LE GRAVITON EN THÉORIE FONCTIONNELLE DES CORPUSCULES

Par JEAN-LOUIS DESTOUCHES,
Institut Henri-Poincaré, Paris.

Résumé. — Équations fondamentales pour le corpuscule fondu de spin maximum 2 (graviton) en théorie fonctionnelle des corpuscules. Différentes formes de ces équations. Formes explicites. Grandeurs physiques attachées au corpuscule fondu de spin maximum 2. Équations des champs associés à un tel corpuscule. Classification de ces équations en sous-systèmes.

Abstract. — Fundamental equations for the particle of maximum spin 2 (graviton), in the functional theory of particles. Various forms of these equations. Explicit forms. Physical fields of a particle of maximum spin 2. Their equations. Classification of these equations into sub-systems.

1. **Le graviton et le photon.** — La méthode de fusion s'applique au cas d'un nombre quelconque de particules élémentaires. Mais, en dehors du cas de la fusion de deux corpuscules examiné en [1], il n'y a pour le moment qu'un autre cas physiquement intéressant : celui de la fusion de quatre corpuscules élémentaires. On montre que le corpuscule ainsi obtenu a un spin maximum 2 et comprend des états de spin 0, 1, 2. La partie spin 2 (y compris une partie spin 0) pour un corpuscule neutre de masse très faible constitue le *graviton* ; le graviton est au champ de gravitation ce que le photon est au champ électromagnétique, tandis que les parties spin 1 s'identifient avec le photon étudié en [1].

On a ainsi, en mécanique ondulatoire linéaire usuelle, une sorte de théorie unitaire de la gravitation et de l'électromagnétisme d'un type tout à fait différent des autres théories unitaires qui elles dérivent de la relativité générale. On obtient de cette façon, comme équations du champ de gravitation, l'approximation linéaire des formules d'Einstein [2].

Si nous traitons le corpuscule de spin maximum 2 en théorie fonctionnelle, c'est-à-dire par une méthode semblable à celle développée pour le photon [1] nous aurons des équations non linéaires et cette fois le rapprochement avec la théorie de la gravitation d'Einstein sera plus complet, on ne se bornera plus à l'approximation linéaire. Mais il y a plus : la théorie fonctionnelle permettra de faire un rapprochement entre la théorie unitaire corpusculaire issue de la méthode de fusion, et les théories unitaires de la gravitation et de l'électromagnétisme, notamment la dernière théorie d'Einstein qui fournit à la fois gravitation et électromagnétisme non linéaire. On obtiendra donc ainsi un pont entre les théories microphysiques et les théories issues de la relativité générale, c'est-à-dire les bases d'une théorie super-unitaire des champs et des corpuscules, de la gravitation et de l'électromagnétisme.

2. **Les équations fondamentales.** — Considérons deux corpuscules et deux anticorpuscules de Dirac. Soit

$$\mathfrak{L}\psi = 0, \qquad \mathfrak{L}^* \varphi = 0$$

l'équation de Dirac et son adjointe prises soit sous forme de Dirac, soit sous forme de von Neumann. Nous obtiendrons les opérateurs $\mathfrak{L}_A$, $\mathfrak{L}_B$, $\mathfrak{L}_C$, $\mathfrak{L}_D$ obtenus par fusion en posant

$$\mathfrak{L}_A =_d \mathfrak{L} \odot 1 \odot 1 \odot 1, \qquad \mathfrak{L}_B =_d 1 \odot \mathfrak{L}^* \odot 1 \odot 1, \qquad (1)$$
$$\mathfrak{L}_C =_d 1 \odot 1 \odot \mathfrak{L} \odot 1, \qquad \mathfrak{L}_D =_d 1 \odot 1 \odot 1 \odot \mathfrak{L}^*.$$

Les quatre équations fondamentales du corpuscule de spin maximum 2 en théorie fonctionnelle seront alors

$$\mathfrak{L}_A\, u = Q_A, \ \mathfrak{L}_B\, u = Q_B, \ \mathfrak{L}_C\, u = Q_C, \ \mathfrak{L}_D\, u = Q_D. \qquad (2)$$

Les quatre termes non linéaires Q_A, Q_B, Q_C, Q_D devront satisfaire à des conditions de compatibilité de façon que ces quatre équations admettent des solutions u convenables. Une fonction u comportera $4^4 = 256$ composantes. De cette façon, on obtient le corpuscule fondu par fusion de 4 corpuscules de Dirac. (On peut aussi l'obtenir par fusion de deux photons.)

3. **Transformation des équations.** — On peut transformer les équations (2) par des combinaisons linéaires, par exemple poser :

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{L}_A - \mathfrak{L}_B)\, u = \frac{1}{2}(Q_A - Q_B) \, ;$$
$$\frac{1}{2}(\mathfrak{L}_C - \mathfrak{L}_D)\, u = \frac{1}{2}(Q_C - Q_D) \qquad (3)$$
$$\frac{1}{2}(\mathfrak{L}_A + \mathfrak{L}_B)\, u = \frac{1}{2}(Q_A + Q_B) \, ;$$
$$\frac{1}{2}(\mathfrak{L}_C + \mathfrak{L}_D)\, u = \frac{1}{2}(Q_C + Q_D). \qquad (4)$$

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphysrad:01958001902013500

ou encore

$$\frac{1}{4}(\mathfrak{L}_A - \mathfrak{L}_B + \mathfrak{L}_C - \mathfrak{L}_D)\, u = \frac{1}{4}(Q_A - Q_B + Q_C - Q_D) \tag{5}$$

$$\frac{1}{4}(\mathfrak{L}_A - \mathfrak{L}_B - \mathfrak{L}_C + \mathfrak{L}_D)\, u = \frac{1}{4}(Q_A - Q_B - Q_C + Q_D) \tag{6}$$

$$\frac{1}{4}(\mathfrak{L}_A + \mathfrak{L}_B + \mathfrak{L}_C + \mathfrak{L}_D)\, u = \frac{1}{4}(Q_A + Q_B + Q_C + Q_D) \tag{7}$$

$$\frac{4}{1}(\mathfrak{L}_A + \mathfrak{L}_B - \mathfrak{L}_C - \mathfrak{L}_D)\, u = \frac{1}{4}(Q_A + Q_B - Q_C - Q_D) \tag{8}$$

La compatibilité entre les termes Q peut s'exprimer d'une façon analogue à celle faite pour le cas du corpuscule fondu issu de deux corpuscules de Dirac [1], par exemple en exprimant que les Q sont tels que les équations qui sont conséquences d'autres équations en théorie linéaire le demeurent encore ici. Alors en tenant compte des résultats de M$^{\text{me}}$ Tonnelat [2], on exprimera par exemple que les deux équations (3) entraînent les deux équations (4) si l'opérateur $\mathfrak{L}$ est celui de von Neumann, ou encore que (5) et l'une de (6), (7), (8) entraîne les deux autres.

La forme (5), (6), (7), (8) met en évidence les opérateurs fondamentaux du corpuscule fondu. Ils satisfont à l'équation caractéristique du spin maximum 2.

4. **Explicitation des équations.** — Il peut être utile d'expliciter les équations précédentes. Pour mieux mettre en évidence les variances dans l'espace-temps de la relativité restreinte, adoptons l'espace-temps de Minkowski avec coordonnées cartésiennes (ce qui évite de distinguer entre indices covariants et contrevariants)

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict\,;$$
$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

et prenons l'opérateur $\mathfrak{L}$ sous la forme de von Neumann en adoptant la règle de sommation selon laquelle on somme sur tout indice répété dans un produit (ici μ) :

$$\mathcal{L}_\gamma =_d \gamma_\mu \partial_\mu - \frac{M}{4}, \qquad \mathcal{L}_\gamma^+ =_d \partial_\mu \gamma_\mu^+ + \frac{M}{4} \tag{9}$$

avec

$$M = \frac{1}{\hbar}\mu_0 c, \qquad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \tag{10}$$

μ_0 est la masse du corpuscule fondu ; les opérateurs γ sont les opérateurs de von Neumann pour l'électron de Dirac.

Les équations (2) s'explicitent alors immédiatement, compte tenu des définitions (1) et de (9).

Posons

$$\Gamma_{A\mu} =_d \gamma_\mu \odot 1 \odot 1 \odot 1, \quad \Gamma_{B\mu} = 1 \odot \gamma_\mu^+ \odot 1 \odot 1,$$
$$\Gamma_{C\mu} =_d 1 \odot 1 \odot \gamma_\mu \odot 1, \quad \Gamma_{D\mu} = 1 \odot 1 \odot 1 \odot \gamma_\mu^+. \tag{11}$$

On voit immédiatement que les Γ ont leur carré égal à l'unité, que des Γ de même indice capitale anticommutent entre eux tandis que des Γ d'indice capitale différents commutent entre eux ; on a ainsi :

$$\left[\frac{1}{2}(\Gamma_{A\mu} - \Gamma_{B\mu})\,\partial_\mu - M\right] u_{iklm} = \frac{1}{2}(Q_{Aiklm} - Q_{Biklm})\,; \tag{3'}$$

$$\left[\frac{1}{2}(\Gamma_{C\mu} - \Gamma_{D\mu})\,\partial_\mu - M\right] u_{iklm} = \frac{1}{2}(Q_{Ciklm} - Q_{Diklm})$$

$$\frac{1}{2}(\Gamma_{A\mu} + \Gamma_{B\mu})\,\partial_\mu u_{iklm} = \frac{1}{2}(Q_{Aiklm} + Q_{Biklm}) \tag{4'}$$

$$\frac{1}{2}(\Gamma_{C\mu} + \Gamma_{D\mu})\,\partial_\mu u_{iklm} = \frac{1}{2}(Q_{Ciklm} + Q_{Diklm}).$$

Les équations (3′) contiennent la masse M du corpuscule tandis que (4′) ne la contiennent pas. Les premières équations de (3′) et (4′) sont les équations sous forme + et — en γ de l'un des photons composants, de même les secondes équations (3′) et (4′) sont les équations de l'autre photon composant. La compatibilité de (3′) et (4′) s'établit alors exactement de la même façon que celle établie pour le photon [1] et l'on obtient une équation entre Q_A et Q_B de forme semblable à celle obtenue pour le photon, et une autre de forme identique entre Q_A et Q_B (à noter toutefois que dans le cas du photon, en [1] la forme de Dirac pour $\mathfrak{L}$ a été adoptée tandis qu'ici, nous avons pris celle de von Neumann et qu'il faut donc passer des α aux γ).

Les équations (5) à (8) s'explicitent alors ainsi :

$$[(\Gamma_{A\mu} - \Gamma_{B\mu} + \Gamma_{C\mu} - \Gamma_{D\mu})\,\partial_\mu - M]\, u_{iklm} = (Q_{Aiklm} - Q_{Biklm} + Q_{Ciklm} - Q_{Diklm}). \tag{5'}$$

$$(\Gamma_{A\mu} - \Gamma_{B\mu} - \Gamma_{C\mu} + \Gamma_{D\mu})\,\partial_\mu u_{iklm} = (Q_{Aiklm} - Q_{Biklm} - Q_{Ciklm} + Q_{Diklm}) \tag{6'}$$

$$(\Gamma_{A\mu} + \Gamma_{B\mu} + \Gamma_{C\mu} + \Gamma_{D\mu})\,\partial_\mu u_{iklm} = (Q_{Aiklm} + Q_{Biklm} + Q_{Ciklm} + Q_{Diklm}) \tag{7'}$$

$$(\Gamma_{A\mu} + \Gamma_{B\mu} - \Gamma_{C\mu} - \Gamma_{D\mu})\,\partial_\mu u_{iklm} = (Q_{Aiklm} + Q_{Biklm} - Q_{Ciklm} - Q_{Diklm}). \tag{8'}$$

On voit que seule l'équation (5′) contient la masse M du corpuscule fondu, les trois autres équations sont indépendantes de la masse.

5. **Séparation du temps.** — On peut séparer le terme en temps dans les équations (2), c'est-à-dire les mettre sous la forme de Dirac ; nous poserons

$$\partial_{ct} =_d \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Les équations (2) s'explicitent alors en

$$\partial_{ct}\, u_{iklm} = (\alpha_{Aj}\, \partial_j + iM\, \alpha_{A4})\, u_{iklm} + Q_{Aa,iklm} \qquad (12)$$
$$(j = 1, 2, 3).$$

avec trois autres équations semblables obtenues en remplaçant l'indice A par B, C, D. On a alors

$$\Gamma_{Aj} = i\,\alpha_{A4}\,\alpha_{Aj}, \qquad \Gamma_{A4} = \alpha_{A4}$$
$$\Gamma_{Bj} = i\,\alpha_{B4}\,\alpha_{Bj}, \qquad \Gamma_{B4} = -\,\alpha_{B4}$$

et des relations semblables avec les indices C et D. Les opérateurs α se déduisent des $\boldsymbol{\alpha}$ de Dirac par fusion comme les $\boldsymbol{\Gamma}$ se déduisent des $\boldsymbol{\gamma}$ de von Neumann par les formules (11). De même, les Q_{Aa}, Q_{Ba}, Q_{Ca}, Q_{Da} se déduisent de Q_A, Q_B, Q_C, Q_D comme les α des $\boldsymbol{\Gamma}$. Par addition et soustraction, on peut répartir les équations (12) en deux groupes : l'un contenant ∂_t, équations d'évolution, l'autre ne contenant pas ∂_t, soit :

$$\partial_{ct}\, u_{iklm} = \left(\frac{\alpha_{Aj} + \alpha_{Bj}}{2}\, \partial_j + iM\,\frac{\alpha_{A4} + \alpha_{B4}}{2}\right) u_{iklm} + \frac{1}{2}\,(Q_{Aa,iklm} + Q_{Ba,iklm}) \qquad (13)$$

$$0 = \left(\frac{\alpha_{Aj} - \alpha_{Bj}}{2}\, \partial_j + iM\,\frac{\alpha_{A4} - \alpha_{B4}}{2}\right) u_{iklm} + \frac{1}{2}\,(Q_{Aa,iklm} - Q_{Ba,iklm}) \qquad (14)$$

et des équations semblables obtenues en remplaçant les indices A par C et B par D. Sous cette forme, les équations obtenues apparaissent comme issues de la fusion de deux photons. La compatibilité des équations de condition avec les équations d'évolution s'exprime alors strictement comme pour le photon dans [1].

On peut aussi faire la combinaison linéaire suivante des équations (12) :

$$\begin{aligned}\partial_{ct}\, u_{iklm} = {} & [(\alpha_{Aj} + \alpha_{Bj} + \alpha_{Cj} + \alpha_{Dj})\, \partial_j \\ & + iM(\alpha_{A4} + \alpha_{B4} + \alpha_{C4} + \alpha_4)]\, u_{iklm} \\ & + (Q_{Aa,iklm} + Q_{Ba,iklm} + Q_{Ca,iklm} + Q_{Da,iklm})\end{aligned} \qquad (15)$$

$$\begin{aligned}0 = {} & (\alpha_{Aj} + \alpha_{Bj} - \alpha_{Cj} - \alpha_{Dj})\, \partial_j \\ & + iM(\alpha_{A4} + \alpha_{B4} - \alpha_{C4} - \alpha_{D4})\, u_{iklm} \\ & + (Q_{Aa,iklm} + Q_{Ba,iklm} - Q_{Ca,iklm} - Q_{Da,iklm})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 = {} & [(\alpha_{Aj} - \alpha_{Bj} + \alpha_{Cj} - \alpha_{Dj})\, \partial_j \\ & + iM(\alpha_{A4} - \alpha_{B4} + \alpha_{C4} - \alpha_{D4})]\, u_{iklm} \\ & + (Q_{Aa,iklm} - Q_{Ba,iklm} + Q_{Ca,iklm} - Q_{Da,iklm})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 = {} & [(\alpha_{Aj} - \alpha_{Bj} - \alpha_{Cj} + \alpha_{Dj})\, \partial_j \\ & + iM(\alpha_{A4} - \alpha_{B4} - \alpha_{C4} + \alpha_{D4})]\, u_{iklm} \\ & + (Q_{Aa,iklm} - Q_{Ba,iklm} - Q_{Ca,iklm} + Q_{Da,iklm}).\end{aligned} \qquad (16)$$

L'équation (15) est une équation d'évolution tandis que les équations (16) sont des équations de condition. On peut exprimer des conditions de compatibilité sur les Q d'une façon analogue à celle faite précédemment. L'équation (15) permet de mettre en évidence l'opérateur hamiltonien

$$\mathfrak{H} = \frac{i\hbar c}{4}\,(\alpha_{Aj} + \alpha_{Bj} + \alpha_{Cj} + \alpha_{Dj})\, \partial_j + \frac{\hbar Mc}{4}\,(\alpha_{A4} + \alpha_{B4} + \alpha_{C4} + \alpha_{D4}).$$

6. **Les grandeurs physiques du corpuscule de spin 2.** — Dans la théorie de l'électromagnétisme développée en [3], les grandeurs électromagnétiques sont apparues au moyen de combinaisons linéaires convenables des fonctions d'ondes physiques u_{ij} du photon. On peut alors considérer u_{ij} comme une matrice de rang 4 et la développer sur la base des matrices γ_k ; les coefficients de ces matrices sont les grandeurs électromagnétiques.

Pour un corpuscule de spin 2, nous pouvons appliquer la même méthode et regarder l'ensemble des composantes u_{ijkl} comme constituant une matrice de rang 16. Nous développons alors cette matrice u selon une base définie à partir des opérateurs γ. Posons :

$$(\mathfrak{m}^\mu)_{ilpr} = (\gamma^\mu)_{ip} \cdot \delta_{lr}\,; \qquad (\mathfrak{n}^\mu)_{ilpr} = (\gamma^\mu)^+_{rl} \cdot \delta_{ip}.$$

Pour préciser la symétrie des différents tenseurs qu'on obtiendra, il faut symétriser la base, ce qui conduit à adopter la base de M^me^ Tonnelat [2] :

$$u_{iklm} = \sum_{\alpha\beta}^{16} [(\mathfrak{m}^\alpha\, \mathfrak{n}^\beta + \mathfrak{m}^\beta\, \mathfrak{n}^\alpha)\, \Phi_{(\alpha\beta)} + (\mathfrak{m}^\alpha\, \mathfrak{n}^\beta - \mathfrak{m}^\beta\, \mathfrak{n}^\alpha)\, \Phi_{[\alpha\beta]}]$$
$$(\alpha, \beta = 1, \ldots, 16).$$

Ayant le développement de u et des Q, il reste à remplacer u_{iklm} et les Q correspondants dans les équations d'ondes écrites avec les variables d'univers, par exemple dans (5′) et (6′). Utilisons la remarque de Mme Tonnelat selon laquelle on peut les écrire comme des produits de matrices et désignons par Q_{I} et par Q_{II} les termes non linéaires, on a :

$$\partial_\mu[(\mathfrak{m}^\mu - \mathfrak{n}^\mu)\, u - u(\mathfrak{m}^\mu - \mathfrak{n}^\mu)]_{iklm} = 4M(u)_{iklm} + Q_{\mathrm{I}})_{iklm} \qquad (18)$$

$$\partial_\mu[(\mathfrak{m}^\mu + \mathfrak{n}^\mu)\, u - u(\mathfrak{m}^\mu + \mathfrak{n}^\mu)]_{iklm} = (Q_{\mathrm{II}})_{iklm}. \qquad (18)$$

En se reportant à (5′) et (6′), on voit que

$$Q_{\mathrm{I}} = d\,\frac{1}{4}\,(Q_A - Q_B + Q_C - Q_D)$$
$$Q_{\mathrm{II}} = d\,\frac{1}{4}\,(Q_A - Q_B - Q_C + Q_D).$$

Dans (17) et (18), on devra identifier les différents produits $\mathfrak{mn}$; mais le premier membre est identique à celui des équations linéaires considérées par Mme Tonnelat ; on peut donc utiliser directement ses résultats. En effectuant cette identification, on constate que certaines grandeurs sont nulles et que les autres se répartissent en 6 groupes qu'on désigne par (S_2), (S_1), (S'_1), (S''_1), (S'_0), $(S)''_0$.

Les grandeurs nulles sont les coefficients $\Phi_\alpha^{(1)}$ et $\Phi_\alpha^{(2)}$ des termes du développement qui ne font pas intervenir des produits $\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}$ (mais seulement des produits des $\mathfrak{m}$ entre eux et des $\mathfrak{n}$ entre eux) et les ${}_+\Phi'_\mu$ et ${}_+\Phi_{[\mu\nu]}$. Ces grandeurs sont donc analogues à celles constituant les identités de M. Louis de Broglie en théorie du photon.

Les autres grandeurs se distribuent suivant les 6 groupes indiqués ci-dessus. Désignons par j le spin total. Alors à partir de (17) et (18), on obtient les systèmes d'équations où les termes en Q dérivent de Q_{I} et Q_{II} par les développements considérés ci-dessus.

7. **Le système (S_2).** — Conservons ici dans la théorie non linéaire la classification faite par Mme Tonnelat qui subsiste puisque les premiers membres des équations sont inchangés. Mais il n'y a pas séparation des divers systèmes d'équations si les Q sont quelconques. L'un de ces groupes d'équations est :

$$\underset{(S_2)}{j=2}\left\{\begin{aligned} &\partial_\mu\,\Phi_{(\nu\rho)} - \partial_\nu\,\Phi_{(\mu\rho)} = -M\,\Phi_{[\mu\nu]\rho} - Q_{[\mu\nu]\rho} \\ &\partial^\rho\,\Phi_{[\rho\mu]\nu} = -M\Phi_{(\mu\nu)} - Q_{(\mu\nu)} \\ &\partial_\mu\,\Phi_{[\rho\sigma]\nu} - \partial_\nu\,\Phi_{[\rho\sigma]\mu} = M\Phi_{([\mu\nu][\rho\sigma])} + Q_{([\mu\nu][\rho\sigma])}. \end{aligned}\right.$$

Ce système est caractérisé par un tenseur symétrique $\Phi_{(\mu\nu)}$.

Pour simplifier l'écriture, nous poserons dans tout ce qui suit :

$$\chi_A =_d M\Phi_A + Q_A \qquad (19)$$

où A désigne un groupe quelconque d'indices et de parenthèses et crochets. Les parenthèses sont placées autour des paires symétriques et les crochets autour des paires antisymétriques. Aux champs et inductions de la théorie du photon correspondent ici les Φ et les χ ; les Q joueront encore le rôle de polarisations.

Avec ces notations, le système (S_2) devient

$$\underset{(S_2)}{j=2}\left\{\begin{aligned} &\partial_\mu\,\Phi_{(\nu\rho)} - \partial_\nu\,\Phi_{(\mu\rho)} = -\chi_{[\mu\nu]\rho} && (20) \\ &\partial^\rho\,\Phi_{[\rho\mu]\nu} = -\chi_{(\mu\nu)} && (21) \\ &\partial_\mu\,\Phi_{[\rho\sigma]\nu} - \partial_\nu\,\Phi_{[\rho\sigma]\mu} = \chi_{([\mu\nu][\rho\sigma])}. && (22) \end{aligned}\right.$$

8. **Les systèmes (S_1), (S'_1), (S''_1).** — Nous avons maintenant trois groupes d'équations correspondant aux systèmes (S_1), (S'_1), (S''_1) de Mme Tonnelat [2], soit :

$$(S_1)\left\{\begin{aligned} &\partial_\mu\,\Phi_{[\nu\rho]} - \partial_\nu\,\Phi_{[\mu\rho]} = M\,\overset{+}{\Phi}_{[\mu\nu]\rho} + \overset{+}{Q}_{[\mu\nu]\rho} \\ &\partial^\rho\,\overset{+}{\Phi}_{[\rho\mu]\nu} = M\,\Phi_{[\mu\nu]} + Q_{[\mu\nu]} \\ &\partial_\mu\,\overset{+}{\Phi}_{[\rho\sigma]\nu} - \partial_\nu\,\overset{+}{\Phi}_{[\rho\sigma]\mu} = M\,\Phi_{[[\mu\nu][\rho\sigma]]} + Q_{[[\mu\nu][\rho\sigma]]} \end{aligned}\right.$$

$$(S'_1)\left\{\begin{aligned} &\partial_\mu\,{}_+\Phi_\nu^+ - \partial_\nu\,{}_+\Phi_\mu^+ = M\,\Phi'_{[\mu\nu]} + Q'_{[\mu\nu]} \\ &\partial^\rho\,\Phi'_{[\rho\mu]} = M\,{}_+\Phi_\mu^+ + {}_+Q_\mu^+ \\ &\partial_\mu\,{}_+\Phi_\nu^+ = M\,{}_0\Phi'_{\mu\nu} + {}_0Q'_{\mu\nu} \\ &\partial_\rho\,\Phi'_{[\mu\nu]} = M\,\Phi'_{[\mu\nu]\rho} + Q'_{[\mu\nu]\rho} \end{aligned}\right.$$

$$(S''_1)\left\{\begin{aligned} &\partial_\mu\,{}_+\Phi_\nu^- - \partial_\nu\,{}_+\Phi_\mu^- = M\,\Phi''_{[\mu\nu]} + Q''_{[\mu\nu]} \\ &\partial^\rho\,\Phi''_{[\rho\mu]} = M\,{}_+\Phi_\mu^- + {}_+Q_\mu^- \\ &\partial_\mu\,{}_+\Phi_\nu^- = M\,{}_0\Phi''_{\mu\nu} + {}_0Q''_{\mu\nu} \\ &\partial_\rho\,\Phi''_{[\mu\nu]} = M\,\Phi''_{[\mu\nu]\rho} + Q''_{[\mu\nu]\rho}. \end{aligned}\right.$$

Les équations (S_1) sont le pendant antisymétrique des équations (S_2).

Elles sont liées au tenseur antisymétrique $\Phi_{[\mu\nu]}$.

Les équations (S'_1) et (S''_1) sont les équations maxwelliennes du photon ou du méson étudié dans [1] et [3], avec en outre la définition de deux tenseurs $\chi''_{\mu\nu}$ et $\chi''_{[\mu\nu]\rho}$ qui apparaissent comme des gradients. Les équations (S'_1) et (S''_1) sont liées à des potentiels ${}_+\Phi_\mu^+$ et ${}_+\Phi_\mu^-$. En transposant ici un raisonnement de M. Louis de Broglie [4] pour la théorie linéaire, on peut donner du système (S_1) une forme identique à celle de (S'_1) et (S''_1).

9. **Le groupe (S'_0).** — Le groupe (S''_0) correspond à un spin nul, $j = 0$; on trouve :

$$(S'_0)\left\{\begin{aligned} &\partial_\mu\,\Phi = -M\,{}_+\Phi'_\mu - {}_+Q'_\mu \\ &\partial^\rho\,{}_+\Phi'_\rho = -M\,\Phi + Q \\ &\partial_\mu\,{}_+\Phi'_\nu = \partial_\nu\,{}_+\Phi'_\mu = M\,{}_+\Phi_{(\mu\nu)} + {}_+Q_{(\mu\nu)} \end{aligned}\right.$$

ou en introduisant les fonctions χ :

$$(S'_0)\left\{\begin{aligned} &\partial_\mu\,\Phi = -{}_+\chi'_\mu && (23) \\ &\partial^\rho\,{}_+\Phi'_\rho = -\chi && (24) \\ &\partial_\mu\,{}_+\Phi'_\nu = \partial_\nu\,{}_+\Phi'_\mu = {}_+\chi_{(\mu\nu)}. && (25) \end{aligned}\right.$$

Ce système entraîne les relations suivantes à condition d'utiliser (25) et (24) :

$$\partial^\rho\,{}_+\chi_{(\rho\mu)} = -\partial_\mu\,\chi$$

$${}_+\chi_{\mu\mu} = -\chi.$$

Ce groupe (S'_0) fait intervenir l'invariant χ.

On démontre aussi que du groupe (S_2) on peut extraire un groupe (S''_0) de structure analogue à (S'_0).

10. **Non séparation des groupes d'équations.** — Tandis qu'en théorie linéaire, chaque groupe d'équations est séparé des autres et constitue un système indépendant, ici au contraire, si les termes Q sont laissés quelconques, ces groupes ne constituent pas des systèmes indépendants car ils sont liés par les termes Q.

On vérifie aisément que chaque grandeur Φ_α

ou χ_α intervenant dans la théorie satisfait à une équation de propagation de la forme

$$\Box \Phi_\alpha = M^2 \Phi_\alpha + \mathcal{Q}(\Phi_\alpha) ; \quad \Box \chi_\alpha = M^2 \chi_\alpha + \mathcal{Q}(\chi_\alpha)$$

où $\mathcal{Q}(\Phi_\alpha)$ et $\mathcal{Q}(\gamma_\alpha)$ désignent des expressions analytiques des Q_β qui dépendent de la grandeur Φ_α ou γ_α considérée. Le calcul de ces $\mathcal{Q}(\Phi_\alpha)$ et $\mathcal{Q}(\chi_\alpha)$ se fait sans difficulté.

Le résultat de la théorie linéaire selon lequel un corpuscule de spin maximum 2 comprend un graviton, 3 photons, 2 corpuscules à spin nul, se maintient en théorie non linéaire, mais en général il n'y a pas de séparation entre ces divers états de spin ; en général aussi, les 3 photons n'auront pas les mêmes termes non linéaires si l'on ne fait pas d'hypothèses particulièrees sur les termes Q ; il en sera de même pour les deux groupes à spin nul.

Manuscrit reçu le 31 octobre 1957.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AESCHLIMANN (F.), *J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 523 et 562; Recherches sur la notion de système physique. Thèse de Doctorat ès Sciences, Paris, juin 1957.

[2] TONNELAT (M. A.), *Ann. Physique*, 2e s., 1942, **17**, 158-208.

[3] AESCHLIMANN (F.) et DESTOUCHES (J.-L.), *J. de Physique Rad.*, 1957, **18**, 632.

[4] BROGLIE (L. de), *C. R. Acad. Sc.*, 1941, **212**, 657.