Propagation multimodale dans un pavillon à section variable

Vincent Pagneux, J. Kergomard

► To cite this version:

Vincent Pagneux, J. Kergomard. Propagation multimodale dans un pavillon à section variable. Journal de Physique IV Proceedings, 1994, 04 (C5), pp.C5-797-C5-800. 10.1051/jp4:19945171 . jpa-00252852

HAL Id: jpa-00252852

<https://hal.science/jpa-00252852>

Submitted on 1 Jan 1994

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Propagation multimodale dans un pavillon à section variable

V. PAGNEUX et J. KERGMARD*

Centre de Recherche Schlumberger, SMR, BP. 620-05, Montrouge, France

** Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, UA 1101 du CNRS, BP. 535, 72017 Le Mans, France*

abstract — Some authors have tried to calculate propagation in a varying cross section duct by slicing it into cylindrical elements with length small compared to wavelength. This enables to solve the wave equation with the multimodal decomposition formulation. The results compared favorably with experimental data. However, this approach have certain limitations and we, therefore, wanted to study this problem by writing continuous equations. First of all, we develop a matricial horns equation extending the classical Horn equation. Then, we find a matricial Riccati equation for the impedance matrix which is symmetric and only depends on the axial coordinate. This equation for the impedance avoid spurious divergence due to vanishing modes. Finally we are able to get the pressure or the velocity field by a calculation of a kind of argument matrix (similar to the usual jkx for plane wave) with another continuous equation slave to the matrix impedance variation. The computations are performed with a Runge-Kutta method of order 3 and are applied to a particular geometry in the case of monopole source the solution of which is known for a straight duct.

1 Introduction

La propagation d'ondes acoustiques dans les guides à section variable est un problème d'un grand intérêt en ingénierie, pour les instruments de musique et la reproduction du son.

Dans le cas de l'étude de la propagation dans un tuyau droit on dispose de la solution exacte dans le domaine fréquentiel grâce à la décomposition multimodale. La réponse impulsionnelle d'un monopole dans le domaine temporel s'en déduit et sa solution analytique est disponible (cf. [1])

Mais dès que le conduit est à section variable, il n'existe plus de méthodes de résolution vraiment rigoureuses et on doit employer une méthode approchée. On peut bien entendu recourir aux calculs par éléments finis (voir par exemple Morita et al. [2]) ou éléments de frontières (voir Henwood [3]) qui peuvent tous deux être utilisés à toute fréquence. Aux basses fréquences seulement, quand la longueur d'onde reste plus grande que les dimensions transversales, l'équation des pavillons, due à Lagrange (voir pour une revue Eisner [4]) et souvent dite de Webster, a été très souvent employée. Mais on peut mettre en doute sa validité dès que la fréquence dépasse la fréquence de coupure du premier mode non plan. C'est pourquoi on a mis en place une méthode approchée, inspirée de la propagation multimodale dans un conduit droit pour tenter de résoudre le problème de propagation dans un tuyau à section variable. Le cadre des hypothèses impose seulement que la section soit relativement lentement variable.

2 Propagation multimodale

La technique usuelle pour résoudre la propagation acoustique dans un conduit à section variable grâce à la décomposition modale est d'approcher la vraie géométrie par une suite de conduits droits (cf [5] et [6]). Mais de plus on peut faire un passage à la limite de ce découpage pour revenir à une équation différentielle continue. On obtient finalement (voir Kergomard [7] (1993)):

$$\vec{P}' = \frac{S'}{S} Q \vec{P} - j \frac{k_0 Z_{it}}{S} \vec{U} \quad (1)$$

$$\vec{U}' = -j \frac{S}{k_0 Z_{it}} K \vec{P} - \frac{S'}{S} Q \vec{U} \quad (2)$$

où les primes dénotent la dérivation par rapport à l'abscisse longitudinale z , les vecteurs P et U sont les vecteurs composantes de pression et vitesse sur la base des fonctions propres transversales, S est la section, Z_{it} est la matrice impédance itérative (diagonale) et K et Q les matrices définies respectivement par $K = k_{zi}^2 \delta_{ij}$ et $Q_{ij} = (\alpha_j^2)/(\alpha_j^2 - \alpha_i^2)$ (les α_i étant les zéros des fonctions de Bessel d'ordre 1). On remarque les termes $S'/S Q$ qui représentent l'influence de la variation de forme du conduit. Ils introduisent un couplage entre tous les modes.

A notre connaissance il n'existe pas de solution exacte de cette équation. On doit donc la résoudre numériquement en tronquant la nombre de modes considérés. Malheureusement dès que l'ordre de la troncature dépasse le nombre de modes propagatifs, les modes évanescents pris en compte provoquent une divergence exponentielle inévitable. Ainsi on doit passer par le calcul d'une impédance et suivre une démarche proposée pour la première fois par Roure [8].

3 Méthode de la matrice impédance

3.1 Matrice impédance

Par analogie avec l'impédance usuellement connue pour l'onde plane, il est possible de définir une matrice impédance pour la propagation multimodale

$$\vec{P} = Z \vec{U}$$

De façon tout à fait équivalente à l'obtention de l'équation (1), on peut montrer (cf [9]) que Z satisfait à une équation différentielle non-linéaire du premier ordre (équation de Riccati)

$$Z' = -j \frac{k_0}{S} + Z K Z + \frac{S'}{S} (Q Z + Z^t Q) \quad (3)$$

On peut ainsi calculer l'impédance à toute abscisse z dès que l'on connaît l'impédance dans une partie du conduit. Il n'y a pas de divergence exponentielle car la matrice impédance correspond toujours intrinsèquement au rapport de la pression à la vitesse et elle reste bornée quand ces deux quantités divergent exponentiellement de la même façon. Le calcul suppose de connaître la matrice impédance sur une terminaison passive (tube semi-infini, fermé, ...).

3.2 Calcul de la vitesse ou de la pression acoustique

On sait maintenant que le calcul numérique de la matrice impédance est possible. En outre on remarque que dans l'équation (2), on peut écrire que la dérivée du vecteur vitesse s'exprime linéairement en fonction du vecteur vitesse si on suppose connue la matrice impédance:

$$\vec{U}' = (-j \frac{S}{k_0 Z_{it}} K Z - \frac{S'}{S} Q) \vec{U} \quad (4)$$

Soit $\vec{U}' = M'\vec{U}$. Il est possible d'intégrer la vitesse par $\vec{U} = e^M \vec{U}_0$. Par exemple si on s'intéresse à la propagation dans la géométrie de la figure 1 qui correspond un conduit à section variable semi infini à droite excité par un piston, la démarche comprend deux étapes. Dans un premier calcul il faut "ramener" l'impédance caractéristique en z_f jusqu'à z_0 en même temps que l'on intègre M' avec une condition initiale nulle.

Figure 1: piston en z_0 partie semi-infinie à droite

On dispose alors de l'impédance et de la matrice M_0 telle que

$$\vec{U}_0 = e^{M_0} \vec{U}_f$$

où on emploie l'exponentiel de matrice et où $\vec{U}_0$ et $\vec{U}_f$ correspondent à z_0 et z_f . Mais la quantité connue est $\vec{U}_0$ (source piston) et il faut écrire:

$$\vec{U}_f = e^{-M_0} \vec{U}_0$$

Dans un deuxième temps on réintègre M' en même temps que Z pour avoir la matrice $M(z)$ pour toute abscisse. Le vecteur vitesse est alors exprimé par

$$\vec{U}(z) = e^{M(z) - M_0} \vec{U}_0$$

Théoriquement on n'a pas besoin de deux intégrations, mais le besoin de mémoire pour stocker les matrices Z et M (de dimension n^2 , où n est le nombre de modes pris en compte) est trop coûteux pour se contenter d'une seule intégration.

4 Résultats

Pour un monopole (source de débit) correspondant à la figure 2, le vecteur vitesse $\vec{U}(z_+)$ est connu par application de la continuité de la pression et du saut de la vitesse. On peut appliquer la méthode de la partie 3 puisqu'on connaît le vecteur vitesse à l'abscisse z_+ et parce que la matrice impédance dans la partie droite est l'impédance itérative. Le résultat du calcul est montré figure 3 et correspond

Figure 2: monopole en z_0 partie semi-infinie à droite et à gauche

à $k_0 R_0 = 11$, $k_0(z_f - z_0) = 110$ et $R_{max}/R_0 = 1.1$ (où R_0 est le rayon du tube et R_{max} est le rayon maximal). Une méthode de Runge-Kutta d'ordre 3 a été utilisée pour intégrer les équations différentielles. On a tracé la partie réelle de la vitesse longitudinale $u(r, z)$ pour un monopole placé à gauche et au centre du conduit. En plus du cas correspondant à la figure 2, celui de la géométrie droite a été aussi calculé (on en connaît la solution analytique) afin de mieux évaluer l'effet de la section variable. Ainsi par rapport au guide droit, on remarque une légère augmentation de u à gauche de la partie ventrue, due aux réflexions et une déformation du motif assez importante. Il est à noter que la forme d'escalier pour la géométrie à section variable n'est due qu'au mode de représentation graphique.

Figure 3: monopole en z_0 , partie semi-infinie à droite et à gauche

References

- [1] Morse P. et Ingard U. "Theoretical Acoustics." New York: Mac-Graw Hill.
- [2] Morita S., Kyono N., Saki A., Yamabushi T. et Kagawa Y., "Acoustic Radiation of Horn Loudspeaker by the Finite Element Method. A Consideration of the Acoustic Characteristic of Horns.", *J. Audio. Eng. Soc.* 28, 482-489 (1980).
- [3] Henwood D.J., "The Boundary-Element Method and Horn Design", *J. Audio. Eng. Soc.* 41, 485-496 (1993).
- [4] Eisner E., "Complete Solution of the Webster Horn Equation.", *J. Acous. Soc. Am.*, 41, 1126-1146, (1967).
- [5] Roure A., "Propagation guidée, étude des discontinuités.", *Thèse de Doctorat*, Université Aix-Marseille (1976).
- [6] Alfredson R.J., "The Propagation of Sound in a Circular Duct of Continuously Varying Cross-Sectional Area", *J. Sound Vib.*, 23, 433-442. (1972).
- [7] Kergomard J., "Une Equation Matricielle des Pavillons", *C.R.A.S.* (1993).
- [8] Roure A., "Propagation du Son dans des Conduits à Section Continuellement Variable.", *Euromech 94*, Marseille, Septembre 1977.
- [9] Pagneux V., Kergomard J. et Marquette G., "Propagation Multimodale en Géométrie Complexe.", dans le cadre du Congrès Français de Mécanique, Lille 1045-1049 (1993).