$

D'où

$$F_\nu(x-2\varepsilon)-5\varepsilon\leq\liminf_k\ \mathbb{P}(Y_{t_k}\leq x)\leq\limsup_k\ \mathbb{P}(Y_{t_k}\leq x)\leq F_\nu(x+2\varepsilon)+5\varepsilon\ .$$

En faisant tendre ε vers 0 (avec $x\pm 2\epsilon\in C(\nu)$, ce qui est possible puisque $C(\nu)$ est dense), on obtient :

$$\lim_k\ \mathbb{P}(Y_{t_k}\leq x)=F_\nu(x)\ ,\quad x\in C(\nu)\ . \qquad \blacksquare$$

4 Diffusion linéaire à régime markovien fini

Dans cette section, nous examinons le cas particulier où le régime X est un processus markovien de saut à valeur dans un ensemble fini $E=\{1,2,\cdots,N\}$, $N>1$ (pms, cf. Feller [5] , Coccoza [4], ch. 8). On considérera par la suite sa version canonique $(\Omega,,(Q_x)_{x\in E})$ où $\Omega=D([0,\infty[)$ est l'espace des fonctions réelles càdlàg sur $[0,\infty[$ et sa tribu borélienne associée à la métrique de Skohokod.

Soit $\lambda:\ E\to]0,\infty[$ la fonction d'intensité de X que l'on supposera strictement positive : X est alors ergodique de loi invariante μ. Si T_1 est le premier instant de saut

$$T_1=\inf\{t\ :\ t>0\quad\text{et}\quad X_t\neq X_0\}$$

T_1 suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda(X_0)$, et la transition de $X_{T_1^-}$ vers X_{T_1} est définie par un noyau markovien $q(x,y)$ sur E vérifiant $q(x,x)=0$ pour tout $x\in E$. On définit de la même manière les instants de sauts (T_n), avec $T_0=0$, par

$$\forall n\geq 0,\quad T_{n+1}=\inf\{t\ :\ t>T_n\quad\text{et}\quad X_t\neq X_{T_n}\}\ .$$

La suite des états visités $Z=(Z_n)$, $Z_n=X_{T_n}$, est une chaîne de Markov de transition q. Elle est ergodique et on notera π sa loi invariante. Les deux lois invariantes sont reliées par la relation :

$$\pi_i\propto\mu_i\lambda(i)\ ,\quad i\in E\ .$$

Par construction, les intervalles de sauts $(\Delta_n=T_{n+1}-T_n,n\geq 0)$ sont des variables exponentielles de paramètres $(\lambda(Z_n),n\geq 0)$, indépendantes entre elles et indépendantes de la chaîne Z.

Les probabilités produit seront notées $\mathbb{P}_x=Q_x\otimes Q'$. En particulier, sous la probabilité $\mathbb{P}_\mu=Q_\mu\otimes Q'$, le régime X est stationnaire. La transcription de la Proposition 2 dans le cas présent donne :

Corollaire 1 *On suppose que le processus markovien de sauts X à nombre fini d'états est stationnaire de loi invariante μ. Alors la diffusion de O.U. Y à régime markovien X est ergodique dès que*

$$\sum_{i=1,N}\mu_i a(i)<0\ . \tag{11}$$

Nous allons donner des conditions suffisantes pour l'existence de moments d'ordre $s\geq 0$ dans ce cas particulier. Nous montrerons au paragraphe 4.3 que nos conditions sont équivalentes avec celles de Basak et al [1]. Toutefois notre méthode de démonstration est très différente.

4.1 La diffusion $U_n = Y_{T_n}$ aux instants de changement de régime T_n

Soit $U = (U_n = Y_{T_n}, n \geq 0)$ la diffusion aux instants de changement de régime. Utilisant (4), U est un $AR(1)$ à coefficients aléatoires $C = (C_n)$:

$$U_n = C_n U_{n-1} + e_n \ , \quad n \geq 1 \ , C_n = \exp[a(Z_{n-1})\Delta_n] \ , \tag{12}$$

où $\Delta_n = T_n - T_{n-1}$ est la longueur du n-ième intervalle de saut. Sous $\mathbb{P}_\mu$, la suite $Z = (Z_n)$ des régimes étant stationnaire et les variables Δ_n étant exponentielles $\mathcal{E}(\lambda(Z_{n-1}))$ indépendantes, $C = (C_n)$ est stationnaire. D'autre part, conditionnellement à $X = (X_t, t \geq 0)$, les variables e_n sont gaussiennes centrées, indépendantes, de variances :

$$\mathbf{Var}_\mu(e_n \mid X) = \sigma^2(Z_{n-1}) \frac{\exp\{2a(Z_{n-1})\Delta_n\} - 1}{2a(Z_{n-1})}$$

Une première conséquence de la représentation (12) est l'obtention directe de l'ergodicité de U: $((C_n, e_n), n \geq 1)$ étant stationnaire, $\log^+ C_n$ et $\log^+ |e_n|$ étant intégrables, les résultats de Brandt [3] (cf. aussi Bougerol et Picard [2]) assurent que U est ergodique dès que l'exposant supérieur de Lyapunov de la suite (C_n) est négatif, à savoir :

$$\gamma = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \mathbb{E}_\mu \left[\log\{C_n C_{n-1} \cdots C_1\}\right] < 0$$

Ce coefficient est ici simple à évaluer :

$$\begin{aligned} \gamma &= \mathbb{E}_\mu[\log C_1] = \mathbb{E}_\mu[a(Z_0)\Delta_1] = \mathbb{E}_\mu[a(Z_0)\lambda(Z_0)^{-1}] \\ &= \sum_i \pi_i a(i) \lambda(i)^{-1} = \frac{\sum_i \mu_i a(i)}{\sum_i \mu_i \lambda(i)} \ . \end{aligned}$$

On retrouve la condition d'ergodicité (11) de Y établie au paragraphe précedent.

4.2 Existence de moments pour la loi invariante ν de Y

Une deuxième conséquence est que (12) permet d'estimer les moments de la loi invariante ν de Y. Définissons, pour $s \geq 0$, la matrice : $Q_s = ((q(i,j)\psi(j), i, j = 1, N)$, où

$$\psi(j) = \frac{\lambda(j)}{\lambda(j) - s a(j)} \ . \tag{13}$$

On a le résultat suivant :

Proposition 3 *Supposons que, pour $s \geq 0$, les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\forall i \in E \ : \ sa(i) - \lambda(i) < 0.$
2. *le rayon spectral $\rho(Q_s)$ de Q_s est inférieur à 1.*

Alors la loi invariante ν de Y admet un moment d'ordre s.

Preuve. Montrons d'abord que ces conditions entraînent $\gamma < 0$ et par conséquent l'ergodicité de Y. Utilisant le Lemme 2 de [17], on a

$$\sum_i \pi_i \log \psi(j) = \sum_i \pi_i \log[1 - sa(i)\lambda(i)^{-1}]^{-1} \leq \log \rho(Q_s) < 0 \ .$$

La fonction $\log(1 - sx)^{-1}$ étant convexe sur $\{x : x < s^{-1}\}$, on a :

$$\log\left(1 - s\sum_i \pi_i a(i)\lambda(i)^{-1}\right)^{-1} \leq \sum_i \pi_i \log(1 - sa(i)\lambda(i)^{-1})^{-1} < 0 \ .$$

Donc $\sum_i \pi_i a(i)\lambda(i)^{-1} = \gamma < 0$. Ainsi Y est ergodique de même loi invariante que U. Plus précisément, la série

$$U_n = \sum_{k=0}^{\infty} d_{n,k} e_{n-k} \ , \tag{14}$$

avec

$$d_{n,k} = C_n C_{n-1} \cdots C_{n-k+1} = \exp \sum_{\ell=0}^{k-1} a(Z_{n-\ell-1})\Delta_{n-\ell} \ ,$$

converge p.s. et est une solution stationnaire de Eq. (12). Montrons que cette série converge absolument dans L^s.

Conditionnement à X, les $d_{n,k}$ et e_{n-k} sont respectivement des constantes et des gaussiennes centrées de variance

$$\mathrm{Var}_\mu\ (e_{n-k}|X) = \sigma^2(Z_{n-k-1}) \frac{\exp\{2a(Z_{n-k-1})\Delta_{n-k}\} - 1}{2a(Z_{n-k-1})} \ .$$

D'où

$$\begin{aligned} \xi_{n,k} &:= \mathbb{E}_\mu \left[|d_{n,k} e_{n-k}|^s \,|\, X \right] = |d_{n,k}|^s \times \mathbb{E}_\mu \left[|e_{n-k}|^s \,|\, X \right] \\ &\le C_1 |d_{n,k}|^s \left[\sigma^2(Z_{n-k-1}) \frac{\exp\{2a(Z_{n-k-1})\Delta_{n-k}\} - 1}{2a(Z_{n-k-1})} \right]^{s/2} \ , \end{aligned}$$

où C_1 dépend de s seulement. L'espérance en X, processus qui est résumé par $((Z_n, \Delta_n))$, se calcule en 2 étapes :

(i) on prend l'espérance en $\Delta = (\Delta_n)$ à $Z = (Z_n)$ fixée. Les variables Δ_n étant exponentielles et indépendantes, les espérances ci-dessous existent et sont finies à condition que, $\forall i \in E$, $sa(i) - \lambda(i) < 0$. D'une part, pour C_2 dépendant de s seul, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\mu \left[\left\{ \frac{\exp\{2a(Z_{\ell-1})\Delta_\ell\} - 1}{2a(Z_{\ell-1})} \right\}^{s/2} \,|\, Z \right] &\le \mathbb{E}_\mu \left[\{\Delta_\ell \left(1 \vee \exp\{2a(Z_{\ell-1})\Delta_\ell\}\right)\}^{s/2} \,|\, Z \right] \\ &\le \mathbb{E}_\mu \left[\Delta_\ell^{s/2} + \Delta_\ell^{s/2} \exp\{sa(Z_{\ell-1})\Delta_\ell\} \,|\, Z \right] \\ &\le C_2 \left\{ \lambda(Z_{\ell-1})^{-s/2} + [-sa(Z_{\ell-1}) + \lambda(Z_{\ell-1})]^{-(s/2+1)} \right\} \\ &= C_2 \varphi(Z_{\ell-1}) \ , \end{aligned}$$

où la première inégalité découle de

$$\frac{e^x - 1}{x} \le 1 \vee e^x \ , \quad x \in \mathbb{R}$$

et où on a posé

$$\varphi(z) = \lambda(z)^{-s/2} + [\lambda(z) - sa(z)]^{-(s/2+1)} \ . \tag{15}$$

D'autre part,

$$\mathbb{E}_\mu \left[\exp\{sa(Z_{\ell-1})\Delta_\ell\} \,|\, Z \right] = \psi(Z_{\ell-1}) \ .$$

D'où, pour C_3 dépendant de s seul, on a :

$$\mathbb{E}_\mu \left[\xi_{n,k} \,|\, Z \right] \le C_3 \sigma^2(Z_{n-k-1}) \varphi(Z_{n-k-1}) \prod_{\ell=0}^{k-1} \psi(Z_{n-\ell-1}) \ .$$

(ii) on prend ensuite l'espérance en Z :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\mu\left[|d_{n,k}e_{n-k}|^s\right] &= \mathbb{E}_\mu[\xi_{n,k}] \\ &\leq C_3 \sum_{i_0,i_1,\cdots,i_k\in E} \mu_{i_0}\sigma^2(i_0)\varphi(i_0)\prod_{\ell=1,k} q(i_{\ell-1},i_\ell)\psi(i_\ell) = C_3\, u^T Q_s^k \mathbb{I}\ ,\end{aligned}$$

où u est le vecteur de composantes $u_i = \pi_i\sigma^2(i)\varphi(a_i)$ et $\mathbb{I}$ le vecteur de composantes toutes égales à 1. Comme $\rho(Q_s) < 1$, Q_s^k tend vers 0 à vitesse exponentielle quand $k \to \infty$.

D'où la convergence absolue de la série U_n dans L^s. ∎

4.3 Comparaison avec les résultats [1]

Transposons le résultat de Basak et al [1]. Concernant X, le régime à N états, rien n'est changé si ce n'est que leur résultat utilise Λ, le générateur infinitésimal de X :

$$\Lambda(i,j) = \begin{cases} \lambda(i)q(i,j) & \text{si } i \neq j \\ -\lambda(i) & \text{si } i = j \end{cases}$$

Considérons une diffusion vectorielle $Y \in \mathbb{R}^d$ solution de (1), mais cette fois ci pour $(a(i),\sigma(i)),\ i = 1,\ldots,N$ des matrices $d\times d$. Leur condition (A2) assurant l'existence d'un moment d'ordre $s > 0$ est la suivante :

(A2) Il existe N matrices $d \times d$ symétriques B_i, définies positives, $\gamma > 0$, $s > 0$ tels que :

$$u'B_ia(i)u + \frac{1}{s}u'B_iu\sum_{j=1}^{N}\Lambda_{ij}\left(\frac{u'B_ju}{u'B_iu}\right)^{s/2} \leq -\gamma|u|^2, \qquad \forall u\in\mathbb{R}^d,\ u\neq 0,\ i=1,\ldots,N.$$

Leur résultat est le suivant (Théorème 3.1 et Lemme 3.2) :

Proposition 4 *Sous la condition (A2) le processus (X_t, Y_t) est ergodique et la loi limite de Y_t admet un moment d'ordre s.*

Montrons que (A2) implique les conditions 1. et 2. de la proposition 3 si $d = 1$. En exprimant Λ à partir des λ et q, quelques manipulations simples montrent que (A2) se réécrit :

(A2)' $\exists b_i > 0,\ i = 1,\ldots,N,\ s > 0$ tels que :

$$(sa(i) - \lambda(i))b_i + \sum_{j:j\neq i}\lambda(i)q(i,j)b_j < 0, \qquad i = 1,\ldots N.$$

Ce qui implique la condition 1. D'autre part comme, pour tout i, $sa(i) - \lambda(i) \neq 0$, alors, pour la matrice Q_s définie précédemment, $b = (b_1,\ldots,b_N)' > 0$, où $>$ est la relation d'ordre strict sur chaque coordonnées, la condition (A2)' devient : $Q_sB < B$, condition qui implique 2. (voir par exemple [11], pp. 492).

4.4 Exemple : une diffusion linéaire à deux régimes

X est à deux états $E = \{1,2\}$, de fonction d'intensité $\alpha = \lambda(1) > 0$, $\beta = \lambda(2) > 0$. La matrice de transition des sauts est $q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La loi invariante de X est $\mu = (\beta,\alpha)/(\alpha+\beta)$. On suppose également que $\sigma(1) > 0$, $\sigma(2) > 0$. On obtient alors :

- Ergodicité de Y si :

$$(\mathbf{E}) : \quad \alpha a(2) + \beta a(1) < 0$$

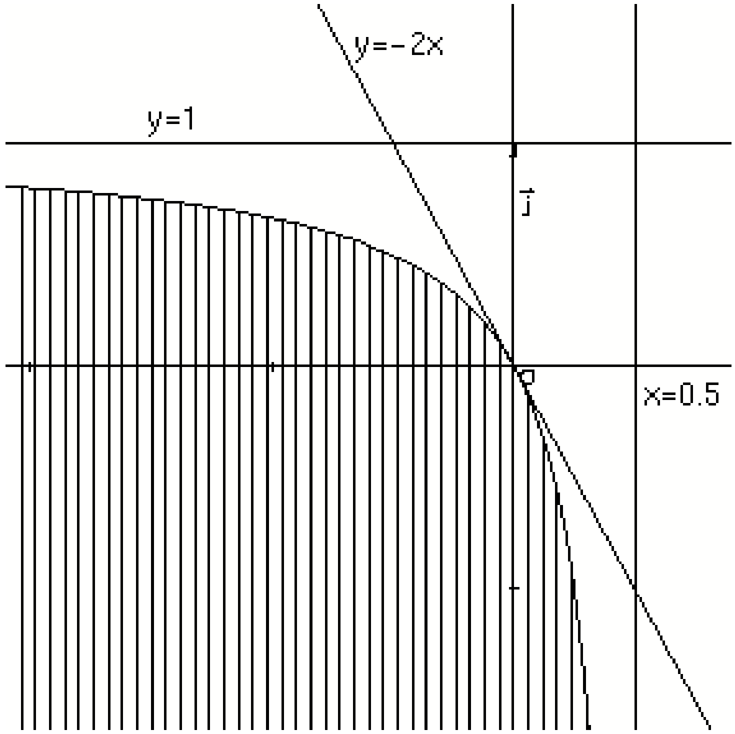

Figure 1: Diffusion à deux régimes avec $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $s = 2$: la zone d'ergodicité (**E**) se trouve sous la droite d'équation $y = -2x$ et la zone de stabilité à l'ordre 2 (**E2**) se trouve en hachuré.

- Ergodicité et existence d'un moment d'ordre s pour Y :

$$(\mathbf{E2}) : \begin{cases} (i) & sa(1) - \alpha < 0, \quad sa(2) - \beta < 0 \\ (ii) & a(1)\beta + a(2)\alpha - sa(1)a(2) < 0 \end{cases}$$

Dans le plan $(a(1), a(2))$:

(i) **(E)** est délimitée par le demi-plan inférieur de frontière $\beta a(2) + \alpha a(1) = 0$.

(ii) **(E2)** est le demi-espace inférieur de frontière l'arc d'hyperbole passant par l'origine tangent à la droite délimitant **(E)** et d'équation : $a(1)\beta + a(2)\alpha - 2a(1)a(2) = 0$.

References

[1] Basak G.K., Bisi A. et Ghosh M.K., 1996, Stability of random diffusion with linear drift, J. Math. Anal. Appl. 202, 604-622

[2] Bougerol P. et Picard N., 1992, Strict stationarity of generalized autoregressive processe, Ann. Proba. 20, 1714-1730

[3] Brandt A., 1986, The stochastic equation $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ with stationnary coefficients, Adv. Appl. Proba. 18, 211-220

[4] Cocozza-Thivent C., 1997, *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*, Springer

[5] Feller W. , 1966, *An Introduction to Probability Theory, Vol. II*, Wiley

[6] Francq C. et Roussignol M., 1998, Ergodicity of autoregressive processes with Markov switching and consistency of maximum-likelihood estimator, Statistics 32, 151-173

[7] Hamilton J.D., 1989, A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle Econometrica, 57, 151-173

[8] Hamilton J.D., 1990, Analysis of time series subject to changes in regime, J. of Economet. 45, 39-70

[9] Hamilton J.D., 1996, Specification testing in Markov-switching time series models, J. of Economet. 70, 127-157

[10] Hansen B., 1996, The likelihood ratio test under nonstandard conditions : testing the Markov switching model of GNP, J. Applied Econometrics 7, 61-82

[11] R.A. Horn et C.R. Johnson, 1985. *Matrix Analysis* Cambridge University Press

[12] Ji Y. et Chizeck H.J., 1990, Controllability, stabilizability and continuous-time Markovian jump linear quadratic control, IEEE Trans. Automat. Control 35, 777-788

[13] I. Karatzas et S.E. Shreve, 1991. *Brownian Motion and Stochastic calculus* (2nd ed.), Springer, New-York

[14] Mariton M., 1990, *Jump linear systems in Automatic Control,* Dekker

[15] McCullogh R.E. et Tsay R.S., 1994, Statistical analysis of econometric times series via Markov switching models, J. Time Series Anal. 15, 523-539

[16] B. Oksendal, 1998. *Stochastic Differential Equations* (5ème ed.), Springer-Verlag, Berlin

[17] Yao J.F. et Attali J.G., 2000, On stability of nonlinear AR processes with Markov switching, Adv. Appl. Proba. 32, 394-407