

Simulations numériques dans les domaines temporels et fréquentiels. Etude comparative, application aux instruments à vent à anche simple

B. GAZENGEL et J. GILBERT

*Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, URA 1101 du CNRS, avenue Olivier Messiaen,
BP. 535, 72017 Le Mans cedex, France*

Abstract : Time-domain simulations of single reed wind instruments can be powerful tools if the differential equation governing the motion of the reed is solved with the help of a good numerical scheme. We present a set of different available numerical methods and pay attention to stability criteria and frequency response for each of them. We propose a modified second order implicit method and apply it to some resonators.

1. INTRODUCTION

Les simulations numériques dans le domaine temporel d'instruments à vent à anche simple (clarinette, saxophone) sont envisagées comme outil de création pour les compositeurs et peuvent être un outil de recherche permettant de préciser la pertinence des modèles physiques employés. Elles peuvent, de plus, devenir un outil d'aide à la conception d'instruments à vent en prévoyant des critères tels que la fréquence fondamentale et le spectre du signal de pression acoustique dans le bec. Ces applications nécessitent alors une bonne robustesse du modèle numérique, qui peut, dans certains cas, introduire des biais importants sur les quantités citées ci-dessus. Nous présentons un modèle physique simple : un résonateur supposé linéaire, décrit par sa fonction de réflexion $r(t)$, un système excitateur composé du bec et de l'anche. Le comportement de l'anche est décrit par un oscillateur harmonique à un degré de liberté. Une étude comparative des différentes techniques numériques permettant de simuler le comportement de l'anche et une comparaison des signaux calculés par les différentes simulations temporelles et par une méthode numérique fréquentielle ([1]) permet alors de choisir une méthode simple. Nous présentons quelques résultats effectués pour un résonateur cylindrique test.

2. LE MODELE PHYSIQUE

Le système physique peut être décrit en première approximation par trois variables dépendant du temps:

$p(t)$: pression acoustique dans le bec,

$U(t)$: débit acoustique dans le bec,

$y(t)$: position de l'extrémité de l'anche.

2.1. Le résonateur

Celui-ci est caractérisé par sa fonction de réflexion $r(t)$ calculée à partir de l'impédance d'entrée Z_e .

La pression et le débit acoustiques sont alors reliés par :

$$p(t) = r(t) * [p(t) + Z_c \cdot U(t)] + Z_c \cdot U(t), \tag{1}$$

où Z_c est l'impédance caractéristique à l'entrée du résonateur [2].

2.2 Le système exciteur

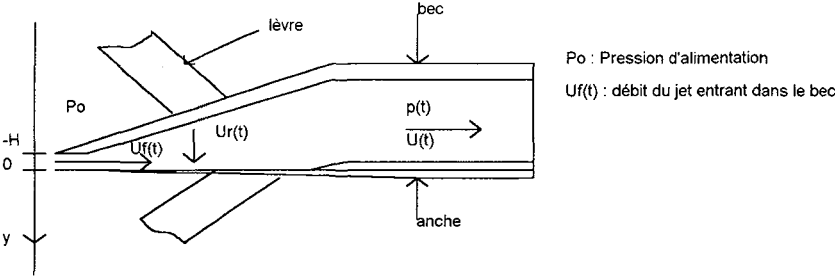


Figure 1: Le système exciteur.

2.2.1. Le comportement hydrodynamique du jet.

Le débit $U_f(t)$ du jet est une fonction non linéaire de $p(t)$ et de $y(t)$. (cf. par exemple [3]) :

$$U_f(t) = NL[p(t), y(t)] \tag{2}$$

2.2.2. Le comportement mécanique de l'anche

Celle-ci est modélisée, en première approximation, par un oscillateur harmonique à un degré de liberté :

$$\ddot{y}(t) + g_r \cdot \dot{y}(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = \frac{p(t) - P_0}{\mu}, \begin{cases} \omega_0 \text{ est la pulsation propre de l' anche,} \\ g_r \text{ est le coefficient d' amortissement de l' anche,} \\ \mu \text{ est la masse surfacique de l' anche.} \end{cases} \tag{3}$$

En posant : $\xi(t) = y(t) + \frac{P_0}{\mu \cdot \omega_0^2}$, $X(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ U_r(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{S_r} \\ -\omega_0^2 \cdot S_r & -g_r \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p(t) \cdot S_r}{\mu} \end{pmatrix}$, il est alors

possible d'écrire l'Eq. (3) sous la forme $\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B(t)$. (4)

$U_r(t) = S_r \cdot \dot{y}(t)$ est le débit "pompe" par l'anche, S_r la surface efficace de l'anche[4]. Le débit acoustique total s'exprime alors sous la forme:

$$U(t) = U_f(t) - U_r(t). \tag{5}$$

3. LES SOLUTIONS

En supposant que $r(0)=0$, dans le domaine discret, à chaque instant nT_e , où T_e est la période d'échantillonnage, les trois variables décrivant le système auto-oscillant sont solutions du système suivant:

$$p(n) = p_{retour} + Z_c \cdot U_r[p(n), y(n)] - Z_c \cdot U_r(n) \tag{6a}$$

$$U_r(n) = NL[p(n), y(n)] \tag{6b}$$

$$\dot{X}(n) = A \cdot X(n) + B(n) \tag{6c}$$

$$p_{retour} = \sum_{k=1}^n r(k) \cdot [p(n-k) + Z_c \cdot U(n-k)] \tag{6d}$$

La connaissance de $y(n)$ et de $U_a(n)$ en fonction de $p(n)$, $p(n-1)$, ..., $p(n-i)$ permet alors de résoudre une équation non linéaire d'inconnue $p(n)$. La détermination de $y(n)$ et de $U_a(n)$ devient alors un point critique

de la simulation numérique. C'est pourquoi une étude des différentes méthodes disponibles pour résoudre l'Eq.(4) est présentée.

4. LES METHODES DE RESOLUTION

4.1. Les méthodes de résolution des équations différentielles.

Soit l'Eq.(6c) : $\dot{X}(n) = A \cdot X(n) + B(n)$.

En faisant l'approximation $B(n) \approx B(n-1)$, il vient :

$$\dot{X}(n) = F[X(n)], \text{ ou } F[X(n)] = A \cdot X(n) + B(n-1). \quad (7)$$

L'Eq.(6c) est alors une équation différentielle classique qu'il est possible de résoudre en utilisant les techniques suivantes [5]:

- méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.
- méthodes d'Adams fermées d'ordre 1 et 2.

4.2. Les méthodes issues du traitement de signal numérique.

L'Eq. (4) décrit aussi le comportement d'un filtre linéaire .

La solution $\begin{pmatrix} y(n) \\ U_a(n) \end{pmatrix}$ peut s'exprimer en fonction de $p(n)$ à l'aide de diverses techniques[6] :

- méthode de l'équivalence de la dérivée.
- méthode de l'équivalence de l'intégrale.
- échantillonnage de la réponse impulsionnelle.

4.3. Analyse de la stabilité des diverses méthodes

4.3.1. Les méthodes de résolution des équations différentielles:

En considérant l'Eq.(7) et en posant $B(n) = \delta(n)$ (impulsion unité), $X(n)$ est la réponse impulsionnelle. Une analyse des réponses impulsionnelles calculées nous permet de constater que seules les méthodes d'Adams sont stables.

4.3.2. Les méthodes issues du traitement de signal numérique:

L'étude de la stabilité de telles techniques est effectuée en étudiant l'application du demi-plan gauche du domaine de Laplace (plan des s) au domaine numérique (plan des z) [6]. Ces outils montrent que la méthode de l'équivalence de la dérivée par les différences à droite est instable. Les autres méthodes sont stables.

4.4. Réponses fréquentielles des diverses méthodes.

Les seules méthodes numériques étudiées sont les méthodes stables. Afin d'étudier les réponses fréquentielles des méthodes citées ci-dessus, nous calculons les transformées en z des diverses équations aux différences et obtenons les fonctions de transfert $H_y(z) = \frac{y(z)}{p(z)}$ et $H_{u_a}(z) = \frac{U_a(z)}{p(z)}$, où $z = e^{j2\pi f T_e}$

Les réponses fréquentielles des divers filtres numériques peuvent alors être comparées à celles du système analogique à simuler. Les résultats montrent que la méthode de l'équivalence de l'intégrale reproduit de façon satisfaisante la réponse du système analogique aux basses fréquences. Pour des fréquences

d'échantillonnage peu élevées, cette méthode introduit une compression de l'axe des fréquences. Il est alors possible de corriger la réponse du filtre numérique en calculant de nouveaux paramètres ω_0 , μ et g_r .

5. COMPARAISONS ENTRE METHODES TEMPORELLES ET FREQUENTIELLES EN REGIME PERMANENT PERIODIQUE.

Nous avons effectué, pour un résonateur cylindrique test, dont l'impédance d'entrée est connue analytiquement, une série de simulations mettant en oeuvre les méthodes citées précédemment pour diverses pressions d'alimentation. Les résultats de ces simulations sont alors comparés à ceux obtenus par équilibrage harmonique [1]. Nous présentons l'évolution de la fréquence fondamentale en fonction de la fréquence d'échantillonnage pour deux valeurs de la pression d'alimentation (Figure 2.).

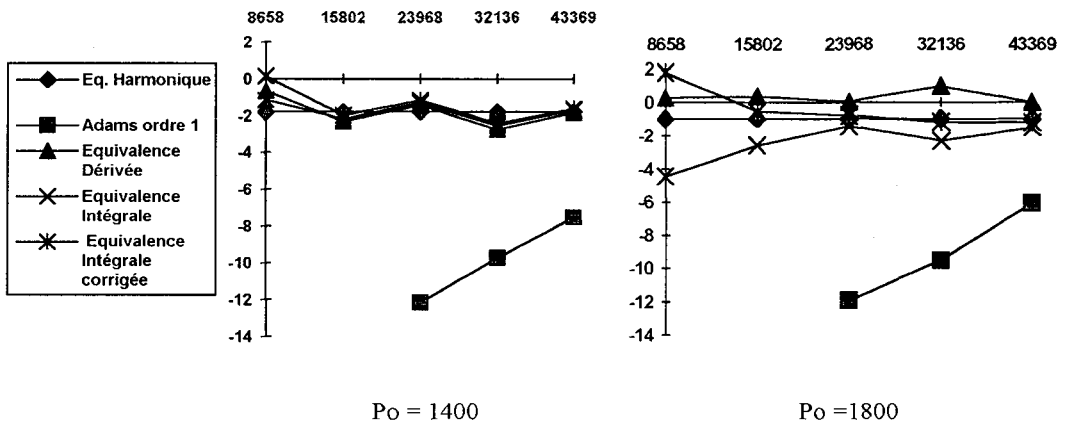


Figure 2: Evolution de la fréquence fondamentale (exprimée en cent) de la pression acoustique calculée. Les méthodes ne donnant aucun résultat satisfaisant ne sont pas représentées.

6. CONCLUSION

Les simulations numériques dans le domaine temporel des instruments à vent à anche simple peuvent être un outil puissant si la méthode employée à décrire le comportement dynamique de l'anche est appropriée. Nous proposons un schéma de discrétisation qui permet de reproduire assez fidèlement la réponse de l'anche et l'appliquons à étudier l'évolution de paramètres tels que la fréquence de jeu en fonction des différents termes du modèle physique (Z_e , ω_0 , ...). Le choix de cette méthode à partir de résonateurs tests permettra de simuler le fonctionnement d'instruments réels à l'aide de mesures d'impédance d'entrée.

Références :

- [1] Gilbert J., Kergomard J., Ngoya E., Calculation of the steady-state oscillations of a clarinet using the harmonic balance technique. *J. Acoust. Soc. Am.* 86 (1989), p.35.
- [2] Schumacher R.T., Ab initio calculations of a clarinet. *Acustica* 48 (1981), p.71.
- [3] Wilson T.A., Beavers G.S., Operating modes of the clarinet. *J. Acoust. Soc. Am.*, 56 (1974), p.653.
- [4] Thompson S.C. The effect of the reed resonance on woodwind tone production, *J. Acoust. Soc. Am.* 66 (1979), p.1299.
- [5] Nougier J.P., Méthodes de calcul numérique, (Masson, Paris, 1983, 1987), pp.194-201.
- [6] Kunt M., Traitement numérique des signaux (Presse Polytechnique de Lausanne, éditions Georgi, 1980) pp. 209-224.