L'énigme E = Mc2 : énergie potentielle et renormalisation de la masse

L. Brillouin

LE JOURNAL DE PHYSIQUE TOME 25, NOVEMBRE 1963, PAGE 883.

L'ÉNIGME $E = Mc^2$: ÉNERGIE POTENTIELLE ET RENORMALISATION DE LA MASSE

Par L. BRILLOUIN, (1)

Résumé. — Toute énergie possède une masse, mais il semble qu'on ait omis de discuter le cas de l'énergie potentielle. Les fondateurs de la Relativité n'en parlent guère. En fait l'énergie correspondante est répandue dans tout l'espace, et la masse n'en peut être exactement localisée. La symétrie de la distribution suggère de diviser la masse entre les diverses particules en interaction.
Il faut donc, dès la Relativité classique, réviser les valeurs des masses. Bien avant les quanta, la « renormalisation » est indispensable (et fut omise) dans la Relativité d'Einstein.

Abstract. — There is no energy without mass, but it seems that most authors simply ignored the case of potential energy. The founders of Relativity keep silent about it. As a matter of fact, the corresponding energy is spread all around in space, and so is the mass. Symmetry properties of this distribution suggests splitting the mass fifty-fifty between interacting particles.
It is necessary to re-evaluate the values of masses, even in the classical theory of relativity, where this consideration was simply ignored. "Renormalization" is absolutely essential, before quantum theory, and must start at the beginning of Einstein's relativity.

1. Dialogue soucieux. — A — La relation d'Einstein est indiscutable : énergie vaut masse.

B — Certainement : la preuve en a été flagrante et déflagrante.

A — Oui, bien tonnante et détonnante. Toute énergie possède une masse, et vice-versa.

B — Énergie chimique, cinétique, potentielle ; toutes les qualités d'énergie doivent être traitées sur le même pied.

A — Évidemment, mais ... cela ne va pas sans difficulté ! L'énergie potentielle se rattache à deux corps en présence ; parfois même à des milliers de corps ou atomes en interaction. C'est une notion bipède, multipède, un millepatte ! La masse au contraire est attachée à un point et un seul. C'est un unijambiste ! Les deux notions ne sont pas physiquement de même nature.

B — Relisons Laue [1] ; il affirme que la relation d'Einstein se rapporte à « toutes les énergies qui accompagnent le mouvement de la matière..., de sorte que leur mouvement par rapport à un corps matériel soit nul. Il faut donc *inclure* les énergies calorifique, chimique, élastique, et l'énergie interne des atomes. En revanche, il faut *exclure explicitement* les énergies électromagnétique et de gravitation, qui possèdent des mouvements propres à l'intérieur des corps. Dans certains cas ces énergies peuvent satisfaire la relation d'Einstein et leur mouvement doit être pris en ligne de compte ».

A — Ce n'est pas très clair ! Laue évidemment sentait l'incompatibilité de la gravitation classique (à propagation instantanée) et de la relativité. Cette opposition fut résolue plus tard par la relativité généralisée.

(1) Contrat Nonr 266(56).

B — Oui mais, que veut dire Laue, au sujet de l'électromagnétisme ? Il est bien connu que toutes les relations de l'électromagnétisme obéissent à la transformation de Lorentz et sont par conséquent relativistes.

A — Essayons de découvrir la difficulté cachée. Considérons une structure *close et isolée* contenant une énergie E_0, mesurée dans un système au repos. L'énergie interne peut être gravifique, électromagnétique, etc..., peu importe. Nous devons affirmer que cette énergie E_0 (au repos) correspond à une masse M_0. Si la structure considérée est en mouvement avec une vitesse constante $\mathbf{v}$, nous obtenons une masse M et une énergie E, définies par les formules d'Einstein

$$E_0 = M_0 c^2 \qquad E = Mc^2 \qquad \mathbf{p} = M\mathbf{v}$$
$$M = M_0 (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \tag{1}$$

où $\mathbf{p}$ est la quantité de mouvement.

B — Sur ce point, tout le monde est d'accord, et l'on considère que la différence

$$E_{\text{cin}} = E - E_0 \tag{2}$$

représente l'énergie cinétique relativiste de la structure close, en mouvement.

A — Oui, mais... qu'arrive-t-il si cette structure se meut dans un champ extérieur, et possède une *énergie potentielle* dans ce champ ? L'énergie cinétique (2) ne représente qu'une part de l'énergie totale, E_{tot}. La partie potentielle E_{pot} doit jouer un rôle :

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} = \text{constante}. \tag{3}$$

Il est inadmissible qu'une partie, E_{cin}, soit soumise à la relativité (éq. 1) et que l'autre, E_{pot}, n'y participe pas. Il est impossible que l'énergie potentielle interne de la structure close se transforme relativistiquement, et que l'énergie potentielle externe y échappe complètement.

B — Nous touchons au point névralgique. Quel rôle exact joue l'énergie potentielle en Relativité ? Question incomplètement résolue et surtout abandonnée dans une demi-obscurité inquiétante.

2. Que penser de l'énergie potentielle ?

A — La notion d'énergie potentielle est indispensable en mécanique classique, mais n'oublions pas qu'elle suppose, essentiellement une *propagation instantanée* des actions à distance ; cette hypothèse est comprise dans les postulats de Newton.

B — L'électricité, la gravitation, sont supposées, en mécanique classique, agir immédiatement à toute distance ; l'énergie potentielle ne peut se définir que si elle dépend des positions des divers corps en présence, à un instant donné, sans aucun délai ni retard dans la propagation.

A — Cette propagation instantanée est aussi sous-entendue dans le *troisième principe* de Newton : égalité de l'action et de la réaction (à distance).

B — Vous retrouvez encore cette condition dans la définition d'un *centre de gravité* ou d'un moment d'inertie. Si vous introduisez une vitesse de propagation finie, comme le fait Einstein dans la relativité, vous détruisez à la fois toutes les notions basées sur des actions instantanées à distance : énergie potentielle, action égale à la réaction, centre de gravité, moment d'inertie..., tout s'effondre.

A — Ne dramatisons pas ! La mécanique relativiste se raccorde sans discontinuité avec la mécanique classique, lorsque les vitesses sont faibles (devant la vitesse c de la lumière) et que les distances restent petites (devant une longueur $c\tau$, où τ est la période des mouvements considérés).

B — Nous devons donc rechercher quelle est la quantité qui se substitue à l'énergie potentielle, par exemple, et se raccorde avec la définition mécanique usuelle. Nous pourrons ensuite étudier la masse à attribuer à cette énergie et examiner comment elle se distribue, et quel rôle elle peut jouer.

A — Relisez Einstein : il ne parle pas d'autre chose que des champs électriques et magnétiques. Il reprend la ligne de pensée qui commence à Faraday, se renforce avec Maxwell, et prend toute sa vigueur avec la relativité. Le champ est doté d'une personnalité physique précise.

B — Une charge électrique Q crée autour d'elle (dans un système de référence au repos) un champ électrique

$$\mathbf{F} = (Q/r^2)\mathbf{r}^0 \tag{4}$$

dirigé dans la direction du vecteur $\mathbf{r}$ (la notation $\mathbf{r}^0$ représente un vecteur unité suivant cette direction). On admet que ce champ a une existence physique réelle, *même si personne ne le mesure ni ne l'observe*, et cette affirmation est un véritable postulat métaphysique.

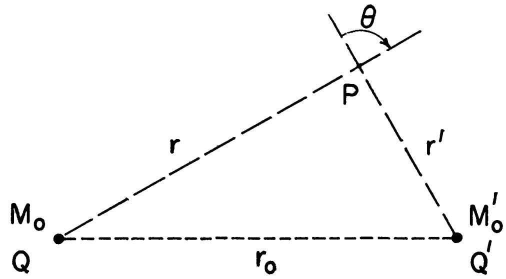

FIG. 1.

A — Oui, mais... le champ (4) existe dans un système d'axes au repos. Si le système d'observation est en mouvement, le champ se transforme suivant les formules de Lorentz-Einstein. Ici encore nous affirmons une loi qui dépasse la physique empirique.

B — La réalité du champ est une hypothèse si essentielle qu'on lui attribue une *énergie* ! Là où règne le champ électrique $\mathbf{F}$, il existe, dit-on, une densité d'énergie $\frac{1}{8\pi}|F|^2$ en unités ESCGS. En intégrant tout autour d'une charge Q (portée par une sphère de rayon a) on obtient une énergie électrostatique

$$E_{\text{el}} = Q^2/2a \tag{5}$$

et cette énergie contribue à la masse du système chargé.

A — Sur cet exemple essentiel nous voyons poindre la méthode : le champ distribué dans tout l'espace engendre une énergie répartie partout...

B — ... et une masse répartie dans tout l'espace, mais concentrée surtout au voisinage de la sphère de rayon a, là où le champ est le plus intense. Énergie et masse sont distribuées en tous sens, mais surtout près de la charge électrique.

3. Que substituer à l'énergie potentielle ?

A — Tout d'abord, essayons de sortir des abstractions mathématiques, et cherchons à poser un problème physique précis. Laue discute l'énergie électromagnétique, suivons-le sur ce terrain, mieux connu que beaucoup d'autres.

B — Considérons une structure M_0, comme plus haut, et dotons-la d'une charge électrique Q ; supposons-la placée dans un champ électrique de potentiel V donné...

A — Je vous arrête ! Le physicien ne peut pas créer un « potentiel V » donné. Ce qu'il peut construire, c'est un système de corps extérieurs chargés avec des charges Q', Q'' ... occupant des positions définies et produisant un certain champ électrique.

B — Simplifions, pour y voir clair : Prenons donc un premier corps, M_0, Q et un second corps M'_0, Q', le tout au repos (pour commencer). La charge Q' produit un champ de Coulomb $Q'r'^{-2}$, si r' est la distance entre Q' et le point d'observation P ; le potentiel est $Q'r'^{-1}$. Au point Q, le potentiel donne une énergie potentielle QQ'/r_0 en appelant r_0 la distance QQ'.

A — Je vous interromps encore ! Le potentiel d'une charge Q au repos est défini à une constante près (constante d'intégration). Ce n'est pas une quantité physique simple. Seules les différences de potentiel ont une signification physique.

B — Oui, je sais ... et pour des corps en mouvement, le potentiel V se complète par un potentiel vecteur $\mathbf{A}$; leur ensemble comporte une fonction inconnue...

A — Et cela nous entraînera à parler de l' « invariance de jauge » !

B — Simplifions encore : les deux corps sont au repos, et en chaque point de l'espace nous pouvons définir (et mesurer) un champ électrique $\mathbf{F}$.

A — Oui, mais attention : impossible de séparer le champ produit par Q de celui produit par Q'. Nous avons un champ global

$$\mathbf{F} = \frac{Q}{r^2}\mathbf{r}^0 + \frac{Q'}{r'^2}\mathbf{r}'^0 \qquad (6)$$

où $\mathbf{r}$ est la distance entre le point d'observation P et la charge Q, tandis que $\mathbf{r}'$ est la distance entre ce point d'observation et Q'. La densité d'énergie électrique $\mathcal{E}$ créée par ce champ, est représentée par la formule $\frac{1}{8\pi}|F|^2$ comme au paragraphe précédent.

$$\mathcal{E}_{el} = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{Q^2}{r^4} + \frac{Q'^2}{r'^4} + 2\,\frac{QQ'}{r^2r'^2}\cos\theta\right] \qquad (7)$$

où θ est l'angle des deux vecteurs $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$.

B — Le premier terme contribue à la masse du premier corps Q, le second terme participe à la masse de Q', mais nous voyons apparaître un nouveau terme en QQ' qui indique une interaction entre les deux charges. Cela mérite examen.

A — Intégrons dans tout l'espace ce terme d'interaction : nous obtenons justement l'énergie d'interaction

$$\mathcal{E}_{int} = \frac{2}{8\pi}\int\frac{QQ'}{r^2\,r'^2}\cos\theta\,d\tau = \frac{QQ'}{r_0}. \qquad (8)$$

Une note annexe explique le calcul, d'ailleurs simple : le calcul est présenté pour des charges au repos, mais se généralise sans peine lorsque les charges sont en mouvement, et nous sommes certains que la relativité s'applique sans effort.

B — Nous voilà donc en possession d'une énergie distribuée dans tout l'espace, à laquelle nous pouvons attribuer une masse, distribuée elle aussi en tous sens. C'est, à coup sûr, la représentation que nous cherchions, et qu'il convient d'étudier plus spécialement.

A — Oui, l'affirmation de la valeur physique du champ électrique et de la réalité de son énergie doit nous donner la clef de l'énigme.

B — Il est bien certain qu'Einstein a pressenti ces faits essentiels en choisissant de renforcer le rôle des champs. Outre la densité d'énergie, Einstein souligne le rôle des flux d'énergie et du fameux tenseur de Maxwell (à 3 dimensions, 9 composantes). Tout cela se regroupe en un tenseur

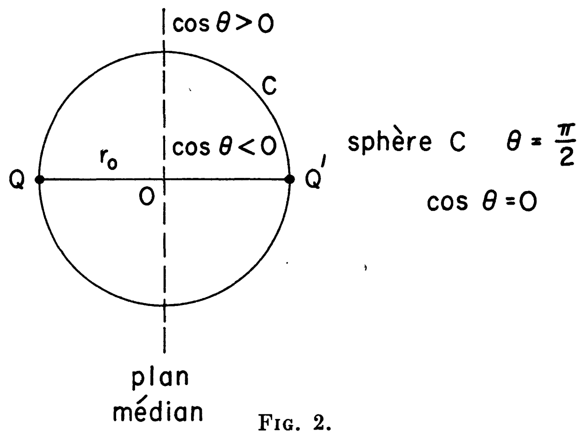

FIG. 2.

d'Einstein à 4 dimensions (16 composantes)... La théorie s'équilibre bien ... mais nous chargeons l' « éther électromagnétique » d'un rôle écrasant ! Que sera-ce lorsque d'autres champs viendront s'y superposer ?

4. **La masse de l'énergie potentielle.** — L'énergie d'interaction, répartie dans tout l'espace, remplace l'énergie potentielle, et cette nouvelle notion, liée au champ électrique se prête aisément aux généralisations relativistes. Restons pour l'instant dans un système de référence au repos, avec deux charges Q, Q' fixes ; la densité d'énergie d'interaction est (*fig.* 2) liée à une densité de masse ρ

$$\rho = \frac{1}{4\pi\,c^2}\frac{QQ'}{r^2\,r'^2}\cos\theta \qquad (9)$$

d'après la relation (8). Cette expression est parfaitement symétrique par rapport aux positions des deux charges Q et Q'. La densité ρ est nulle sur la sphère C de diamètre QQ', car θ y est égal à $\pi/2$. Si les deux charges sont de même signe, la densité ρ est négative à l'intérieur de la sphère C et positive au dehors ; l'énergie totale est positive, et il y a répulsion.

Si les charges Q et Q' sont de signes opposés, l'énergie totale est négative, mais l'intérieur de la sphère C est positif, — et nous obtenons une attraction. La présence de cette *énergie opposée à l'intérieur de la sphère* C présente un caractère bien curieux. Sur le plan médian, l'énergie est maximum ou minimum.

Il y a symétrie complète entre les positions des deux charges ; ni leurs masses M_0, M'_0 ni leurs charges (en valeurs absolues) $|Q|$, $|Q'|$ ne jouent aucun rôle dans la distribution. L'énergie est distribuée dans tout l'espace, et rien ne permet de la considérer comme concentrée en un point ou en un autre. Nous pouvons imaginer la masse entière $QQ'/r_0 c^2$ située au centre de symétrie O ; nous pouvons supposer cette masse coupée en deux parts égales, attribuées aux deux charges, ce qui nous donne des *masses révisées* (*renormalisées*)

$$M_1 = M_0 + \frac{QQ'}{2r_0 c^2} \qquad M'_1 = M'_0 + \frac{QQ'}{2r_0 c^2}. \tag{10}$$

Cette hypothétique distribution peut représenter une approximation utile dans les problèmes presque classiques. Le champ électrique est infini sur les charges Q et Q' et la densité d'énergie y est aussi infinie mais son signe s'y inverse (sphère C) !

La correction est négative si les charges sont de signes opposés ; considérons le cas (très hypothétique) où les masses seraient purement d'origine électrostatique (éq. 5) et prenons

$$Q = -Q' \qquad M_0 = M'_0 = \frac{Q^2}{2ac^2} \tag{11}$$

$$M_1 = M'_1 = \frac{Q^2}{2ac^2} - \frac{Q^2}{2r_0 c^2}$$

les masses M_1 M'_1 s'annulent pour $r_0 = a$. Inutile de dire que ce dernier problème n'a guère de signification physique.

Nous avons examiné le problème de l'électromagnétisme, mais la même méthode devrait s'appliquer en gravitation, ou pour des champs particulaires quantiques. Les étapes seraient les mêmes : renoncer à parler d'un « champ donné » agissant sur une particule ; examiner le problème physique réel d'interaction entre deux particules ; utiliser la formule donnant la densité d'énergie dans le champ (analogue à 7) et prendre les termes mixtes. L'intégrale de ces termes mixtes dans tout l'espace est l'expression à discuter et servira à remplacer l'énergie potentielle. Ce changement de point de vue est indispensable.

5. **La renormalisation quantique** a été suggérée par Bethe et introduite très précisément par Schwinger [2]. Il faut alors évaluer le rôle des énergies potentielles, complétées *par les effets de spin*. Il s'agit d'interpréter les résultats expérimentaux très curieux de Lamb et Retherford. La méthode théorique de Schwinger donne des résultats remarquables dans toutes ses applications en mécanique quantique ; notre discussion prouve que *le problème se posait déjà en relativité classique* et qu'une ombre de mystère l'avait recouvert et dissimulé. La question n'avait pas été reconnue par Sommerfeld ni par Dirac et la théorie de l'électron laissait cette lacune grande ouverte. Le point curieux, c'est que la masse renormalisée soit essentiellement distribuée dans tout l'espace. Il serait intéressant de compléter la discussion pour des corps en mouvement et d'examiner si l'exacte symétrie entre les deux charges QQ' se maintient.

Le problème de la renormalisation des masses, suivant la méthode de Schwinger avait déjà été discuté par l'auteur dans des publications antérieures [3] ; les remarques ci-dessus nous semblent apporter des précisions utiles, et surtout indiquer la nécessité de réviser la relativité classique elle-même. Les formules des doublets relativistes (Sommerfeld, puis Dirac) sont à revoir de très près, car le changement des masses y modifierait la « constante » de Rydberg, sans probablement changer sensiblement les écarts des doublets, car l'énergie potentielle et l'énergie totale varient proportionnellement au premier abord.

NOTE ANNEXE

Notations : $\mathbf{F} = \operatorname{grad} V \quad \mathbf{F}' = \operatorname{grad} V'$

L'intégrale (8) s'écrit avec le produit scalaire de $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}'$

$$V = Q/r \qquad V' = Q/r'. \tag{12}$$

L'intégrale est prise dans tout l'espace, et il est essentiel que $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}'$, V et V' soient nuls à l'infini ;

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{int}} &= \frac{1}{4\pi}\int (F.F')\, d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi}\int \left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V'}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V'}{\partial z}\right) d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi}\left| V'\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right)\right|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{4\pi}\int V' \Delta V\, d\tau. \end{aligned} \tag{13}$$

x, y, z sont les coordonnées du point P de la figure 1. On intègre par parties sur V et l'on note que ΔV représente $-4\pi\rho$, donc

$$\mathcal{E}_{\text{int}} = V'Q = QQ'/r_0 = VQ' \tag{14}$$

ce qui justifie la formule (8).

Ce raisonnement n'est qu'un cas particulièrement simple du calcul de Maxwell justifiant les tensions de Maxwell, la formule de densité d'énergie et de flux (vecteur de Poynting).

Manuscrit reçu le 1er août 1964.

BIBLIOGRAPHIE

[1] VON LAUE (M.), Das Relativitätsprincip, Vieweg, Braunschweig, 1911, p. 149, dernières lignes et p. 150.

[2] Voir la série des mémoires originaux réunis en volume SCHWINGER (J.), *Quantum Electrodynamics*, Dover Publ., New York, 1958.

[3] BRILLOUIN (L.), Transformations et avatars de la notion de champ. *Revue de Métaph. et Morale*, 1962, **67**, 206-213. BRILLOUIN (L.), *Scientific Uncertainty, and Information*, 1 vol., Acad. Press, New York, 1964, Chap. V et VII. — BRILLOUIN (L.), La masse de l'énergie potentielle, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, oct. 1964.