# Étude de la dispersion de double réfraction du quartz

J. Macé de Lépinay

---

## ÉTUDE DE LA DISPERSION DE DOUBLE RÉFRACTION DU QUARTZ;

Par M. J. MACÉ DE LÉPINAY.

M. Mouton, dans un remarquable travail (1), a indiqué tout le parti que l'on pouvait tirer de l'observation des spectres cannelés de MM. Fizeau et Foucault (2), obtenus en interposant un quartz taillé parallèlement à l'axe entre un polariseur et un analyseur, et en décomposant la lumière au moyen d'un réseau connu. Amené, comme préliminaire à des recherches sur les propriétés optiques du quartz au voisinage de l'axe, à diverses autres applications de cette même méthode, j'ai dû bien vite reconnaître l'insuffisance des données numériques actuellement acquises relativement à la dispersion de double réfraction du quartz.

Rudberg (3), M. Mascart (4), M. Van der Willigen (5) et M. Sarasin (6) ont déterminé avec toute la précision possible, par la méthode du prisme (arêtes parallèles à l'axe), les indices ordinaires $n$ et extraordinaires $n'$ du quartz, les trois premiers pour les principales raies du spectre solaire, le dernier pour les raies du cadmium et de quelques autres métaux. Mais, quelle que soit l'habileté des observateurs, le degré de précision est nécessairement limité par le degré de finesse des divisions du goniomètre employé. Avec un instrument permettant de lire les $10''$ et donnant, par suite, au besoin, les $5''$ d'arc, l'erreur commise sur chacun des in-

---

(1) *Journal de Physique* [1], t. VIII, p. 393; 1879.
(2) *Annales de Chimie et de Physique* [3], t. XXVI, p. 138, et t. XXX, p. 146; 1845-46.
(3) *Pogg. Ann.*, t. XIV, p. 45; 1828.
(4) *Annales de l'École Normale*, t. I, p. 219; 1864.
(5) *Musée Teyler*, t. II, p. 153, et t. III, p. 34; 1869.
(6) *Comptes rendus*, t. LXXXV, p. 1230; 1877.

dices est de quelques unités du cinquième ordre décimal et, du moins dans le cas du quartz, la différence $n' - n$ ne se trouve guère connue qu'à $\frac{1}{300}$ près environ. Je me suis donc proposé de déterminer les valeurs de $n' - n$ pour le quartz par une autre méthode susceptible de me fournir leurs valeurs au degré d'approximation dont j'avais besoin, à savoir à $\frac{1}{1000}$ près environ.

La méthode employée consiste à mesurer, au moyen d'un excellent réseau de Brünner au $\frac{1}{200}$ de millimètre [1], les longueurs d'onde correspondant aux centres des bandes de Fizeau et Foucault, obtenues en interposant un quartz épais, parallèle à l'axe, entre un polariseur et un analyseur. On sait que, si $\lambda$ représente l'une des longueurs d'onde mesurées, $e$ l'épaisseur de la lame biréfringente, la différence $n' - n$ des indices pour la radiation $\lambda$ est donnée par la relation

$$(n' - n)e = p\frac{\lambda}{2}, \tag{1}$$

$p$ étant un nombre entier, pair si les sections principales du polariseur et de l'analyseur sont croisées, impair si elles sont parallèles. Si le quartz employé est d'une épaisseur suffisante, on pourra déterminer un assez grand nombre de valeurs de $n' - n$, correspondant à des radiations réparties sur toute la longueur du spectre, pour pouvoir calculer avec une grande exactitude les constantes de la formule de Cauchy

$$n' - n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4}.$$

J'indiquerai en quelques mots les précautions qui ont été prises :

I. *Réglage de la lame cristalline.* — La lame de quartz était orientée, sans précautions spéciales, de telle sorte que sa section principale fît un angle de 45° environ avec celle du polariseur. Elle doit, en outre, être disposée normalement au faisceau lumineux qui la traverse. Ce réglage ne présente aucune difficulté, car il suffit d'amener le faisceau lumineux réfléchi par la lame à coïn-

---

[1] Plus exactement, la distance de deux traits consécutifs, d'après une série de mesures très concordantes effectuées dans le cinquième spectre était de $0^{cm},00049906$ ($\lambda_{D_2} = 5,8880 \times 10^{-5cm}$).

cider avec le faisceau incident. On a constaté d'ailleurs, qu'une erreur de $1°30'$ sur l'orientation de la lame ne produisait, même avec le quartz épais employé, aucun déplacement mesurable des franges : or une erreur de $0°30'$ était parfaitement appréciable.

II. *Mesure des longueurs d'onde.* — Dans l'équation (1), le coefficient $p$, étant un nombre entier, est rigoureusement connu. L'erreur relative $\frac{d(n'-n)}{n'-n}$ est donc égale à l'erreur relative $\frac{d\lambda}{\lambda}$ commise sur la longueur d'onde.

Pour mesurer avec précision la longueur d'onde correspondant au centre d'une bande noire, il y a tout avantage à employer un quartz aussi épais que possible, parce que la distance de deux franges consécutives, et par suite, la largeur apparente de chacune d'elles, est en raison inverse de cette épaisseur. Avec le quartz de $0^m,006$ d'épaisseur environ, dont j'ai fait usage (1), on pouvait observer simultanément (c'est-à-dire pour chacune des orientations de l'analyseur), environ soixante-trois franges entre les raies B et $h$, limites des mesures effectuées. En observant le second spectre de diffraction du réseau au $\frac{1}{200}$, le pointé de chacune d'elles pouvait s'effectuer à $10''$ près, c'est-à-dire avec tout le degré de précision possible. Il eût été inutile d'observer un spectre d'ordre plus élevé, ou de faire usage d'un réseau plus finement strié. Dans le rouge, où les franges sont plus espacées ou plus larges, on a même trouvé avantage à observer le premier spectre.

Diverses précautions doivent être prises :

1° Le minimum de déviation d'une frange ne peut s'obtenir aussi exactement que celui d'une raie spectrale. Pour éviter toute hésitation, le réseau restait fixe pendant chaque série de mesures. On ne l'amenait pas à être normal au faisceau incident à cause de la difficulté de réglage, mais dans la position qui correspondait au minimum de déviation de la raie F dans le deuxième spectre. L'avantage de ce choix est double : la mise au point de la lunette est sensiblement la même dans tout le spectre et, de plus, une petite erreur sur l'orientation exacte du réseau est sans influence

---

(1) Il m'a été obligeamment confié par M. Hurion, professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

appréciable sur les mesures de longueurs d'onde. Ces dernières sont d'ailleurs données par les formules suivantes, qui s'établissent sans difficultés,

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{2} + \frac{a+b}{2}\sin\left(\delta - \frac{\delta_0}{2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_0}{2} + \frac{a+b}{2}\sin\left(\delta - \frac{\delta_0}{2}\right),$$

où $a + b$ est la distance de deux traits consécutifs du réseau, $\lambda_0$ la longueur d'onde et $\delta_0$ la déviation minimum de la raie F, $\lambda$ la longueur d'onde et $\delta$ la déviation correspondant au milieu de la bande observée. La première formule correspond aux mesures effectuées dans le second spectre, la seconde à celles effectuées dans le premier.

2° Une précaution indispensable consiste à effectuer deux mesures successives pour chaque frange, l'une en déplaçant la lunette du violet vers le rouge, la seconde du rouge au violet, à cause de la longueur toujours sensible des franges.

III. *Détermination du numéro d'ordre de chaque frange.* — On connaît la méthode de calcul indiquée par Fizeau et Foucault : si $p$ est le numéro d'ordre d'une frange dans le rouge, $\lambda_1$ sa longueur d'onde, $n'_1 - n_1$ la différence correspondante des indices, si, d'autre part, $\frac{q}{2}$ représente le nombre de franges comprises entre celle-ci et une autre radiation dans le bleu, de longueur d'onde $\lambda_2$, on a

$$\frac{(n'_1 - n_1)\lambda_2}{(n'_2 - n_2)\lambda_1} = \frac{p}{p+q}.$$

On doit adopter, comme véritable valeur de $p$, le nombre entier (impair si les sections principales des deux nicols sont parallèles, pair si elles sont croisées) le plus voisin de la racine de cette équation.

Il est important de remarquer toutefois que ce mode de calcul ne peut être exact que si l'on connaît déjà, avec une certaine approximation, les valeurs des différences des indices de la lame cristalline étudiée et que cette approximation doit être d'autant plus grande que les franges obtenues sont d'ordre plus élevé, c'est-à-dire que la lame est plus épaisse. En particulier, dans le cas actuel, le calcul effectué en partant des diverses valeurs de $n' - n$

jusqu'ici connues risquerait de ne conduire qu'à des nombres inexacts ou même inadmissibles. M. Mouton a bien indiqué une méthode élégante pour tourner cette difficulté ([1]), mais il m'a paru prudent, comme contrôle, de procéder de proche en proche. Pour une première lame de $0^{mm},38$ environ, les numéros d'ordre sont déterminés sans ambiguïté en partant des nombres de M. Mascart. Cette première lame permit de déterminer les valeurs de $n' - n$ à $\frac{1}{600}$ près environ; on se servit de ces premiers nombres pour calculer les numéros d'ordre des franges données par une lame de $0^{mm},085$ environ, ce qui a donné des valeurs de $n' - n$ exactes à $\frac{1}{1000}$ près environ. Ce sont ces nombres dont on s'est enfin servi pour effectuer les calculs définitifs relatifs à la lame de $0^{m},006$. Ces deux méthodes ont conduit du reste à des résultats concordants : pour la frange d'ordre impair (polariseur et analyseur parallèles), de longueur d'onde $\lambda = 6^{cm},6650 \times 10^{-5}$, on trouva

$$p = 163,2 \text{ (Mouton)},$$

et

$$p = 162,7 \text{ (approximations successives)}.$$

La valeur exacte de $p$ est donc 163, sans aucune ambiguïté.

IV. *Mesure de l'épaisseur*. — L'épaisseur de la lame étudiée, directement mesurée au moyen d'un excellent sphéromètre de Perreaux, à double levier, fut trouvée égale à $6^{mm},041$ à $0^{mm},001$ près, à la température de 16°. Ne pouvant malheureusement connaître la valeur absolue du pas de la vis de l'instrument, je me suis proposé de calculer directement cette épaisseur en fonction du millimètre de Fraunhofer ([2]), par la méthode de M. Mouton

---

([1]) M. Mouton (*loc. cit.*) pose $n' - n = a + \frac{b}{\lambda^2}$. Si donc on considère trois franges dont deux se trouvent vers les extrémités opposées du spectre, et la troisième vers le milieu, on a trois équations

$$\left(a + \frac{b}{\lambda^2}\right)e = p\frac{\lambda}{2}, \quad \left(a + \frac{b}{\lambda'^2}\right)e = (p+q)\frac{\lambda'}{2} \quad \text{et} \quad \left(a + \frac{b}{\lambda''^2}\right)e = (p+r)\frac{\lambda''}{2},$$

entre lesquelles on peut éliminer les produits $ae$ et $be$.

([2]) Défini par la condition que la longueur d'onde de la raie D la plus réfrangible soit égale au nombre de Fraunhofer adopté par M. Mascart, $\lambda = 5^{cm},888 \times 10^{-5}$.

légèrement modifiée. D'ailleurs, pour la plupart des applications, la connaissance des valeurs absolues de $n' - n$ est inutile.

Adoptons pour un instant, comme exacte, l'épaisseur mesurée au sphéromètre, et calculons par la méthode des moindres carrés les constantes numériques de la formule de Cauchy

$$n' - n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4}.$$

La véritable valeur $N' - N$ de la différence des indices sera, en désignant par $x$ la valeur absolue du pas de vis du sphéromètre

$$N' - N = \frac{1}{x}\left(a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4}\right).$$

Pour calculer $x$, il nous suffirait dans cette dernière formule de remplacer $N' - N$ par la différence des indices, relative à l'une quelconque des raies du spectre, déduite par exemple des expériences de M. Mascart, et $\lambda$ par la longueur d'onde correspondante, également mesurée par lui. Or, en effectuant le calcul pour chacune des raies B, C, D, E, F, G et H, on trouve pour $x$ sept valeurs différentes, dont la moyenne est

$$x = 0,9960 \pm 0,0031 \text{ (Mascart)}.$$

En partant de même des nombres obtenus par les autres observateurs, on trouve

$$x = 0,9980 \pm 0,0018 \text{ (Rudberg)},$$
$$x = 0,9961 \pm 0,0040 \text{ (Sarasin)},$$
$$x = 0,9981 \pm 0,0010 \text{ (Van der Willigen)}.$$

La moyenne générale serait 0,9970. J'ai préféré adopter comme plus probable la valeur 0,9980. Les courbes que l'on est amené à construire en prenant pour abscisses les longueurs d'onde, pour ordonnées les valeurs de $n' - n$ déduites des mesures de Rudberg et de Van der Willigen sont en effet, non seulement très régulières, mais surtout leur allure générale se rapproche beaucoup de celle de la courbe déduite des expériences actuelles. L'épaisseur de la lame devient alors

$$e = 0^{\text{cm}},6029 = 1,024\lambda_{\text{D}}.$$

Ce dernier nombre est probablement exact à $\frac{1}{1000}$ près.

C'est en partant de l'épaisseur ainsi calculée qu'on a obtenu les nombres inscrits dans le Tableau suivant :

*Tableau I.*

| $10^5\lambda$. | Numéros d'ordre. | $10^3(n'-n)$ observé. | $10^3(n'-n)$ calculé. | Différence. |
|---|---|---|---|---|
| 6,7424 | 161 | 9,0053 | 9,0064 | —11 |
| 6,6650 | 163 | 9,0125 | 9,0135 | —10 |
| 6,5904 | 165 | 9,0207 | 9,0207 | ± 0 |
| 6,5168 | 167 | 9,0282 | 9,0279 | + 3 |
| 6,4462 | 169 | 9,0374 | 9,0351 | +23 |
| 6,3050 | 173 | 9,0490 | 9,0502 | —12 |
| 5,9874 | 183 | 9,0897 | 9,0882 | +15 |
| 5,7017 | 193 | 9,1292 | 9,1275 | +17 |
| 5,4443 | 203 | 9,1685 | 9,1685 | ± 0 |
| 5,2118 | 213 | 9,2094 | 9,2101 | — 7 |
| 5,0007 | 223 | 9,2511 | 9,2529 | —18 |
| 4,8453 | 231 | 9,2852 | 9,2878 | —26 |
| 4,6678 | 241 | 9,3223 | 9,3317 | + 6 |
| 4,5027 | 251 | 9,3756 | 9,3771 | —15 |
| 4,3525 | 261 | 9,4241 | 9,4226 | +15 |
| 4,2123 | 271 | 9,4700 | 9,4690 | +10 |
| 4,0823 | 281 | 9,5164 | 9,5162 | + 2 |
| 4,0328 | 285 | 9,5348 | 9,5352 | — 4 |

Les nombres inscrits dans la quatrième colonne ont été calculés par la formule

$$10^3(n'-n) = 8,6925 + \frac{1,4585\times 10^{-9}}{\lambda^2} - \frac{1,4291\times 10^{-19}}{\lambda^4},$$

dont les coefficients ont été calculés par la méthode des moindres carrés. Les longueurs d'onde sont exprimées en centimètres. Pour une seule de dix-huit mesures effectuées, la différence entre le calcul et l'observation atteint le $\frac{1}{4000}$ de la quantité mesurée.

Pour les applications, il est préférable de substituer à l'emploi pénible de la formule celui d'un tableau numérique tel que le suivant, qui est parfaitement suffisant : l'erreur relative introduite par l'interpolation est, en effet, au plus de $\frac{1}{20000}$ pour les valeurs de $n'-n$, de $\frac{1}{6000}$ pour celles de $2\,\frac{n'-n}{\lambda}$.

*Tableau II.*

| $10^5\lambda$. | $10^3(n'-n)$. | Différence. | $2\frac{n'-n}{\lambda}$. | Différence. |
|---|---|---|---|---|
| 6,8 | 8,9986 | | 264,66 | |
| 6,7 | 9,0077 | 91 | 268,88 | 4,22 |
| 6,6 | 9,0172 | 95 | 273,24 | 4,36 |
| 6,5 | 9,0270 | 98 | 277,76 | 4,52 |
| 6,4 | 9,0374 | 104 | 282,42 | 4,66 |
| 6,3 | 9,0481 | 107 | 287,24 | 4,82 |
| 6,2 | 9,0595 | 114 | 292,24 | 5,00 |
| 6,1 | 9,0715 | 120 | 297,44 | 5,20 |
| 6,0 | 9,0839 | 124 | 302,80 | 5,36 |
| 5,9 | 9,0969 | 130 | 308,38 | 5,58 |
| 5,8 | 9,1108 | 139 | 314,16 | 5,78 |
| 5,7 | 9,1252 | 144 | 320,18 | 6,02 |
| 5,6 | 9,1403 | 151 | 326,42 | 6,24 |
| 5,5 | 9,1562 | 159 | 332,96 | 6,54 |
| 5,4 | 9,1731 | 169 | 339,74 | 6,78 |
| 5,3 | 9,1908 | 177 | 346,84 | 7,10 |
| 5,2 | 9,2097 | 189 | 354,22 | 7,38 |
| 5,1 | 9,2294 | 197 | 361,94 | 7,72 |
| 5,0 | 9,2503 | 209 | 370,00 | 8,06 |
| 4,9 | 9,2725 | 222 | 378,44 | 8,44 |
| 4,8 | 9,2958 | 233 | 387,30 | 8,86 |
| 4,7 | 9,3207 | 249 | 396,64 | 9,34 |
| 4,6 | 9,3471 | 264 | 406,38 | 9,74 |
| 4,5 | 9,3751 | 280 | 416,66 | 10,28 |
| 4,4 | 9,4049 | 298 | 427,50 | 10,84 |
| 4,3 | 9,4367 | 318 | 438,92 | 11,42 |
| 4,2 | 9,4706 | 339 | 450,98 | 12,06 |
| 4,1 | 9,5068 | 362 | 463,74 | 12,76 |
| 4,0 | 9,5454 | 386 | 477,28 | 13,54 |

La quatrième colonne donne les valeurs de l'expression $2\frac{n'-n}{\lambda}$; cette fonction, la seule véritablement utile dans les applications, ainsi que je le montrerai prochainement, a du reste une signification simple : ses valeurs entières représentent les numéros d'ordre des franges de Fizeau et Foucault que donne un quartz parallèle à l'axe de $0^m,01$ d'épaisseur.

---