



**HAL**  
open science

## Transformée de Fourier rapide par quart de période

A. Cherradi, P. Loosfelt

► **To cite this version:**

A. Cherradi, P. Loosfelt. Transformée de Fourier rapide par quart de période. Journal de Physique IV Proceedings, 1994, 04 (C5), pp.C5-1391-C5-1395. 10.1051/jp4:19945310 . jpa-00253026

**HAL Id: jpa-00253026**

**<https://hal.science/jpa-00253026>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Transformée de Fourier rapide par quart de période

A. CHERRADI et P. LOOSFELT

*Laboratoire de Mesures Automatiques, P3 3ème étage, USTL, 59655 Villeneuve d'Ascq, France*

### ABSTRACT

Any periodical signal can be decomposed in Fourier series. When the number of harmonics is limited and the signal period is known, the series coefficient calculation can be done exactly by simple additions or subtractions of a limited number of sampled values. For each harmonic, four samples are taken in each harmonic period. The first advantage is to remove every product in the computation. The second advantage is to obtain independent filters that only let through their harmonic and some multiple harmonics. By setting up one filter per harmonic, it is easy to find any coefficient. Each filter requires its own sampling clock; so, sampling is asynchronous for a set of filters. When harmonics are numerous, the sampling device is tricky to carry out.

### INTRODUCTION

Cet exposé propose un algorithme pour calculer la transformée de Fourier. C'est un algorithme sans multiplication, nécessitant peu d'échantillons par période et fournissant un résultat exact. Il est utilisable lorsque la période du signal est connue et que le nombre d'harmoniques est limité.

A chaque harmonique "k" est associé un "filtre-k" réalisé par Transformée de Fourier Discrète. Cette TFD est calculée avec le minimum d'échantillons (un échantillon par quart de période de l'harmonique étudiée). Le résultat est une somme de coefficients des harmoniques k et multiples, ou des conjugués complexes de ces coefficients. Il est ensuite facile d'isoler le coefficient cherché.

Une application de cette FFT-QP (FFT par Quart de Période) au domaine des sons voisés est proposée. Après élimination des harmoniques supérieurs à la huitième, le signal est analysé par FFT-QP (circuit intégré expérimental). Les spectres obtenus permettent une identification des sons voisés.

### 1. Rappels.

Soit un signal périodique  $s(t)$ , de période  $T_1 = \frac{1}{f_1}$

$$(1) \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_1 t}$$

Nous désignons par "filtre-k" le filtre laissant passer uniquement l'harmonique  $k$ . Ce filtre serait fourni par un dispositif réalisant parfaitement l'intégrale de Fourier :

$$(2) \quad C_k = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} s(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt$$

en posant  $T_e = \frac{T_1}{N}$  (période d'échantillonnage) et  $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ , on aboutit au résultat suivant :

$$(3) \quad C'_k = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} s(pT_e) W^{kp}$$

La relation entre  $C_k$  et  $C'_k$  s'obtient en remplaçant  $s(pT_e)$  par son expression déduite de (1).

$$(4) \quad C'_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \sum_{p=0}^{N-1} W^{p(n-k)}$$

La somme sur  $p$  est toujours nulle sauf lorsque  $n = k + qN$  ; ( $q$  entier relatif) au quel cas elle vaut  $N$ . Les coefficients  $C'_k$  et  $C_k$  sont donc liés par le système d'équation:

$$(5) \quad C'_k = \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_{k+qN}$$

### 2. Echantillonnage par quart de période.

#### 2-1. Calcul numérique :

Pour analyser l'harmonique  $k$ , on prélève  $4k$  échantillons synchrones par période du fondamental (limite du théorème de Shannon). Avec  $N = 4k$ ,  $W^k$  devient égal à  $-j$ , et la formule (4) devient :

$$(6) \quad C'_k = \frac{1}{4k} \sum_{p=0}^{4k-1} s(pT_e) (-j)^p$$

Ainsi les produits n'existent plus, ou plus exactement les facteurs des produits sont des sinus ou cosinus d'angles multiples de  $\pi/2$ .

Les coefficients  $C'_k$  sont donc obtenus par simple addition et soustraction. La formule (6) se développe ainsi:

$$C'_k = \frac{1}{4k} [s(0) - s(2T_e) + s(4T_e) - \dots - s((4k-2)T_e)] \\ + \frac{j}{4k} [s(T_e) - s(3T_e) + s(5T_e) - \dots - s((4k-1)T_e)]$$

Par exemple, pour  $k=3$  :

$$C'_3 = \frac{1}{6} [s(0) - s(2T_e) + s(4T_e) - s(6T_e) + s(8T_e) - s(10T_e)] \\ + \frac{j}{6} [-s(T_e) + s(3T_e) - s(5T_e) + s(7T_e) - s(9T_e) + s(11T_e)]$$

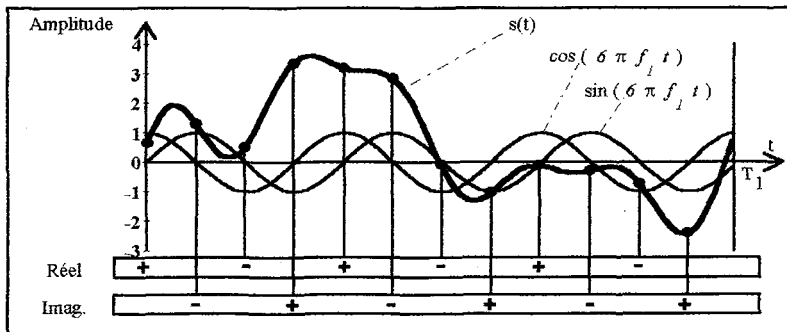


Fig. 1 : Les 12 échantillons du filtre-k, pour  $k=3$ .

2-b. Système d'équations linéaires :

Quand  $N=4k$ , l'équation (6) donne :

$$(8) \quad C'_k = C_k + C_{3k}^* + C_{5k} + C_{7k}^* + C_{9k} + C_{11k}^* + C_{13k} + \dots$$

où  $C_n^*$  désigne le complexe conjugué de  $C_n$  ( $C_n^* = C_{-n}$ ). Le coefficient  $C'_k$  est la somme des coefficients, conjugués ou non, des harmoniques multiples impairs de  $C_k$ .

Lorsque le signal étudié contient un nombre connu  $M$  d'harmoniques (bande passante  $Mf_1$ ), la série  $C'_k$  est bornée ;  $M$  filtres-k, de  $k=1$  à  $M$ , fournissent les  $M$  coefficients  $C'_k$  dont on peut tirer les  $M$  coefficients  $C_k$ .

Par exemple, pour  $M=10$ , une batterie de 10 filtres-k fournit les 10 coefficients  $C'_k$  et le système d'équations est donné par la matrice triangulaire supérieure de (9) (avec  $1^* \times C = C^*$ )

$$(9) \begin{bmatrix} C'_1 \\ C'_2 \\ C'_3 \\ C'_4 \\ C'_5 \\ C'_6 \\ C'_7 \\ C'_8 \\ C'_9 \\ C'_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1^* & 0 & 1 & 0 & 1^* & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \end{bmatrix}$$

La résolution de ce système est donnée ci-dessous :

$$(10) \begin{aligned} C_8 &= C'_8 & C_4 &= C'_4 \\ C_7 &= C'_7 & C_3 &= C'_3 - C'^*_9 \\ C_6 &= C'_6 & C_2 &= C'_2 - C'^*_6 - C'_{10} \\ C_5 &= C'_5 & C_1 &= C'_1 - C'^*_3 - C'^*_5 - C'^*_7 \end{aligned}$$

**3. Architecture du circuit FFT-QP**

Nous avons intégré sur silicium un filtre FFT-QP. Ce circuit est piloté par une horloge élevée asservie sur la fréquence fondamentale du signal. Les échantillons sont traités conformément à ce qui a été illustré sur la figure 1. Ce circuit fournit les coefficients  $C'_k$ . Un traitement logiciel externe en déduit les coefficients  $C_k$ .

**4. Application de l'algorithme FFT-QP à quelques voyelles.**

**4.1 Banc de mesure**

Le banc de mesure est constitué autour du circuit intégré FFT-QP. Nous nous sommes limités au 8 premiers harmoniques du son voisé.

En amont, un filtre Caer passe bas à bande passante dynamique coupe les harmoniques à partir de la neuvième. Un asservissement unique règle la bande passante du filtre Caer et fournit la fréquence pilote du circuit FFT-QP.

En aval, un processeur recueille, en fin de chaque période, les parties réelles et imaginaires des coefficients  $C'_k$ , fournies par chacun des 8 filtres, et en déduit les coefficients  $C_k$  en vue d'une recherche de signature de sons voisés.

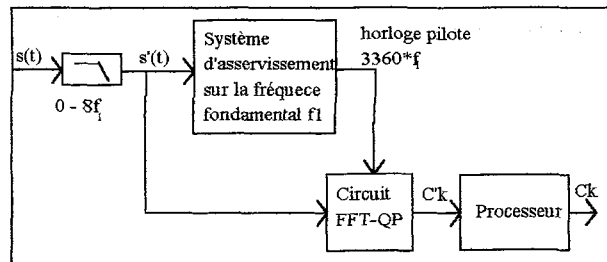


Fig. 2 : Banc de mesure

## 4.2 Résultats

L'algorithme est appliqué aux voyelles: /a/; /i/; /e/.

La figure 3 présente le son voisé /a/ après élimination des harmoniques supérieurs à la huitième (signal  $s'(t)$  dans la figure 2). La figure 4 présente le même son /a/ reconstitué d'après les résultats (modules et phases). La correspondance est presque parfaite.

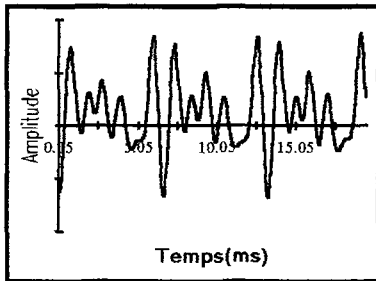


Fig. 3 : Voyelle /a/: signal original  
(8 harmoniques)

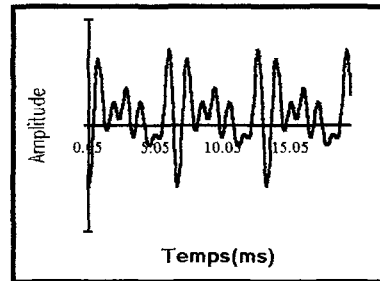


Fig. 4 : Signal reconstitué à partir des  
modules et phases obtenus.

Les spectres des sons /a/, /i/, et /e/ sont donnés ci-dessous pour un locuteur unique. Une analyse systématique est en cours, de manière à parvenir à une identification automatique des sons voisés ( Fig. 5, 6, 7)

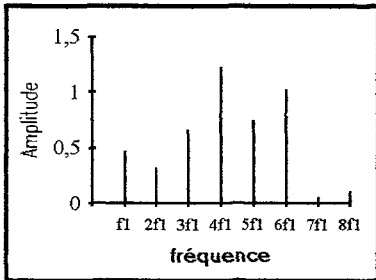


Fig. 5 : Spectre de la voyelle /a/

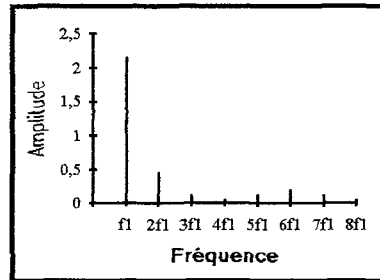


Fig. 6 : Spectre de la voyelle /i/

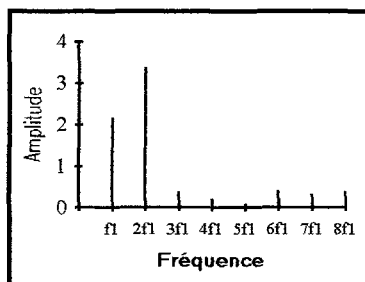


Fig. 7 : Spectre de la voyelle /e/