

SUR LA THÉORIE ONDULATOIRE DES ÉLECTRONS POSITIFS ET NÉGATIFS

Par AL. PROCA.

Institut Henri Poincaré, Paris.

Sommaire — Les principales difficultés *analytiques* que rencontre la théorie des positons de Dirac sont dues à l'existence des solutions à énergie négative. Se basant sur l'exemple de l'équation de Gordon, analysé par Pauli et Weisskopf, l'auteur essaie d'établir une théorie d'où ces difficultés soient exclues. Pour cela, il cherche d'abord une équation fondamentale qui présente à la fois les caractéristiques de celle de Gordon (énergie toujours *positive*, charge des deux signes) et de celle de Dirac (existence d'un spin et d'un moment électromagnétique).

L'auteur pose a priori certaines conditions que devrait remplir la théorie et trouve les équations fondamentales. Il montre ensuite que la théorie a les caractéristiques suivantes : elle est invariante du point de vue de la relativité et présente également l'invariance de jauge; le passage au cas d'un champ se fait à la manière usuelle; la fonction d'onde n'a que quatre composantes complexes (qui forment un vecteur d'univers); il est possible de définir un courant qui satisfait à une équation de conservation, et une charge qui peut être positive ou négative, de sorte que la théorie embrasse aussi bien le cas des électrons positifs que celui des électrons négatifs; on peut former un tenseur symétrique d'énergie-quantité d'un moment satisfaisant à une équation de continuité et tel que l'énergie soit toujours positive; et enfin on peut définir le moment magnétique de la particule ainsi que son spin.

Introduction. — La théorie des « trous » de Dirac est actuellement la seule qui permette des prévisions sur le comportement des positons; la découverte expérimentale de ces derniers en a confirmé l'hypothèse fondamentale et a montré que l'équation proposée rendait compte aussi bien des électrons positifs que des électrons négatifs. Toutefois les difficultés qu'elle rencontre restent considérables; sans parler des énergies propres infinies, la structure même de la théorie en fait surgir d'autres, dont le moindre inconvénient est de rendre très malaisée l'analyse des cas les plus simples.

On sait en quoi consistent ces difficultés. Pour décrire un positon. On a besoin de postuler l'existence d'une densité uniforme mais infinie d'électrons négatifs, sans interaction mutuelle. Seuls les écarts à partir de cette distribution uniforme doivent être considérés comme observables; toute place inoccupée sur un niveau d'énergie *négative*, tout « trou », constitue un positon.

On a souvent souligné ce qu'il y a de difficilement acceptable, du point de vue physique, dans l'hypothèse d'une distribution infinie d'électrons. Du point de vue mathématique elle nous oblige constamment à évaluer des différences entre des quantités dont nous savons à l'avance qu'elles sont infinies. Et cependant les résultats qu'on a pu obtenir jusqu'à présent semblent bien montrer que cette théorie représente correctement la réalité.

Indubitablement, les difficultés précédentes sont dues aux solutions de l'équation de Dirac caractérisées par une énergie cinétique négative. Ces solutions n'ont pas de sens physique. Pour les relier à quelque chose ayant un tel sens il faut faire des suppositions d'un

caractère nécessairement artificiel, comme par exemple l'hypothèse d'une densité infinie d'électrons. Il est très probable que si l'équation de l'électron excluait automatiquement ce type de solution, toute difficulté de ce genre s'évanouirait. Nous en avons même un commencement de preuve. MM. Pauli et Weisskopf, dans un mémoire fondamental ⁽¹⁾, ont remarqué que si la fonction d'onde de l'électron était donnée par l'équation relativiste de Gordon, aucune des difficultés précédentes ne serait à craindre.

En effet d'après la théorie de Gordon l'énergie de la particule élémentaire est toujours positive, tandis que sa charge peut être aussi bien positive que négative. La même équation représente à la fois les négatons et les positons, sans qu'il soit besoin de recourir à l'hypothèse de l'existence d'une densité infinie d'électrons. De plus, Pauli et Weisskopf ont montré que les résultats qu'on obtient dans le problème de la production des paires pour les grandes énergies ou dans celui de la polarisation du vide sont *les mêmes*, que l'on parte de l'équation de Gordon ou de l'hypothèse des « trous ».

En face du problème du positon deux attitudes sont donc possibles : celle de Dirac, Heisenberg, etc., — qui prennent comme point de départ l'équation de Dirac (énergie de deux signes, charge toujours positive); ou celle de Pauli et Weisskopf, — qui préconisent l'emploi d'une autre équation conduisant à une énergie positive et à une charge de deux signes.

Il est clair que les faits expérimentaux seraient en faveur de cette seconde manière de voir si l'on connaissait une équation de départ convenable, équivalente dans ses conséquences à celle de Dirac.

⁽¹⁾ *Helvetica Physica Acta*, 1934, vol. 7, fasc. 7, p. 709. Voir aussi une conférence de W. Pauli, *Annales de l'Institut Henri-Poincaré* (sous presse).

L'équation de Gordon employée par Pauli et Weisskopf ne convient pas. Elle ne rend pas compte du spin de l'électron et c'est là probablement son plus grave défaut. Cela a comme conséquence le fait que le traitement indiqué par ces auteurs ne peut s'appliquer que si l'on admet pour les particules en question la statistique de Bose-Einstein, ce qui est manifestement incorrect. Il est impossible (Pauli, *loc. cit.*,) d'employer avec l'équation de Gordon la statistique de Fermi-Dirac, comme on devrait pouvoir le faire.

Si l'on veut donc procéder comme ces auteurs, la première des choses à faire consiste à trouver une autre équation que celle de Gordon qui jouisse des propriétés de cette dernière et soit mieux adaptée qu'elle à la description d'un électron. Il y a donc lieu de reprendre les raisonnements qui ont conduit Dirac à établir son équation et à les modifier de façon à en obtenir une autre plus satisfaisante.

2. Conditions à remplir par l'équation fondamentale. — A la lumière des découvertes expérimentales récentes, l'obtention d'une équation de ce genre ne semble pas impossible *a priori*; examinons quelles doivent être les principales conditions qu'elle aurait à remplir.

Remarquons d'abord que l'argumentation de Dirac, qui l'avait conduit à établir son équation à une époque où l'on ne connaissait pas l'existence et les propriétés du positon, n'est plus convaincante aujourd'hui quand on connaît le phénomène de la production et d'annihilation des paires. La discussion correspondante a été faite par Pauli et Weisskopf qui ont remarqué :

1° Qu'à cause de la production des paires il n'est plus possible de se limiter en mécanique quantique au problème d'un seul électron; les résultats expérimentaux connus ne peuvent coïncider qu'avec les prévisions théoriques déduites de la résolution d'un problème de plusieurs corps.

2° Qu'il n'y a plus de sens physique à parler d'une densité de particules; la densité de charge par contre, ainsi que la charge elle-même, conservent un sens physique précis et sont des quantités observables. La charge comprise dans un volume donné, considérée comme opérateur, a des valeurs propres proportionnelles aux nombres entiers *positifs* et *négatifs*.

Il résulte de ces remarques qu'il n'y a plus aucune raison valable pour postuler comme forme particulière de la densité de charge

$$\sum_r \psi_r^* \psi_r \quad (4)$$

ainsi que le fait Dirac pour établir son équation. Une conséquence immédiate en est que l'équation fondamentale ne doit plus être nécessairement *linéaire* en $\partial \psi_r / \partial t$: l'équation de Gordon est bien dans ce cas. Nous verrons au paragraphe suivant de quelle manière on peut utiliser le raisonnement de Dirac pour établir la nouvelle équation.

Quoi qu'il en soit, cette nouvelle équation doit satisfaire aux conditions ci-après :

1. — Elle doit présenter l'invariance relativiste et électromagnétique (invariance de jauge).

2. — La fonction d'onde ne doit avoir que quatre composantes. En effet, quatre composantes suffisent dans la théorie de Dirac pour rendre compte des phénomènes connus et il n'y a aucune raison de dépasser ce nombre. Au surplus, il semble facile d'établir une théorie à un plus grand nombre de composantes, mais il est clair qu'une pareille tentative serait sans intérêt tant que l'expérience ne nous l'aura pas imposée.

3. — Le passage au cas de l'existence d'un champ extérieur doit se faire comme toujours en ajoutant aux opérateurs $\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_r}$ les opérateurs Φ_r du potentiel de ce champ. Il n'y a aucune raison de renoncer à cette condition qui s'impose pour des raisons de correspondance.

4. — On doit pouvoir former un vecteur d'univers représentant la densité de courant et de charge.

5. — En vertu de l'équation fondamentale, ce courant doit satisfaire à une loi de conservation, aussi bien en présence qu'en absence d'un champ.

6. — La composante de temps de ce vecteur, — la densité de charge, — doit pouvoir être positive ou négative. Cette condition est essentielle.

7. — On doit pouvoir former un tenseur symétrique du second rang représentant le tenseur densité d'énergie — quantité de mouvement.

8. — En vertu de l'équation fondamentale ce tenseur doit satisfaire à une loi de conservation de la forme $\sum_r \frac{\partial T_{rk}}{\partial x_r} = 0$ dans le vide, ou $\sum_r \frac{\partial T_{rk}}{\partial x_r} = - \sum_r j_r F_{rk}$ où j_r est le courant et F_{rk} le champ extérieur.

9. — La densité d'énergie doit pouvoir être positive ou nulle, son expression devra donc être une forme définie positive, cela aussi bien en présence qu'en absence d'un champ extérieur. Cette condition est essentielle.

10. — On doit pouvoir mettre en évidence l'existence d'un spin et d'un moment magnétique.

3. Indications pour le choix d'une équation fondamentale. — Les raisonnements par lesquels on arrive à l'équation fondamentale ne peuvent avoir un caractère absolu; ils ne servent, en fait, qu'à guider notre choix. Une fois ce choix fait, on postule l'équation trouvée et l'on justifie ce postulat par les résultats obtenus. Il en était ainsi d'ailleurs dans la théorie de Dirac et certains raisonnements employés à cette occasion, convenablement modifiés, peuvent encore servir.

Notre point de départ est la condition 9 suivant laquelle la densité d'énergie doit être représentée par une forme positive définie

$$\sum_r \Phi_r^* \Phi_r$$

où les Φ_r peuvent être soit les composantes d'une fonction que nous appellerons la « fonction d'onde », soit plus généralement des *fonctions de celles-ci*. La conservation de l'énergie s'exprimera par

$$\frac{d}{dt} \int \Sigma \Phi_r^* \Phi_r = \int \Sigma \left(\frac{\partial \Phi_r^*}{\partial t} \Phi_r + \Phi_r^* \frac{\partial \Phi_r}{\partial t} \right) dv = 0,$$

l'intégrale étant étendue à un volume convenable ou bien à tout l'espace. On pourrait en déduire comme en théorie de Dirac (1) qu'à un instant déterminé on ne peut assigner simultanément des valeurs arbitraires à

$$\partial \Phi_r^* / \partial t, \partial \Phi_r / \partial t \text{ et à } \Phi_r^*, \Phi_r.$$

Donc les Φ satisfont des équations linéaires en $\partial/\partial t$ et, par symétrie, linéaires aussi en $\partial/\partial x_r$.

D'autre part, la relation fondamentale

$$\left(\frac{W}{c} \right)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2 c^2$$

conduit à l'équation du second ordre

$$\square \Phi_r - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Phi_r = 0 \quad (2)$$

et il est naturel de postuler comme en théorie de Dirac que celle-ci est satisfaite dans le cas de l'absence de champ.

Nous devons donc linéariser (2) c'est-à-dire trouver un système d'équations dont (2) soit la conséquence. Or, seule la solution de Dirac conduit à une véritable *linéarisation* et celle-ci ne convient pas à notre problème. On en déduit que les Φ_r ne sont pas les « fonctions d'onde », ou plutôt que l'expression de l'énergie ne contiendra pas *uniquement* des termes dépendant directement des fonctions d'onde ψ_s . Il y aura aussi des termes qui seront nécessairement des combinaisons des ψ_s et des $\partial/\partial x_r$ et l'ensemble permettra une sorte de « linéarisation » ; un exemple, fera mieux saisir en quoi elle consiste. Prenons comme équation à linéariser

$$\square \Phi_r - k^2 \Phi_r = 0 \quad (r = 0, 1, 2, 3). \quad (2)$$

Le système

$$\Phi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \Phi_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \Phi_3 = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \Phi_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = k^2 \psi \quad (4)$$

où ψ est un scalaire a comme conséquence la relation (2); il suffit de dériver (4) et d'y substituer (3). Il est clair cependant que l'équation fondamentale reste celle du second ordre qui définit ψ

$$\square \psi = k^2 \psi; \quad (5)$$

les Φ_r s'en déduisent par des équations du premier ordre.

(1) PAULI. *Handbuch der Physik*, vol. 19, p. 247.

Quoi qu'il en soit, si l'on se donne le *scalaire* complexe ψ satisfaisant à (5), on pourra en déduire les Φ_r par (3), et, par conséquent, écrire un tenseur du second rang dont la composante de temps

$$\Phi_0^* \Phi_0 + \sum_{r=1}^3 \Phi_r^* \Phi_r + \hbar^2 \psi^* \psi, \quad (6)$$

sera une forme positive définie. Cela montre qu'on peut établir de cette façon une théorie d'une particule à énergie positive.

L'équation fondamentale (5) est l'équation de Gordon et la théorie correspondante a été développée par Pauli et Weisskopf. Elle remplit bien les conditions du paragraphe précédent, *sauf 2 et 10*. En généralisant le procédé précédent, nous trouverons un autre système qui satisfasse aussi à ces deux dernières conditions.

Dans l'exemple précédent le ψ , la fonction d'onde, est un scalaire. Or, nous avons besoin d'une grandeur à quatre composantes complexes. On peut prendre deux spineurs ψ_r, χ_s . On pourrait prendre un vecteur complexe formé en combinant les quatre composantes des deux vecteurs réels a_{rs}, b_{rs} . On pourrait aussi prendre les $2 \times 2 = 4$ composantes complexes d'un spineur du second rang g_{rs} et là s'arrêtent les possibilités simples(1).

La solution par deux spineurs est la solution de Dirac qui ne convient pas. Ensuite, se donner un g_{rs} revient à se donner un tenseur antisymétrique du second rang à composantes réelles (2) et deux invariants. Enfin la dernière solution, celle qui prend comme fonction d'onde un vecteur, est la plus simple; c'est celle que nous allons adopter.

L'exemple précédent est complètement caractérisé lorsqu'on se donne la fonction de Lagrange correspondante, qui est, d'après Gordon,

$$L = \hbar^2 c^2 \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + m^2 c^4 \psi^* \psi \quad (\mu = 1, \dots, 4).$$

Le tenseur densité d'énergie

$$T_{\mu\nu} = \hbar^2 c^2 \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right) + L \cdot \delta_{\mu\nu},$$

les équations, etc., s'en déduisent immédiatement. Cherchons le L possible dans le cas d'une fonction d'onde vecteur d'univers ψ_r . L est un invariant; il apparaît additivement dans l'expression T_{44} et par conséquent sera constitué, comme l'énergie, par une somme de termes de la forme A^*A . Parmi ceux-ci il y en aura : 1° des termes contenant explicitement les composantes de la fonction ψ ; la combinaison invariante la plus simple qu'ils puissent former est

$$\sum \psi_r^* \psi_r;$$

(1) On pourrait cependant prendre des grandeurs à plusieurs indices en leur imposant certaines conditions de symétrie; par ex. g_{rst} , antisymétrique en s et t , n'a que quatre composantes non nulles.

(2) Cf. LAPORTE et UHLENBECK. *Physical Review* (1930), p. 4587.

et 2°) des termes formés en combinant $\partial/\partial x_r$ et ψ_r . La combinaison la plus simple serait la divergence $A = \partial\psi_r/\partial x_r$; on constate qu'elle ne convient pas. Le second degré de complication serait $A =$ un tenseur du second rang du type $\partial\psi_r/\partial x_s$ et plus particulièrement celui qui a le nombre minimum de composantes, à savoir le *rotationnel* du vecteur ψ_r :

$$A_{rs} = \frac{\partial\psi_s}{\partial x_r} - \frac{\partial\psi_r}{\partial x_s};$$

Le Lagrangien le plus simple sera donc de la forme

$$L = \sum_{rs} A_{rs}^* A_{rs} + k^2 \sum_r \psi_r^* \psi_r,$$

où k est une constante que nous prendrons, pour des raisons qui apparaîtront par la suite, proportionnelle à la masse propre. Nous écrirons explicitement, par hypothèse, pour le cas de l'absence de champ

$$L = \frac{\hbar^2 c^2}{2} \left(\frac{\partial\psi_s^*}{\partial x_r} - \frac{\partial\psi_r^*}{\partial x_s} \right) \left(\frac{\partial\psi_s}{\partial x_r} - \frac{\partial\psi_r}{\partial x_s} \right) + m^2 c^4 \psi_r^* \psi_r$$

avec la convention de sommation habituelle. Le Lagrangien pour le cas d'un champ extérieur se déduira du précédent par la règle connue (condition 3).

* * *

4. Notations. Fonction de Lagrange. — Pour des raisons qui seront évidentes dans un instant, nous n'adopterons pas des notations analogues à celles employées en théorie de Dirac; il n'y aurait à le faire aucune difficulté, mais pas d'avantage immédiat.

Considérons donc un vecteur $\psi_r = a_r + i b_r$ et son complexe conjugué $\psi^* = a_r - i b_r$. Nous pouvons développer la théorie dans l'univers défini par $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_0 = ct$. Pour la symétrie des formules il est cependant avantageux d'admettre une quatrième coordonnée imaginaire; toutefois, il faut dans ce cas prendre certaines précautions pour obtenir les conditions de réalité correctes.

Il suffira pour cela d'écrire les coordonnées sous la forme

$$x_1 = x; \quad x_2 = y; \quad x_3 = y; \quad x_4 = \epsilon ct. \quad (7)$$

ϵ étant une unité complexe telle que $\epsilon^2 = -1$, commutable avec l'autre unité imaginaire i qui apparaît dans l'expression des ψ_r . Il sera donc faux d'écrire $\epsilon i = -1$, mais on aura $\epsilon i = i \epsilon$. *L'astérisque indiquant le complexe conjugué, change le signe de i mais pas celui de ϵ .* Les composantes d'espace de ψ_r seront $a_r + i b_r$, a_r, b_r réels ($r = 1, 2, 3$), et la composante de temps $\psi_4 = \epsilon a'_4 + i \epsilon b'_4$ avec a'_4, b'_4 réels. La complication introduite par l'emploi de deux unités complexes est rachetée par l'avantage de la symétrie. D'ailleurs, ϵ disparaîtra toujours lorsqu'on passera à la variable t ; au surplus, pour plus de clarté nous éviterons d'employer l'astérisque pour des fonctions des ψ^* ; nous indiquerons

par des lettres différentes cette fonction et sa complexe conjuguée.

Posons enfin

$$\partial_r = \frac{\partial}{\partial x_r}; \quad (r = 1, 2, 3, 4). \quad (8)$$

Cela étant, considérons le cas de l'absence de champ. Nous poserons

$$F'_{rs} = \partial_r \psi_{s1}^* - \partial_s^* \psi_r, \quad G'_{rs} = \partial_r \psi_s - \partial_s \psi_r^*; \quad (9)$$

F'_{rs} et G'_{rs} sont complexes conjuguées; elles contiennent un ϵ en facteur chaque fois que l'un des indices r ou s est égal à 4.

Par hypothèse, le Lagrangien du problème sera dans ce cas

$$L = \frac{\hbar^2 c^2}{2} F'_{rs} G'_{rs} + m^2 c^4 \psi_r^* \psi_r \quad (10)$$

\hbar étant la constante de Planck divisée par 2π .

On passe au cas où il existe un champ, défini par un potentiel

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4 = \epsilon \Phi_0 \quad (\Phi_0, \dots, \Phi_3 \text{ réels}) \quad (11)$$

par les substitutions (1).

$$\frac{\partial\psi_r}{\partial x_s} \rightarrow \frac{\partial\psi_r}{\partial x_s} - \frac{ie}{\hbar c} \Phi_s \psi_r, \quad \frac{\partial\psi_r^*}{\partial x_s} \rightarrow \frac{\partial\psi_r^*}{\partial x_s} + \frac{ie}{\hbar c} \Phi_s \psi_r^*. \quad (12)$$

Pour simplifier l'écriture posons :

$$A_s = \frac{e}{\hbar c} \Phi_s \quad (13)$$

$$k = \frac{mc}{\hbar}. \quad (14)$$

Posons encore

$$\left. \begin{aligned} F_{rs} &= (\partial_r + iA_r) \psi_s^* - (\partial_s + iA_s) \psi_r^* \\ G_{rs} &= (\partial_r - iA_r) \psi_s - (\partial_s - iA_s) \psi_r \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

F_{rs}, G_{rs} sont des tenseurs antisymétriques du second rang. La fonction de Lagrange dans le cas d'un champ s'écrit alors, avec la convention de sommation habituelle :

$$L = \frac{\hbar^2 c^2}{2} F_{rs} G_{rs} + m^2 c^4 \psi_r^* \psi_r. \quad (16)$$

5. Equations fondamentales. — Les moments sont

$$\frac{\partial L}{\partial (\partial_r \psi_s)} = \hbar^2 c^2 F_{rs} \quad \frac{\partial L}{\partial (\partial_r \psi_s^*)} = \hbar^2 c^2 G_{rs}.$$

Ensuite, on a

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_s} = m^2 c^4 \psi_s^* - i \hbar^2 c^2 A_r F_{rs} \quad \left| \frac{\partial L}{\partial \psi_s^*} = m^2 c^4 \psi_s + i \hbar^2 c^2 A_r G_{rs} \right.$$

$$\frac{\partial L}{\partial A_s} = i \hbar^2 c^2 (\psi_r F_{rs} - \psi_r^* G_{rs}).$$

(1) Nous adoptons la convention de Pauli et Weisskopf pour le signe de e , cf. *loc. cit.*, p. 722.

Les équations fondamentales

$$\partial^r \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_r \psi_s)} \right] = \frac{\partial L}{\partial \psi_s} \quad \partial^r \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_r \psi_s^*)} \right] = \frac{\partial L}{\partial \psi_s^*} \quad (20)$$

prennent la forme

$$\boxed{(\partial_r + iA_r) F_{rs} = k^2 \psi_s^* \quad (\partial_r - iA_r) G_{rs} = k^2 \psi_s} \quad (21)$$

auxquelles il convient d'ajouter les équations (14) de définition des grandeurs intermédiaires F_{rs} et G_{rs} .

Elles ont la forme des équations de Maxwell (pour un « potentiel » imaginaire) complétées par des éléments représentant l'influence du champ extérieur ; on peut déduire de ce fait un certain nombre de conséquences que nous négligeons pour l'instant.

Elles présentent bien l'invariance relativiste et électromagnétique ; les trois premières conditions du paragraphe 2 sont donc remplies

Éliminons F_{rs} , G_{rs} . On a en général

$$\left. \begin{aligned} (\partial^r - iA^r) (\partial^s - iA^s) - (\partial^s - iA^s) (\partial^r - iA^r) \\ = -i (\partial^r A^s - \partial^s A^r) \\ (\partial^r + iA^r) (\partial^s + iA^s) - (\partial^s + iA^s) (\partial^r + iA^r) \\ = +i (\partial^r A^s - \partial^s A^r). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Posons

$$\left. \begin{aligned} \square_+ = \sum_{\mu=1}^4 (\partial_\mu + iA_\mu)^2 \quad \square_- = \sum_{\mu=1}^4 (\partial_\mu - iA_\mu)^2 \\ J = \sum_{\mu=1}^4 (\partial_\mu + iA_\mu) \psi_\mu^* \quad I = \sum_{\mu=1}^4 (\partial_\mu - iA_\mu) \psi_\mu \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$H_{rs} = \frac{hc}{\theta} (\partial_r A_s - \partial_s A_r). \quad (24)$$

Les équations fondamentales deviennent

$$\left. \begin{aligned} \square_+ \psi_s^* - (\partial_s + iA_s) J = \left(k^2 \delta_{rs} + \frac{ie}{hc} H_{rs} \right) \psi_r^* \\ \square_- \psi_s - (\partial_s - iA_s) I = \left(k^2 \delta_{rs} + \frac{ie}{hc} H_{rs} \right) \psi_r \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Dans le cas de l'absence de champ et pourvu que k , donc la masse de la particule, ne soit pas nulle, condition essentielle, on déduit que

$$I = J = 0. \quad (26)$$

En effet, (25) deviennent dans ce cas

$$\square_+ \psi_s^* - \partial_s J = k^2 \psi_s^* \quad \square_- \psi_s - \partial_s I = k^2 \psi_s$$

et en appliquant l'opérateur $\sum_s \partial_s$, on déduit le résultat annoncé (21).

Donc, en absence de champ, les équations sont des équations du type de Gordon

$$\left. \begin{aligned} \square_+ \psi_s^* = k^2 \psi_s^* \\ \square_- \psi_s = k^2 \psi_s \end{aligned} \right\} \text{avec} \begin{cases} \partial_s \psi_s^* = \partial_s \psi_s = 0 \\ k = \frac{mc}{h}. \end{cases} \quad (27)$$

Dans le cas général, appliquons l'opérateur $\sum_s \partial_s$ à (21) ; on aura :

$$- \frac{ie}{2hc} F_{rs} \cdot H_{rs} = k^2 J \quad \frac{ie}{2hc} G_{rs} \cdot H_{rs} = k^2 I,$$

donc, si $k = 0$ et seulement dans ce cas :

$$J = - \frac{ieh}{2mc} \cdot \frac{1}{mc^2} F_{rs} \cdot H_{rs}, \quad I = \frac{ieh}{2mc} \cdot \frac{1}{mc^2} G_{rs} \cdot H_{rs}. \quad (28)$$

Remarquons tout de suite d'autres relations intéressantes.

En vertu de (17) les $\frac{\partial L}{\partial (\partial_r \psi_s)}$ sont des tenseurs *antisymétriques* ; on a donc

$$\partial^r \partial^s \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_r \psi_s)} \right] = \partial^r \partial^s \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_r \psi_s^*)} \right] = 0.$$

Les équations fondamentales permettent d'en déduire

$$\partial^s \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_s} \right) = \partial^s \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_s^*} \right) = 0. \quad (29)$$

6. Existence et conservation du courant. — Nous définissons le courant, comme l'a fait Gordon d'après Mie, au moyen de la dérivée de la fonction de Lagrange par rapport au potentiel, changée de signe

$$j_s = - \frac{\partial L}{\partial A_s} = - \frac{e}{hc} \frac{\partial L}{\partial A_s} \quad (30)$$

soit, en vertu de (19)

$$j_s = iehc (\psi_r^* G_{rs} - \psi_r F_{rs}). \quad (31)$$

Il est clair que (30) est un vecteur d'univers.

Il satisfait toujours à une loi de conservation $\partial^s j_s = 0$. En effet, on a

$$\partial^s j_s = iehc (\partial_s \psi_r^* \cdot G_{rs} + \psi_r^* \cdot \partial_s G_{rs} - \partial_s \psi_r \cdot F_{rs} - \psi_r \cdot \partial_s F_{rs}),$$

En vertu des équations fondamentales cela est égal à

$$= iehc [G_{rs} (\partial_s + iA_s) \psi_r^* - F_{rs} (\partial_s - iA_s) \psi_r]$$

et en vertu du caractère antisymétrique de F_{rs} , G_{rs}

$$= iehc \left[\frac{G_{rs} \cdot F_{sr}}{2} - \frac{F_{rs} \cdot G_{sr}}{2} \right] = 0.$$

Il existe donc un vecteur j_s satisfaisant à une loi de conservation ; pour que nous puissions affirmer qu'il représente bien un courant, il faut encore que, combiné avec le champ électromagnétique il fournisse bien l'expression de la force telle qu'elle résulte de la divergence du tenseur d'énergie ; nous montrerons qu'il en est bien ainsi.

En tout cas, la composante de temps est

$$j_4 = iehc (\psi_r^* G_{r4} - \psi_r F_{r4}); \quad (32)$$

elle peut prendre des valeurs aussi bien positives que négatives.

7. Tenseur énergie-quantité de mouvement et loi de conservation. — Pour établir à la fois l'expression de ce tenseur et sa loi de conservation procédons comme Schrödinger. Dérivons la fonction de Lagrange par rapport à x_i , ρ quelconque; on aura :

$$\begin{aligned} \partial_\varphi L = & \frac{\partial L}{\partial(\partial_r \psi_s)} \cdot \partial_{r\varphi}^2 \psi_s + \frac{\partial L}{\partial(\partial_r \psi_s^*)} \cdot \partial_{r\varphi}^2 \psi_s^* \\ & + \frac{\partial L}{\partial \psi_s} \cdot \partial_\varphi \psi_s + \frac{\partial L}{\partial \psi_s^*} \cdot \partial_\varphi \psi_s^* + \frac{\partial L}{\partial A_s} \cdot \partial_\varphi A_s, \end{aligned}$$

donc en vertu des équations fondamentales :

$$\begin{aligned} \partial_\varphi L = \partial_r (L \delta_{r\varphi}) = \partial_r \left\{ \frac{\partial L}{\partial(\partial_r \psi_s)} \cdot \partial_\varphi \psi_s + \frac{\partial L}{\partial(\partial_r \psi_s^*)} \cdot \partial_\varphi \psi_s^* \right\} \\ + \frac{\partial L}{\partial A_s} \cdot \partial_\varphi A_s. \end{aligned}$$

Soit H_{rs} le champ électromagnétique extérieur et j_s le courant

$$j_s = - \frac{e}{hc} \frac{\partial L}{\partial A_s}. \quad (30)$$

Nous avons démontré que $d^s j_s = 0$; donc

$$H_{\varphi s} j_s = - \frac{\partial L}{\partial A_s} \cdot \partial_\varphi A_s + \partial_s \left(\frac{\partial L}{\partial A_s} A_\varphi \right). \quad (33)$$

Ajoutons (32) et (33); il vient en tenant compte des équations fondamentales

$$\begin{aligned} H_{\varphi s} \cdot j_s = \partial^r \left\{ \frac{\partial L}{\partial(\partial_r \psi_s)} \cdot \partial_\varphi \psi_s + \frac{\partial L}{\partial(\partial_r \psi_s^*)} \cdot \partial_\varphi \psi_s^* \right. \\ \left. + \frac{\partial L}{\partial A_r} \cdot A_\varphi - \delta_{r\varphi} L \right\} \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{\varphi s} \cdot j_s = \partial^r \left\{ h^2 c^2 F_{rs} \cdot (\partial_\varphi - i A_\varphi) \psi_s \right. \\ \left. + h^2 c^2 G_{rs} (\partial_\varphi + i A_\varphi) \psi_s^* - \delta_{r\varphi} L \right\}. \quad (35) \end{aligned}$$

Or, on voit facilement que l'on a l'identité

$$\begin{aligned} 0 \equiv \partial^r \left\{ \frac{\partial L}{\partial(\partial_r \psi_s)} \cdot \partial_s \psi_\varphi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_r \psi_s^*)} \cdot \partial_s \psi_\varphi^* \right. \\ \left. - \frac{\partial L}{\partial \psi_r} \cdot \psi_\varphi - \frac{\partial L}{\partial \psi_r^*} \cdot \psi_\varphi^* \right\}; \quad (36) \end{aligned}$$

il suffit de tenir compte de (29) et du fait que les $\frac{\partial L}{\partial(\partial_r \psi_s)}$, sont antisymétriques.

En explicitant (36) à l'aide des formules fondamentales (17) et (18) on a

$$\begin{aligned} 0 \equiv \partial^r \left\{ h^2 c^2 F_{rs} \cdot (\partial_s - i A_s) \psi_\varphi + h^2 c^2 G_{rs} \cdot (\partial_s + i A_s) \psi_\varphi^* \right. \\ \left. - m^2 c^4 (\psi_r^* \psi_\varphi + \psi_r \psi_\varphi^*) \right\}. \quad (37) \end{aligned}$$

Retranchons (37) de (35); il vient en vertu de (15)

$$\begin{aligned} H_{\varphi s} \cdot j_s = \partial^r \left\{ h^2 c^2 (F_{rs} \cdot G_{\varphi s} + G_{rs} \cdot F_{\varphi s}) \right. \\ \left. + m^2 c^4 (\psi_r^* \psi_\varphi + \psi_r \psi_\varphi^*) - \delta_{r\varphi} L \right\} \quad (38) \end{aligned}$$

soit

$$\partial^r T_{r\varphi} = H_{\varphi s} \cdot j_s \quad (39)$$

où

$$\begin{aligned} T_{r\varphi} = h^2 c^2 (F_{rs} G_{\varphi s} + F_{\varphi s} G_{rs}) \\ + m^2 c^4 (\psi_r^* \psi_\varphi + \psi_r \psi_\varphi^*) - \delta_{r\varphi} L. \quad (40) \end{aligned}$$

Ce $T_{r\varphi}$ est un tenseur *symétrique*; (39) montre que sa divergence est égale à la force de Lorentz. Il peut donc être choisi comme tenseur énergie-quantité de mouvement.

L'énergie est constamment positive. La densité d'énergie est définie par $E = -T_{44}$, et l'on a en explicitant L

$$\begin{aligned} E = h^2 c^2 \left(\frac{F_{r's'} \cdot G_{r's'}}{2} - F_{4s} G_{4s} \right) \\ + m^2 c^4 (\psi_{r'}^* \psi_{r'} - \psi_4^* \psi_4) \quad (41) \end{aligned}$$

où s varie de 1 à 4, et r', s' de 1 à 3; soit encore en explicitant

$$\begin{aligned} E = h^2 c^2 (F_{23} G_{23} + F_{31} G_{31} + F_{12} G_{12} - F_{14} G_{14} \\ - F_{24} G_{24} - F_{34} G_{34}) + m^2 c^4 (\psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 \\ - \psi_4^* \psi_4) \quad (42) \end{aligned}$$

quantité essentiellement positive puisque G_{rs} est le conjugué complexe de F_{rs} .

8. Moment électromagnétique de l'électron. — Soit le courant

$$j_s = iehc (\psi_r^* G_{rs} - \psi_r F_{rs}). \quad (31)$$

On peut le considérer comme une somme de deux termes de forme particulière. En effet, en explicitant on a l'expression

$$\begin{aligned} j_s = iehc [\psi_r \cdot (\partial_s + i A_s) \psi_r^* - \psi_r^* \cdot (\partial_s - i A_s) \psi_r \\ + \psi_s^* I - \psi_s J] + \partial^r (\psi_r^* \psi_s - \psi_s^* \psi_r). \quad (43) \end{aligned}$$

Dans le cas d'un champ extérieur nul, $I = J = 0$ et le courant se réduit à

$$j_s^0 = iehc [\psi_r \cdot \partial_s \psi_r^* - \psi_r^* \cdot \partial_s \psi_r + \partial^r (\psi_r^* \psi_s - \psi_s^* \psi_r)]. \quad (44)$$

On peut donc séparer la densité de courant en deux parties $j_s = j_s' + j_s''$ tout comme dans la théorie de Dirac. La seconde :

$$j_s'' = iehc \cdot \partial^r (\psi_r^* \psi_s - \psi_s^* \psi_r) = \partial^r m_{rs}$$

se présente comme la densité de courant due à un tenseur moment électrique et magnétique m_{rs} (qui ne dépend pas explicitement du champ extérieur). Nous

pouvons donc admettre que l'électron possède un moment électromagnétique donné par

$$m_{rs} = iehc (\psi_r^* \psi_s - \psi_s^* \psi_r). \quad (45)$$

Le reste

$$j'_s = iehc [\psi_r (\partial_s + iA_s) \psi_r^* - \psi_s^* (\partial_s + iA_s) \psi_r + \psi_s^* J - \psi_r J] \quad (46)$$

serait le courant de conduction. Comme dans la théorie de Dirac, chacun de ces courants partiels satisfait à une équation de continuité

$$\partial^s j'_s = 0 \quad \text{et} \quad \partial^s j''_s = 0.$$

9. **Spin.** — A partir du tenseur T_{rs} énergie quantité de mouvement, on obtient en général la valeur du moment cinétique en formant l'intégrale

$$P_{r\varrho} = \frac{1}{\varepsilon c} \int (x_r T_{\varrho s} - x_\varrho T_{4r}) dV \quad (r, \varrho = 1, 2, 3) \quad (47)$$

dans laquelle

$$\left. \begin{aligned} T_{4\varrho} &= h^2 c^2 (F_{4s} G_{\varrho s} + F_{\varrho s} G_{4s}) + m^2 c^4 (\psi_4^* \psi_\varrho + \psi_\varrho^* \psi_4) \\ T_{4r} &= h^2 c^2 (F_{4s} G_{rs} + F_{rs} G_{4s}) + m^2 c^4 (\psi_4^* \psi_r + \psi_r^* \psi_4) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Considérons un électron en absence de champ; on aura dans ce cas :

$$\begin{aligned} P_{r\varrho} &= \frac{1}{\varepsilon c} \int \left\{ h^2 c^2 F_{4s} (x_r G_{\varrho s} - x_\varrho G_{rs}) + m^2 c^4 \psi_4^* (x_r \psi_\varrho - x_\varrho \psi_r) + \text{conjugué} \right\} dV \\ &= \frac{1}{\varepsilon c} \int \left\{ h^2 c^2 [F_{4s} x_r \partial_\varrho \psi_s - F_{4s} x_\varrho \partial_s \psi_r - F_{4s} x_\varrho \partial_r \psi_s + F_{4s} x_\varrho \partial_s \psi_r] + m^2 c^4 \psi_4^* (x_r \psi_\varrho - x_\varrho \psi_r) + \text{conjugué} \right\} dV. \end{aligned}$$

Pour $r = \varrho$, les composantes $P_{r\varrho}$ sont nulles; pour $r \neq \varrho$

$$x_r \partial_\varrho \psi_s = \partial_\varrho (x_r \psi_s) \quad x_\varrho \partial_r \psi_s = \partial_r (x_\varrho \psi_s) \quad (49)$$

et

$$\left. \begin{aligned} F_{4s} x_r \partial_s \psi_\varrho &= F_{4s} \partial_s (x_r \psi_\varrho) - \psi_\varrho F_{4r} \\ F_{4s} x_\varrho \partial_s \psi_r &= F_{4s} \partial_s (x_\varrho \psi_r) - \psi_r F_{4\varrho} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} P_{4s} &= \frac{1}{\varepsilon c} \int \left\{ h^2 c^2 [F_{4s} \partial_\varrho (x_r \psi_s) - F_{4s} \partial_s (x_r \psi_\varrho) - F_{4s} \partial_r (x_\varrho \psi_s) + F_{4s} \partial_s (x_\varrho \psi_r)] + h^2 c^2 (\psi_\varrho F_{4r} - \psi_r F_{4\varrho}) + m^2 c^4 \psi_4^* (x_r \psi_\varrho - x_\varrho \psi_r) + \text{conjugué} \right\} dV. \end{aligned}$$

En intégrant par parties et admettant comme d'habitude que les ψ_r s'annulent à la frontière, on aura

$$\begin{aligned} P_{r\varrho} &= \frac{1}{\varepsilon c} \int h^2 c^2 \left\{ x_\varrho (\psi_s \partial_r F_{4s} + \psi_s^* \partial_r G_{4s}) - x_r (\psi_s \partial_\varrho F_{4s} + \psi_s^* \partial_\varrho G_{4s}) \right\} dV + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon c} \int h^2 c^2 (\psi_\varrho F_{4r} - \psi_r F_{4\varrho} + \psi_\varrho G_{4r} - \psi_r^* G_{4\varrho}) dV. \end{aligned} \quad (51)$$

On peut regarder la première intégrale qui a la forme $\int (x_\varrho A_r - x_r A_\varrho) dV$ comme l'équivalent d'un « moment d'orbite » et la seconde, où les x_r , x_ϱ n'interviennent plus explicitement, comme le moment propre de la particule.

La densité « spin » de cette dernière serait donc

$$\mathcal{N} = h^2 c^2 (\psi_\varrho F_{4r} + \psi_r F_{\varrho 4} + \psi_\varrho^* G_{4r} + \psi_r G_{\varrho 4}). \quad (52)$$

Il est évident que cette décomposition est arbitraire, ce qui correspond d'ailleurs à la nature même des choses.

Remarquons que la variance relativiste du spin est celle du moment total (47) dont nous sommes partis; il ne saurait en être autrement. Ce spin diffère de celui qu'on rencontre en théorie de Dirac: en effet, il est bien constitué par les trois composantes de temps d'un tenseur de la forme P_{rst} , mais celui-ci n'est pas complètement antisymétrique comme dans le cas de l'équation de Dirac. Il est cependant facile de modifier la décomposition (51), pour séparer le moment total en un « moment d'orbite » et un spin qui soit un tenseur complètement antisymétrique du troisième rang. En effet on a pour $s = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} m^2 c^4 x_r \psi_4 \psi_\varrho^* &= h^2 c^2 \psi_4 \partial_s (x_r F_{s\varrho}) - h^2 c^2 \psi_4 F_{r\varrho} \\ m^2 c^4 x_\varrho \psi_4 \psi_r^* &= h^2 c^2 \psi_4 \partial_s (x_\varrho F_{sr}) - h^2 c^2 \psi_4 F_{\varrho r} \end{aligned}$$

d'où

$$\left. \begin{aligned} m^2 c^4 \psi_4 (x_r \psi_\varrho^* - x_\varrho \psi_r^*) - h^2 c^2 \psi_4 \partial_s (x_r F_{s\varrho} - x_\varrho F_{sr}) \\ &= 2 h^2 c^2 \psi_4 F_{\varrho r} \\ m^2 c^4 \psi_4^* (x_r \psi_\varrho - x_\varrho \psi_r) - h^2 c^2 \psi_4^* \partial_s (x_r G_{s\varrho} - x_\varrho G_{sr}) \\ &= 2 h^2 c^2 \psi_4 G_{\varrho r} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

On en déduit une séparation du moment total $P_{r\varrho}$ en un « moment d'orbite » et un « spin »

$$\frac{1}{\varepsilon c} \int h^2 c^2 (\psi_\varrho F_{4r} + \psi_r F_{\varrho 4} + \psi_4 F_{r\varrho} + \text{conjugué}) dV. \quad (54)$$

Sous cette forme la densité du spin serait formée par les composantes de temps d'un tenseur complètement antisymétrique du troisième rang exactement comme en théorie de Dirac.