LES THÉORIES DE LA GRAVITATION FACE A LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

S. Mavrides

JOURNAL DE PHYSIQUE Colloque C7, supplément au n° 11-12, Tome 34, Novembre-Décembre 1973, page C7-19

LES THÉORIES DE LA GRAVITATION FACE A LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

S. MAVRIDES

Institut Henri-Poincaré, Paris

Résumé. — De nombreuses théories de la gravitation peuvent rendre compte des effets gravitationnels observés jusqu'à présent. Mais le nombre de celles satisfaisant à certaines exigences théoriques est beaucoup plus restreint. On examine le rôle joué par différents principes (principe d'équivalence faible et forte, nécessité d'une énergie gravitationnelle définie positive, principe de la relativité généralisée, principe de Mach) dans la construction et le choix des théories de la gravitation. Ces théories (théories minkowskiennes Lorentz-invariantes, théories riemanniennes « métriques » stratifiées, théories riemanniennes non covariantes, théories pentadimensionnelles) sont confrontées à la théorie de la Relativité Générale d'Einstein.

Abstract. — Many theories of gravitation can account for the gravitational phenomena observed till now. But the number of those satisfying some theoretical claims is far more limited. The part played by different principles (weak and strong principle of equivalence, requirement of positive, definiteness of gravitational energy, principle of generalised relativity, Mach's principle) in the construction and choice of the theories of gravitation is surveyed. These theories (Lorentz-invariant minkowskian theories, metric stratified riemannian theories, pentadimensional riemannian theories) are then compared to Einstein's theory of general relativity.

Depuis la seconde moitié du XVIII^e siècle, la Mécanique Céleste a été dominée par la loi de Newton. Selon le jugement de Poincaré, qui apparaît à peine comme une boutade, cette science n'avait même d'autre objet que la vérification de la loi d'attraction universelle. Ainsi que nous l'a rappelé B. Morando, les observations dans le système solaire sont nombreuses, étendues dans le temps et de plus en plus précises. L'ère des satellites artificiels terrestres (Spoutniks, Soyouz, Apollo) nous a, en outre, ouvert le domaine de l'expérimentation. Une des caractéristiques remarquables de cette Mécanique Newtonienne réside dans son aptitude à l'auto-correction : « des procédés d'approximations successives conduisent à des résultats aussi raffinés que l'on veut ». La théorie des perturbations utilise encore avec succès la loi de Newton.

Au milieu de cet ensemble des vérifications éclatantes, quelques très rares désaccords subsistent. Ce fut l'un des très grands succès de la Relativité Générale d'expliquer le mouvement du périhélie de Mercure.

Mais les prévisions non newtoniennes des diverses théories de la gravitation actuellement possibles sont peu nombreuses : leurs vérifications restent assez peu précises. Cette fâcheuse situation tient au fait que la gravitation appartient au domaine des interactions faibles. Si la Relativité Restreinte, développée sous la forme d'une cinématique, peut s'appuyer sur un très grand nombre de résultats expérimentaux, c'est, paradoxalement, grâce à la physique nucléaire qui apporte un très solide appui à la dynamique relativiste.

Le domaine de la gravitation n'a pas cette chance. Aussi, une théorie tensorielle minkowskienne peut être en accord avec tous les phénomènes gravitationnels observés jusqu'à présent, tout aussi bien que la Relativité Générale. A l'heure actuelle, ce ne sont pas des résultats d'ordre purement expérimental qui confèrent à une théorie de la gravitation un rôle prépondérant. Seules des raisons théoriques, des principes généraux peuvent permettre la construction de nouvelles théories, ainsi qu'une classification, voire un choix entre les diverses théories de la gravitation expérimentalement admissibles aujourd'hui.

En vue de cette *classification des théories de la gravitation*, nous procéderons par complexité croissante, selon les exigences théoriques que l'on cherchera à satisfaire, selon les *principes* que l'on postulera.

Dans cet ordre d'idées, un rôle essentiel est joué par le Principe d'Equivalence.

1. Le principe d'équivalence.

— Il convient de distinguer, à ce sujet, le Principe d'Equivalence Faible et le Principe d'Equivalence Forte. C'est, en effet, à ce niveau qu'une classification des théories de la gravitation en deux groupes va s'effectuer. Le Principe d'Equivalence Forte implique, bien sûr, le Principe d'Equivalence Faible, mais la réciproque n'est pas vraie.

Enoncé du Principe d'Equivalence Faible :

L'accélération gravitationnelle locale est indépendante de la composition et de la structure de la matière accélérée.

Des expériences de plus en plus précises ont mené à l'adoption incontestée de ce Principe : après les expériences anciennes de Galilée, puis de Newton, vinrent les expériences d'Eötvös, Pekar et Fekete [1] qui atteignaient la précision déjà remarquable de 10^{-8}, puis celles de Roll, Krotkov et Dicke [2] avec une précision de 10^{-11} et enfin celles de Braginsky et Panov [3] avec une précision de 10^{-12}. En fait, ce que ces expériences établissent directement, c'est l'identité du rapport entre masse « inerte » et masse « grave passive » pour différents corps (aluminium, platine, etc...), et, par conséquent, l'identité entre masse « grave » et masse « inerte » (1).

Ainsi ces expériences montrent, avec une très grande précision, que les forces de gravitation sont indépendantes de la structure du corps auquel elles s'appliquent. Or, cette propriété est l'apanage des forces d'inertie. D'où la tentation d'identifier les effets de ces deux forces et d'énoncer le

Principe d'Equivalence Forte :

L'accélération est localement équivalente à l'action d'un champ de gravitation, ou encore : *Dans une région limitée de l'espace, les phénomènes physiques dans un champ de gravitation sont les mêmes que dans un ascenseur accéléré en l'absence de gravitation.*

Ce principe englobe, évidemment, le principe d'équivalence faible mais implique, en outre, la constance des « constantes » physiques et notamment de la constante newtonienne de gravitation universelle G en tout point de l'espace et à tout instant.

Supposons qu'*on se limite à l'adoption du principe d'équivalence faible* ($m = M^P = M^A$, G = Cte) sans justification, comme le faisait déjà Newton.

On pourra alors traiter le champ de gravitation comme n'importe quel autre champ physique, dans l'espace-temps plat de la Relativité Restreinte. Contrairement à la Relativité Générale, ces théories ne supposent pas la covariance générale, c'est-à-dire l'équivalence de tous les systèmes de référence dans tous les états de mouvement possibles, mais adoptent seulement un *principe de Lorentz-invariance*. C'est une exigence théorique que ne satisfait pas la Mécanique Newtonienne, mais à laquelle toute théorie physique doit se plier depuis 1905.

2. **Théories minkowskiennes, Lorentz-invariantes, de la gravitation.** — 2.1 Pour quelques théories, la gravitation est une *action à distance* (comme en Mécanique Newtonienne) dans l'espace-temps plat de la Relativité Restreinte. Le prototype en est la *théorie de Whitehead* [4] : l'interaction entre particules a lieu par l'intermédiaire de potentiels retardés (potentiels de gravitation tensoriels). La formulation de la théorie est très simple, comme celle de Maxwell-Lorentz. Elle a été reprise par Synge [5] et généralisée par Schild [6]. La théorie prévoit la même avance de périhélies planétaires que celle donnée par la Relativité Générale. Mais elle ne donne aucune indication sur la courbure des rayons lumineux ou le décalage vers le rouge. Il faut lui adjoindre de nouvelles hypothèses, arbitraires dans une large mesure, pour pouvoir étudier ces effets. En ce sens, la théorie de Whitehead *n'est pas complète*.

2.2 Pour la plupart des théories minkowskiennes, l'interaction entre corps massifs est décrite au moyen d'un champ de gravitation. L'hypothèse la plus simple consiste à représenter ce champ de gravitation par un *champ scalaire* [7] $\varphi(x)$. Pour que la théorie se réduise à l'approximation newtonienne, dans le cas limite non relativiste, on pourrait remplacer l'équation de Laplace inhomogène par l'équation d'onde inhomogène

$$\square\varphi(x) = -4\pi G \sum_i m_i \int \delta^4(x - z_i)\sqrt{\dot{z}_i^2}\, d\lambda_i . \quad (1)$$

On peut déduire cette équation de champ, ainsi que les équations du mouvement d'une particule, d'un principe variationnel. On vérifie aisément que la densité d'énergie du champ scalaire est définie positive. Par conséquent, cette théorie scalaire pourrait

---

(1) Soient n corps de « *masses graves actives* » M_i^A ; le potentiel newtonien créé par ces n corps en un point x a pour expression :

$$U(x) = K \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i^A}{(x - x_i)} .$$

La force subie par un corps de « *masse grave passive* » M^P est

$$\mathbf{F} = M^P \, \mathbf{grad} \, U .$$

Si deux corps seulement sont en présence

$$\mathbf{F}_1 = -K M_1^P M_2^A \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \qquad \mathbf{F}_2 = K M_2^P M_1^A \frac{\mathbf{r}}{r^3} .$$

L'égalité de l'action et de la réaction entraîne que

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad \text{soit} \quad M_1^P M_2^A = M_2^P M_1^A$$

ou encore

$$\frac{M_1^A}{M_1^P} = \frac{M_2^A}{M_2^P} = k .$$

Le mouvement du corps 1 est tel que

$$m_1 \gamma_1 = \mathbf{F}_1 = -K M_1^P M_2^A \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

c'est-à-dire

$$\gamma_1 = -K \frac{M_1^P}{m_1} M_2^A \frac{\mathbf{r}}{r^3} .$$

Comme l'accélération de la pesanteur ne dépend pas de la structure des corps en chute libre

$$\frac{M_1^P}{m_1} = C = \text{Cte} .$$

a) $M^A/M^P = k$ = Cte : la constance locale de k a été vérifiée expérimentalement par des expériences du type de Cavendish (Kreuzer, 1968) avec une précision de 10^{-4}. On pose donc $M^A = M^P$.

b) D'Eötvös à Braginski, on a vérifié la constance de C. On pose aussi

$$M^P = m .$$

Par conséquent

$$m = M^P = M^A .$$

être un excellent candidat pour la description des phénomènes de gravitation en Relativité Restreinte. Malheureusement, elle est en contradiction avec certains résultats d'observation couramment admis :

1) Elle prévoit un *retard de périhélie* des orbites planétaires, au lieu de l'avance observée ;

2) Elle ne prévoit *aucune courbure de rayons lumineux dans un champ de gravitation* (parce que $L_i = \varphi . \tau = 0$ car $\tau = \tau^{\alpha}_{\alpha}$ (Maxwell) $= 0$). Un champ scalaire ne peut être couplé qu'avec la trace scalaire du tenseur densité d'énergie matérielle et non avec l'énergie électromagnétique car la trace du tenseur de Maxwell est nulle.

2.3 Après le champ scalaire, l'objet le plus simple (tensoriellement parlant) est le *champ vectoriel.* Mais une théorie vectorielle de la gravitation serait, formellement, tout à fait analogue à l'électrodynamique. Elle prédirait, par conséquent, que des masses (de même signe !) se repoussent, ce qui est une raison suffisante pour renoncer à une telle représentation du champ de gravitation.

2.4 On est donc ainsi amené à associer le champ de gravitation à un *tenseur symétrique du* 2^{e} *ordre.* On peut à présent résumer les principales *difficultés rencontrées par la Relativité Générale*, car ce sont les tentatives effectuées en vue de résoudre ces difficultés qui ont suscité le développement des théories Lorentz-invariantes de la gravitation :

1) Les équations non linéaires de la Relativité Générale sont extrêmement difficiles à résoudre ;

2) La signification physique des solutions est souvent loin d'être claire car la définition des coordonnées d'espace-temps utilisées n'est pas effectuée de manière opérationnelle ;

3) L'absence (tout au moins postulée en principe) de systèmes de référence privilégiés peut n'être pas entièrement satisfaisante (cf. plus loin et Rayski [8]) ;

4) Le champ de gravitation, étant assimilé à un élément de structure géométrique, est profondément séparé des autres champs physiques, qui demeurent phénoménologiques ;

5) Le concept d'énergie du champ de gravitation n'a de signification, en théorie d'Einstein, que dans des situations très particulières (espace-temps asymptotiquement plat, variété admettant une congruence normale du genre temps, ou certaines symétries).

Les théories minkowskiennes tensorielles du champ de gravitation sont, en général, des *théories linéaires.* Par conséquent, elles lèvent d'emblée la plupart des difficultés précédentes. Si l'on essaie de développer une théorie tensorielle minkowskienne en la considérant non pas comme une approximation linéaire de la théorie d'Einstein mais *comme une fin en soi*, on rencontre aussitôt le problème suivant : alors qu'il y a très peu d'hypothèses en Relativité Générale, qui est, de ce fait, particulièrement contraignante, il y a beaucoup plus d'arbitraires en théorie minkowskienne.

Une des premières théories tensorielles Lorentz-invariantes est due à *G. D. Birkhoff* [9]. Il est bien connu que cette théorie présente l'inconvénient de supposer que toute matière est constituée d'un fluide tel que :

$$p = \tfrac{1}{2} \rho c^2 , \tag{2}$$

p étant la pression, ρ la densité matérielle, c la vitesse de la lumière dans le vide.

Un certain nombre de théories tensorielles Lorentz-invariantes ont été obtenues à partir d'un *principe variationnel* (Belinfante et Swihart [10], M. A. Tonnelat *et al.* [11], A. Capella [12]), satisfaisant ainsi automatiquement des *lois de conservation* de l'énergie. Contrairement à ce qui se passe dans le cas scalaire, il y a beaucoup d'équations linéaires de champ possibles, pour un champ tensoriel d'ordre deux, même si l'on se limite à des équations différentielles du 2^{e} ordre (supposées réductibles à l'équation de Poisson, à l'approximation newtonienne). Ainsi, la forme la plus générale de densité lagrangienne gravitationnelle répondant à la question s'écrit

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_g = \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\, g^{\lambda\mu}\, g^{\rho\sigma}\big[& a(\partial_\alpha \psi_{\lambda\rho})\,(\partial_\beta \psi_{\mu\sigma}) + \\ & + b(\partial_\lambda \psi_{\alpha\mu})\,(\partial_\rho \psi_{\sigma\beta}) + l(\partial_\alpha \psi_{\lambda\mu})\,(\partial_\beta \psi_{\rho\sigma}) \\ & + q(\partial_\alpha \psi_{\lambda\mu})\,(\partial_\rho \psi_{\beta\sigma})\big] \end{aligned} \tag{3}$$

a, b, l, q sont des constantes numériques arbitraires. On peut en supposer certaines nulles, *a priori*, mais sans motivation autre que des arguments de simplicité. On peut les conserver toutes et les déterminer expérimentalement pour rendre compte des résultats d'observation (les trois tests classiques). On voit alors apparaître une différence essentielle entre la Relativité Générale et ces théories minkowskiennes tensorielles : *la théorie d'Einstein* ne fait intervenir qu'une seule constante, elle *prédit les résultats d'observation.* Les *théories minkowskiennes* comportent plusieurs constantes arbitraires, elles *sont étalonnées par les observations.* Si les constantes numériques ont des valeurs simples, la théorie sera dite « élégante ». Un examen un peu approfondi montre que le nombre de constantes ajustables est plus petit que le nombre de faits observables prévus par la théorie. Par un « argument d'isotropie », Belinfante et Swihart [10] sont amenés à poser

$$b = q = 0 \tag{4}$$

simplifiant ainsi l'expression de $\mathfrak{L}_g$. Les équations de champ alors obtenues sont simplement des équations d'ondes. Il faut ajouter au lagrangien $\mathfrak{L}_g$ un terme de source et des termes d'interaction (interaction du champ de gravitation avec le champ électromagnétique — ce qui permet la prévision de la courbure des rayons lumineux dans un champ de gravitation ; avec le champ de Dirac — ce qui permet la prévision du décalage vers le rouge des raies spectrales dans un champ de gravitation). *On peut alors rendre compte de tous les effets gravitationnels observés.* Si le projet, en cours de réalisation, d'expériences utilisant un *gyroscope* placé dans un satellite artificiel terrestre, atteint la précision escomptée, on aurait alors un test crucial pour les différentes théories de la gravitation : alors que la Relativité Générale prévoit une pure précession, une théorie minkowskienne prévoit que le vecteur vitesse angulaire de rotation du gyroscope est non seulement animé d'un mouvement de précession mais sa grandeur varie au cours du temps (V. I. Pustovoit et A. V. Bautin [13]).

On a souvent adressé à ce genre de théories la critique suivante : *en général, la densité d'énergie associée au champ $\psi_{\mu\nu}$ n'est pas définie positive.* Notons qu'en Relativité Générale, cette condition n'a pas été établie dans un cas quelconque. Il en résulte que, lorsqu'on tient compte de l'effet de la radiation gravitationnelle, un système de corps gravitant librement peut rayonner de l'énergie négative, ou encore gagner de l'énergie par rayonnement gravitationnel. Le gain est très petit (à cause de la petitesse de la constante de gravitation). Il est néanmoins troublant que, pour deux masses décrivant des orbites quasi elliptiques, on doive observer que leur mouvement se ralentit et leur spirale diverge, à cause des caractéristiques du processus radiatif.

Comme l'émission de gravitons à énergie négative ne mène pas immédiatement à la catastrophe, on peut

— ou bien abandonner cette exigence du caractère défini positif de l'énergie du champ et se contenter de l'imposer aux *champs gravitationnels libres* (cf. théories précédentes) ;

— ou bien, au contraire, respecter cet axiome de la théorie des champs : le choix du lagrangien $\mathfrak{L}_g$ est alors univoquement déterminé :

$$\mathfrak{L}_g = \tfrac{1}{2}\,[\partial_\lambda\psi_{\mu\nu}\,\partial^\lambda\psi^{\mu\nu} - 2\,\partial_\lambda\psi_{\mu\nu}\,\partial^\mu\psi^{\lambda\nu} + 2\,\partial^\mu\psi_{\mu\nu}\,\partial^\nu\psi - \partial_\lambda\psi\,\partial^\lambda\psi]\,. \qquad (5)$$

On est automatiquement conduit (Fierz [14]) à *l'approximation linéaire de la théorie d'Einstein*, dans l'espace plat. Cette approximation est, bien entendu, en désaccord avec les résultats expérimentaux puisque l'avance des périhélies est une conséquence des termes non linéaires de la Relativité Générale.

Les équations de champ déduites du lagrangien précédent (complété du lagrangien des particules et du lagrangien d'interaction) s'écrivent

$$\Box\psi_{\mu\nu} - \partial^\sigma\,\partial_\mu\psi_{\sigma\nu} - \partial^\sigma\,\partial_\nu\psi_{\sigma\mu} + \partial_\mu\,\partial_\nu\psi + \eta_{\mu\nu}(\partial^\sigma\,\partial^\lambda\psi_{\sigma\lambda} - \Box\psi) = fJ_{\mu\nu}\,. \qquad (6)$$

Elles sont invariantes dans la transformation de jauge

$$\psi_{\mu\nu} \to \psi_{\mu\nu} + \partial_\nu\Lambda_\mu + \partial_\mu\Lambda_\nu\,. \qquad (7)$$

Comme en électrodynamique, on peut choisir une jauge particulière (jauge de Hilbert) par la transformation

$$\partial^\mu\psi_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\,\partial_\nu\psi^\sigma_\sigma\,. \qquad (8)$$

Comme en électrodynamique aussi, les éq. (6) entraînent la conservation de la source

$$\partial^\nu J_{\mu\nu} = 0\,. \qquad (9)$$

Mais, alors que l'équation de conservation du courant ($\partial^\nu j_\nu = 0$) est compatible avec les équations du mouvement des sources de ce courant, il n'en va pas de même ici. Si

$$J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} = \sum_i \int m_i\,\delta^4(x - z_i)\,\dot z_\mu\,\dot z_\nu\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad (10)$$

alors l'équation de continuité

$$\partial^\nu J_{\mu\nu} = 0 \qquad (11)$$

implique

$$\ddot z^\mu = 0\,, \qquad (12)$$

ce qui est incompatible avec des particules en interaction gravitationnelle.

S. Gupta [15] a alors suggéré d'ajouter à $M_{\mu\nu}$ le tenseur d'énergie gravitationnelle, ce qui automatiquement mène à une théorie non linéaire dont la construction n'est pas univoquement déterminée.

D'autre part, les équations du mouvement déduites du même lagrangien ne sont pas invariantes par la transformation de jauge précédente : ainsi, le mouvement des particules dépendrait de la jauge, tandis que le champ ne serait déterminé qu'à une transformation de jauge près. Pour lever cette difficulté, il faut compléter la transformation de jauge par une transformation de coordonnées qui, au 1^{er} ordre en f (constante d'interaction) s'écrit

$$z^\mu \to z^\mu + 2f\Lambda^\mu\,. \qquad (13)$$

W. Thirring [16], qui a développé les conséquences de ce point de vue, choisit comme lagrangien d'interaction champ-particules

$$\mathfrak{L}_i = -\,fm\psi_{\alpha\beta}\,\dot z^\alpha\,\dot z^\beta\,\mathrm{d}s\,, \qquad (14)$$

ce qui est l'expression la plus simple pour un champ tensoriel $\psi_{\alpha\beta}$ mais pose quelques problèmes (cf. S. Lederer [17]). Les équations du mouvement qui en résultent peuvent être écrites sous la forme de géodésiques d'un espace de Riemann de métrique

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} - 2f\psi_{\alpha\beta} \qquad (15)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\bar D}{\mathrm{d}\bar s}\,\bar u_\alpha = 0\,. \qquad (16)$$

Or, c'est la métrique riemannienne

$$\mathrm{d}\bar s^2 = g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}z^\alpha\,\mathrm{d}z^\beta \qquad (17)$$

qui est invariante de jauge, et non la métrique minkowskienne

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dz^\alpha\, dz^\beta \qquad (18)$$

qui devient inobservable, par principe.

A cause des éq. (6), les règles et les horloges, en interaction avec un champ de gravitation, sont affectées de telle sorte qu'elles mesurent la métrique riemannienne.

Ainsi, partant de théories Lorentz-invariantes, *si l'on postule les axiomes de la théorie classique des champs* (énergie définie positive), on arrive aux concepts et aux conséquences de la théorie d'Einstein (théorie riemannienne non linéaire).

Remarque. — Dans les théories minkowskiennes, il est possible de rendre compte d'un décalage de fréquence dans un champ de gravitation en admettant que celui-ci, par interaction avec le champ de Dirac, modifie les niveaux d'énergie d'un atome (effet physique comparable à l'effet Zeeman ou l'effet Stark). Mais un tel atome est une horloge, et cette horloge ne mesure pas l'élément minkowskien

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta . \qquad (19)$$

Son comportement est modifié par la présence d'un champ de gravitation. On peut alors :

a) ou bien conserver une description Lorentz-invariante des lois physiques dans l'espace-temps de Minkowski, en sachant que les appareils de mesure sont affectés par les champs physiques (électrique, magnétique, gravitationnel) ;

b) ou bien abandonner le ds^2 minkowskien, fantôme inobservable en présence d'un champ de gravitation, c'est-à-dire de particules matérielles. Ainsi les théories non euclidiennes de la gravitation apparaissent comme une alternative très fascinante. Si, au lieu du Principe d'Equivalence Faible auquel nous nous sommes limités jusqu'ici, on adopte un principe d'Equivalence Forte, alors le caractère non euclidien d'une théorie de la gravitation apparaîtra comme inéluctable.

3. **Principe d'équivalence forte et décalage gravitationnel de fréquences.** — L'association entre Principe d'Equivalence Forte et géométrie non euclidienne est souvent établie de manière ambiguë. Selon A. Schild [18], c'est le décalage gravitationnel de fréquences qui, joint au Principe d'Equivalence, entraîne le caractère non euclidien de l'espace-temps. Si l'on admet que, comme dans un système accéléré, les horloges ne sont pas influencées par un champ de gravitation, alors on aboutit à cette conclusion. Mais elle n'est guère inéluctable car rien n'oblige à ne pas considérer le champ de gravitation comme un autre champ physique. Ainsi que l'a souligné R. H. Dicke [19] par exemple, l'effet du décalage gravitationnel de fréquences implique seulement

a) le résultat de l'expérience d'Eötvös ($m = M^P$) ;

b) l'équivalence masse-énergie ;

c) la conservation de l'énergie dans un champ gravitationnel statique et un système de coordonnées statique.

Mais il ne nécessite absolument pas l'introduction d'une géométrie non euclidienne. Les confusions, à ce sujet, viennent du fait qu'on énonce souvent le Principe d'Equivalence sous la forme suivante :

« En tout point de l'espace, à chaque instant, il est possible de choisir des coordonnées telles que les effets de gravitation disparaissent, dans un domaine suffisamment petit. » Cet énoncé est évidemment très critiquable car aucun choix de coordonnées ne peut faire disparaître, même localement, le tenseur de courbure, grandeur intrinsèque. Néanmoins, un choix particulier de coordonnées peut, localement, réduire les composantes de la métrique et de ses dérivées premières à des valeurs galiléennes. Ainsi « l'équivalence » champ de gravitation-champ d'accélération réalisable au niveau des connexions reste fondamentalement un leurre au niveau des courbures. Il en résulte un affaiblissement inévitable du Principe d'Equivalence. C'est pourquoi, tout en lui reconnaissant le rôle essentiel de « sage-femme joué à la naissance de la Relativité Générale », Synge [20] propose de « l'enterrer à présent avec les honneurs appropriés ».

4. **Principe de relativité généralisée (ou de covariance généralisée).** — En fait, c'est l'extension du Principe de Relativité Restreinte aboutissant à une Relativité Généralisée qui a nécessité l'introduction d'une géométrie non euclidienne. Pour satisfaire un principe d'inertie généralisée selon lequel toute particule d'épreuve devient « libre », il faut que la force d'accélération et par conséquent la force de gravitation soient absorbées dans une structure géométrique non euclidienne. Tous les systèmes de référence liés à des particules gravitant librement deviennent équivalents : les systèmes lorentziens cessent d'être privilégiés. On obtient ainsi *deux descriptions possibles* : une dynamique minkowskienne selon laquelle des forces de gravitation produisent des mouvements accélérés, une cinématique non euclidienne des mouvements gravitationnels libres. L'introduction d'un espace non euclidien permet d'interpréter le champ de gravitation, par surcroît (à cause du Principe d'Equivalence), et aussi d'attribuer à des systèmes physiques une équivalence que la Mécanique Newtonienne réservait à des systèmes fictifs. Mais nous avons vu le prix payé pour ce résultat : perte de la signification immédiate et opérationnelle des coordonnées, profonde séparation entre le champ de gravitation géométrisé et les autres champs physiques qui demeurent phénoménologiques.

Si l'espace non euclidien est un espace riemannien, ses propriétés géométriques sont entièrement descriptibles à l'aide du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et du tenseur de courbure $R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}$. Celui-ci peut être décomposé en trois parties irréductibles

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = C^{\mu}_{\nu\rho\sigma} + B^{\mu}_{\nu\rho\sigma} + A^{\mu}_{\nu\rho\sigma}\,, \tag{20}$$

où $C^{\mu}_{\nu\rho\sigma}$ est le tenseur de courbure conforme ou tenseur de Weyl :

$$C^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} - \frac{1}{2}(\delta^{\mu}_{\sigma}P_{\nu\rho} - \delta^{\mu}_{\rho}P_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho}P^{\mu}_{\sigma} - g_{\nu\sigma}P^{\mu}_{\rho}) - \frac{1}{12}(\delta^{\mu}_{\sigma}g_{\nu\rho} - \delta^{\mu}_{\rho}g_{\nu\sigma})\,R \tag{21}$$

avec

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}R^{\rho}_{\mu\nu\rho}\,, \tag{22}$$

$$P_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R\,. \tag{23}$$

$P_{\mu\nu}$ est la partie sans trace du tenseur de Ricci.

Par définition

$$B^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\delta^{\mu}_{\sigma}P_{\nu\rho} - \delta^{\mu}_{\rho}P_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho}P^{\mu}_{\sigma} - g_{\nu\sigma}P^{\mu}_{\rho})\,, \tag{24}$$

$$A^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \frac{1}{12}(\delta^{\mu}_{\sigma}g_{\nu\rho} - \delta^{\mu}_{\rho}g_{\nu\sigma})\,R\,. \tag{25}$$

5. **Théories riemanniennes « métriques » (2) de la gravitation.** — *En Relativité Générale*, les équations de champ (dans le vide et sans constante cosmologique) s'écrivent

$$B^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = A^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = 0\,, \tag{26}$$

ce qui est complètement équivalent à

$$R_{\mu\nu} = 0\,. \tag{27}$$

On pourrait aussi poser (et ce choix correspond à la *théorie de Nordström* [22])

$$C^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = A^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = 0\,. \tag{28}$$

Les équations $C^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = 0$ entraînent que l'espace soit conformément plat : on peut donc mettre l'intervalle ds^2 sous la forme

$$ds^2 = \varphi^2(x^{\alpha})\left[c^2\,dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2\right] \tag{29}$$

et l'on est ramené au cas d'une théorie à champ scalaire, celui-ci étant déterminé par les équations

$$A^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = 0 \quad \text{ou encore} \quad R = \alpha T = \alpha g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \tag{30}$$

en présence de matière. Les inconvénients d'une théorie à champ scalaire ont déjà été signalés précédemment (prévision d'un retard de périhélie planétaire ; ne rend pas compte de la courbure des rayons lumineux dans un champ de gravitation).

Enfin, *à partir de la Relativité Générale*, un certain nombre de *théories parentes* se sont développées, théories dont le but est d'atteindre certains objectifs particuliers qui paraissent souhaitables à leurs auteurs. Certaines d'entre elles rendent compte des trois tests classiques.

a) Un premier groupe de théories comprend ce qu'on a appelé « *les théories métriques stratifiées* ». Telles sont les théories de Yilmaz [23] et de Ni [24]. Le but de ces auteurs est de tenter de ramener la gravitation dans le cadre standard de la théorie des champs de manière à pouvoir appliquer les règles habituelles de la quantification. H. Yilmaz a ainsi présenté une théorie riemannienne localement Lorentz-invariante. Dans sa dernière version, le champ est représenté par un champ de spin 2, sans masse, φ^{ν}_{μ}, du type Pauli-Fierz obéissant aux équations

$$\Box\varphi^{\nu}_{\mu} = 4\,\pi\sigma u_{\mu}\,u^{\nu}\,, \left[\Box = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_{\nu}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\,\partial_{\mu})\right] \tag{31}$$

avec

$$\partial^{\mu}\varphi^{\nu}_{\mu} = 0\,. \tag{32}$$

Le tenseur $g_{\mu\nu}$ n'est plus le potentiel gravitationnel, mais c'est une fonctionnelle de φ^{ν}_{μ} satisfaisant aux équations

$$R^{\nu}_{\mu} - \tfrac{1}{2}\,\delta^{\nu}_{\mu}R = 8\,\pi T^{\nu}_{\mu} = 2(\Box\varphi^{\nu}_{\mu} + t^{\nu}_{\mu}) \tag{33}$$

où t^{ν}_{μ} représente l'énergie-impulsion du champ φ^{ν}_{μ}. La gravitation est considérée comme un champ dans un espace-temps courbé, la courbure de celui-ci provenant de l'existence de ce champ. C'est un point de vue analogue à celui de la théorie électromagnétique d'Einstein-Maxwell en Relativité Générale. Malheureusement, on ne sait pas résoudre les éq. (31)-(33) si $\sigma \neq 0$.

b) Malgré l'hypothèse d'une Relativité Généralisée, la notion de système de référence privilégié n'a pas totalement disparu pour autant. Ainsi, Fock [25] restreint le choix des coordonnées, en théorie d'Einstein, en imposant les conditions de de Donder

$$\partial_{\nu}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0\,. \tag{34}$$

D'une manière encore plus restrictive, A. Papapetrou [26] d'abord, puis, indépendamment N. Rosen [27], ont construit, à partir de la théorie d'Einstein,

(2) Selon les définitions explicitées par K. Thorne [21], une théorie est dite métrique si on peut lui donner une représentation mathématique telle que :

a) Il existe une métrique de signature — 2 qui gouverne les mesures de longueur propre et de temps propre à la manière habituelle de la Relativité Restreinte et Générale :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}\,dx^{\beta}\,.$$

b) La matière et les champs sur lesquels agit la gravitation répondent selon l'équation

$$\nabla.T = 0$$

où T est le tenseur d'impulsion-énergie pour toute la matière et les champs autres que gravitationnels.

une *théorie riemannienne non covariante de la gravitation*, où n'interviennent que deux fonctions de champ (et même une seule, dans la dernière version donnée par Papapetrou). En dehors d'arguments de simplicité, on peut justifier ces tentatives en remarquant que les modèles cosmologiques relativistes, homogènes et isotropes, semblent fournir une assez bonne représentation de l'univers, à grande échelle. Or, ces modèles utilisent un système de référence privilégié, le système co-mobile, avec un temps cosmique. On peut alors maintenir ce point de vue dans toute situation et supposer que dans l'espace-temps riemannien, où le Principe d'Equivalence est toujours valable, il existe un système de coordonnées privilégié tel que le ds^2 puisse s'écrire

$$ds^2 = e^\chi\, dt^2 - e^\varphi(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,. \quad (35)$$

Cette forme suppose

a) que l'espace à 3 dimensions est isotrope ;

b) que la direction de temps est orthogonale à l'espace tridimensionnel.

Les équations de champ sont déduites d'un principe variationnel, en utilisant le même lagrangien qu'en théorie d'Einstein. Mais elles sont beaucoup plus simples puisqu'il n'y a que deux inconnues (3) χ et φ au lieu des dix $g_{\mu\nu}$. Elles prévoient les trois tests classiques, comme la théorie d'Einstein. Le formalisme peut même être modifié (4) pour rendre compte d'un éventuel moment quadrupolaire du soleil.

Enfin, un dernier principe a joué — et continue de jouer — un certain rôle dans la construction de théories de la gravitation. C'est le

6. **Principe de Mach.** — L'apport essentiel de ce Principe — prôné par les uns, critiqué par les autres — consiste en ceci : le rôle des astres éloignés est changé. Au lieu d'être de simples points de repère constituant un système de référence, ils deviennent un véritable système physique dont l'interaction détermine l'inertie. Ainsi, selon Dicke [19], « les forces d'inertie ressenties dans un laboratoire accéléré sont gravitationnelles, car elles tirent leur origine de la matière éloignée de l'univers, matière accélérée par rapport au laboratoire ». Cet énoncé du Principe de Mach constitue une extrapolation du Principe d'Equivalence Forte puisqu'il identifie les forces d'inertie et les forces de gravitation. Comme les idées de Mach — et les diverses formulations qu'on en peut donner — ne sont pas intégrées dans la théorie d'Einstein, de nouvelles théories de la gravitation ont été développées où le principe de Mach joue un rôle essentiel. Telles sont les théories de Sciama [28], de *Brans et Dicke* [29]. Dans cette dernière tentative, on est amené à introduire un champ scalaire φ déterminé par la matière présente dans l'univers, à côté du champ tensoriel métrique $g_{\mu\nu}$ (on ne peut introduire un 2e champ tensoriel puisque l'expérience montre l'isotropie de la masse). On est amené aussi à supposer que la « constante » de gravitation G est fonction du scalaire φ, donc que G est variable. Ce dernier point rapproche ainsi la théorie scalaire-tensorielle de Brans-Dicke, des théories pentadimensionnelles à 15 variables de champ, et en particulier de la théorie de Jordan [30]. Autre point commun entre les deux théories : il faut effectuer tout un réajustement de paramètres pour rendre compte des résultats expérimentaux. Certaines tentatives actuelles évitent cet inconvénient. Ces théories pentadimensionnelles présentent alors beaucoup d'intérêt, même dans le strict domaine de la gravitation (5). Ces travaux (de Rosen, Tonnelat, ...) sont en cours de développement.

7. **Conclusion.** — Nous nous trouvons donc disposer, à l'heure actuelle, d'un foisonnement de théories de la gravitation. S'il ne s'agit que d'interpréter les effets gravitationnels observés jusqu'à présent, la plupart d'entre elles conviennent.

Si l'on trouve souhaitable de satisfaire à certains principes théoriques, alors le nombre d'élus se trouve sérieusement restreint. Mais on ne peut perdre de vue que, par son interprétation géométrique, la Relativité Générale a profondément isolé le champ de gravitation des autres champs physiques. Deux voies s'offrent alors pour pallier cet inconvénient :

1° FAIRE UNE THÉORIE MINKOWSKIENNE DU CHAMP DE GRAVITATION. — *a*) On ne peut satisfaire à la fois aux tests classiques et à l'exigence d'une énergie de champ définie positive ;

b) L'expérience du gyroscope pourrait peut-être trancher définitivement la question.

2° GÉOMÉTRISER LES AUTRES CHAMPS PHYSIQUES. — *a*) En conservant une structure riemannienne V_4

— avec une « théorie métrique stratifiée » (Yilmaz, Ni) ;

— avec une théorie métrique simple, comme la théorie d'Einstein, mais où le second membre (qui représente l'énergie-impulsion des sources) tiendrait compte de la nature des sources en interaction (Kichenassamy).

b) En compliquant la structure géométrique

— théories riemanniennes à 5 dimensions (Kaluza, Klein, Jordan, Thiry) ;

— théories unitaires non riemanniennes à 4 dimensions (Einstein, Schrödinger, Trautman, etc...).

(3) Papapetrou a également envisagé le cas extrême d'une seule fonction de champ φ, en posant

$$\chi = \chi(\varphi)\,.$$

(4) En posant $\chi = -\lambda\varphi$, le mouvement du périhélie dépend de λ.

(5) Les théories pentadimensionnelles ont été construites en vue d'unifier gravitation et électromagnétisme.

Bibliographie

[1] EÖTVÖS, R. V., PEKAR, D. and FEKETE, E., *Ann. Phys.* **68** (1922) 11.

[2] DICKE, R. H., ROLL, P. G. and KROTKOV, R., *Ann. Phys.* **26** (1964) 442.

[3] BRAGINSKIĬ, V. B. and PANOV, V. I., *Sov. Phys. JETP* **34** (1972) 463.

[4] WHITEHEAD, A. N., *The Principle of Relativity*, Cambridge, 1922.

[5] SYNGE, J. L., *Proc. Roy. Soc.* A **211** (1952) 303.

[6] SCHILD, A., *Proc. Roy. Soc.* A **235** (1956) 202.

[7] NORDSTRÖM, G., *Phys. Zeit.* **13** (1912) 1126.
BERGMANN, O., *Amer. J. Physics* **24** (1956) 39.

[8] RAYSKI, J., *Nuovo Cimento* **9** (1958) 337.

[9] BIRKHOFF, G. D., *Proc. Nat. Acad. Sci.* **29** (1943) 231 ; **30** (1944) 324.

[10] BELINFANTE, F. J. and SWIHART, J. C., *Ann. Phys.* **1** (1957) 168, 196 ; **2** (1957) 81.

[11] TONNELAT, M. A., *C. R. Hebd. Séan. Acad. Sci.* **B 253** (1961) 2475 ;
TONNELAT, M. A. et LEDERER, S., *C. R. Hebd. Séan. Acad. Sci.* **B 256** (1963) 371 ; *Nuovo Cimento* **34** (1964) 833 ;
POYET, M., *C. R. Hebd. Séan. Acad. Sci.* **B 256** (1963) 3594 ;
SIGNORE-POYET, M., *C. R. Hebd. Séan. Acad. Sci.* **B 264** (1967) 829 ;
MAVRIDES, S., *C. R. Hebd. Séan. Acad. Sci.* **B 254** (1962) 437 ; **255** (1962) 2232 ; **257** (1963) 4139 ; *Nuovo Cimento* **45** (1966) 859.

[12] CAPELLA, A., *C. R. Hebd. Séan. Acad. Sci.* **B 258** (1964) 87 ; **260** (1965) 1341.

[13] PUSTOVOIT, V. I. and BAUTIN, A. V., *Sov. Phys. JETP* **19** (1964) 937.

[14] FIERZ, M., *Helv. Phys. Acta* **12** (1939) 3.

[15] GUPTA, S. N., *Rev. Mod. Phys.* **29** (1957) 334.

[16] THIRRING, W., *Ann. Phys.* **16** (1961) 96.

[17] LEDERER, S., *Thèse* (1964), Paris.

[18] SCHILD, A., *Evidence for Gravitational Theories* (Academic Press New York and London), 1962.

[19] DICKE, R. H., *The Theoretical Significance of Experimental Relativity* (Gordon and Breach), 1964.

[20] SYNGE, J. L., *Relativity, the General Theory* (North Holland Publ. Co), 1960.

[21] THORNE, K. S., *Nordita* (International Conference on Gravitation and Relativity), 1971.

[22] NORDSTRÖM, G., *Ann. d. Phys.* **42** (1913) 533.

[23] YILMAZ, H., *Phys. Rev.* **111** (1958) 1417 ; *Phys. Rev. Lett.* **27** (1971) 1399 ; *Nuovo Cimento* **10** (1972) 79.

[24] NI, W. T., *Astrophys. J.* **176** (1972) 769.

[25] FOCK, V. A., *J. Phys. USSR* **1** (1939) 81 ; *Rev. Mod. Phys.* **29** (1957) 325.

[26] PAPAPETROU, A., *Math. Nachr.* **12** (1954) 129, 143 ; *Z. f. Phys.* **139** (1954) 518.

[27] ROSEN, N., GRG **2** (1971) 129 ; **2** (1971) 223 ; *Phys. Rev.* **3** (1971) 2317.

[28] SCIAMA, D. W., *MNRAS* **113** (1953) 34.

[29] BRANS, C. and DICKE, R. H., *Phys. Rev.* **124** (1961) 925 ; **125** (1962) 388 ; **125** (1962) 2194.

[30] JORDAN, P., *Schwerkraft und Weltall* (Braunschweig) 1955 ; *Z. Physik* **157** (1959) 112.