



# Nouvelles formules, valables à toutes les fréquences, pour le calcul rapide de l'effet Kelvin

Albert Levasseur

## ► To cite this version:

Albert Levasseur. Nouvelles formules, valables à toutes les fréquences, pour le calcul rapide de l'effet Kelvin. Journal de Physique et le Radium, 1930, 1 (3), pp.93-98. 10.1051/jphysrad:019300010309300 . jpa-00205411

**HAL Id: jpa-00205411**

**<https://hal.science/jpa-00205411>**

Submitted on 4 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# NOUVELLES FORMULES, VALABLES A TOUTES LES FRÉQUENCES, POUR LE CALCUL RAPIDE DE L'EFFET KELVIN <sup>(1)</sup>.

par M. ALBERT LEVASSEUR

Maître de Conférences à l'Ecole Supérieure d'Electricité.

**Sommaire.** — 1. Rappel de l'équation exacte de lord Kelvin et des principales relations approchées proposées jusqu'à ce jour (approximation de la « coque fictive », de M. Boucherot; formule en série de lord Rayleigh et de Potier; équations de M. Brylinski). — Insuffisance de ces diverses expressions.

2. Indication d'une nouvelle formule, plus simple, plus exacte et sans restriction de validité. — Discussion des résultats.

3. Equation généralisée, applicable aux conducteurs de forme quelconque.

4. L'auteur insiste sur le fait que ses formules, pouvant être introduites dans les calculs algébriques sans les compliquer notablement, permettent de résoudre de nombreux problèmes et sont à même de faciliter bien des recherches importantes.

**Introduction.** — Le calcul exact de l'accroissement de résistance ohmique dû à l'effet pelliculaire peut être effectué, pour un conducteur cylindrique, au moyen de la relation classique de lord Kelvin :

$$K = \frac{Q}{2} \times \frac{\text{ber } Q \text{ bei}' Q - \text{bei } Q \text{ ber}' Q}{(\text{ber}' Q)^2 + (\text{bei}' Q)^2}, \quad (1)$$

dans laquelle :

$$Q = a \sqrt{4 \pi \mu c \omega};$$

$K$  est le rapport de la résistance en courant alternatif à la résistance en courant continu,  $a$  est le rayon de la section,  $\mu$  la perméabilité magnétique,  $c$  la conductivité électrique, et  $\omega$  la pulsation;

$\text{ber } Q$  et  $\text{bei } Q$  sont respectivement la partie réelle et le coefficient de la partie imaginaire de la fonction de Bessel d'ordre zéro de la variable imaginaire :  $Q \sqrt{-j}$ .

Divers inconvénients se manifestent lors de l'utilisation de cette formule (1) : les calculs numériques sont, malgré l'emploi des tables de fonctions de Bessel, relativement longs; il est difficile d'interpoler très correctement; enfin, on ne peut pas introduire la formule dans des calculs algébriques de quelque complication sans les rendre excessivement pénibles, ce qui entrave très sérieusement bien des recherches importantes. Il n'est donc pas surprenant que, depuis près d'un demi-siècle, de nombreuses tentatives aient été faites pour donner de

(1) Ces formules ont été présentées à l'Académie des Sciences, dans la séance du 7 octobre 1929.

l'effet Kelvin des expressions plus simples. Nous allons d'abord rappeler brièvement les principaux résultats obtenus dans cette voie.

1° Aux fréquences très hautes, on peut admettre, comme l'a fait M. Boucherot, que le courant est entièrement localisé dans un « tube fictif ». Si  $\varepsilon$  est l'épaisseur de celui-ci, on a évidemment :

$$K = \frac{\pi a^2}{\pi a^2 - \pi (a - \varepsilon)^2}, \quad (2)$$

$\varepsilon$  ayant pour valeur :

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\mu c f}}$$

( $f$  = fréquence du courant.)

2° Egalement aux très grandes fréquences, on peut écrire avec M. Brylinski <sup>(1)</sup> :

$$K = \pi a \sqrt{\mu c f} + \frac{1}{4}. \quad (3)$$

En raison de sa simplicité, cette relation (3) paraît être généralement préférable à la formule (2).

Lorsque la fréquence s'abaisse, les approximations (2) et (3) deviennent complètement fausses. Ainsi, l'épaisseur de la « peau » devient bientôt supérieure au diamètre du conducteur. (Pour  $f = 0$ , on a évidemment  $\varepsilon = \infty$  et les erreurs relatives données par les formules (2) et (3) atteignent respectivement 100 pour 100 et 75 pour 100).

3° Afin d'obtenir, en tout état de cause, des formules suffisamment simples, M. Brylinski imagina de diviser en trois segments la courbe :

$$K = F(Q) = F(a \sqrt{4\pi\mu c \omega})$$

et d'attribuer à chacun de ceux-ci une équation particulière.

Mais toute division du phénomène en plusieurs cas distincts laisse intégralement subsister le vice fondamental des formules empiriques proposées jusqu'à présent : *ces formules n'ayant qu'un champ de validité limité, il n'est permis de les introduire dans aucun calcul dont le résultat doit avoir une portée absolument générale, s'étendant par exemple à toute l'échelle des fréquences.* On peut citer, parmi les problèmes qui exigent des calculs de ce genre ceux qui concernent le four à induction sans fer, puisque cet appareil peut fonctionner sous des fréquences comprises entre 100 000 p : s et 50 p : s.

4° Lord Rayleigh et Potier donnèrent, de même, un groupe de deux formules respectivement applicables dans des cas distincts. Si  $d$  représente le diamètre du conducteur, et  $\rho$  la résistivité, ces relations s'écrivent :

$$K = 1 + \frac{1}{48} \left( \frac{\pi^2 d^2 f \mu}{\rho} \right)^2 - \frac{1}{2880} \left( \frac{\pi^2 d^2 f \mu}{\rho} \right)^4 + \frac{1}{58647} \left( \frac{\pi^2 d^2 f \mu}{\rho} \right)^6,$$

(2) On pourra vérifier que cette expression est identique à :

$$K = \frac{\pi a^2}{2\pi a \varepsilon} + \frac{1}{4}.$$

Mais il semble bien que M. Brylinski l'ait déduite non pas de la notion de « peau » mais — plus logiquement — des propriétés de la courbe :

$$K = F(Q) = F(a \sqrt{4\pi\mu c \omega})$$

qu'il avait étudiées il y a quarante ans. (Brylinski. *L'Electricien*, 1<sup>er</sup> mars 1890).

admissible quand :

$$\frac{\pi^2 d^2 f^2}{\rho} < 1,$$

et :

$$K = \sqrt{\frac{\omega \mu \pi d^2}{8 \rho}},$$

admissible quand :

$$\frac{\pi^2 d^2 f^2}{\rho} > 1.$$

Ce groupe donne de très mauvaises approximations, et il est évidemment peu maniable.

5° La première tentative d'établir une formule approchée *unique* fut faite, croyons-nous, par M. Brylinski, et le résultat obtenu, quoique très ancien <sup>(3)</sup>, resta inégalé jusqu'à ce jour. L'équation proposée était :

$$K = 0,36768 + 0,009266 Q + \frac{3,30366}{Q^2} + \sqrt{0,4153 Q^2 - 0,2593}.$$

Cette formule donne des erreurs relatives qui atteignent 3,53 pour cent (soit  $\frac{1}{28}$ ), ce qui est souvent négligeable, tout au moins dans la pratique industrielle. Mais pour les valeurs de  $Q$  inférieures à 1,5, la quantité sous radical est négative et  $K$  est imaginaire ; par conséquent, la formule n'a pas toute la généralité espérée. Enfin, il s'en faut évidemment de beaucoup que la relation ci-dessus soit assez maniable pour qu'on puisse en faire ordinairement usage.

**Nouvelle formule.** — Ce n'est aucunement par des considérations d'ordre physique, mais par une analyse purement mathématique, appliquée aux données de lord Kelvin, que nous avons établi notre formule. Aussi n'insisterons-nous pas ici sur la méthode suivie <sup>(4)</sup>. Nous nous bornerons à faire connaître et à discuter le résultat obtenu, cette dernière étude présentant — à l'encontre de celle d'un procédé de mathématique pure — un intérêt direct pour les physiciens.

Notre formule est, pour un conducteur cylindrique :

$$K = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^6 + v^6} + \frac{1}{4},$$

avec :

$$v = \pi a \sqrt{\mu c f}.$$

Les résultats de l'application de cette expression <sup>(3)</sup> figurent sur le tableau ci-contre.

<sup>(3)</sup> BRYLINSKI. *loc. cit.*, p. 196.

<sup>(4)</sup> Nous avons exposé cette méthode dans une communication, faite le 19 octobre 1929 à la Section des Recherches Physiques de la *Société Française des Electriciens*, et dont le texte paraîtra dans le Bulletin de la S. F. E. de janvier 1930.

<sup>(5)</sup> Dans la communication précitée, nous avons fait voir qu'il serait sans intérêt pratique de remplacer les nombres « ronds »  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{3}{4}$  par des nombres voisins.

On voit que l'erreur absolue atteint au maximum 0,0235, et que l'erreur relative atteint au plus 1,15 pour 100 (soit  $\frac{1}{87}$ ), ce qui est, en pratique, tout à fait négligeable. Les trois derniers résultats coïncident *au dix millième près* avec ceux que donnerait l'approximation de la « coque fictive » utilisée sous la forme perfectionnée (3) rappelée plus haut, *et il en serait nécessairement de même pour tous les résultats qui correspondraient à de plus grandes valeurs de Q (hautes fréquences)*. Mais tandis que l'expression (3) donne, lorsque la fréquence décroît, une erreur relative qui tend vers la valeur énorme de 75 pour 100, l'erreur relative donnée par notre formule tend, en ce cas, rigoureusement vers zéro.

D'autre part, la formule proposée à toute la simplicité désirable. Son application n'entraîne qu'à des calculs numériques extrêmement courts. Enfin, elle est tout à fait maniable dans les calculs algébriques.

Le problème de la recherche d'une formule simple pour le calcul de l'effet Kelvin peut donc être considéré, quel que soit le point de vue auquel on se place, comme résolu d'une manière pleinement satisfaisante.

$Q = \frac{v}{a \sqrt{\pi \epsilon c \omega}}$	$v = \pi a \sqrt{\mu c f}$	$K$ EXACT (d'après Kelvin).	$K$ CALCULÉ par notre formule	ERREUR ABSOLUE	ERREUR RELATIVE
0	0	1,0000	1,0000	0,0000	0,0 p. cent.
0,5	0,17678	1,0000	1,0000	0,0000	0,0 —
1	0,33356	1,0056	1,0014	— 0,0042	— 0,4 —
1,5	0,53034	1,0258	1,0149	— 0,0109	— 1,1 —
2	0,70712	1,0790	1,0693	— 0,0093	— 0,9 —
2,5	0,88390	1,1747	1,1819	+ 0,0072	+ 0,6 —
3	1,06068	1,3180	1,3317	+ 0,0137	+ 1,0 —
3,5	1,2375	1,4920	1,4975	+ 0,0055	+ 0,4 —
4	1,4142	1,6778	1,6694	— 0,0084	— 0,5 —
4,5	1,59 0	1,8628	1,8439	— 0,0189	— 1,0 —
5	1,7678	2,0430	2,0193	— 0,0235	— 1,15 —
5,5	1,9446	2,2190	2,1937	— 0,0233	— 1,0 —
6	2,1214	2,3 37	2,3720	— 0,0217	— 0,9 —
8	2,8285	3,0936	3,0787	— 0,0169	— 0,5 —
10	3,5336	3,7980	3,7837	— 0,0123	— 0,3 —
15	5,3034	5,5620	5,5334	— 0,0286	— 0,1 —
20	7,0712	7,3277	7,3212	— 0,0065	— 0,1 —
30	10,6068	10,865	10,8368	— 0,0197	— 0,2 —

*Nota.* — L'erreur relative de la onzième ligne, étant la plus grande, a été indiquée avec deux décimales.

REMARQUE. — La 5<sup>e</sup> des valeurs exactes de  $K$  figurant dans le tableau ci-contre n'est pas celle (1,0805) que donnent les tables de Kelvin. M. Janet, qui a bien voulu nous faire l'honneur de présenter notre formule à l'Académie des Sciences, nous a signalé qu'il existe en ce point des tables de Kelvin une légère erreur, et que la valeur véritable de  $K$ , correspondante à  $Q = 2$ , est 1,0790, ce qui a pour effet de régulariser la progression des erreurs relatives et de rendre encore meilleure que nous ne l'avions cru la coïncidence donnée par notre équation.

#### Généralisation <sup>(6)</sup> applicable aux conducteurs dont la section a une forme

<sup>(6)</sup> On pourra vérifier sans peine que, dans le cas particulier où la section est circulaire, la relation ci-dessous se réduit à la précédente.

**quelconque.** — Ce qu'il y a de mieux à faire, en pareil cas, est d'admettre l'approximation :

$$K = \sqrt[6]{\left(\frac{3}{4}\right)^6 + \left(\frac{S}{p\varepsilon}\right)^6} + \frac{1}{4},$$

$S$  étant l'aire de la section,  $p$  son périmètre et  $\varepsilon$  l'épaisseur de la « coque fictive » calculée par la relation classique.

**Observation complémentaire.** — Il est visible que nos deux équations sont de la forme :

$$K = \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n + x^n} + \frac{1}{4}.$$

On peut aisément vérifier que l'approximation obtenue ne varie que lentement en fonction du paramètre  $n$  <sup>(7)</sup>. Il serait par suite possible, si l'on ne désirait qu'une approximation grossière, d'adopter pour ce paramètre la valeur  $n = 10$ , ce qui abrégerait *très légèrement* les applications numériques. Mais nous ne croyons pas que cette modification présente un réel intérêt.

**Conclusions.** — 1° La formule simple :

$$K = \sqrt[6]{\left(\frac{3}{4}\right)^6 + v^6} + \frac{1}{4}$$

ou

$$K = \sqrt[6]{0,17798 + (\pi a \sqrt{p.c.f})^6} + 0,25$$

permet de calculer en un temps très court, *quelles que puissent être les circonstances de diamètre, de substance ou de fréquence*, le rapport de la résistance d'un conducteur cylindrique, en courant alternatif, à sa résistance en courant continu, *avec une erreur relative qui, dans le cas le plus défavorable, ne dépasse pas sensiblement un centième et qui, le plus souvent, est bien inférieure.*

2° La formule généralisée :

$$K = \sqrt[6]{\left(\frac{3}{4}\right)^6 + \left(\frac{S}{p\varepsilon}\right)^6} + \frac{1}{4}$$

ou

$$K = \sqrt[6]{0,17798 + \left(\frac{2\pi S \sqrt{p.c.f}}{p}\right)^6} + 0,25$$

permet de faire le même calcul <sup>(8)</sup>, dans des conditions analogues, lorsque la section du conducteur a une forme quelconque. — Il est essentiel de remarquer que, bien que la relation ci-dessus renferme  $\varepsilon$ , *elle reste pleinement valable même dans les cas où l'approximation de la « coque fictive » donne des résultats complètement faux, en particulier aux basses fréquences.*

<sup>(7)</sup> De là résulte qu'il serait bien superflu de donner à  $n$  une valeur fractionnaire, quoique l'approximation puisse s'en trouver très faiblement améliorée.

<sup>(8)</sup> Toutes les grandeurs qui figurent dans nos formules doivent être exprimées en unités C. G. S. électromagnétiques.

Nos formules, pouvant être introduites dans les calculs algébriques sans les compliquer notablement, sont à même de faciliter considérablement la résolution de très nombreux problèmes difficilement abordables jusqu'à présent; tels sont, par exemple, beaucoup de ceux dont l'objet est l'étude de la variation d'une grandeur en fonction d'une fréquence, pour toute l'échelle des valeurs possibles de celle-ci.

Pour les diverses raisons qui précèdent, les formules présentées paraissent appelées à remplacer, dans la plupart des cas, celles en usage jusqu'à aujourd'hui, et par conséquent, elles pourront bien souvent rendre aux physiciens de très réels services.

Manuscrit reçu le 17 décembre 1929.

