



HAL
open science

Diffusion anormale dans les milieux désordonnés : piégeage, corrélations et théorèmes de la limite centrale

J.-P. Bouchaud, A. Georges, P. Le Doussal

► To cite this version:

J.-P. Bouchaud, A. Georges, P. Le Doussal. Diffusion anormale dans les milieux désordonnés : piégeage, corrélations et théorèmes de la limite centrale. *Journal de Physique*, 1987, 48 (11), pp.1855-1860. 10.1051/jphys:0198700480110185500 . jpa-00210627

HAL Id: jpa-00210627

<https://hal.science/jpa-00210627>

Submitted on 4 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Classification

Physics Abstracts

05.40 — 05.60 — 47.55M

Diffusion anormale dans les milieux désordonnés : piégeage, corrélations et théorèmes de la limite centrale

J.-P. Bouchaud ⁽¹⁾, A. Georges ⁽²⁾ et P. Le Doussal ⁽²⁾⁽¹⁾ Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'Ecole Normale Supérieure (*)⁽²⁾ Laboratoire de Physique Théorique de l'Ecole Normale Supérieure (**)

24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France

(Reçu le 5 mai 1987, accepté le 6 juillet 1987)

Résumé. — Nous présentons des arguments physiques simples permettant d'obtenir les comportements asymptotiques de marches aléatoires dans des milieux désordonnés. Nous montrons en particulier qu'un comportement non-diffusif est lié à l'impossibilité d'appliquer le théorème de la limite centrale de façon directe, en raison de l'apparition de lois de distribution « larges » (par exemple pour les temps effectifs de piégeage) ou de corrélations à longue portée, conduisant soit à une hypodiffusion, soit à une hyperdiffusion.

Abstract. — Simple physical arguments are developed, allowing to predict the asymptotic behaviour of random walks in random media. It is shown that anomalous diffusion originates from distributions (for example of effective trapping times) with long tails, or from long-range correlations. This leads either to subdiffusive or superdiffusive behaviours.

Une illustration physique exemplaire du théorème de la limite centrale (T.L.C., pour un énoncé précis, voir [0]) est le mouvement Brownien. Considérons un marcheur effectuant des déplacements élémentaires aléatoires de moyenne nulle ; le T.L.C. assure en particulier que le déplacement moyen au bout d'un temps fini, $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ tend vers zéro comme $N^{-1/2}$. En effet, la mauvaise compensation systématique des déplacements tirés conduit à un déplacement typique x_i qui croît comme $N^{1/2}$; il en résulte qu'à temps N fini, il existe une *valeur moyenne résiduelle* $\sum_{i=1}^N x_i/N$ qui tend vers la moyenne statistique (zéro) comme $N^{-1/2}$.

Cette situation est générique et les exemples d'applications multiples : les fluctuations thermodynamiques s'éteignent (dans les cas usuels) comme

$V^{-1/2}$, où V est le volume de l'échantillon ; la distribution des vitesses dans un gaz est maxwellienne, ce qui résulte d'un grand nombre d'échanges aléatoires d'impulsion entre les particules. Le théorème de la limite centrale est peu affecté par exemple par la présence de corrélations de courte portée et reste valable dans des situations plus complexes comme celle d'un produit de matrices aléatoires 2×2 [1] : le logarithme de la trace de cette matrice produit se comporte essentiellement comme la somme de nombres indépendants (sauf dans des cas particuliers de résonance ou « d'intermittence » cf. [2]), comme si le produit des matrices pouvait être remplacé par un produit de scalaires [1, 2].

Un comportement différent de la diffusion normale est ainsi le signal de phénomènes interdisant l'application usuelle du T.L.C. dont les limitations sont essentiellement de deux types (cf. [0]) :

a) Le second moment de la loi de distribution de la variable que l'on somme doit être fini (distributions pas trop « larges »).

b) Les corrélations entre les variables que l'on somme ne doivent pas être « à très longue portée ».

Bien entendu, la complexité des systèmes physi-

(*) Laboratoire associé au Centre National de la Recherche Scientifique.

(**) Laboratoire Propre du Centre National de la Recherche Scientifique, associé à l'Ecole Normale Supérieure et à l'Université de Paris Sud.

ques s'exprime justement dans la façon dont ces corrélations ou larges distributions apparaissent, induites par la dynamique même de ces systèmes : par exemple les fluctuations d'un système thermodynamique à son point critique s'éteignent moins vite que $V^{-1/2}$ à cause des corrélations très fortes (décroissant en $1/r^{d-2+\eta}$) entre les objets constitutifs. Des lois « pathologiques » régissant la longueur du saut élémentaire d'un marcheur peuvent provenir de la structure même du problème considéré : grandes boucles formées par les polymères aux interfaces contrôlant leur extension parallèle à la surface [3], distribution statistique des tourbillons dans un flot turbulent [4], effet géométrique dans le billard de Sinai bidimensionnel [5].

Comme nous le verrons plus loin, une marche au hasard dans un milieu désordonné peut dans certains cas auto-induire des corrélations ou des lois de distribution violant les hypothèses a) ou b) : ce phénomène est à la source des lois de diffusion « anormales » régissant le comportement asymptotique de cette marche.

1. Remèdes heuristiques aux pathologies non gaussiennes.

Il existe, dans les cas « pathologiques » a) et b) des considérations heuristiques simples permettant de comprendre comment la décroissance en $N^{-1/2}$ est affectée, et d'obtenir les comportements asymptotiques non classiques induits par ces pathologies. Ces considérations heuristiques peuvent être rendues plus rigoureuses en se fondant sur des théorèmes généraux étendant le T.L.C. à ces situations [6].

Dans le cas a), il s'agit de constater qu'un nombre fini N de tirages ne peut être sensible à la totalité de la loi de distribution des événements élémentaires : au-delà d'une certaine « coupure effective » dépendant du nombre de tirages, on peut tronquer la loi de distribution réelle puisque les événements concernés ne peuvent être sondés. Pour une loi de distribution arbitraire $P(x)$ la valeur $x_c(N)$ de la coupure est définie par :

$$N \int_{x_c(N)}^{\infty} P(x) dx \sim 1$$

ce qui signifie qu'au plus un événement $x > x_c$ a eu lieu en N tirages. L'introduction de cette coupure effective permet de définir des moyennes effectives (à temps fini) même si ces moyennes divergent aux grands N : c'est justement la dépendance non triviale de ces moyennes en N (à travers leurs bornes supérieures x_c) qui modifie les comportements asymptotiques. Considérons par exemple un « vol de Lévy », défini comme une marche formée de sauts de longueur l , variable distribuée selon $P(l) \underset{l \rightarrow \infty}{\sim} l^{-\alpha}$ (les longs sauts ont donc une probabi-

lité anormalement grande). En N sauts indépendants, le marcheur sera typiquement à une distance $R(N)$ de son point de départ telle que :

$$R^2(N) = N \int_0^{\infty} l^2 P(l) dl \quad (= \infty \text{ si } \alpha \leq 3).$$

La divergence de cette expression pour $\alpha \leq 3$ est en fait le signe que la coupure x_c ne peut être ignorée. Ceci conduit à :

$$\int_{x_c}^{\infty} l^{-\alpha} dl = 1/N \quad x_c = N^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

et :

$$\int_0^{x_c} l^{2-\alpha} dl \sim x_c^{3-\alpha} \sim N^{\frac{3-\alpha}{\alpha-1}} \quad \text{si } \alpha < 3.$$

On obtient ainsi le comportement *hyperdiffusif* d'un vol de Lévy (voir aussi les références classiques [7]) :

$$R^2(N) = N^{\frac{2}{\alpha-1}}.$$

Un autre exemple d'application de cette méthode nous est fourni par le problème de la marche au hasard entre des pièges dont le temps moyen de « désorption » est infini. Supposons en effet qu'au bout d'un temps t on ait effectué N sauts entre ces pièges. S'il n'existe pas de direction de saut privilégiée, l'éloignement vérifie $\bar{R}^2 = a^2 N$, où a est la distance moyenne entre les pièges. Notons N^0 le nombre de pièges différents visités par le marcheur. Puisque le mouvement est brownien en N , on a $N^0 \sim N^{d/2}$ si $d < 2$ et $N^0 \sim N$ si $d > 2$ ($N/\ln N$ pour $d = 2$). Le comportement temporel de cette diffusion s'obtient en éliminant N des équations « effectives » :

$$N^0 \int_{T_c}^{\infty} P(T) dT = 1 \quad \text{et} \quad N \int_0^{T_c} TP(T) dT = t.$$

Si $P(T)$ se comporte en $1/T^{1+\mu}$, on obtient ainsi :

$$\bar{R}^2 \sim t^{2\nu} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \nu = \mu/2 & \text{si } d > 2 \\ \nu = (2-d + (d/\mu))^{-1} & \text{si } d < 2 \end{cases}$$

qui sont précisément les résultats obtenus par J. Machta [8] en utilisant une approche de renormalisation dans l'espace réel, et par S. Alexander *et al.* [9] dans le cas unidimensionnel. (Dans le cas où il existe une direction de saut privilégiée, la même analyse conduit à $\nu = \mu$ en toute dimension.)

Dans le cas b), il faut interpréter une fonction de corrélation $G(r)$ comme une mesure du nombre de sites à distance r d'un point O où l'observable (force, aimantation, etc...) prend la même valeur qu'en O. Ainsi dans une sphère de rayon R on trouve à peu près :

$$\int_0^R G(r) r^{d-1} dr = N_{id}$$

sites ressemblant au site central. Si $G(r)$ décroît en loi de puissance, on obtient :

$$N_{id} = \int^R (r^{-a}) r^{d-1} dr \sim \begin{cases} R^{d-a} & \text{si } a < d \\ 1 & \text{si } a > d \end{cases}$$

Le nombre de valeurs différentes de l'observable dans une sphère de rayon R est $R^d/N_{id} \sim R^a$ si $a < d$: la corrélation réduit donc, comme on peut s'y attendre, le nombre de variables *effectivement* indépendantes.

Cette remarque peut être utilisée pour déterminer si le désordre modifie ou non la loi de diffusion d'une marche au hasard en présence d'une force aléatoire $F(x)$ dont les corrélations décroissent selon $\langle F(x)F(y) \rangle \underset{|x-y| \rightarrow \infty}{\sim} (x-y)^{-a}$. En effet, en l'absence de désordre ($F = 0$), le volume « accessible » au marcheur en un temps t est $(t^{1/2})^d$ et le nombre de sites visités est bien entendu t . Le marcheur repasse donc $t^{1-d/2} \rightarrow \infty$ fois au même site si $d < 2$ et un nombre fini de fois si $d > 2$. On s'attend donc à ce que le désordre, lorsque les corrélations sont à courte portée ($a > d$), soit très efficacement moyenné si $d > 2$, ne conduisant qu'à une correction du coefficient de diffusion. Si $d < 2$ au contraire, on obtient des diffusions anormales [10]. En présence de corrélations à longue portée ($a < d$), la discussion précédente montre que le même critère s'applique en substituant a à d : ainsi, pour $a < 2$ le comportement de diffusion est-il anormal en toute dimension. Une discussion plus précise de l'effet des corrélations, ainsi qu'un calcul des exposants de diffusion par le groupe de renormalisation est présenté dans [11].

Dans le cas où la corrélation est temporelle $G(t) \sim t^{-\mu}$ et décroît plus lentement que $1/t$, la somme des T variables tirées doit s'estimer de la façon suivante : les T variables se décomposent en T^μ groupes *indépendants* ; chaque valeur est reprise $T^{1-\mu}$ fois, ainsi :

$$X = \sum_{i=1}^T X_i = T^{1-\mu} \left(\sum_{i=1}^{T^\mu} X_i \right)$$

où maintenant la somme réduite de variables indépendantes satisfait au T.L.C. ; alors :

$$X \sim T^{1-\mu} T^{\mu/2} \sim T^{1-\mu/2} > T^{1/2} \quad \text{si } \mu < 1.$$

Ainsi, les corrélations à longue portée *augmentent* la valeur de la moyenne résiduelle et ralentissent sa convergence vers la valeur moyenne statistique.

2. Deux exemples de diffusions anormales.

Les deux idées exprimées ci-dessus, qui permettent de comprendre comment le théorème de la limite centrale doit être modifié dans certains cas pathologiques, permettent d'obtenir les comportements

asymptotiques de diffusion dans un grand nombre de situations diverses. Nous choisissons d'illustrer ces méthodes par deux exemples génériques de marches aléatoires dans des milieux désordonnés, qui révèlent l'existence de deux mécanismes extrêmement généraux modifiant les lois de diffusion : la marche peut générer dynamiquement des *corrélations* dans la force qu'elle subit — auquel cas on observe en général une *hyperdiffusion* — ou bien générer des anticorrélations, ce qui a pour conséquence l'apparition de régions de *piégeage*, dont la distribution des temps d'attente peut être pathologique et donc conduire à une *hypodiffusion*. Insistons sur le fait que, dans nos exemples, les pathologies sont *induites* : les modèles sont au départ caractérisés par des lois tout à fait gaussiennes (et non, comme dans le cas ci-dessus, par des lois choisies *a priori*).

Le premier exemple est dû à G. de Marsily et G. Matheron [12] : on considère (Fig. 1a) un milieu

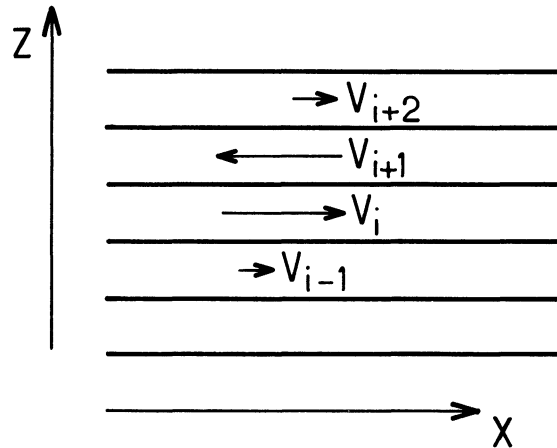


Fig. 1a. — Milieu poreux stratifié bidimensionnel. [Bidimensional layered porous medium.]

poreux bidimensionnel, constitué de « couches », à l'intérieur desquelles la vitesse est une constante et est dirigée parallèlement à celles-ci. Le module de cette vitesse est une variable aléatoire, dépendant de la coordonnée z de la couche. Le mouvement selon z est donc purement *diffusif* : $\overline{z^2} = Dt$; comment varie la distance parcourue en x au cours du temps ? Le mouvement étant diffusif selon z , la probabilité de se trouver au site de départ au bout d'un temps t est $P(0, t) \sim 1/(Dt)^{1/2}$. Ceci signifie donc que la force subie par la particule est corrélée dans le temps, et puisque seule la coordonnée z détermine cette force, on a $\langle v(0)v(t) \rangle \sim 1/(Dt)^{1/2}$, qui décroît plus lentement que $1/t$. On sait donc, d'après la discussion précédente, que la diffusion est modifiée : le nombre de plaques *différentes* visitées est $(Dt)^{1/2}$, chacune l'est $(t/D)^{1/2}$ fois $((Dt)^{1/2}(t/D)^{1/2} = t = \text{nombre}$

total de sauts). Ainsi, si la vitesse suivant x est de moyenne nulle, on a :

$$x = \sum_{i=1}^t v_i = (t/D)^{1/2} \sum_{i=1}^{\sqrt{Dt}} v_i = \sigma D^{-1/4} t^{3/4}$$

avec

$$\sigma^2 = \int v^2 \rho(v) dv .$$

On obtient donc, pour cet exemple *a priori* exempt de pathologies, un comportement *hyperdiffusif* ($\overline{X^2}^{1/2} \sim t^{3/4}$) à grand temps. Ce résultat a été obtenu exactement par De Marsily et Matheron [12], mais sa provenance physique n'avait pas été élucidée. Notons néanmoins que ces arguments permettent aussi de dire que :

i) le comportement redevient normal ($\overline{X^2}^{1/2} \sim t^{1/2}$) si l'échantillon a une extension transverse finie [13], ou si la vitesse du flot n'est pas strictement parallèle aux couches. Le comportement demeure cependant $t^{3/4}$ aux temps courts.

ii) Pour un problème de barreaux désordonnés (cf. Fig. 1b), le même argument permet d'obtenir $x \sim t \ln t$, le logarithme provenant de la nature bidimensionnelle de la diffusion transverse ($N^0 = t/\ln t$ en $d = 2$).

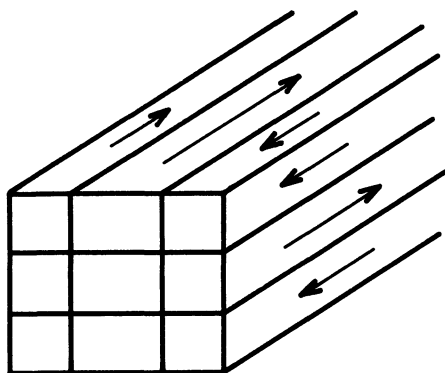


Fig. 1b. — Généralisation à trois dimensions.

[Tridimensional analogue.]

Le deuxième exemple que nous voulons présenter conduit au contraire à une diffusion ralentie, dont la cause est l'apparition dynamique de pièges à très long temps d'attente. Considérons une particule astreinte à se déplacer sur une droite, et soumise à :

— une force « thermique » $\eta(t)$, aléatoire et variant d'instant en instant :

$$\overline{\eta(t) \eta(t')} = D \delta(t - t')$$

— une force « gelée », fixée une fois pour toute,

mais fonction aléatoire de la position de la particule : $F(x)$.

Dans la limite d'un grand coefficient de frottement (faible nombre de Reynolds), l'équation de Langevin décrivant la particule s'écrit :

$$\dot{x} = F(x) + \eta(t).$$

On peut obtenir des résultats exacts pour ce problème, lorsque $F(x)$ est une variable gaussienne [14]. Posant :

$$\langle F(x) \rangle = m \text{ et } \langle F(x) F(y) \rangle_c = \sigma \delta(x - y) .$$

On obtient [14-16] : ($\mu = m/\sigma$)

$$\begin{aligned} \sqrt{\overline{x^2}} &\sim \ln^2 t && \text{si } \mu = 0 \\ \bar{x} &\sim t^\mu && \text{si } 0 < \mu < 1 \\ x &\sim Vt + t^{1/\mu} && \text{si } 1 < \mu < 2 \\ x &\sim Vt + (Dt)^{1/2} && \text{si } \mu > 2 . \end{aligned}$$

On peut cependant comprendre l'origine de la loi $\bar{x} \sim t^\mu$ par un argument simple. Le mouvement a lieu dans un potentiel schématisé sur la figure 2a. Autour d'une pente moyenne $V(x) = -mx$, ce

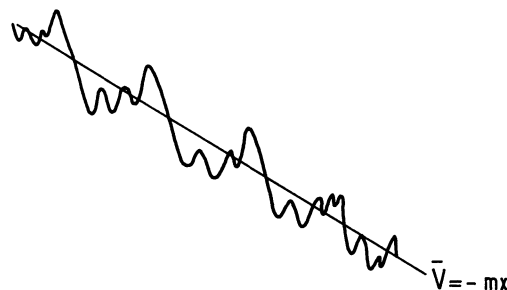


Fig. 2a. — Détail d'une région de piégeage.

[Enlarged view of a trapping region.]

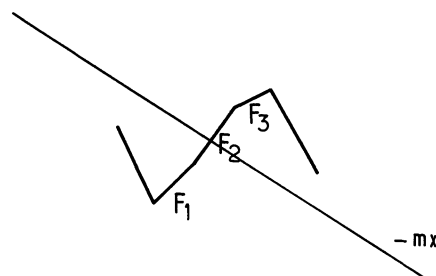


Fig. 2a. — Le potentiel unidimensionnel $\int^x \phi(y) dy$ dans lequel la particule évolue par activation thermique.

[The one-dimensional potential $\int^x \phi(y) dy$ in which evolves the particle under thermal activation.]

potentiel développe des fluctuations qui représentent pour la particule des obstacles à franchir par activation thermique (dans notre limite visqueuse, la particule ne bénéficie pas d'inertie). Supposons par exemple que le piège soit celui représenté sur la figure 2b : sur trois sites, le potentiel croît de $F_1 + F_2 + F_3$. Le temps typique nécessaire pour franchir la première « marche » est donné par la loi d'Arrhenius : $\exp(F_1/T)$. Puis, la particule retombe au fond du puits, et ne franchit la seconde marche qu'au bout d'un temps $\exp((F_1 + F_2)/T)$. De ces mouvements de va-et-vient, il résulte que le temps *typique* nécessaire à la sortie du piège est

$$= \exp(F_1/T) + \exp((F_1 + F_2)/T) + \exp((F_1 + F_2 + F_3)/T).$$

L'étude de la distribution de ces temps de piégeage se ramène donc à l'étude de la variable

$$\tau = z_1 + z_1 z_2 + z_1 z_2 z_3 + \dots$$

Il est facile de montrer [15] qu'asymptotiquement, la distribution de τ obtenue se comporte comme $\tau^{-(1+\mu)}$ à grand, avec μ caractérisé par : $\langle z^\mu \rangle = 1$. Si $F(x)$ est gaussien de variance σ et de valeur moyenne m , on a $\mu = m/\sigma$. L'intérêt de la discussion ci-dessus et de montrer que de façon spontanée, le système a induit une distribution pathologique de temps d'attente au fond des pièges : en effet, la valeur moyenne de T est infinie pour $\mu < 1$. La transposition de l'argument présenté plus haut dans le cas où une direction est privilégiée conduit alors directement au résultat $x = (\text{Cte}) t^\mu$ obtenu par de nombreux auteurs. Le cas où la force est tirée selon une loi binaire engendre un préfacteur périodique en $\ln t$ [17] : $\bar{x} \sim f(\ln t) t^\mu$, dont l'origine peut aussi se comprendre par des arguments simples. Quant au comportement logarithmique obtenu par Sinai dans le cas $\mu = 0$, c'est également une conséquence de la loi d'Arrhénius, en remarquant que dans ce cas le potentiel croît comme $x^{1/2}$.

On peut même obtenir, grâce à cette image physique, la loi de distribution $P(x, t)$ dans la région où elle a une forme *d'échelle* (voir Annexe) : on trouve en particulier que le front de diffusion n'a pas en général un profil gaussien.

En conclusion, nous avons voulu montrer comment, dans bon nombre de cas, l'apparition d'exposants anormaux est liée à la présence (préexistante ou auto-induite) de fortes corrélations ou de lois à moments divergents rendant caduque l'utilisation habituelle du théorème de la limite centrale. Nous avons développé des arguments très simples permettant d'obtenir la valeur exacte de ces exposants anormaux. Ceci est attesté dans chaque cas par les résultats rigoureux que l'on peut obtenir par ailleurs pour ces problèmes. L'intérêt de tels arguments est cependant d'être faciles à manier, et donc

adaptables à des situations difficiles à aborder analytiquement. L'apparition de lois comportant des « longues queues » est en fait générique lorsque ce sont les événements les plus rares qui dominent la dynamique que l'on observe : les pièges dont nous avons parlé sont exponentiellement rares, mais le temps nécessaire à les franchir est exponentiellement grand, ce qui a comme conséquence l'apparition de queues algébriques dans les distributions. La physique des milieux désordonnés nous fournit un grand nombre d'exemples où ces événements rares contrôlent les comportements physiques :

— la densité d'états au voisinage du bord de spectre d'un hamiltonien désordonné possède une singularité essentielle (« queue de Lifchitz ») en $\exp - (1/E)^{d/2}$ [18],

— pour un marcheur effectuant une diffusion entre des pièges infiniment profonds, les grandes régions exemptes de piège régissent le comportement asymptotique de la probabilité de survie du marcheur : $P(t) \sim \exp - t^{d/d+2}$ [19],

— dans un verre de spin, les grandes régions « de Griffiths » ne contenant que des liens ferromagnétiques nécessitent la création d'une grande paroi de Bloch (donc énergétiquement coûteuse) pour retourner les spins qu'ils contiennent : ces régions limitent ainsi le comportement à grand temps de la fonction d'autocorrélation de spins : $\langle S(0) S(t) \rangle \geq \exp - (\ln t)^{d/d-1}$ [20].

Mentionnons enfin que, même dans un problème aussi habituel qu'une marche aléatoire centrée à une dimension, certaines quantités possèdent néanmoins une loi de distribution « large » : c'est le cas par exemple du temps de premier retour au point de départ, pour lequel $P_1(t) \sim t^{-3/2}$ et qui n'a donc pas de valeur moyenne ! Cette remarque permet d'imaginer des situations unidimensionnelles simples conduisant à des diffusions anormales (diffusion sur une structure « en peigne »).

Annexe

FRONTS DE DIFFUSION. — Choisissons N variables aléatoires indépendantes distribuées selon la même loi $\rho(\tau)$. La probabilité que leur somme vaille T est proportionnelle à :

$$P_N(T) \sim \int d\tau_1 \dots d\tau_N \rho(\tau_1) \dots \rho(\tau_N) \times \delta(\tau_1 + \dots + \tau_N - T).$$

Exprimant la fonction delta comme une transformée de Fourier, on obtient :

$$P_N(T) \sim \int dE e^{iET} \left[\int d\tau \rho(\tau) e^{-iE\tau} \right]^N.$$

Si ρ décroît comme $\tau^{-(1+\mu)}$ ($0 < \mu < 1$), sa transformée de Fourier se comporte comme $1 + E^\mu$ quand

$E \rightarrow 0$. La méthode du col sur l'intégrale précédente conduit alors à :

$$P_N(T) \underset{\substack{N \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty \\ N \gg T^\mu}}{\sim} \exp - \left(\frac{N}{T^\mu} \right)^{\frac{1}{1-\mu}}. \quad (\text{A.1})$$

En interprétant N comme la distance parcourue au bout d'un temps T , et ρ comme la loi de distribution des temps de piégeage locaux, on voit donc que la loi de distribution a asymptotiquement une forme d'échelle $P(x, t) = 1/t^\mu f(x/t^\mu)$ au voisinage du front de diffusion, qui a ceci de remarquable qu'elle n'est pas gaussienne. En fait, (A.1) reproduit le

comportement asymptotique d'une loi de Levy d'ordre μ , dont on peut montrer dans certains modèles [15a] qu'elle est la forme exacte de la fonction d'échelle. Dans le cas où une vitesse apparaît, cette forme d'échelle devient : $1/\xi(t) f((x - Vt)/\xi(t))$.

Remerciements.

Nous remercions Etienne Guyon et Elisabeth Charlaix pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et pour leurs encouragements, et Alain Comtet pour une collaboration très enrichissante.

References

- [0] FELLER, W., *An introduction to probability theory and its application* (New York, Wiley) 1971.
- [1] ANDERSON, P. W., THOULESS, D. J., ABRAHAMS, E., FISHER, D. S., *Phys. Rev. B* **22** (1980) 3519.
- [2] BOUCHAUD, J. P., GEORGES, A., HANSEL, D., LE DOUSSAL, P., *J. Phys. A* **19** (1986) L1145 ;
BOUCHAUD, J. P., GEORGES, A., LE DOUSSAL, P., communication à la « Rencontre sur les systèmes dynamiques », Rome octobre 1986 Preprint LPTENS 86/34, à paraître.
- [3] BOUCHAUD, E., DAOUD, M., *J. Phys. A* **20** (1987) 1463.
- [4] SHLESINGER, M. F., KLAFTER, J., WEST, B. J. in proceedings of Stat. Phys. 16, *Physica* **140A** (1986) 212.
- [5] BOUCHAUD, J. P., LE DOUSSAL, P., *J. Stat. Phys.* **41** (1985) 225.
ZACHERL, A., GEISEL, T., NIERWETBERG, J., RADONS, G., *Phys. Lett.* **114A** (1986) 317.
- [6] GNEDENKO, B. V., KOLMOGOROV, A. N., *Limit distributions for sums of independantly distributed random variables* (Addison-Wesley, Cambridge) 1954 ;
CASSANDRO, M. and JONA-LASINIO, G., *Adv. Phys.* **27** (1978) 913.
- [7] SHLESINGER, M. F. and HUGHES, B. D., *Physica* **109A** (1981) 597 ;
HUGHES, B. D., MONTROLL, E. W. and SHLESINGER, M. F., *J. Stat. Phys.* **30** (1983) 273.
- [8] MACHTA, J., *J. Phys. A* **18** (1985) L531.
- [9] ALEXANDER, S., BERNASCONI, J., SCHNEIDER, W. R., ORBACH, R., *Rev. Mod. Phys.* **53** (1981) 175.
- [10] LUCK, J. M., *Nucl. Phys. B* **225** (1983) 169 ;
FISHER, D. S., *Phys. Rev. A* **30** (1984) 960.
- [11] BOUCHAUD, J. P., COMTET, A., GEORGES, A., LE DOUSSAL, P., preprint LPTENS 87/7, à paraître au *J. Physique*.
- [12] DE MARSILY, G., MATHERON, G., *Water Resour. Res.* **16** (1980) 901.
- [13] VAN DEN BROECK, C. and MAZO, R., *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 1309 ; *J. Chem. Phys.* **81** (1984) 3624.
- [14] BOUCHAUD, J. P., COMTET, A., GEORGES, A., LE DOUSSAL, P., *Europhys. Lett.* **3** (1987) 653.
- [15] KESTEN, H., KOZLOV, M., SPITZER, F., *Compos. Math.* **30** (1975) 145 ;
DERRIDA, B. and POMEAU, Y., *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 627.
- [16] SINAI, Ya. G., *Theor. Probab. Ic. Appl.* **27** (1982) 247.
- [17] BERNASCONI, J. and SCHNEIDER, W. R., *Helv. Phys. Acta* **58** (1985) 597.
- [18] LIFSCHITZ, I. M., *Sov. Phys. Usp.* **7** (1965) 549.
- [19] DONSKER, M. and VARADHAN, S., *Commun. Pure Appl. Math.* **32** (1979) 721 ;
GRASSBERGER, P. and PROCACCIA, I., *J. Chem. Phys.* **76** (1982) 6202.
- [20] RANDERIA, M., SETHNA, J. P., PALMER, R. G., *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 1321.