



HAL
open science

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DE LA PROPAGATION DE FAISCEAUX BORNÉS GAUSSIENS NON LINÉAIRES

F. Coulovrat

► **To cite this version:**

F. Coulovrat. ANALYSE ASYMPTOTIQUE DE LA PROPAGATION DE FAISCEAUX BORNÉS GAUSSIENS NON LINÉAIRES. Journal de Physique Colloques, 1990, 51 (C2), pp.C2-1223-C2-1226. 10.1051/jphyscol:19902287 . jpa-00230620

HAL Id: jpa-00230620

<https://hal.science/jpa-00230620>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

1er Congrès Français d'Acoustique 1990

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DE LA PROPAGATION DE FAISCEAUX BORNÉS GAUSSIENS NON LINÉAIRES

F. COULOUVRAT

Laboratoire de Modélisation en Mécanique Associé au CNRS (URA 229),
Université Pierre et Marie Curie, Tour 66, 4 Place Jussieu, F-75252
Paris Cedex 05. France

Résumé : L'étude de la propagation des faisceaux bornés, gaussiens non linéaires fait apparaître un fort couplage entre les mécanismes non linéaires et de diffraction. L'hypothèse des hautes fréquences permet d'appliquer une méthode d'échelles multiples qui conduit à l'équation parabolique non linéaire de Khokhlov-Zabolotskaya. A partir d'un développement séculaire quasi linéaire à l'ordre 3 d'une solution, une technique de renormalisation permet d'en déduire un nouveau développement non séculaire. Le point essentiel est le déphasage entre les variables caractéristiques linéaire et non linéaire. L'analyse de Fourier de la solution permet de décrire les propriétés essentielles des faisceaux bornés non linéaires.

Abstract : The nonlinear propagation of bounded sound beams involves two coupled mechanisms : diffraction and nonlinearity. Applying the method of multiple scale for high frequencies leads to the nonlinear parabolic Khokhlov-Zabolotskaya equation. Starting from a secular quasilinear expansion at order 3 of the solution, the renormalization technic enables to obtain a non secular expansion. The main point is the determination of the nonlinear phase shift between the linear and nonlinear characteristic variables. Through Fourier analysis, it is possible to describe the main properties of the propagation of nonlinear bounded sound beams.

1. - INTRODUCTION

Le principe de l'émission paramétrique a été proposé en 1963 par Westervelt /1/ : l'interaction non linéaire de 2 faisceaux directs de fréquences élevées et proches conduit à la formation d'un faisceau de fréquence différence beaucoup plus faible, donc peu atténué, mais possédant une bonne directivité proche de celle des faisceaux primaires. Cependant, l'efficacité de tels émetteurs est limitée par le faible rendement du processus de conversion, aussi cherche-t-on à augmenter les amplitudes primaires. Toutefois, pour des amplitudes trop élevées, l'ensemble des combinaisons des fréquences primaires apparaît, ce qui conduit à une atténuation non linéaire des faisceaux primaires, puis à la formation de chocs faibles. Ces phénomènes sont bien connus dans le cas des ondes planes ou sphériques /2/, mais le cas des faisceaux bornés requiert des méthodes numériques relativement coûteuses /3,4/. Une méthode permettant de décrire de manière simple l'évolution du faisceau et l'influence des différents paramètres (amplitudes primaires, fréquences, largeur de l'émetteur) est proposée ici.

2. - LES MECANISMES DE LA PROPAGATION DES FAISCEAUX NON LINEAIRES

L'étude entreprise ici est limitée au cas d'une source axisymétrique, gaussienne et monochromatique. A cette source sont associées 3 distances caractéristiques : la longueur d'onde λ , associée aux phénomènes de propagation acoustique, la distance de Rayleigh R_0 et la distance de choc X_c . La distance de Rayleigh, rapport de la surface de la source à la longueur d'onde, relie la propagation acoustique à la géométrie de la source. Dans le cas des hautes fréquences, $(ka)^2 \gg 1$, la distance de Rayleigh est très grande devant la longueur d'onde. La distance de choc X_c est égale à $1/\beta kM$, où β est le paramètre de non linéarité, k le nombre d'onde et M le nombre de Mach acoustique (rapport de l'amplitude en vitesse de la source à la vitesse du son). Le nombre de Mach M est très petit devant l'unité car les phénomènes de propagation acoustique sont des petites perturbations du milieu de propagation ; aussi la distance X_c est-elle très grande devant la longueur d'onde λ . La distance de choc X_c est calculée pour une onde plane. Pour des distances à la source très

inférieures à X_c , la propagation est peu affectée par les non linéarités. Pour des distances voisines de X_c , il y a transfert d'énergie entre le fondamental et ses harmoniques, ce qui modifie le profil de l'onde jusqu'à ce que celui-ci devienne discontinu à la distance de choc. Au-delà de X_c , ce transfert d'énergie se stabilise, le profil de l'onde devient rapidement linéaire, et l'onde perd son énergie au travers du choc. Dans le cas d'une onde sphérique, l'atténuation géométrique diminue l'amplitude de l'onde et retarde les effets non linéaires sans pouvoir toutefois prévenir la formation de chocs faibles. Les effets non linéaires sont mesurés alors par la quantité $\ln(r/r_0)$ où r_0 est le rayon de la source, et la distance de choc est $X_c = r_0 \exp(1/\beta M k r_0)$.

Dans le cas d'un faisceau borné, le paramètre $N = X_c/R_0$ va jouer un rôle déterminant. Pour de grandes valeurs de N , les effets non linéaires jouent un rôle significatif très au-delà de la distance de Rayleigh, dans la zone où le champ peut être considéré comme approximativement sphérique (avec une directivité). Dans le cas $N \ll 1$, les effets non linéaires sont importants dès la région de champ proche où l'onde est approximativement plane. Un modèle plan permet alors de décrire la propagation du faisceau dans cette zone. Cependant, aucun des deux modèles unidimensionnels plan ou sphérique n'est satisfaisant : le modèle plan n'est valable qu'en champ proche, avant la distance de Rayleigh, et à proximité de l'axe acoustique. Assez loin de l'axe, en effet, l'amplitude de l'onde décroît rapidement et les effets non linéaires deviennent négligeables. Le modèle sphérique ne permet pas de décrire les effets non linéaires en champ proche, qui se propagent très au-delà de la distance de Rayleigh si N n'est pas trop grand /4/. De plus, dans le cas de l'émission paramétrique, le modèle sphérique donne une directivité du faisceau paramétrique égale au produit des directivités primaires, alors que la directivité observée est en général très proche de la directivité primaire /5/.

3. - L'EQUATION DE KHOKHLOV-ZABOLOTSKAYA

En résumé, le problème de la propagation des faisceaux bornés non linéaires fait apparaître deux petits paramètres βM et $1/(ka)^2$, liés respectivement aux non linéarités et à la diffraction. L'étude précédente montre que ces deux mécanismes sont fortement couplés, et que les modèles unidimensionnels ne fournissent des résultats satisfaisants que dans des domaines limités. Afin d'obtenir des solutions plus générales, le couplage entre les deux phénomènes est étudié par la méthode des échelles multiples : cette méthode suppose que l'onde est localement plane, et ne dépend sur une échelle de quelques longueurs d'onde que de la variable caractéristique plane $\tau = \omega(t - x/c)$ (ω est la pulsation, c la vitesse du son et x désigne la coordonnée le long de l'axe acoustique). L'onde ne subira des modifications significatives que sur des distances d'ordre R_0 (ou X_c) le long de l'axe acoustique. En appliquant le formalisme des échelles multiples, on aboutit à l'équation dite de Khokhlov-Zabalotskaya /6/ :

$$\partial^2 U / \partial \delta \partial \tau - 1/4 (\partial^2 U / \partial R^2 + 1/R \partial U / \partial R) = N \partial / \partial \tau (U \partial U / \partial \tau) \quad (1)$$

avec $\delta = x/R_0$ et $R = r/a$ où r est la coordonnée radiale.

Cette équation est de type parabolique avec au second membre un terme non linéaire. Ce terme est analogue à celui de l'équation de Burgers, qui est obtenue en faisant les mêmes hypothèses d'onde unidimensionnelle localement plane.

4. - SOLUTION ASYMPTOTIQUE SECLAIRE ET RENORMALISEE

Comme on ne connaît pas de solution à l'équation (1), la recherche de solutions approchées est la seule alternative à la mise en oeuvre de méthodes numériques. Le cas $N \gg 1$ correspond à une distance de choc grande devant la distance de Rayleigh. On peut alors rechercher un développement asymptotique en puissances de $1/N$, ce qui donne pour un faisceau gaussien et à l'ordre 3 :

$$U(\delta, R, \tau) = A D [\sin \tilde{\tau} + D\sigma/2 \sin(2\tilde{\tau} + \Delta) + 3(D\sigma)^2/8 \sin(3\tilde{\tau} + 2\Delta) - (D\sigma)^2/8 \sin(\tilde{\tau} + 2\Delta)] \quad (2)$$

avec $A = (1 + \delta^2)^{-1/2}$ atténuation géométrique linéaire
 $D = \exp[-R^2/(1 + \delta^2)]$ directivité linéaire
 $\tilde{\tau} = \tau + \text{atan} \delta - R^2 \delta / (1 + \delta^2)$ variable caractéristique linéaire déphasée
 $\delta = \Pi/2 - \text{atan} \delta - \text{atan}[2 \text{atan} \delta / \ln(1 + \delta^2)]$

$$\sigma = [\ln^2(1 + \delta^2) + 4 \operatorname{atan}^2 \delta]^{1/2} / 2N.$$

On remarque que pour les petites valeurs de δ , σ est équivalente à δ/N , et que pour les grandes valeurs de $\ln \delta$, σ est équivalente à $\ln \delta / N$: la variable σ permet de décrire la transition entre la variable non linéaire en champ proche ($\sigma \ll 1$) et en champ lointain ($\ln \delta \gg 1$). Il est à remarquer que le champ lointain non linéaire ($\ln \delta \gg 1$) ne correspond pas au champ lointain linéaire ($\delta \gg 1$) : ceci montre que le régime non linéaire sphérique ne peut être atteint que très au-delà de la distance de Rayleigh et du régime sphérique linéaire /4/. La quantité σ étant strictement croissante et tendant vers l'infini, il est clair que le développement (2) est invalide dès que la variable non linéaire σ est d'ordre 1 : l'atténuation géométrique ne peut prévenir la formation de chocs faibles. La quantité Δ mesure le déphasage induit par la diffraction entre les différents harmoniques générés par non linéarité ; elle est indépendante de N et maximale au voisinage de la distance de Rayleigh.

Afin de supprimer la sécularité, apparaissant dans le développement (2) pour tout N , la technique de renormalisation va être appliquée. Celle-ci consiste à développer en puissances de σ non seulement la variable dépendante U , mais aussi la variable indépendante caractéristique $\tilde{\tau}$. Conformément aux travaux de Burvingt /7/ et de Ginsberg /8/, on pose :

$$\tilde{\tau} = \tilde{\Phi} - D\sigma \sin(\tilde{\Phi} + \varphi) \quad (3)$$

La variable $\tilde{\Phi}$ représente la variable caractéristique non linéaire Φ , reliée par la relation implicite (3) à la variable physique $\tilde{\tau}$. La quantité φ , encore à déterminer, représente le déphasage entre les variable $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\tau}$. Elle doit être nulle pour une onde unidimensionnelle plane ou sphérique. La vitesse U est désormais considérée comme une fonction explicite de $\tilde{\Phi}$, de δ et de R , et implicite de $\tilde{\tau}$. La dépendance de U en $\tilde{\Phi}$ est obtenue en introduisant (3) dans le développement (2), et en effectuant un développement de Taylor à l'ordre σ^2 :

$$\begin{aligned} U(\tilde{\Phi}, \delta, R) = & AD[\sin \tilde{\Phi} - D\sigma/2 \sin \varphi + D\sigma/2 [\sin(2\tilde{\Phi} + \Delta) - \sin(2\tilde{\Phi} + \varphi)] \\ & + (D\sigma)^2/8 [\sin(3\tilde{\Phi} + 2\varphi) + 3\sin(3\tilde{\Phi} + 2\Delta) - 4\sin(3\tilde{\Phi} + \Delta + \varphi)] \\ & + (D\sigma)^2/8 [-\sin(\tilde{\Phi} + 2\varphi) - \sin(\tilde{\Phi} + 2\Delta) - 2\sin \tilde{\Phi} + 4\sin(\tilde{\Phi} + \Delta - \varphi)] \end{aligned} \quad (4)$$

Le développement (4) demeure assurément valide tant que $D\sigma < 1$, c'est-à-dire tant que la transformation (3) demeure inversible, ou que la distance de choc $D\sigma = 1$ n'est pas atteinte. Afin d'étendre la validité de (4) au-delà de la distance de choc, ce que ne font pas les études de Burvingt et de Ginsberg, on va déterminer φ . Au-delà de la distance de choc la transformation (3) n'est plus inversible et $\tilde{\tau}$ est multivaluée, sauf au voisinage du point fixe $\Pi - \varphi$. Le calcul de U en ce point montre que la valeur $\varphi = \Delta/2$ permet d'obtenir un développement (4) uniformément valable au voisinage de ce point pour toutes les valeurs N grandes ou d'ordre 1.

5. - ANALYSE DE FOURIER

L'analyse de Fourier de la solution (3)-(4) est analogue à celle menée dans le cas des ondes planes /9/. Les étapes en sont ici brièvement rappelées : pour des distances $D\sigma < 1$, le changement de variable $\tilde{\Phi} \rightarrow \tilde{\tau}$ est inversible et l'analyse conduit à une solution de Bessel-Fubini généralisée. Au delà, le changement de variable demeure inversible autour du point fixe $\Pi - \varphi$, la variable $\tilde{\Phi}$ décrivant un intervalle $[\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2]$ autour de ce point fixe.

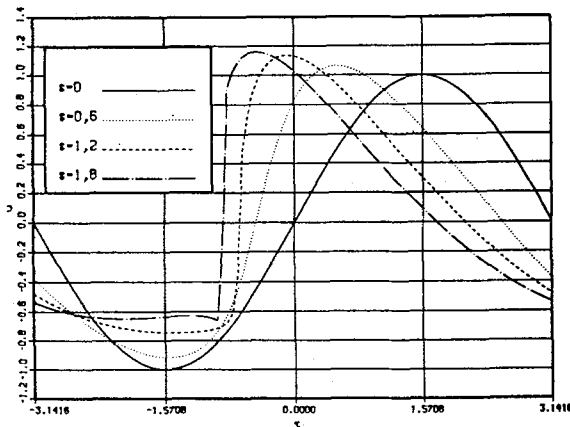
Les valeurs $\tilde{\Phi}_1$ et $\tilde{\Phi}_2$ sont déterminées par conservation de la masse en écrivant que la composante de fréquence nulle de la série de Fourier doit être nulle. La valeur $\tilde{\tau}(\tilde{\Phi}_1) = \tilde{\tau}(\tilde{\Phi}_2)$ donne la position du choc. Pour les petites valeurs de N , il n'est pas possible de déterminer cette position au-delà de la distance de Rayleigh. Pour les autres valeurs, le profil se décompose en un terme de Bessel-Fubini et un terme en dent de scie, dominant pour $D\sigma > 3$. Mais en raison de la faible croissance de σ , cette valeur est atteinte très au-delà de

la distance R_0 . les courbes montrent l'évolution du profil de l'onde sur l'axe, pour $N = 1$ et différentes valeurs de δ . Elles prouvent que la méthode permet d'écrire la déformation asymétrique du profil de l'onde, en raison du déphasage Δ , le déplacement de la position du choc et la perte d'énergie au-delà de la distance de choc. Le calcul de l'amplitude en fonction de la distance à l'axe montre l'élargissement du faisceau provoqué par les non-linéarités : l'amplitude sur l'axe est plus importante, donc plus affectée par les non-linéarités, ce qui tend à "aplatir" la directivité du faisceau. Tous ces effets ont été mis en évidence expérimentalement /10/ ou numériquement.

REFERENCES

- /1/ P.J. WESTERVELT, Parametric acoustic array, J. Acoust. Soc. Am., **35**, 535-537, (1963)
- /2/ O.V. RUDENKO et R.I. SOLUYAN, Theoretical foundations of nonlinear acoustics, Studies in Soviet Science, Consultants Bureau, New York and London, (1977).
- /3/ S.I. AANONSEN, T. BARKVE, J.N. TJOTTA, S. TJOTTA, Distorsion and harmonic generation in the near field of a finite amplitude sound beam, J. Acoust. Soc. Am., **75**(3), 749-768, (1984).
- /4/ M.F. HAMILTON, J.N. TJOTTA, S. TJOTTA, Nonlinear effects in the farfield of a directive sound source, J. Acoust. Soc. Am., **78**(1), 202-216, (1985).
- /5/ B.K. NOVIKOV, O.V. RUDENKO, V.I. TIMOSHENKO, Nonlinear underwater acoustics, Acoustical Society of America, American Institute of Physics, New York.
- /6/ E.A. ZABOLOTSKAYA, R.V. KHOKHLOV, Quasi plane waves in the nonlinear acoustics of confined beams, Akusticheski Zhurnal, **15**(1), 40-47, (1963) [Sov. Phys.-Acoustics, **15**(1), 35-39, (1969)].
- /7/ R. BURVINGT, Rayonnement non linéaire d'une source acoustique plane et circulaire, Acustica, **61**, 35-45, (1986).
- /8/ J.H. GINSBERG, Uniformly accurate description of finite amplitude sound radiation from a harmonically vibrating plane boundary, J. Acoust. Soc. Am., **69**(4), 929-936, (1981).
- /9/ F. COULOUVRAT, Solutions approchées de l'équation de Burgers par une méthode asymptotique mixte, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 308, série II, 1765-1770, (1989).
- /10/ J.A. GALLEGO-JUAREZ, L. GAETE-GARRETON, Experimental study of nonlinearity in free progressive acoustic waves in air at 20 kHz, Journal de Physique, Colloque C8, supplément au n° 11, **40**, 336-340, (1979).

PROFIL DE L ONDE (N=1)



PROFIL DE L ONDE (N=1)

