JOURNAL DE PHYSIQUE IV
Colloque C5, supplément au Journal de Physique III, Volume 4, mai 1994

Instruments à vent : formulation intégrale ou différentielle ?

N. GRAND, A. BARJAU*, V. GIBIAT et A. DERODE

Laboratoire Ondes et Acoustique, ESPCI, Université Paris 7, URA 1503 du CNRS, 10 rue Vauquelin, 75005 Paris, France
* *Departement d'Enginyeria Mecànica, ETSEIB, Universitat Politècnica de Catalunya, Diagonal 647, 08028 Barcelona, Spain*

Résumé: Depuis une dizaine d'années les modélisations d'instruments à vent ont mis l'accent sur le caractère non linéaire de ces systèmes. Les équations de base écrites dans le domaine temporel font apparaître une intégrale de convolution couplée à une équation non linéaire. Nous montrerons que dans des cas simples ce système peut se ramener à une équation différentielle non linéaire à retard, plus facile à résoudre numériquement, et qui possède en outre l'avantage de mettre plus facilement en évidence les comportements accessibles en termes d'oscillations périodiques et de bifurcations.

Abstract: The essential non-linearity of musical woodwinds has been the reason for shifting the traditional frequency modelisation to a time domain one in the last ten years. The standard model consists of two coupled equations, a convolution integral and a non-linear equation. It will be proved that in simple cases these equations can be transformed into a non-linear delayed differential one which allows an 'a priori' assessment of the different possible dynamical oscillating behaviours.

1. Introduction

La physique des instruments de musique à sons entretenus comme les instruments à vent les apparente à la famille des systèmes dynamiques non linéaires. Ils sont comme ceux-ci susceptibles de fonctionnements tant périodiques que multipériodiques et peuvent engendrer les scénarios classiques de transition vers le chaos[1]. Le modèle général de description de ces systèmes [2] s'écrit:

$$p(t) = \int_0^t h(t-t')u(t')dt' , \qquad (1)$$

$$u(t) = F_{\text{Non-Linéaire}}\left[p(t), \dot{u}(t), \ldots\right], \qquad (2)$$

où $p(t)$ et $u(t)$ représentent la pression et le débit acoustique à l'entrée du résonateur de réponse impulsionnelle $h(t)$. L'équation (1) décrit la dynamique du résonateur tandis que l'équation (2) concerne celle du système excitateur. Ce système a largement été utilisé à des fins de synthèse et de modélisation physique. Pour mettre en évidence les modes de fonctionnement variés ainsi que les bifurcations et les scénarios de transition à des complexités supérieures au mouvement périodique, certains auteurs ont été amenés à le simplifier en négligeant l'inertie du système excitateur et en considérant un résonateur cylindrique idéalisé, ce qui réduit $h(t)$ à un peigne de $\delta(t)$, distribution de Dirac et permet d'écrire [3]:

$$p(t)=Z_0\sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha)^n\,\delta(t-nT)*u(t), \qquad (3)$$

$$u(t)=F_{N.L.}[p(t)], \qquad (4)$$

et dans ces équations, le changement de variables:

$$p^{\mp}(t)=\frac{1}{2}(p(t)\pm Z_0u(t)), \qquad (5)$$

où Z_0 est l'impédance caractéristique de l'air conduit à une convolution où le noyau est la fonction de réflexion en ondes planes, $r_p(t)$. Si celle-ci est prise égale à $\delta(t)$ (cas du cylindre sans pertes), le problème est réduit à l'itération:

$$p^-(t)=F_{non-linéaire}\left[-p^-(t-T)\right], \qquad (6)$$

avec T le temps nécessaire à une impulsion pour faire un aller-retour dans le résonateur. Pour une fonction non-linéaire de type "à une bosse" ceci permet d'engendrer un scénario de doublements de période [1,2,3]. Nous allons montrer dans ce qui suit qu'il est possible, dans le cas des géométries cylindriques et coniques, de transformer la convolution en une équation différentielle qui présente des avantages numériques et permet de mieux appréhender les comportements oscillants potentiels du système.

2. Géométrie cylindrique

La démarche logique pour rapprocher le modèle précédent de la réalité consiste évidemment à ajouter à cette équation un terme différentiel du premier ordre. C'est ce qui a été fait par Kitano et al. [4]. Dans leur cas la signification physique de ce terme est attribuée à l'inertie de l'amplificateur de leur montage expérimental.

On peut ici donner un sens physique à ce terme de manière très naturelle en prenant une fonction de réflexion plus réaliste (avec pertes) pour le résonateur. Les équations (3) et (4) s'écrivent alors:

$$p^+(t)=\left[-\frac{Z_0}{2}\varepsilon(t-T)\alpha e^{-\alpha(t-T)}\right]*p^-(t), \qquad (7)$$

$$p^-(t)=F_{NL}(p^+(t)), \qquad (8)$$

où $\varepsilon(t)$ est la distribution de Heaviside et α est un coefficient d'amortissement.
En utilisant la transformée de Laplace et ses propriétés sur l'équation (7) on obtient:

$$\frac{dp^+(t)}{dt}+\alpha p^+(t)=-\alpha F_{nl}\left[p^+(t-T)\right]+Conditions-Initiales, \qquad (9)$$

formulation qui peut parfaitement s'écrire en fonction de $p(t)$ et $u(t)$, soit:

$$\frac{dp(t)}{dt}+\alpha(p(t)+p(t-T))=-Z_0\left[\frac{du(t)}{dt}+\alpha(u(t)-u(t-T))\right]+CI. \qquad (10)$$

On aurait pu également obtenir cette équation de manière directe en utilisant le formalisme de réponses impulsionnelles modifiées d'Agulló et al. [5] qui consiste à remplacer le noyau de la convolution par une réponse temporelle de support minimal :

$$h_{\text{mod}}(t)=\frac{Z_0}{2}\left[\delta(t)-\alpha\varepsilon(t-T)e^{-\alpha(t-T)}\right]. \qquad (11)$$

ce qui impose de changer la seconde fonction apparaissant dans la convolution en:

$$p(t)=h_{\text{mod}}(t)*n(t). \qquad (12)$$

La variable $n(t)$ est en général une fonctionnelle de $p(t)$ et $u(t)$ et dans le cas cylindrique:

$$n(t) = u(t) + p(t) / Z_0. \qquad (13).$$

L'équation (9) permet déjà une approche qualitative de la physique contenue dans le modèle qui n'est pas accessible à travers l'équation (7). La seule périodicité présente dans cette écriture simplifiée est T. On peut donc s'attendre à des oscillations à une fréquence voisine de $1/T$ corrigée par l'amortissement. Kitano et al.[4] montrent que l'oscillation a lieu avec une période de $T+1/\alpha$ pour toutes les fonctions non linéaires menant à l'auto-oscillation. L'absence dans le système d'autre périodicité ne permettra pas de scénario autre que la cascade de doublements de période ou l'intermittence.

3. Géométrie conique

La même démarche qui a conduit à l'équation (9) dans le cas du cylindre amènerait à utiliser la fonction de réflexion sphérique et le changement de variable,

$$p_s^{\mp}(t) = \frac{1}{2}\left[p(t) \pm Z_0 u(t) \pm \frac{1}{rc}\int_0^t p(t')dt' \right]. \qquad (14)$$

On aboutit alors, non plus à une équation différentielle mais à deux équations intégro-différentielles et le sens physique des variables utilisées est beaucoup moins obvie que dans le cas du cylindre [5]. Il est beaucoup plus judicieux d'utiliser directement le formalisme de réponses impulsionnelles modifiées et de travailler en variables $p(t)$ et $u(t)$. Alors $n(t)$ s'écrit:

$$n(t) = u(t) + \frac{1}{Z_0}\left[p(t) + \frac{c}{r}\int_0^t p(t')dt' \right]. \qquad (15)$$

où r est la distance de la section d'entrée à l'apex du cône.

L'utilisation de la transformée de Laplace conduit alors à l'équation différentielle:

$$\frac{d^2p(t)}{dt^2} + \left(\alpha - \frac{c}{r}\right)\frac{dp(t)}{dt} - \alpha\frac{c}{r}p(t) + \alpha\left(\frac{dp(t-T)}{dt} + \frac{c}{r}p(t-T)\right) = Z_0\left[\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \alpha\left(\frac{du(t)}{dt} - \frac{du(t-T)}{dt}\right)\right] + CI, \quad (16)$$

où $u(t)$ et $p(t)$ sont toujours liés par l'équation (4).

L'équation (16) contient un retard et est du second ordre en $p(t)$, ce qui correspond à deux périodicités. On peut donc espérer engendrer des scénarios de transition par la quasipériodicité.

4. Avantages numériques des deux approches

D'un point de vue très général, la résolution numérique d'une équation différentielle nécessite une complexité de calcul plus faible et une quantité d'informations moindre que celle d'une équation intégrale. Les algorithmes de calcul sont notoirement plus stables et les problèmes de propagations d'erreurs moins sensibles. Néanmoins dans le cas où l'intégrale est une convolution dont le noyau est une exponentielle, Barjau et al. [7] ont donné un algorithme récursif qui permet de réduire le temps et la quantité d'informations nécessaires. Dans le cas de l'équation (12), cet algorithme s'exprime comme:

$$p(t+\Delta t) = e^{-\alpha\Delta t}p(t) + \frac{Z_0}{2}\left[-e^{-\alpha\Delta t}n(t) + n(t+\Delta t) - \alpha e^{-\alpha\Delta t}e^{\alpha T}\int_{T-\Delta t}^{T} e^{-\alpha t'}n(t-t')dt' \right]. \quad (17)$$

La connaissance à chaque instant de $p(t)$ impose la donnée préalable d'une valeur de $p(t)$, de deux valeurs de $n(t)$ et d'une hypothèse sur la variation de $n(t)$ dans l'intervalle d'intégration de durée Δt.

L'expression générale qui correspond à la formulation différentielle du même problème s'écrit:

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\alpha p(t) + \frac{Z_0}{2}\left[\alpha(n(t) - n(t-T)) + \frac{dn(t)}{dt} \right]. \qquad (18)$$

La connaissance à chaque instant de *p(t)* impose la donnée préalable de *n(t)*, *n(t-T)* et d'une méthode d'intégration numérique.

Faire une hypothèse sur *n(t)* pour résoudre l'équation (17) est équivalent au choix d'une méthode d'intégration numérique dans l'équation (18). Dans le cas où on utilise l'algorithme récursif de Barjau et al. les deux réalisations numériques sont donc identiques.

5. Conclusion

L'utilisation de réponses impulsionnelles modifiées permet de transformer facilement l'équation de convolution en une équation différentielle non linéaire à retard dont l'ordre dépend de la géométrie du résonateur étudié. Les possibilités dynamiques et oscillatoires du système apparaissent alors de façon plus évidente. Du point de vue numérique l'avantage est certain par rapport à une intégration brutale de l'équation de convolution. En revanche si on traite le problème avec toute la subtilité de l'algorithme récursif de Barjau et al. [7] le gain n'apparaît plus. Le problème qui reste de toutes façons est celui d'une formulation analytique de *n(t)* pour une géométrie quelconque. Mais de même qu'il n'existe pas de sauveur suprême il n'existe pas non plus de solution universelle [8].

6. Remerciements

Ce travail a pu être réalisé grâce à l'aide des gouvernements espagnol et français dans le cadre d'une action intégrée (Picasso 93142 et AI170B).

7. Références

[1] V. Gibiat *"Phase space Representation of acoustical musical signal"* Journal of Sound and Vib. **123** (1988) p91.

[2] M.E. McIntyre, R.T. Schumacher, J. Woodhouse *"On the oscillations of musical instruments"* J.Acoust.Soc.Am. **74** (1983) p1325.

[3] C. Maganza, R. Causse, F. Laloe *"Bifurcations period doublings and chaos in clarinet-like systems"* Europhys. lett. **1** (1986) p295.

[4] M. Kitano, T. Yabuzaki, T. Ogawa, *"Chaos and period doubling in a simple acoustic system"* Phys. Rev. Let. **50** (1983) p713.

[5] J. Agullo, A. Barjau, J. Martinez *"alternatives to the impulse response h(t) to describe the acoustical behavior of conical ducts"* J.Acoust.Soc.Am. **84** (1988) p1606.

[6] J. Agullo, A. Barjau, J. Martinez *"On the time domain description of conical bores"* J. Acoust. Soc. Am. **81** (1992) p1099.

[7] A. Barjau, S. Cardona, L. Jordi, *"Simulation rapide de la pression à l'intérieur d'un instrument à anche double"* Colloque modèles physique Grenoble 1990.

[8] E. Potier L'internationale Paris 1870.