Erosion, transport et instabilités d'un lit de particules dans un tube

Malika Ouriemi

▶ **To cite this version:**

Malika Ouriemi. Erosion, transport et instabilités d'un lit de particules dans un tube. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2007. Français. NNT : . tel-00202496

HAL Id: tel-00202496
https://theses.hal.science/tel-00202496

Submitted on 7 Jan 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE PROVENCE

Ecole **P**olytechnique **U**niversitaire de **M**arseille

IUSTI UMR CNRS 6595

THESE DE DOCTORAT

présentée par

Malika Ouriemi

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Provence

Ecole doctorale Physique, Modélisation et Sciences pour l'ingénieur

intitulée

Erosion, transport et instabilités d'un lit de particules dans un tube

Soutenue le 20 Septembre 2007 devant le jury composé de :

M. Alain Pocheau	Examinateur
Mme Élisabeth Guazzelli	Directrice de thèse
M. François Charru	Rapporteur
M. John Hinch	Rapporteur
Mme Pascale Aussillous	Co-directrice de thèse
M. Yannick Peysson	Promoteur IFP

Remerciements

Je voudrais commencer par remercier Roger Martin pour m'avoir accueillie pendant ces trois années de thèse dans son laboratoire.

Je remercie également Alain Pocheau pour avoir accepté de faire partie de mon jury, ainsi que François Charru et John Hinch pour leur lecture attentive de mon manuscrit et la richesse de leurs remarques.

Je remercie l'IFP pour avoir subventionné mon travail ainsi que Yannick Peysson mon promoteur IFP pour sa disponibilité et l'aide qu'il m a apporté tout au long de cette thèse. Merci Yannick, j'ai beaucoup apprécié notre collaboration.

J'ai eut le plaisir de travailler pendant trois ans avec deux directrices de thèse exceptionnelles Elisabeth Guazzelli (babette) et Pascale Aussillous qui m'ont guidée et conseillée tout au long de cette thèse. Babette, merci pour fait m'avoir toujours remise dans la bonne direction et m'avoir appris à réaliser un travail de professionnel. Pascale ou plutôt Super Pascale, merci pour avoir patiemment répondu à mes questions et surtout pour ta disponibilité, ta gentillesse et ton soutien. Travailler avec toi restera sans doutes l'un de mes meilleurs souvenirs de ces trois ans.

Faire une thèse c'est aussi s'intégrer dans une équipe. Un grand merci à toute l'équipe du GEP pour leur accueil, leur sympathie et leur soutien tout au long de ces trois ans. Chacun des membres de cette équipe a contribué à sa manière à rendre cette thèse si agréable, Olivier, Yoel et Maxime par leur patience et surtout la grande compétence avec laquelle ils ont répondu à mes nombreuses questions, Laurence et Blanche par leurs éclats de rire et leur bonne humeur quotidienne, Nathalie par sa gentillesse et ses soirées jeux, Fred par ses connaissances techniques... Je n'oublie pas non plus les thésards, partie intégrante de l'équipe, les anciens, Pierre, Bloen et Céline, merci pour vos conseils et votre disponibilité et les nouveaux, Mickael, Lihua et Florent, merci pour votre soutien. Je voudrais faire deux dédicaces spéciales, la première pour mon papa thésard, et non Cyril, je ne t'ai pas oublié, merci pour ton amitié et ta présence. Et puis la deuxième qui me tient particulièrement à coeur, pour Daniel, mon point d'ancrage à Marseille pendant ces trois ans, merci d'avoir été là.

Merci aussi à tous les membres du laboratoire pour leur accueil et en particulier à Jérôme pour m'avoir fait découvrir l'escalade dans les calanques et aux thésards de l'IUSTI pour leur soutien, Guillaume, Erwin et Nicolas à quand la prochaine partie ? Jackeline, merci pour ton amitié, notamment dans les moments difficiles. Tim merci pour ton amitié, les bons repas, le petit resto tunisien, la plage...

Et puis d'un point de vue plus personnel, il y a aussi toutes les personnes qui n'étaient pas à Marseille, mais dont la présence a tant compté...

Je voudrais remercier mes amis pour leur présence et leur soutien. Merci pour tous ces moments passés ensemble que ce soit en we à la mer, à la campagne, au ski, déguisés ou non en mage ou en voleur, ou tout simplement autour d'un bon repas ou d'une table de billard... qui m'ont permis de ne jamais oublier qu'il y a une vie à côté de la thèse.

Et surtout ma famille toujours fidèle au poste. Papa, maman, de la petite fille qui n'aimait pas l'école au docteur, toute une histoire... merci pour tout
Isma, merci pour ton soutien, même à distance il compte beaucoup pour moi. Sonia que dire que tu ne saches déjà, à part peut être rendez-vous dans un jour proche pour un nouveau docteur... Ahmed, merci pour être venu spécialement de Tunisie et surtout merci pour ces succulents gâteaux tunisiens qui resteront dans les mémoires. Pour mes deux nièces d'amour Sara et Sana : parce qu'un jour vous serez grandes et que vous lirez peut être ces lignes, merci d'être telles que vous êtes. Tania, qui est venue à mon secours à chaque fois que j'en ai eut besoin, merci pour ton aide. Et pour finir, le patriarche de la famille, papy, merci pour avoir encore cette forme et cette énergie, surtout ne change pas...

Il ne me reste plus qu'à remercier la personne qui m'a portée à bout de bras pendant ces trois ans, David, merci pour m'avoir soutenue et pour avoir toujours accepté mes choix, merci pour tout...

Table des matières

1 État de l'art **9**

1.1 Comment bougent les grains ? . . . 9

1.1.1 Suspension . . . 10

1.1.2 Saltation . . . 10

1.1.3 Reptation . . . 10

1.1.4 Glissement ou roulement . . . 10

1.2 Paramètres physiques impliqués . . . 11

1.3 Mise en mouvement des grains . . . 13

1.3.1 Existence d'un seuil ? . . . 13

1.3.2 Mesures expérimentales du seuil . . . 13

1.3.3 Existe-t-il un unique seuil ? . . . 13

1.3.4 Problèmes rencontrés lors de la détermination expérimentale du seuil . . . 15

1.4 Structures sédimentaires sous-marines . . . 16

1.4.1 Formes sédimentaires naturelles . . . 16

1.4.2 Dunes de laboratoire . . . 19

1.5 Pourquoi des structures apparaissent-elles ? . . . 22

1.5.1 Peut-on différencier le seuil de déstabilisation du seuil de mise en mouvement des grains ? . . . 22

1.5.2 Modélisation : deux approches différentes . . . 23

1.5.3 Écoulement de fluide au dessus d'un fond sinusoïdal . . . 24

1.5.4 Transport de particules . . . 25

1.5.5 Étude de la stabilité du lit . . . 28

2 Dispositif expérimental **33**

2.1 Particules et fluide . . . 33

2.1.1 Particules . . . 33

2.1.2 Fluide . . . 35

2.2 Dispositifs expérimentaux . . . 36

2.2.1 Montages expérimentaux . . . 36

2.2.2 Expériences réalisées à débit ou à pression imposé ? . . . 38

2.2.3 Protocole expérimental . . . 41

2.2.4 Réalisation d'un fond sinusoïdal . . . 41

2.3 Techniques expérimentales . . . 42

2.3.1 PIV . . . 43

2.3.2 Suivi du profil des dunes . . . 47

2.3.3 Mesure de la hauteur finale du lit de particules 48
2.3.4 Calibration 49
2.4 Zoologie des dunes 49
2.4.1 Paramètres expérimentaux 49
2.4.2 Différents régimes 50
2.4.3 Zone d'existence de ces différents régimes 54

3 Seuil de mise en mouvement **57**
3.1 Signification du seuil de mise en mouvement 57
3.2 Seuil d'arrêt de mouvement 59
3.2.1 Correspondance entre le seuil d'arrêt de mouvement et le seuil de mise en mouvement 60
3.2.2 Dépendance de la contrainte du fluide appliquée à la surface du milieu granulaire 61
3.3 Copie de la lettre 62

4 Lit plat en mouvement **69**
4.1 Évolution du lit plat en mouvement : une mesure indirecte du flux de particules 70
4.1.1 Du lit plat idéal aux réalités expérimentales 70
4.1.2 Evolution du lit plat 72
4.2 Interaction fluide/milieu granulaire 74
4.2.1 Choix d'une modélisation 74
4.2.2 Choix des fermetures 75
4.2.3 Résolution numérique : méthode des différences finies 82
4.3 Article 84
4.4 Compléments à l'article 105
4.4.1 Seuil naturel dans un milieu poreux 105
4.4.2 Confrontation avec les différents modèles analytiques de la littérature 107
4.5 Conclusion 110

5 Formation des dunes **113**
5.1 Seuil de formation des "petites dunes" 113
5.1.1 Principe de l'étude 113
5.1.2 Article 114
5.2 Complément à l'article 131
5.2.1 Évolution temporelle des dunes : instabilité convective ou absolue ? 132
5.2.2 Signification des valeurs moyennées 133
5.2.3 Dunes à vortex 134
5.3 Conclusion 140

A Obtention des équations diphasiques **143**
A.1 Description statistique des milieux dispersés 143
A.1.1 Équations de transport microscopiques 143

A.2 Passage microscopique-macroscopique : moyennes en terme de volume local [Jackson (1997)] 145
A.2.1 Définitions et théorèmes 145
A.3 Lien entre les différents moyennage 150
A.3.1 Interaction fluide/solide 150
A.3.2 Interaction solide/solide 151
A.3.3 Lien entre $\phi(x)$ et $n(x)$ 151
A.3.4 Lien entre la moyenne sur la phase solide et la moyenne sur les particules rigides 152
A.3.5 Équations diphasiques 155
A.4 Fermeture des équations 156
A.4.1 Détermination des termes $< u_i u_j >^f$ et $< u_i u_j >^s$ 156
A.4.2 Expression de $n < f_i^f >^p$ 156
A.4.3 Expression de S_{ij}^f 160
A.4.4 Forme du système d'équations 161

Introduction

A marée basse, la mer se retire sur plusieurs centaines de mètres, laissant une immense étendue de fonds marins découverts. Ces fonds sont deformés par des petites structures plus ou moins régulières de l'ordre de quelques centimètres (figure1). Il s'agit de rides de sable qui ont été formées sous l'action du mouvement de la mer (vagues et courants marins). Ces rides sont l'exemple typique des interactions complexes pouvant exister entre un fluide et un milieu granulaire. Sous l'action du fluide, le milieu granulaire se met en mouvement et peut se déformer entraînant la création de rides. Ces rides vont changer les conditions aux bords du fluide, entraînant en retour une perturbation de l'écoulement. Un autre exemple typique de cette interaction concerne l'évolution des voies fluviales. L'écoulement de l'eau sur le fond entraîne la formation de dunes. En retour, l'écoulement va dissiper une partie de son énergie à travers la force de traînée qu'il exerce sur les dunes et les zones de turbulence créées par leur présence. L'énergie de l'écoulement étant directement reliée à la pente du fleuve, le niveau du fleuve va augmenter afin de compenser la perte d'énergie due à la présence de dunes. Il est donc très important de comprendre l'interaction existant entre l'écoulement et le sol granulaire afin de pouvoir prédire l'évolution des rivières, canaux et estuaires.

FIG. 1 – Rides de sable sur la plage

Dans le domaine industriel, les demandes concernant une bonne modélisation de ce couplage sont aussi très fortes, notamment dans le domaine pétrolier où les écoulements constitués d'un mélange fluide/particules sont courant. Lors des phases de production, les pipe-lines transportent un mélange de pétrole, d'eau et de gaz. Pour des conditions de basse température et de pression élevée (off-shore sous grande profondeur d'eau), les particules d'eau et de gaz vont réagir pour former des hydrates de gaz (figure 2). Les hydrates de gaz ressemblent à de la neige sale et peuvent coaguler entraînant l'obstruction totale du pipe-line. Pour contrer ce problème, une des solutions utilisée consiste à injecter des tensios-actifs [Sinquin *et al.* (2004)] qui vont empêcher la coagulation des hydrates. Ceux-ci vont donc rester en suspension dans l'écoulement. En cas d'arrêt de la production, ils vont sédimenter et créer un

lit de particules déposées. Il se pose alors la question du comportement du lit lors du redémarrage de l'écoulement.

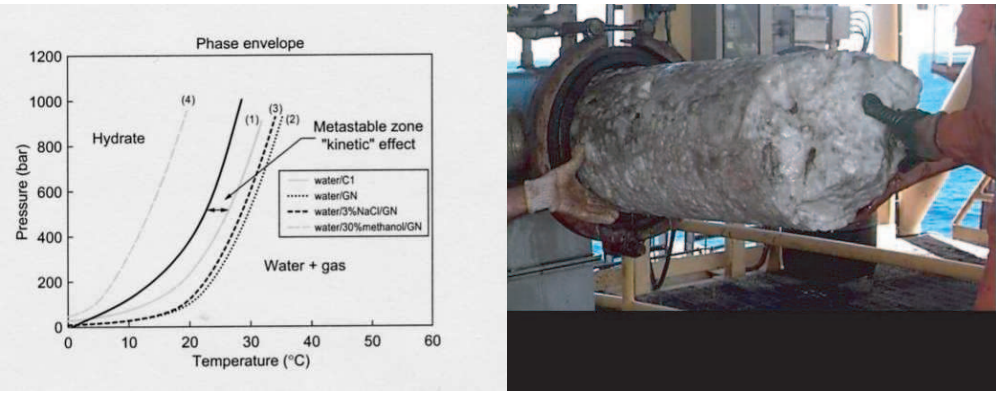


FIG. 2 – Bouchon d'hydrates (source : IFP) et courbe d'existence des hydrates en fonction de la pression et de la température d'après Sinquin *et al.* (2004).

C'est dans ce contexte que s'inscrit cette thèse. Elle a pour but la modélisation de la remise en marche d'un écoulement sur un lit de particules déposées dans un tube à travers une approche expérimentale . Pour cela, nous avons décidé d'aborder le problème sous un angle simplifié afin de mieux appréhender les mécanismes de base existant lors de la remise en écoulement. Les premières expériences qualitatives réalisées montrent que sous l'action de l'écoulement, le lit de particules se déforme entraînant l'apparition de structures sédimentaires. Afin d'étudier le mécanisme de formation de ces structures et leur rétroaction sur l'écoulement, nous nous sommes posés plusieurs questions :

Quels sont les paramètres influant sur la mise en mouvement des particules ?
Comment peut-on modéliser le couplage fluide/milieu granulaire ?
Pourquoi de telles structures sédimentaires apparaissent-elles ?
Comment ces structures évoluent-elles avec le temps ?

Après une description rapide de l'état des connaissances concernant ces différentes questions, nous présenterons en détail le dispositif expérimental utilisé au cours de cette thèse puis dans les quatre derniers chapitres, nous apporterons des éléments de réponse à chacune des questions posées.

Chapitre 1

État de l'art

Dans ce chapitre nous allons faire un petit détour par la littérature afin de présenter brièvement l'état des connaissances dans le domaine des milieux granulaires soumis à un écoulement de fluide. Nous commencerons par nous placer à l'échelle des grains afin d'étudier les différents modes de transport, ainsi que le seuil de mise en mouvement des particules. Ensuite nous nous intéresserons à l'évolution du milieu granulaire à une échelle plus large. Nous décrirons ainsi les différentes structures existant dans la nature ou en laboratoire et nous présenterons les mécanismes physiques décrits comme étant à l'origine de la formation de ces structures.

1.1 Comment bougent les grains ?

Si on soumet un lit de grains initialement au repos à un écoulement de fluide, il se met en mouvement. Suivant les caractéristiques de l'écoulement, on peut distinguer quatre modes de transports principaux (figure 1.1).

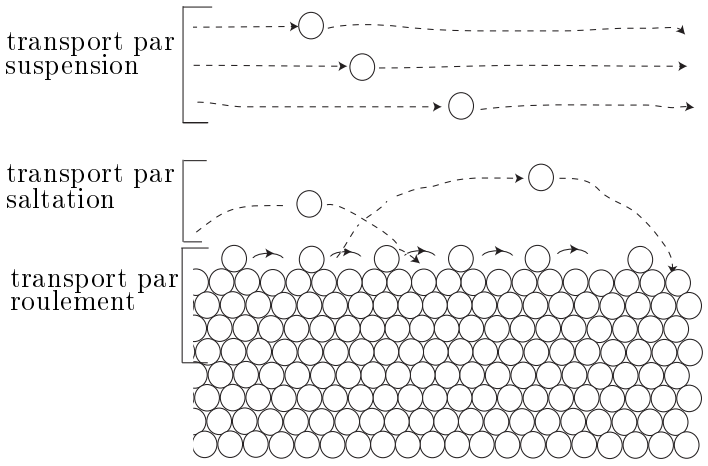


FIG. 1.1 – Différents modes de transport dans un fluide.

1.1.1 Suspension

Il existe deux types de mise en suspension suivant la nature de l'écoulement, la resuspension visqueuse et la resuspension turbulente.
La resuspension visqueuse décrite par Leighton & Acrivos (1986) résulte d'un équilibre entre la force de gravité qui est stabilisante et la diffusion causée par le cisaillement. Francis (1973) décrit la trajectoire d'un grain en suspension comme légèrement ondulée. Elle se situe à une hauteur typique de dix diamètres de grains au dessus du lit de particules. Un grain en suspension effectue une distance de l'ordre de mille diamètres de grains avant de retomber.

Dans l'air, la resuspension est du type turbulente. Seuls les grains de petite taille peuvent rester en suspension sur des grandes distances, leur poids n'étant pas suffisant pour contrer les fluctuations turbulentes de l'écoulement qui leur redonnent de l'altitude. Les grains de plus grosse taille retombent et entrent en collision avec la surface, effectuant un mouvement de saltation.

1.1.2 Saltation

Les grains qui retombent entrent en collision avec les grains situés à la surface. L'énergie emmagasinée lors de cette collision leur permet de rebondir et de continuer à avancer. De tels grains sont appelés saltons. Lors de la collision, ils délogent des particules de la surface du lit, créant ainsi des saltons ou des reptons. Bagnold (1956) explique le phénomène de saltation par les effets combinés de la composante normale de la force de contact exercée sur un grain par ses voisins et de la force de portance hydrodynamique du fluide sur ce grain. Sous l'action de ces forces, le grain est soulevé à une hauteur de deux ou trois diamètres et est emporté par l'écoulement sur une distance de trente diamètres avant de retomber par gravité [Francis (1973)].

1.1.3 Reptation

Les reptons représentent les particules qui après avoir été délogées par des saltons vont rouler à la surface du lit sur des distances de l'ordre de plusieurs diamètres.

1.1.4 Glissement ou roulement

Il s'agit du principal mode de transport dans un liquide quand il n'y a pas de phénomène de suspension. Sous l'effet de la force de traînée du fluide, les grains, couramment appelés tractons, roulent et/ou glissent à la surface du lit de grains, avec laquelle ils restent en permanence en contact. Expérimentalement, on observe que seules les couches supérieures sont en mouvement. Ce mode de transport est principalement caractérisé par le cisaillement effectif existant à la surface du lit et il existe indépendamment de la nature de l'écoulement.

Dans l'air, il n'y a pas de tractons. Les grains qui roulent à la surface du lit sont mis en mouvement suite à la collision avec un salton. Il s'agit donc de reptons.

La saltation et la reptation sont les principaux modes de transport dans l'air. Le flux de transport par saltation est beaucoup plus important que le flux de trans-

port par reptation. Quand le vent augmente, on observe la mise en mouvement des premières particules, puis au cours d'un mécanisme de saturation, la quantité de saltons transportée par le vent augmente jusqu'à atteindre une valeur maximale [Hersen (2004)]. En rebondissant, les saltons augmentent leur vitesse, ce qui leur permet de déloger plus de saltons. Avec l'augmentation du nombre de saltons, la vitesse du vent diminue et l'équilibre est atteint quand la vitesse des saltons avant la collision leur permet juste de rebondir sans entraîner d'autres saltons. À cause de leur inertie, les saltons mettent une certaine distance l_s avant d'atteindre la vitesse de saturation [Andreotti (2004)]. Cette distance dépend du diamètre des grains, d, et du rapport entre la densité du fluide ρ_f et des particules ρ_p,

$$l_s = d\frac{\rho_p}{\rho_f}. \tag{1.1}$$

Dans un liquide, à cause du caractère dissipatif du fluide, la quantité d'énergie dissipée lors de la collision est souvent trop importante pour que les saltons puissent rebondir ou entraîner la mise en mouvement d'un repton. D'après Gondret *et al.* (2001), le nombre pertinent pour caractériser le régime de collision immergée est le nombre de Stokes, $St = U_p\rho_p d/(9\eta)$, où U_p est la vitesse de la particule et η la viscosité dynamique du fluide. Le nombre de Stokes compare l'inertie de la particule et la force visqueuse due au fluide. Il existe un nombre de Stokes critique en dessous duquel on n'observe pas de rebonds.

Dans la littérature, le transport de grains est divisé en deux catégories, le transport par suspension qui inclut uniquement les grains en suspension et le transport par charriage qui inclut les grains en roulement/glissement et en saltation [Bagnold (1956)]. L'apparition de l'un ou l'autre de ces modes de transport dépend des paramètres caractérisant l'écoulement et les particules. Le transport par saltation étant souvent négligeable dans les liquides et nos conditions expérimentales étant au-dessous des limites de la mise en suspension, nous nous intéresserons uniquement au cas ou les grains en mouvement sont en contact quasi permanent avec le sommet du lit de particules, c'est-à-dire au transport par charriage.

1.2 Paramètres physiques impliqués

Le transport de particules sous un écoulement de fluide est gouverné par plusieurs paramètres physiques,

- la masse volumique des particules ρ_p,
- la masse volumique du fluide ρ_f,
- la viscosité cinématique du fluide ν,
- le diamètre des particules d,
- une longueur caractéristique de l'écoulement L, par exemple la hauteur de fluide h_f au dessus du lit de particule,
- la contrainte que le fluide exerce sur les particules τ^f,
- la gravité g,
- la vitesse moyenne de l'écoulement U_m.

On peut coupler ces paramètres sous la forme de plusieurs nombres sans dimension. Concernant l'écoulement, on peut construire le nombre de Reynolds qui correspond

Échelle	Nombre de Reynolds
Écoulement laminaire	$Re = \frac{U_m L}{\nu}$
Couche limite, écoulement turbulent	$Re_* = \frac{u_* d}{\nu}$
Particule	$Re_p = \frac{\dot{\gamma} d^2}{\nu}$

TAB. 1.1 – Différentes expressions du nombre de Reynolds, où u_* représente la vitesse de frottement ($u_*^2 = \tau^f/\rho_f$ dans le cas d'une couche limite sur une surface rugueuse) et $\dot{\gamma}$ le cisaillement du fluide au niveau du lit de particules.

au rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Il peut être défini à différentes échelles (table 1.1). Dans la suite nous travaillerons principalement avec le nombre de Reynolds construit à l'échelle de l'écoulement.

Pour caractériser le milieu granulaire et le fluide indépendamment de l'écoulement, on utilise souvent le nombre de Galilée,

$$Ga = \frac{d^3 \rho_f \Delta\rho g}{\eta^2}, \tag{1.2}$$

où $\Delta\rho = \rho_p - \rho_f$, qui correspond à un nombre de Reynolds basé sur la vitesse de sédimentation des particules et sur le diamètre des particules.

L'interaction fluide/milieu granulaire au niveau de l'interface est en règle générale caractérisée par le nombre de Shields qui a été défini par Shields en 1936,

$$\theta = \frac{\tau^f}{\Delta\rho g d}. \tag{1.3}$$

Le nombre de Shields correspond au rapport de la force de traînée du fluide sur le poids apparent des particules. La force de traînée tend à mettre en mouvement les particules, tandis que le poids apparent s'oppose au mouvement. La définition de τ^f dépend de la nature de l'écoulement. Pour un écoulement laminaire, τ^f est défini par

$$\tau^f = \eta\dot{\gamma}, \tag{1.4}$$

où η est la viscosité cinématique du fluide et on peut relier le nombre de Shields au nombre de Galilée et au nombre de Reynolds particulaire par l'égalité $\theta = Re_p/Ga$.

Tous ces nombres adimensionnés permettent de décrire le fluide, le milieu granulaire et l'interaction entre les deux. On peut se demander dans quelles conditions le fluide perturbe le milieu granulaire.

1.3 Mise en mouvement des grains

1.3.1 Existence d'un seuil ?

Expérimentalement, on observe que pour des faibles vitesses de fluide, les particules ne bougent pas. On peut donc définir un seuil de mise en mouvement des particules. Suite à des mesures expérimentales, Shields a défini ce seuil en terme de nombre de Shields critique θ^c dans le cas d'un écoulement turbulent. Depuis, le nombre de Shields critique est généralement utilisé pour caractériser le seuil de mise en mouvement. De nombreux auteurs ont essayé de déterminer sa valeur de manière théorique ou expérimentale. Généralement, l'étude théorique est abordée en utilisant un modèle simplifié. On se place dans une configuration à deux dimensions et on considère un grain situé sur le lit de particules. La particule est soumise à la force de traînée du fluide qui va tendre à l'arracher du lit pour la mettre en mouvement et à la gravité qui s'oppose au mouvement. Le nombre de Shields critique θ^c correspond au rapport de ces deux forces au seuil de mise en mouvement.
Plusieurs expressions théoriques ont été proposées pour déterminer le nombre de Shields critique dans le cas de particules uniformes [White (1940) et Vanoni (1966)]. Les différentes expressions obtenues pour θ^c dépendent entre autres des caractéristiques géométriques du lit de grains et de la définition de la force de traînée appliquée sur une particule située sur d'autres particules. Ces paramètres étant mal connus, il est difficile d'obtenir une relation analytique vraiment exploitable pour θ^c. En contrepartie, de nombreuses études expérimentales utilisant divers sédiments ont été réalisées afin de déterminer le seuil de mise en mouvement.

1.3.2 Mesures expérimentales du seuil

Dans le cadre de ses expériences, Shields a démontré que pour un écoulement turbulent, θ^c varie en fonction du nombre de Reynolds turbulent Re_* au seuil de mise en mouvement (figure 1.2). Depuis de nombreux auteurs ont mesuré θ^c pour des écoulements turbulents [Buffington & Montgomery (1997), Vanoni (1966), Dancey *et al.* (2002) et Paintal (1971)]. Malgré une grande dispersion, l'accord avec les résultats obtenus par Shields est relativement bon. Des études ont également été réalisées pour des écoulements laminaires [White (1940), Yalin & Karahan (1979) et Pilotti & Menduni (2001)]. Récemment, Loiseleux *et al.* (2005) ont mesuré expérimentalement les variations de θ^c en fonction du nombre de Reynolds particulaire (table 1.1). La figure 1.3 montre que pour $Re_p > 1$, θ^c décroît en $1/Re_p$, tandis que pour $Re_p < 1$, le nombre de Shields est constant ($\theta^c = 0.140 \pm 0.004$). Cette valeur est du même ordre de grandeur que la valeur ($\theta^c = 0.12$) déterminée par Charru *et al.* (2004).

1.3.3 Existe-t-il un unique seuil ?

Mouilleron-Arnould (2002) et Charru *et al.* (2004) ont montré expérimentalement l'existence de deux seuils de mise en mouvement des particules. Pour mesurer ces deux seuils, ils ont étudié l'évolution du débit de grains en fonction du temps. Pour des faibles valeurs du nombre de Shields, le débit s'annule au bout d'un certain

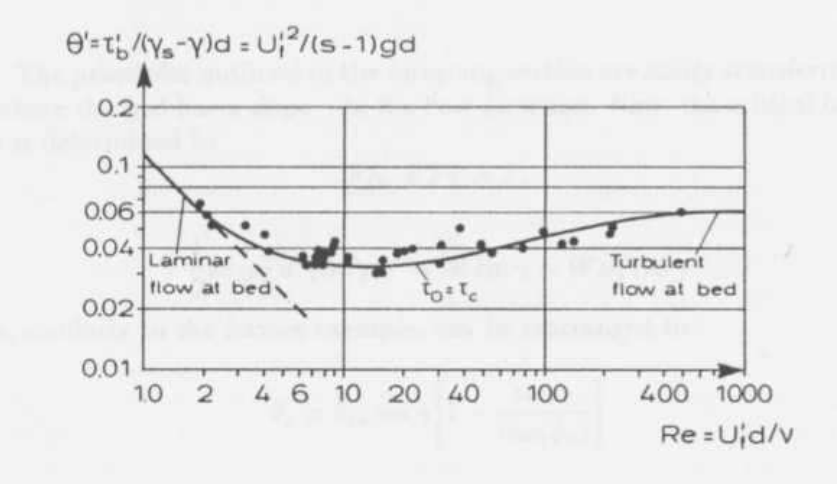


FIG. 1.2 – Courbe de Shields d'après Rijn (1993).

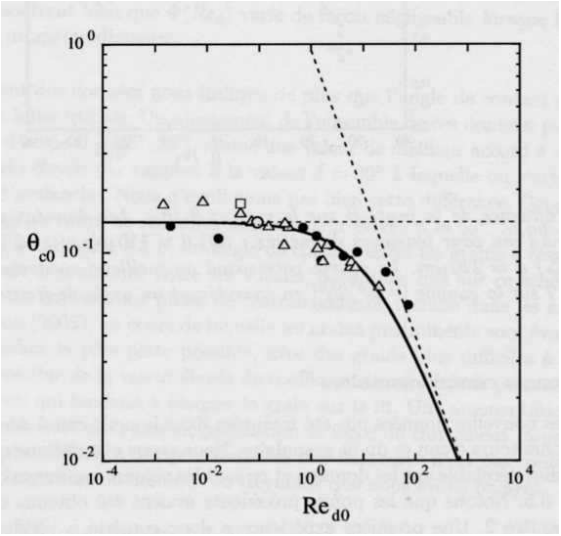


FIG. 1.3 – Influence du nombre de Reynolds particulaire, noté Re_{d0}, sur le nombre de Shields critique, noté θ_{c0}, d'après Doppler (2005).

temps, tandis que pour des valeurs plus importantes, le débit finit par atteindre une valeur constante. Ces observations indiquent l'existence de deux seuils. Le premier seuil correspond à la mise en mouvement des premières particules et le deuxième seuil à l'existence d'un débit stationnaire. À l'initiation du mouvement, la surface du lit n'est pas forcément homogène et les premières particules mises en mouvement correspondent aux particules en équilibre précaire. Elles vont effectuer des trajectoires de l'ordre de quelques diamètres de grains avant de s'arrêter dans une nouvelle position d'équilibre. Ce phénomène explique la décroissance puis l'annulation du débit de grains, le mouvement des grains correspondant à une réorganisation du lit. Après réarrangement du lit, si le nombre de Shields est insuffisant pour entraîner la mise en

mouvement des particules ($\theta < \theta^c$), le débit s'arrête. Dans le cas contraire, le débit atteint une valeur stationnaire. Le premier seuil mesuré dépendant entre autres de la rugosité du lit, il en résulte une forte dispersion des résultats. Le deuxième seuil par contre est beaucoup plus intéressant car il ne dépend pas de l'état initial du lit (compaction...).

1.3.4 Problèmes rencontrés lors de la détermination expérimentale du seuil

Les résultats expérimentaux concernant la détermination du seuil de mise en mouvement sont caractérisés par une forte dispersion. Buffington & Montgomery (1997) expliquent la dispersion de ces résultats par différents facteurs. La méthode expérimentale de détermination du seuil de mise en mouvement fait partie de ces facteurs. Il existe deux méthodes principales destinées à déterminer le seuil de mise en mouvement.

La première méthode consiste à déterminer le taux de transport de particules en fonction du nombre de Shields et à extrapoler la valeur critique correspondant à un taux de transport nul ou à une valeur de référence suffisamment faible. Cette technique a deux inconvénients majeurs. La variation du taux de transport en fonction de θ peut entraîner des erreurs d'interpolation, tandis que la présence possible d'une phase transitoire plus ou moins longue avant d'atteindre un régime permanent de transport de grains peut fausser les résultats.
La deuxième méthode consiste à réaliser une observation visuelle du lit de grains. Le problème intrinsèque de cette méthode réside dans la définition du seuil de mise en mouvement. Suivant les auteurs ce seuil correspond à la mise en mouvement des premières particules ou au contraire à la mise en mouvement de toute la surface du lit. Une telle différence de définition explique aisément une partie de la dispersion des résultats expérimentaux.

La définition du diamètre des grains peut aussi jouer un rôle dans la dispersion des résultats. Suivant les auteurs, l'origine de l'échantillon mesuré (pris en surface ou en profondeur) et la définition utilisée (diamètre médian ou moyen) diffèrent. Pour un échantillon de n billes, le diamètre moyen d_M est calculé suivant la formule $d_M = \Sigma_i^n d_i/n$ où d_i représente le diamètre de la i^{eme} particule. Le diamètre médian d_m correspond au diamètre de la bille située au centre de l'échantillon classé par diamètre. Pour des dispersions importantes de diamètres, ces deux définitions ne sont pas équivalentes et l'utilisation de l'une ou de l'autre peut expliquer en partie la dispersion des résultats.
En plus de ces facteurs qui sont liés aux techniques expérimentales de mesure, il faut prendre en compte les dépendances naturelles du seuil de mise en mouvement qui varie en fonction de la rugosité relative et de la compaction du matériau granulaire, de la forme du lit et de la nature laminaire ou turbulente de l'écoulement.

Nous avons vu dans cette partie qu'il n'existe pas de technique universelle permettant de déterminer le nombre de Shields critique et que cette lacune entraîne une

grande dispersion des résultats expérimentaux. Il est donc important de travailler dans des conditions bien définies afin que les résultats obtenus puissent servir de base de comparaison. Au cours de notre étude, nous avons proposé une manière simple et reproductible de mesurer le seuil de mise en mouvement des particules (chapitre 3).

1.4 Structures sédimentaires sous-marines

Dans cette section nous allons nous intéresser aux différentes structures formées quand un milieu granulaire est soumis à un écoulement de liquide.

1.4.1 Formes sédimentaires naturelles

Dans la nature, on observe une grande diversité de formes sédimentaires au niveau des fonds marins ou des lits des rivières. Dans cette partie, nous allons essayer de présenter une revue rapide des différentes formes observées. Les formes sédimentaires existantes varient suivant leur répartition géographique.

Sur le bord des plages, on observe souvent des petits monticules de sable qui déforment le fond de la mer de manière périodique [Rousseaux (2003)]. Il s'agit de rides sous-marines. Elles sont formées sous l'action de l'écoulement périodique généré par les vagues dans les régions côtières où l'eau est peu profonde.
Pour différencier les rides des dunes, Richards (1980) propose une définition basée sur leurs dimensions. Les dunes sont des structures dont les dimensions sont de l'ordre de grandeur de l'écoulement du fluide tandis que les dimensions des rides sont de l'ordre de grandeur des propriétés du matériau granulaire.

L'écoulement marin sur le bord des côtes peut aussi donner naissance à des bancs de sable qui sont des structures sédimentaires beaucoup plus imposantes (figure 1.4). Ils peuvent atteindre des dizaines de kilomètres de long sur plusieurs kilomètres de large pour une hauteur pouvant aller jusqu'à trente mètres. Ces structures sont générées par le mouvement oscillatoire de la marée et leur sommet se situe parfois à quelques mètres seulement sous la surface de l'eau. Les bancs de sable sont très étudiés car ils peuvent déformer les pipe-lines, les câbles de télécommunications et faire échouer les bateaux. La plupart des bancs de sable sont recouverts de structures superficielles plus petites appelées "vagues de sable". Ces vagues ont une hauteur moyenne de deux à quatre mètres. Les structures superficielles des bancs sont d'autant plus petites que les bancs de sable sont proches de la côte.

Dans les fonds marins situés à grandes profondeurs, on retrouve ces différents motifs. Par exemple dans les fonds marins non-cohésifs, on observe régulièrement des rides de sable formées sous l'action des courants dus aux marées. Celles-ci sont caractérisées par une longueur d'onde d'une centaine de mètres, une amplitude de cinq à dix mètres et se déplacent à une vitesse pouvant atteindre plusieurs mètres par an [Santoro *et al.* (2002)]. Les dunes sous-marines se retrouvent également sur

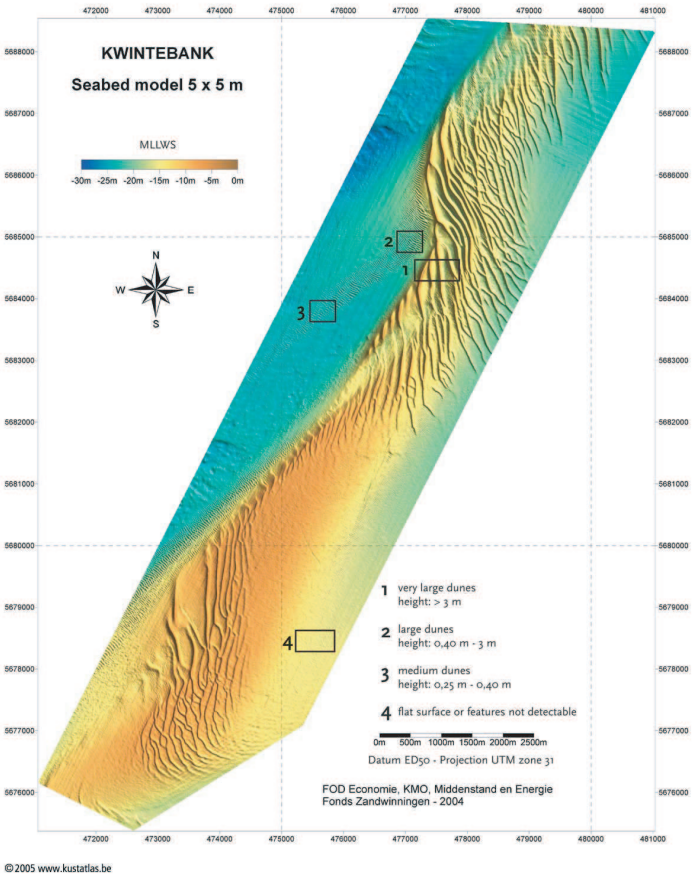


FIG. 1.4 – Relevé topographique d'un banc de sable d'après le site *www.kustatlas.be*.

la plupart des sols océaniques. Elles se développent sur le sol si les conditions nécessaires en terme de quantité de sable, profondeur d'eau et courants sont réunies. Leur taille et leur forme résultent d'une interaction entre la force et la direction des courants, la profondeur d'eau et la taille des sédiments. Dans les cas où la profondeur d'eau est relativement faible, la distance entre les dunes peut être corrélée avec la hauteur d'eau [Wienberg & Hebbeln (2005)].

Dans les environs de Victoria au Canada (figure 1.5), se situent des dunes faisant partie des plus grandes jamais découvertes sur la planète. Elles peuvent atteindre 25 m de haut, 300 m de long, 1200 m de large et contenir 26 millions de m^3 de sable et de graviers fins. De telles structures existent dans différents endroits, par exemple au milieu du détroit du Pas-de-Calais. Des mesures réalisées lors de la campagne de mesures PERMOD en Mer du Nord, ont montré la coexistence de différentes structures. Les dunes sous-marines existantes dans la région sont recouvertes de mega rides dont les dimensions augmentent du pied du flanc doux vers la crête pour atteindre une hauteur de 2 m et une longueur d'onde de 10 m.

Dans la configuration que nous allons étudier, le lit de sédiments est soumis à un

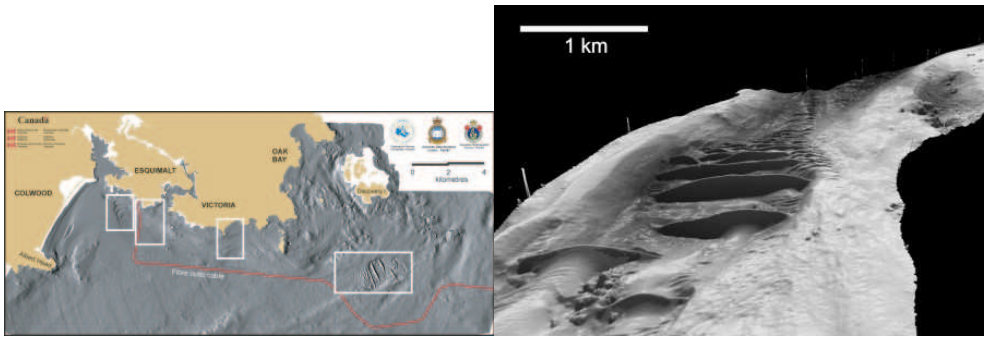


FIG. 1.5 – Dunes près de Victoria, Canada (*http* : *//geoscape.nrcan.gc.ca/*).

écoulement permanent unidirectionnel. Nous allons donc nous intéresser plus précisément aux structures observées dans un torrent, une rivière ou un fleuve. Sous l'action de l'écoulement du fluide, le lit se déforme et peut donner naissance à différents motifs. Les plus courants sont les rides de sable, les dunes et les anti-dunes (figure 1.6). On utilise généralement le paramètre de transport T, basé sur l'écart au seuil, pour prédire les différentes structures pouvant se former,

$$T = \frac{(\theta - \theta^c)}{\theta^c}. \tag{1.5}$$

Les structures sédimentaires diffèrent suivant les valeurs de T et du diamètre sédimentologique $D_* = Ga^{1/3}$. La figure 1.6 représente les différentes structures dans le plan $(T - D^*)$. Pour $D_* < 10$, il y a présence de rides pour les petites valeurs de T. On appelle rides des structures triangulaires qui ont une hauteur et une longueur d'onde respectivement inférieures à 60 mm et 60 cm. La dimension des rides dépend notamment du type de sédiments présents mais est indépendante de la hauteur du fluide. Pour qu'il y ait formation de rides, la présence d'une couche visqueuse au niveau du sol est nécessaire. Quand la vitesse d'écoulement du fluide augmente (T augmente) ou quand on considère des sédiments de tailles plus importantes ($D_* > 10$), les rides sont remplacées par des dunes. De formes plus ou moins régulières, les dunes sont constituées d'une pente douce et d'une face d'avalanche beaucoup plus pentue. Derrière le sommet de la dune, au niveau de la face d'avalanche, l'écoulement devient turbulent à cause de la forte recirculation du fluide. Les sédiments se déplacent de la pente douce vers la face d'avalanche. En se déposant en amont de la face d'avalanche, ils font progressivement avancer la dune. Pour $T > 15$, on entre dans une zone de transition. Les dunes disparaissent et le lit s'aplatit. Si T augmente encore, des anti-dunes apparaissent. Les anti-dunes ont une forme symétrique en phase avec les ondes se déplaçant à la surface de l'eau. Elles ont une longueur à peu près égale à dix fois la hauteur d'eau. Elles avancent à contre courant car contrairement aux dunes, le mécanisme d'érosion/déposition a lieu de la face d'avalanche vers la face à pente douce.

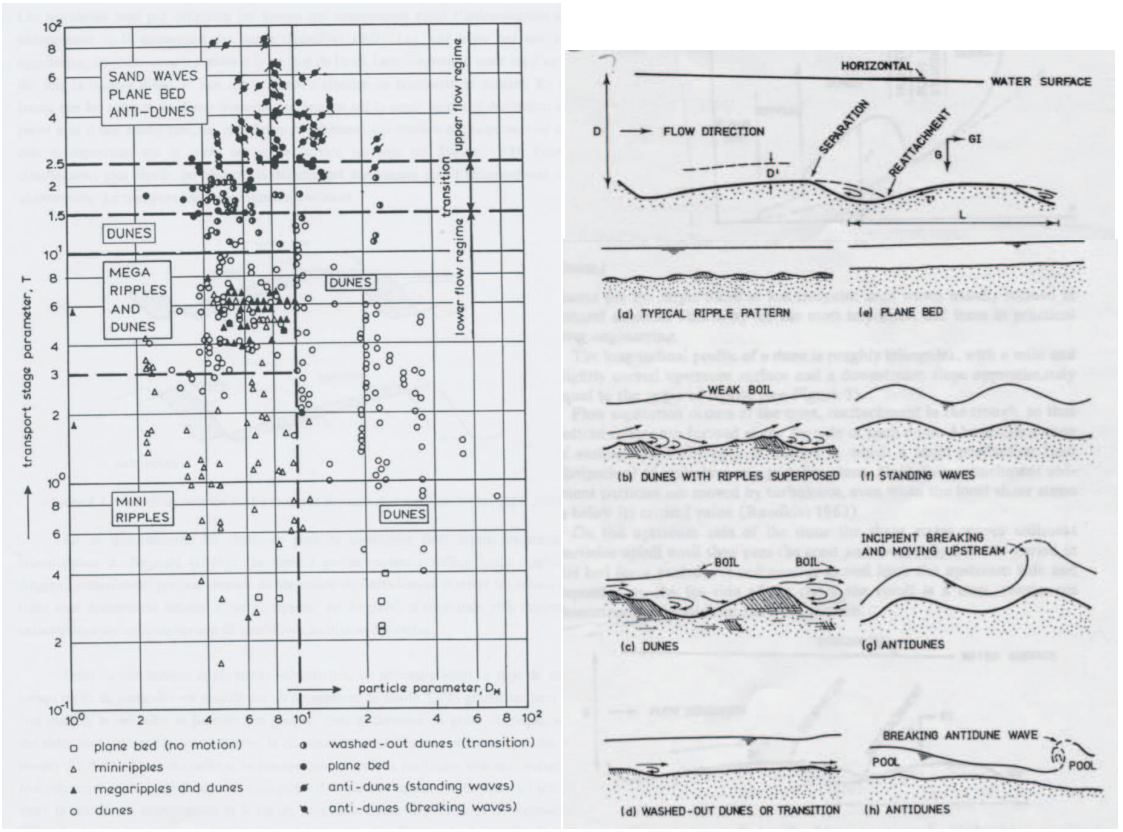


FIG. 1.6 – Répartition des différentes structures dans le plan $T - D_*$ d'après Rijn (1993).

1.4.2 Dunes de laboratoire

Afin de comprendre les mécanismes pouvant entraîner la formation de ces différentes structures et pouvoir prédire leur évolution à plus ou moins long terme, plusieurs expériences ont été montées en laboratoire pour reproduire à une échelle plus petite mais dans des conditions parfaitement maîtrisées les phénomènes observés. Dans cette partie nous allons décrire quelques unes de ces expériences en insistant sur les différentes structures sédimentaires qui ont pu être observées. Nous allons différencier deux types d'expériences, les expériences réalisées avec un écoulement oscillant et celles réalisées avec un écoulement permanent.

Écoulement oscillant

Parmi les premières expériences réalisées pour visualiser la formation de structures sédimentaires, on peut citer entre autres Casimir de Candolle (fin 19^e) et Lady Ayrton (1910) qui dans une configuration particulièrement simple, une cuve de sable remplie d'eau au fond de laquelle une couche de sable a été déposée, forment des rides en faisant osciller la cuve. Darwin (fin 19^e) qui s'est placé dans une géométrie circulaire observe des rides radiales. En 1946, Bagnold réalise des expériences, dans

une géométrie de plaques oscillantes sous un fluide statique, qui lui permettent de donner une classification des rides générées par un écoulement oscillant. Il décrit deux types de rides :

- Les rides à grain roulant :
  Il s'agit de structures de petite taille qui sont caractérisées par les variations de la forme de la crête à chaque demi-période et par une longueur d'onde assez stable.
- Les rides à tourbillon :
  Ces structures ont une hauteur plus importante et sont caractérisées par la présence de tourbillons de fluide qui se détachent du sommet à chaque oscillation. Elles ont une forme quasi triangulaire et peuvent avoir une pente maximale de 20°.

Récemment, Rousseaux (2003) a réalisé des expériences en configuration cylindrique oscillante afin de mieux comprendre le mécanisme de formation des rides. Grâce à ces expériences, des rides à grain oscillant et des rides à tourbillons, ainsi que la transition entre les deux ont pu être observées. Les rides à grains roulants apparaissent le plus rapidement [figure 1.7 (a)]. Leur longueur d'onde dépend des oscillations, du diamètre des grains et de l'épaisseur de la couche de Stokes. L'espacement entre les rides augmente en même temps qu'elles croissent par coalescence. Si les oscillations continuent pendant un temps suffisamment long, des dunes à tourbillon apparaissent [figure 1.7 (b)]. Celles-ci croissent par coalescence jusqu'à atteindre un état de saturation. Dans leur état final, les rides à tourbillon ont une longueur d'onde qui est proportionnelle à l'amplitude des oscillations tout en étant indépendantes de la fréquence d'oscillation.

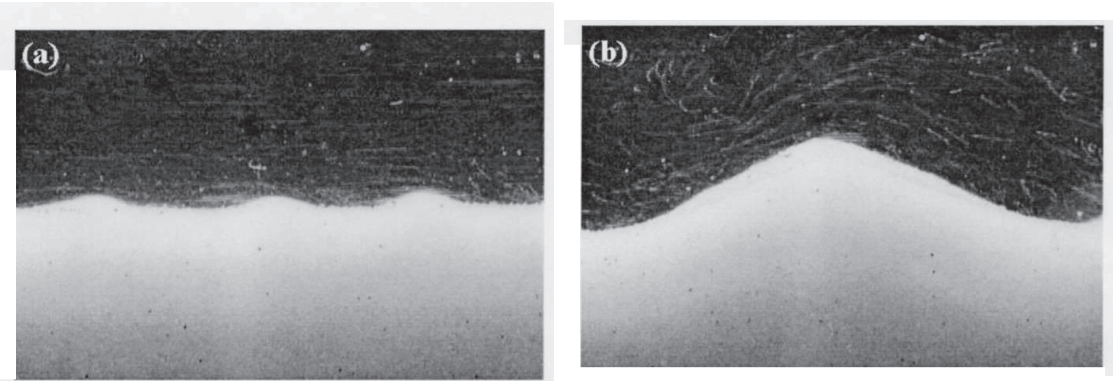


FIG. 1.7 – Photographies de rides à grains roulant (a) et de rides à tourbillon (b) d'après Rousseaux (2003).

Mouilleron-Arnould (2002) a aussi réalisé des expériences dans une configuration cylindrique mais en considérant un écoulement visqueux. Elle divise en trois étapes la croissance des rides. La première étape correspond à l'apparition des rides et à leur croissance initiale. Le système n'est pas sélectif au départ, mais il existe quand même une longueur d'onde initiale dominante qui va se développer. La croissance observée durant cette phase correspond à l'évolution exponentielle du mode lié à la

longueur d'onde initiale. La seconde étape, très rapide, correspond à la saturation de ce mode. Enfin, il y a une augmentation de la longueur d'onde par coalescence des rides qui s'accompagne d'une saturation de l'amplitude.

Écoulement permanent

Les structures observées en laboratoire suite à la déformation d'un lit de grains soumis à un écoulement permanent sont asymétriques. Elles possèdent une face à pente douce située en amont et une face d'avalanche située en aval qui a une pente proche de l'angle maximal de stabilité. Sous un écoulement turbulent, elles apparaissent avec une longueur d'onde initiale proche de 100 à 300 taille de grains. Des expériences réalisées dans un canal linéaire par Coleman & Melville (1996) leurs ont permis de noter que les rides croissent principalement par coalescence, si bien qu'après avoir atteint un maximum, le nombre de rides décroît au cours du temps. Ils ont aussi trouvé une loi expérimentale $c \propto A^{-1.3}$ reliant la vitesse d'avancée des dunes c et l'amplitude des dunes A. En étudiant l'initiation de la destabilisation du lit, ils ont proposé une loi empirique reliant la longueur d'onde initiale des rides λ_i, le diamètre des grains d et le nombre de Reynolds particulaire,

$$\frac{\lambda_i}{d} = 10^{5/2} Re_p^{-0.2}. \tag{1.6}$$

Plus récemment, plusieurs expériences ont été réalisées avec différents types d'écoulement. Pour un écoulement laminaire de Couette cylindrique, Mouilleron-Arnould (2002) a mis évidence une loi concernant la longueur d'onde finale des dunes assez semblable à celle obtenue par Coleman & Melville (1996) pour la longueur d'onde initiale,

$$\frac{\lambda_f}{d} = 490 Re_p^{-0.36}. \tag{1.7}$$

Elle a constaté que les rides observées évoluent très rapidement avant d'atteindre un état saturé.

Doppler (2005) a observé expérimentalement la formation de structures granulaires sous l'effet d'un courant continu d'eau et de la gravité dans une cellule de Hele-shaw. En inclinant le lit et en imposant un contre-écoulement, elle décrit l'apparition de structures qui semblent n'avoir jamais été observées auparavant. Il s'agit de rides à tourbillon qui sont caractérisées par la présence d'un tourbillon de grains en aval de la dune (figure 1.8). Ces rides se propagent dans le sens de l'écoulement d'eau. Elles passent par une période de croissance avant d'atteindre un état final ou elles ont une longueur d'onde et une vitesse de phase constantes.

Langlois (2005) a observé la formation de rides sous l'action d'un écoulement de cisaillement dans un canal rectangulaire (figure 1.9). Il décrit une variation de la longueur d'onde initiale des rides en fonction du diamètre des particules, mais sans donner de relation précise. Des observations aux temps longs lui permettent de noter que la longueur d'onde des dunes augmente sans tendre de façon claire vers une longueur de saturation. La largeur du canal utilisé lui a permis d'observer que

FIG. 1.8 – Rides à tourbillon observées par Doppler (2005).

les dunes se déstabilisent pour devenir complètement tridimensionnelles.

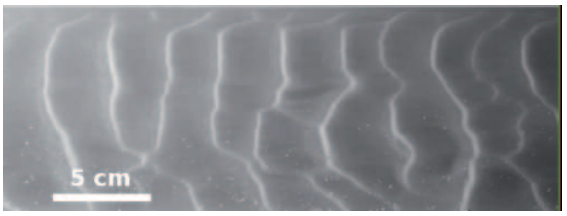


FIG. 1.9 – Rides observées par Langlois (2005).

Afin d'expliquer l'apparition de structures sédimentaires et leur évolution spatiale et temporelle, de nombreux modèles théoriques ont été proposés.

1.5 Pourquoi des structures apparaissent-elles ?

La formation de structures est liée à l'interaction entre le fluide et le milieu granulaire. La présence d'un fluide en écoulement entraîne une perturbation de la surface du lit granulaire qui va à son tour perturber l'écoulement. La plus grande difficulté consiste donc à proposer une modélisation correcte du milieu granulaire et de l'interface fluide pur/milieu granulaire immergé.

1.5.1 Peut-on différencier le seuil de déstabilisation du seuil de mise en mouvement des grains ?

Même si la plupart des études expérimentales montrent une concordance entre la mise en mouvement de la surface du lit et sa destabilisation, il existe des cas où aucune déformation n'a été observée alors que les grains bougent [Mouilleron-Arnould (2002)]. Ces cas correspondent à des écoulements particulièrement visqueux. Des études théoriques décrites dans le paragraphe 1.5.5 ont mis en évidence la présence d'un seuil de déstabilisation exprimé en terme de nombre de Reynolds Re ou de nombre de Shields θ. Mouilleron-Arnould (2002) a mesuré ce seuil expérimentalement. La figure 1.10 représente les différentes évolutions du lit granulaire (pas de mouvement, mouvement de particules sur un lit stable, lit instable) qui ont été observées dans le plan $Ga - \theta$. Le seuil d'apparition des dunes diffère du seuil de mise en mouvement sur une certaine gamme de nombre de Galilée. On peut se demander si le seuil de destabilisation existe réellement ou si dans certains cas, on n'observe

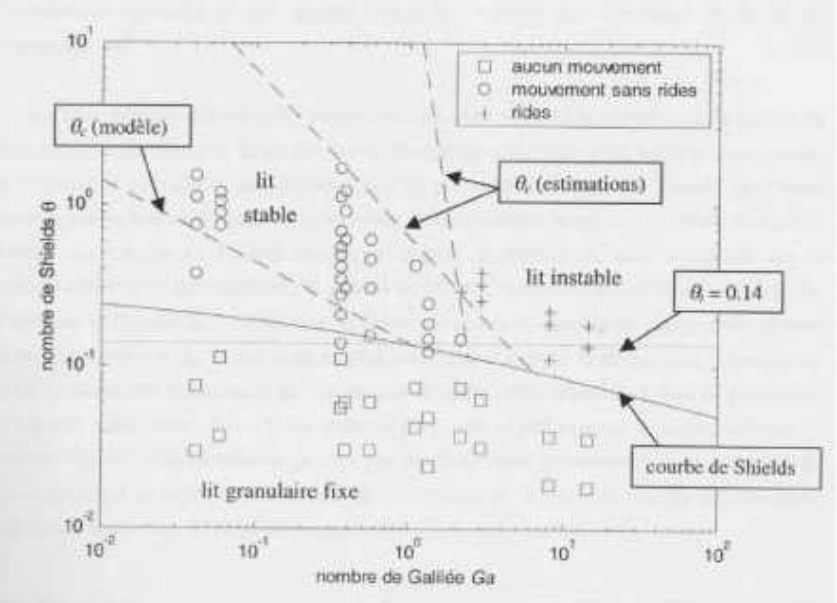


FIG. 1.10 – Domaine de formation de rides dans le plan Ga-θ dans une géométrie de Couette d'après Mouilleron-Arnould (2002).

pas de formation de structures sédimentaires car leur longueur d'onde est supérieure aux limites de la configuration expérimentale. C'est une question à laquelle nous allons nous efforcer de répondre au cours de cette étude en combinant une approche expérimentale (chapitre 2) et théorique (chapitre 5).

1.5.2 Modélisation : deux approches différentes

Dans la littérature, on peut distinguer deux approches principales pour modéliser la formation de structures sédimentaires. La première approche consiste à considérer que le fluide et le mélange fluide/particules sont des milieux continus et à effectuer une étude de stabilité en perturbant l'interface entre ces deux milieux. Dans le cadre de cette approche, Zhang *et al.* (1992) et Schaflinger (1994) ont proposé un modèle basé sur la superposition de deux fluides. Ils modélisent le milieu granulaire par une suspension uniforme avec une fraction solide ϕ constante se comportant comme un fluide newtonien. En résolvant les équations de Navier-Stokes dans le cas d'un écoulement de deux fluides superposés non miscibles, ils obtiennent l'équation de Orr-Sommerfields. Ils résolvent numériquement cette équation et montrent que l'interface de la suspension est toujours convectivement instable et que le taux d'amplification des instabilités interfaciales varie avec le nombre de Reynolds de l'écoulement. Le principal inconvénient de cette méthode est qu'elle suppose que tout le milieu granulaire est en mouvement et que le tenseur des contraintes au sein du mélange fluide/particules correspond à un tenseur Newtonien, ce qui revient à négliger les contacts entres les particules. Cette approche semble donc difficilement utilisable quand les particules ne sont pas en suspension et notamment dans notre expérience, où on observe que seules les couches supérieures du milieu granulaire

sont en mouvement.
Kuru *et al.* (1995) étudient expérimentalement la déformation d'un milieu granulaire soumis à un écoulement de Poiseuille dans un tube. Ils mesurent une longueur d'onde initiale λ_i qui varie suivant la gravité g et la vitesse moyenne de l'écoulement U_m,

$$\frac{\lambda_i}{d} \approx \frac{U_m^2}{gd}. \tag{1.8}$$

Or, malgré la présence d'une zone de suspension, le modèle basé sur la superposition de deux fluides ne prédit pas les bonnes dépendances. En utilisant un modèle basé sur la longueur de saltation des particules (travaux réalisés par Bagnold en 1954), ils obtiennent les bonnes variations,

$$\frac{\lambda}{d} \approx \frac{2\rho_p \sin\varsigma \cos\varsigma}{\Delta\rho} \frac{U_p^2}{gd}, \tag{1.9}$$

où ς représente l'angle de saltation et U_p la vitesse de la particule.

Dans la deuxième approche, l'écoulement du fluide pur au dessus d'un fond rigide perturbé sinusoïdalement est calculé de manière indépendante. L'interaction fluide/milieu granulaire est modélisée à travers l'équation de conservation de la masse de particules dans laquelle il faut introduire une formule de flux de particules perturbée. L'étude de stabilité nécessite donc la détermination préalable de l'écoulement de fluide et du flux de particules.

1.5.3 Écoulement de fluide au dessus d'un fond sinusoïdal

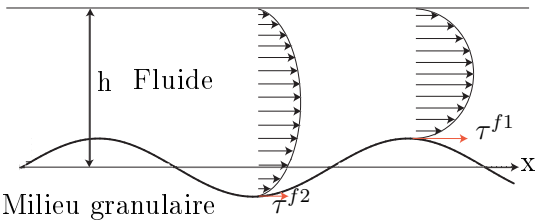


FIG. 1.11 – Écoulement de Poiseuille sur un fond sinusoïdal.

Considèrons un écoulement de Stokes au dessus d'un fond rigide perturbé sinusoïdalement pour le fluide, c'est-à-dire un écoulement où la viscosité est prédominante devant l'inertie ($Re \longrightarrow 0$), le cisaillement et la contrainte du fluide suivant x sont maximaux sur les sommets du profil sinusoïdal (figure 1.11). La vitesse des grains à l'interface est supposée proportionnelle à la contrainte fluide τ^f. Les sommets subissent une contrainte τ^{f1} plus importante que celle subie par les creux (τ^{f2}) et pour satisfaire la conservation de la masse du milieu granulaire, le fond sinusoïdal va avancer sans qu'il n'y ait amplification de la perturbation initiale. Avec ce mécanisme simple, on ne peut donc pas expliquer la destabilisation du lit.

Pour expliquer la formation de dunes, Kennedy (1963) a mis en évidence le fait qu'il existe un déphasage entre le maximum de la contrainte fluide et les sommets de l'interface fluide/milieu granulaire. Ce déphasage découle de la prise en compte de l'inertie du fluide. Considérons une interface fluide/milieu granulaire perturbée sinusoïdalement. Suite au déphasage, les grains situés en amont du sommet subissent une contrainte fluide plus importante que les grains situés au niveau du sommet du profil et ils avancent plus vite. Un bilan de masse (figure 1.12) réalisé entre la zone de maximum de contrainte (billes en noir) et le sommet du profil, montre que la masse du milieu granulaire dans cette zone augmente car la vitesse d'entrée est supérieure à la vitesse de sortie. Cette augmentation de masse se traduit par une augmentation de l'amplitude des déformations. Engelud (1970) a été le premier à

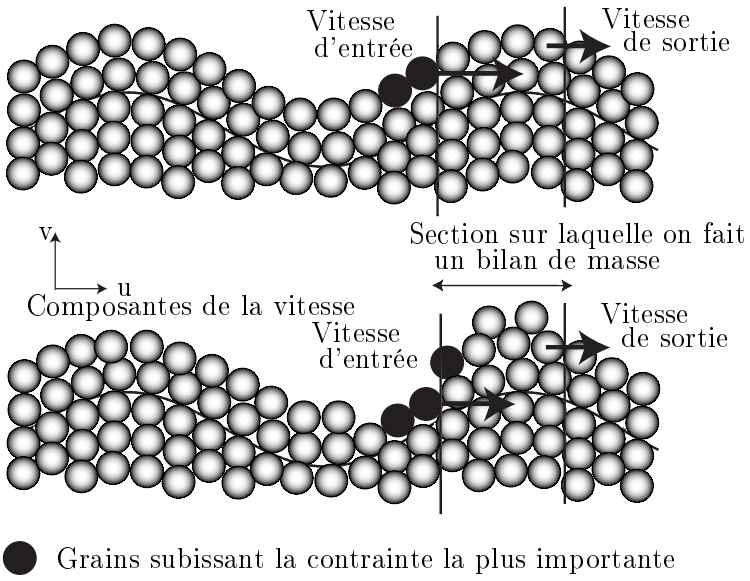


FIG. 1.12 – Effet du déphasage du cisaillement.

calculer ce déphasage pour un écoulement turbulent, tandis que Charru & Hinch (2000) l'ont calculé dans le cas d'un écoulement de Couette laminaire.
De nombreuses études de stabilité sont basées sur la présence de ce déphasage. L'écoulement de fluide étant connu, la difficulté consiste à modéliser le débit de grains transportés.

1.5.4 Transport de particules

De nombreux auteurs ont cherché à évaluer et modéliser le transport de particules par charriage à travers des formules de flux de transport. Le flux de transport étant relié aux caractéristiques de l'écoulement, son moteur n'est pas le même suivant la nature laminaire ou turbulente de l'écoulement. Dans ce paragraphe, nous présenterons brièvement quelques unes des études réalisées pour des écoulement turbulents et laminaires.

Écoulement turbulent

La détermination du flux de particules nécessite une bonne compréhension du mécanisme à l'origine du mouvement des grains. En s'appuyant sur le caractère aléatoire de la mise en mouvement, Einstein (1942, 1950) présente un modèle de flux de transport basé sur une approche statistique, le flux de transport étant relié à la probabilité qu'une particule située dans une surface donnée se mette en mouvement à un instant donné. Il suppose que le mouvement des particules est principalement lié aux fluctuations turbulentes de la vitesse et qu'il n'existe pas de contrainte critique de mise en mouvement des particules. Il définit un taux de transport adimensionné Φ,

$$\Phi = \frac{1}{F}\frac{q_s}{\Delta\rho g d}\sqrt{\frac{\rho_f}{\Delta\rho g d}}, \tag{1.10}$$

où q_s représente le taux de transport de particules en poids par unité de longueur et de temps. Grâce à cette approche, il propose deux lois reliant Φ et $\Psi = \frac{1}{\theta}$. Ces lois présentent une bonne concordance avec les données expérimentales pour les faibles valeurs du paramètre Φ, mais s'écartent pour les valeurs plus importantes.
Yalin (1963) aborde le problème de transport de matière en canal ouvert sous un angle différent. En s'appuyant sur le fait qu'il peut y avoir mouvement de particules sans fluctuations de vitesses turbulentes (écoulement laminaire), il propose que la mise en mouvement non uniforme des particules sur un lit soit due à la disposition aléatoire des particules (figure 1.13). Il postule que les grains se déplacent principalement par saltation et se place dans une configuration ou la hauteur de grains en mouvement est négligeable devant la hauteur de fluide. L'utilisation de l'équation du mouvement des saltons lui permet d'obtenir une équation reliant Φ et Ψ. Bagnold (1956) s'est plutôt intéressé aux différentes contraintes appliquées à la sur-

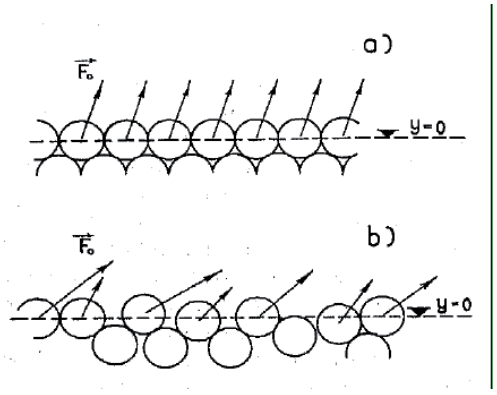


FIG. 1.13 – a) Arrangement idéal de particules et b) arrangement réel de particules, schéma tiré de Yalin (1963).

face du lit et à l'intérieur du milieu granulaire pour déterminer le taux de transport de particules. Il trouve le même taux de transport adimensionné qu'Einstein (1942, 1950). Pour contrer les problèmes liés à la détermination des effets de fluctuations de vitesse turbulente et ceux liés à la rugosité du lit de solide, il considère la vitesse moyenne de l'écoulement et la force de traînée comme des données indépendantes.

La plupart des autres formules proposées dans la littérature, sont obtenues de manière empirique. Les plus couramment utilisées sont les formules proposées par Ribberink (1998),

$$q_p\sqrt{\frac{\rho_f}{\Delta\rho g d^3}} = 10.4(\theta - \theta^c)^{1.67}, \tag{1.11}$$

et Meyer-Peter & Muller (1948),

$$q_p\sqrt{\frac{\rho_f}{\Delta\rho g d^3}} = 8(c_2c_3\theta - \theta^c)^{1.5}, \tag{1.12}$$

où q_p représente le flux de particules, c_2 est une correction due à la présence des parois et c_3 une correction liée à la forme du lit. De manière générale, la plupart des formules de flux de transport proposées dans la littérature sont de la forme,

$$q_p\sqrt{\frac{\rho_f}{\Delta\rho g d^3}} = a\theta^n(\theta - \theta^c)^m, \tag{1.13}$$

où a, n et m sont des facteurs numériques qui dépendent des auteurs.

Écoulement laminaire

Moins d'études ont été réalisées dans le cas des écoulements laminaires. Dans le chapitre 4, nous présentons une liste non exhaustive de quelques unes des formules proposées. Charru & Mouilleron-Arnould (2002) proposent une formule de flux de transport semi-empirique basée sur la théorie de resuspension visqueuse de Leighton & Acrivos (1986),

$$\frac{q_p\eta}{\Delta\rho g d^3} = 0.42(\theta - \theta^c)^3. \tag{1.14}$$

En utilisant une approche probabiliste basée sur la répartition aléatoire des particules à la surface, Cheng (2004) propose une formule de la forme,

$$\frac{q_p\eta}{\Delta\rho g d^3} = \frac{\eta}{\sqrt{\Delta\rho g d^3\rho_f}}41\theta^{0.5}Re_*[\sinh(0.139\theta^{1.181}Re_*^{0.39})]^2. \tag{1.15}$$

Enfin Charru *et al.* (2004) proposent un flux de particules basé sur un modèle d'érosion/déposition,

$$\frac{q_p\eta}{\Delta\rho g d^3} = 0.096N\frac{\theta}{\theta^c}, \tag{1.16}$$

où N représente le nombre de particules en mouvement par unité de surface.

Il est intéressant de noter que quelque soit la nature de l'écoulement, le flux de particules dépend du nombre de Shields θ, du nombre de Shields critique θ^c et souvent de l'écart entre les deux $\theta - \theta^c$. Par contre le débit caractéristique varie suivant la nature de l'écoulement. Pour un écoulement turbulent, il s'ajuste avec $\sqrt{\rho_f/(\Delta\rho g d^3)}$, tandis que pour un écoulement laminaire, il varie avec $\eta/(\Delta\rho g d^3)$.

1.5.5 Étude de la stabilité du lit

En combinant une formule de flux de transport de particules avec l'écoulement de fluide par le biais de la conservation de la masse, il est possible d'étudier la stabilité du lit. Pour cela, il faut prendre en compte plusieurs effets et notamment celui de l'inclinaison de l'interface qui tend à restabiliser le système.

Seuil de mise en mouvement perturbé

La formation de structures sédimentaires entraîne une perturbation de l'interface fluide/milieu granulaire. L'interface s'incline, entraînant une modification du seuil de mise en mouvement des particules. Le bilan des forces réalisé à l'échelle des grains doit tenir compte de la composante horizontale du poids qui peut s'exprimer sous la forme $(\Delta\rho g d^3)/\mu)(\partial h_p/\partial x)$, où h_p représente la position verticale de l'interface et μ un coefficient de friction solide du matériau. Suivant les auteurs, la valeur de μ varie. A titre d'exemple, on peut citer Fredsœ (1974) qui propose $\mu \approx 0.1$, tandis que Richards (1980) qui se base sur les travaux de Bagnolds en 1954 propose une valeur plus élevée $0.32 < \mu < 0.75$. On peut donc définir le seuil de mise en mouvement d'une particule située sur un plan incliné par,

$$\theta^c_{incl} = \theta^c \left(1 + \frac{1}{\mu}\frac{\partial h_p}{\partial x}\right), \tag{1.17}$$

[Fredsœ (1974), Richards (1980), Charru & Hinch (2006) et Charru (2006)].

Écoulement turbulent

De nombreuses études ont été menées dans le cas des écoulements turbulents. Fredsœ (1974), en prenant en compte l'effet de la gravité, prédit un seuil de déstabilisation qui varie en fonction du nombre de Froude, $Fr = U_m/(gd)^{1/2}$ et du rapport U_m/u_*, où U_m représente la vitesse moyenne de l'écoulement et u_* la vitesse de frottement. Il montre que la gravité restabilise les petites longueurs d'ondes. En se plaçant à bas nombre de Froude, Richards (1980) prédit deux modes instables. Le premier mode correspond à la formation de rides et la longueur d'onde la plus instable s'ajuste avec la rugosité du lit z_0 suivant la relation

$$50 z_0 < \lambda < 1000 z_0. \tag{1.18}$$

En utilisant une forme corrigée de la rugosité suite au mouvement des sédiments ($z_0 = 4.5d$), il prédit une longueur d'onde comparable avec les données expérimentales concernant les rides. Le seuil de déstabilisation qu'il prédit est fortement relié à l'effet de la pente locale du lit sur le flux de transport de particules [$1/\mu = 2.9$]. Le deuxième mode correspond à la formation de dunes et la longueur d'onde la plus instable s'ajuste avec la hauteur de fluide h_f,

$$\lambda \approx 2\pi h_f. \tag{1.19}$$

Sumer & Bakioglu (1984) poursuivent le travail de Richards (1980) en introduisant l'effet de la viscosité. Ils prennent en compte une couche limite visqueuse et montrent

que le seuil de déstabilisation du lit dépend du nombre de Reynolds turbulent Re_* (table 1.1) et du paramètre $1/\mu$,

$$Re_* = 10 - 26 \quad \text{pour} \quad 0.32 < \mu < 0.75. \tag{1.20}$$

Ils trouvent que la longueur d'onde adimensionnée par la longueur visqueuse $\lambda u_*/\nu$ varie en fonction de Re_*,

$$\frac{\lambda u_*}{\nu} = f\left(Re_*\right). \tag{1.21}$$

Écoulement laminaire

En parallèle, plusieurs études ont été menées dans le cas des écoulements visqueux. En utilisant le flux de particules définit équation (1.14), Charru & Mouilleron-Arnould (2002) prédisent une instabilité de grande longueur d'onde, les petites longueurs d'onde étant stabilisées sous l'effet de la gravité. Ils obtiennent un seuil de déstabilisation correspondant à un nombre de Shields critique θ^{c1},

$$\theta^{c1} = \theta^c \left(\frac{30}{\theta^c Ga \mu}\right)^{1/2} \frac{d}{h_f}, \tag{1.22}$$

qui dépend du nombre de Galilée et de l'effet de la gravité à travers μ. Ils prédisent une échelle de longueur visqueuse pour la longueur d'onde la plus amplifiée,

$$\lambda = \frac{60\nu}{u_*}. \tag{1.23}$$

La longueur d'onde ne correspondant pas aux données expérimentales, Charru & Hinch (2006) et Charru (2006) utilisent le modèle d'érosion/déposition du milieu granulaire développé par Charru *et al.* (2004) pour décrire le flux de particules [équation (1.16)]. Charru & Hinch (2006) décrivent l'existence de deux effets stabilisant, la forte érosion existant au niveau des sommets et la gravité qui s'opposent à l'inertie du fluide. La compétition entre l'effet déstabilisant de l'inertie du fluide et l'effet stabilisant de l'érosion des crêtes se traduit par le nombre de Galilée. Ils montrent qu'en dessous d'un nombre de Galilée critique,

$$Ga_c = \frac{120 c_u}{\theta^c} \left(\frac{d}{h_f}\right)^3, \tag{1.24}$$

où $c_u = 3.3$ et h_f correspond à la hauteur de fluide, le lit est toujours stable. Pour $Ga > Ga_c$, la gravité devient l'effet restabilisant prédominant. Il est alors possible de définir un seuil de destabilisation correspondant à un nombre de Shields critique θ^{c2}. Pour $\theta > \theta^{c2}$, le lit est instable. La valeur de θ^{c2} varie en fonction de l'influence de la gravité. Si l'effet restabilisant est faible, le seuil de destabilisation correspond au seuil de mise en mouvement des particules, ($\theta^{c2} = \theta^c$). Dans le cas contraire, il existe une gamme de nombres de Shields ($\theta^c < \theta < \theta^{c2}$) pour laquelle le lit est stable. La résolution étant effectuée dans la limite des grandes longueurs d'ondes, ils ne prédisent pas la sélection d'une longueur caractéristique. En résolvant l'équation d'érosion/déposition pour une longueur d'onde quelconque, Charru (2006) prédit

une longueur d'onde qui s'ajuste avec la longueur de déposition $l_d = U_m t_d$, où U_m représente la vitesse moyenne de l'écoulement, $t_d = c_d V_s/d$ le temps de déposition, $V_s = \Delta\rho g d^2/(18\eta)$ la vitesse de sédimentation et c_d le coefficient de déposition. Les longueurs d'ondes prédites montrent un bon accord avec les résultats expérimentaux.

Valance & Langlois (2004) utilisent une modélisation classique du flux d'érosion basée sur une loi de puissance de l'écart au seuil [équation (1.13)], à laquelle ils associent une longueur d'inertie, $l_{eq} = f(Re_p)\rho_p/\rho_f d$, qui correspond à la distance parcourue par les grains avant d'atteindre la vitesse imposée par le fluide. L'effet déstabilisant étant l'inertie du fluide, ils mettent en évidence deux effets stabilisants, l'inertie des particules et la gravité. Pour des petites valeurs du nombre de Reynolds particulaire Re_p, l'effet prédominant est la gravité, alors que pour les grandes valeurs de Re_p c'est l'inertie des grains. Ils montrent que le lit est instable dès que les particules entrent en mouvement et prédisent une longueur d'onde la plus amplifiée de la forme,

$$\lambda = 1.75\pi\sqrt{3} l_{eq} \left[\left(1 + \sqrt{1-r}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1-r}\right)^{1/3} \right]^3 \qquad (1.25)$$
$$\text{avec} \quad r = \frac{8}{147} \frac{l_v^2}{(0.53\mu)^3 (1+T)^3 l_{eq}^2},$$

où $l_v = \sqrt{\nu/\dot{\gamma}}$ représente une longueur visqueuse et $T = (\theta - \theta^c)/\theta^c$ l'écart au seuil de mise en mouvement. Comparé à des résultats expérimentaux, leur modèle ne prédit pas le bon ordre de grandeur.

Kouakou & Lagrée (2005) présentent une étude de stabilité linéaire basée sur une forme simple du flux de particules [équation (1.13)] qui leur permet de proposer deux ajustements pour la longueur d'onde la plus amplifiée suivant l'effet restabilisant qui prédomine,

$$\lambda = \left[\left(\frac{\theta^c \Delta\rho g d}{\mu} \right)^3 \frac{\rho_f}{\rho_s \nu^2 U_0'^4} \right]^{1/2} \quad \text{si l'effet stabilisant est la gravité,} \qquad (1.26)$$
$$\lambda = l_s \quad \text{si l'inertie des grains est l'effet stabilisant,}$$

où l_s représente la longueur d'inertie utilisée en milieu éolien et $U_0' = U_0/\delta$, où U_0 représente la vitesse de l'écoulement de base et δ l'épaisseur sur laquelle on peut considérer que l'écoulement se ramène à un cisaillement pur à proximité de la paroi.

Nous pouvons déduire de cette étude que lorsqu'un lit de grains est soumis à un écoulement de fluide, la surface supérieure du lit se met en mouvement si la contrainte adimensionnée (nombre de Shields) appliquée par le fluide est supérieure au nombre de Shields critique. Une fois les grains en mouvement, le lit se déforme et il y a apparition de rides sauf dans le cas où le fluide est très visqueux. La détermination du nombre de Shields critique, la présence d'un seuil de déstabilisation du lit et l'évolution des structures granulaires observées (longueur d'onde, vitesse de phase) sont des questions encore ouvertes. Nous allons tenter d'y répondre en

combinant une approche expérimentale et théorique. Dans ce domaine, la plupart des expériences existantes utilisent un milieu granulaire auto-alimenté ou infini, et un écoulement fluide gouverné par un cisaillement constant (Couette). L'originalité de notre expérience qui sera présentée dans le chapitre suivant est d'être en milieu confiné, avec un écoulement dans un tube cylindrique et surtout d'avoir un milieu granulaire qui n'est pas alimenté au cours de l'expérience. La hauteur initiale du lit de particules déposées est donc un paramètre important.

Chapitre 2

Dispositif expérimental

Dans ce chapitre, nous détaillons le dispositif expérimental et les techniques expérimentales utilisées pour l'étude de l'évolution d'un lit de particules soumis à un écoulement de fluide. Les différentes évolutions du lit de particules observées au cours des expériences seront passées en revue.

2.1 Particules et fluide

2.1.1 Particules

Les particules utilisées sont des billes sphériques mono-disperses. Afin de pouvoir mesurer l'influence des caractéristiques du milieu granulaire, des billes de matériaux et de diamètres différents ont été utilisées. Les billes sont définies par leur masse volumique ρ_p et leur diamètre moyen d. Afin d'obtenir les gammes de diamètres moyens souhaités, les billes ont été tamisées. Les différents types de billes utilisées et leurs caractéristiques sont résumés dans le tableau 2.1.

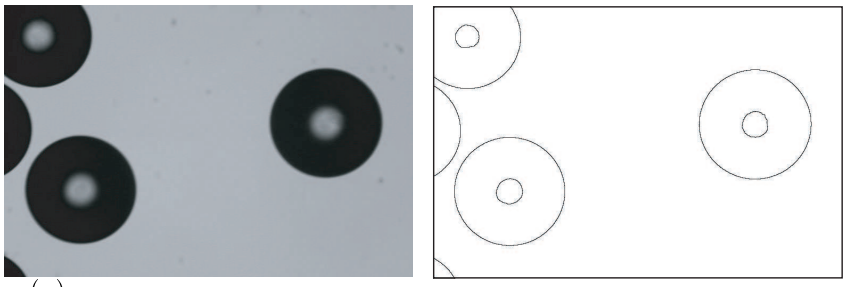
Les protocoles utilisés pour obtenir les caractéristiques des billes sont les suivants :

Mesure du diamètre moyen des particules

Les billes préalablement lavées sont photographiées à travers un microscope. Pour un échantillon de billes A observé avec un grossissement $\times 10$, on obtient par exemple l'image représentée figure 2.1.

Particules	Composition	Diamètre d (μm)	Masse volumique ρ_p (g/cm^3)
A	Verre	132 ± 22	2.521 ± 0.003
B	Polystyrène	538 ± 24	1.051 ± 0.002
C	PMMA	132 ± 20	1.177 ± 0.002
D	PMMA	193 ± 30	1.177 ± 0.002

TAB. 2.1 – Caractéristiques des particules.



(a) (b)

FIG. 2.1 – (a) Échantillon de billes A observé au microscope avec un grossissement $\times 10$ et un éclairage par en dessous. (b) Échantillon après seuillage sous ImageJ.

L'échantillon est éclairé par en dessous afin d'augmenter le contraste, rendant possible une mesure automatique sous le logiciel ImageJ :
La première étape consiste à réaliser un seuillage afin d'obtenir une image en noir et blanc dans laquelle seul le contour des billes est conservé (figure 2.1). Ensuite, une analyse de particules est effectuée (fonction *analyse particles* sous ImageJ) pour recueillir la répartition du diamètre des billes, en prenant soin d'éliminer les mesures correspondant à des billes en contact.

Cette technique de mesure s'applique dans le cas ou les particules sont suffisamment séparées (billes en PMMA et en verre). Si ce n'est pas le cas (les billes en polystyrène se touchent sous l'action des forces électro-statiques), la mesure du diamètre est réalisée manuellement sous ImageJ en utilisant l'outil règle.

La figure 2.2 montre la distribution de diamètre obtenue pour des billes de PMMA. Pour pouvoir déduire de cette distribution le diamètre des particules, il faut qu'elle soit mono modale et qu'elle puisse être représentée de manière satisfaisante par les deux premiers moments, la moyenne et la déviation standard. Dans le cas contraire, il faut tamiser et mesurer un échantillon plus large de billes. Pour un échantillon de n billes, d est calculé suivant la relation,

$$d = \frac{\Sigma_i^n d_i}{n}, \tag{2.1}$$

où d_i représente le diamètre de la i^{eme} particule.

Mesure de la masse volumique des billes

Pour mesurer la masse volumique des billes nous avons utilisé un pycnomètre de la marque Brand Duran avec de l'éthanol qui possède de bonnes propriétés de mouillage avec les particules. Après avoir mesuré la masse volumique de l'éthanol et pesé un petit échantillon de particules, nous avons utilisé le pycnomètre pour mesurer la masse volumique du mélange éthanol/échantillon de particules et nous en avons déduit la masse volumique des particules. En réalisant des mesures pour différents échantillons de particules, nous avons obtenu une bonne estimation de la masse volumique des particules ainsi que la barre d'erreur sur cette mesure.

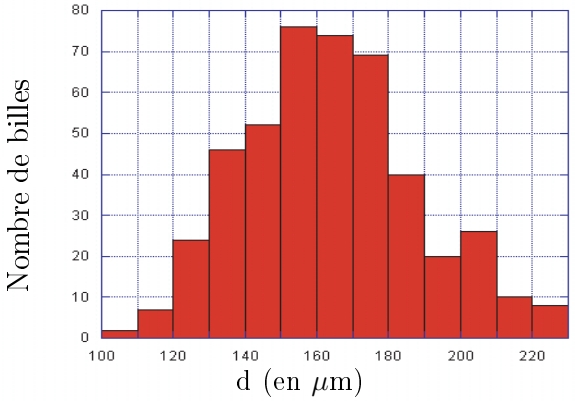


FIG. 2.2 – Distribution du diamètre des billes en PMMA.

2.1.2 Fluide

Le fluide utilisé correspond à un mélange eau/ucon oil. L'ucon oil est fourni par Chempoint. Composé à base de polyalkylène glycol, il s'agit d'un liquide très visqueux (30000 m.Pa.s^{-1}) totalement miscible dans l'eau. En rajoutant une faible quantité d'ucon oil, il est possible d'augmenter de manière significative la viscosité de l'eau. La viscosité dépendant de la température, le fluide est maintenu à une température constante ($\approx 30^{\circ}C$) à l'aide d'un chauffe-eau (polystat compatible control) de la marque Huber, afin que les variations de température (notamment entre l'été et l'hiver) ne fassent pas varier les caractéristiques du fluide. La salle d'expérience n'étant pas climatisée, le différentiel de température entre l'été et l'hiver peut dépasser les 15°. Dans son utilisation classique, le chauffe-eau est directement placé dans le fluide. Il chauffe l'eau grâce à une résistance tout en contrôlant la température à l'aide d'un système d'aspiration/rejet du fluide. Ce système entraîne la création de bulles d'air. Dans le cas du mélange fluide/ucon oil, les bulles restent emprisonnées dans le mélange. Pour éviter la formation de ces bulles, nous avons utilisé un système de bain-marie inversé. Le chauffe-eau est placé dans un récipient en métal rempli d'eau qui est situé dans le mélange. Le fait de chauffer le mélange entraîne un inconvénient majeur. Le circuit de transport du mélange n'étant pas totalement fermé, l'eau s'évapore au fur et à mesure de l'expérience (qui peut durer entre un jour et deux semaines), entraînant une augmentation de la viscosité du mélange. Afin de contrer cette dérive, nous contrôlons la quantité de fluide dans le circuit pour le ré-alimenter en eau quand le niveau diminue.
Nous avons réalisé des expériences pour quatre viscosités différentes. La viscosité du mélange varie légèrement d'une expérience à l'autre. Les caractéristiques moyennes du fluide sont résumées dans le tableau 2.2. Au cours de chaque expérience, les caractéristiques du fluide ont été mesurées.

La masse volumique du mélange est mesurée en utilisant un pycnomètre de la marque Brand Duran. Suivant le fluide mesuré, nous avons utilisé deux viscosimètres différents. Pour mesurer la viscosité des fluides dans la gamme de viscosité des fluides

Fluide	%UCON	T (°C)	η (cP)	ρ_f (g/cm^3)
1	0	20	1.00 ± 0.05	1.004 ± 0.001
2	0	35	0.70 ± 0.04	0.999 ± 0.001
3	12	35	8.8 ± 0.4	1.023 ± 0.001
4	20	35	40 ± 2	1.040 ± 0.001

TAB. 2.2 – Caractéristiques du fluide

1 et 2, nous avons utilisé un viscosimètre capillaire de la marque Cannon Fenske. Pour mesurer la viscosité des fluides dans la gamme de viscosité des fluides 3 et 4, nous avons utilisé un viscosimètre à bille de la marque Gilmont. La viscosité dépendant de la température, toutes les mesures ont été effectuées en plaçant le viscosimètre dans un bac d'eau maintenu à la température du mélange.

Il est important de noter que l'ucon oil étant miscible avec l'eau, tout le matériel peut se nettoyer à l'eau.

2.2 Dispositifs expérimentaux

2.2.1 Montages expérimentaux

Au cours de la thèse, deux montages expérimentaux ont été utilisés. Un tube permettant de se rapprocher au plus près des conditions réelles du problème industriel à la base de cette thèse et un canal rectangulaire permettant de se placer dans une configuration à 2 dimensions plus facile à interpréter. Initialement le canal $2D$ qui a été entièrement monté au cours de cette thèse devait servir à réaliser la plupart des expériences. Suite à des problèmes d'étanchéité et à la richesse des résultats dans le tube, le montage en canal rectangulaire n'a pas été beaucoup exploité à part pour des mesures d'écoulement au dessus d'un fond solide sinusoïdal. Tous les autres résultats expérimentaux présentés dans cette thèse ont été obtenus en utilisant le tube, c'est-à-dire dans une configuration à 3 dimensions.
Le premier montage, représenté figure 2.3, est constitué d'un tube cylindrique de 3 cm de diamètre intérieur et de 1.8 m de longueur. Il correspond au montage expérimental utilisé lors d'une thèse précédente réalisée par Jean-Philippe Matas. Ce montage a l'avantage de permettre une approche expérimentale en trois dimensions peu courante en étudiant l'influence d'un écoulement de Poiseuille déformé sur le lit de particules.
Le deuxième montage (figure 2.4) est constitué d'un canal rectangulaire (2 cm $\times$20 cm$\times$2 m). Il a été réalisé au cours de la première année de thèse. Il a pour but de proposer une approche simplifiée dans une configuration à deux dimensions. Il permet aussi un meilleur contrôle expérimental grâce au couvercle démontable qui rend accessible l'intérieur du canal.

L'approvisionnement en fluide est réalisé en utilisant un système régulé en pression. Le réservoir 2 peut être situé à hauteur variable. Il est fixé sur un banc de translation qui est gouverné par une manivelle. Suivant la hauteur à laquelle il est

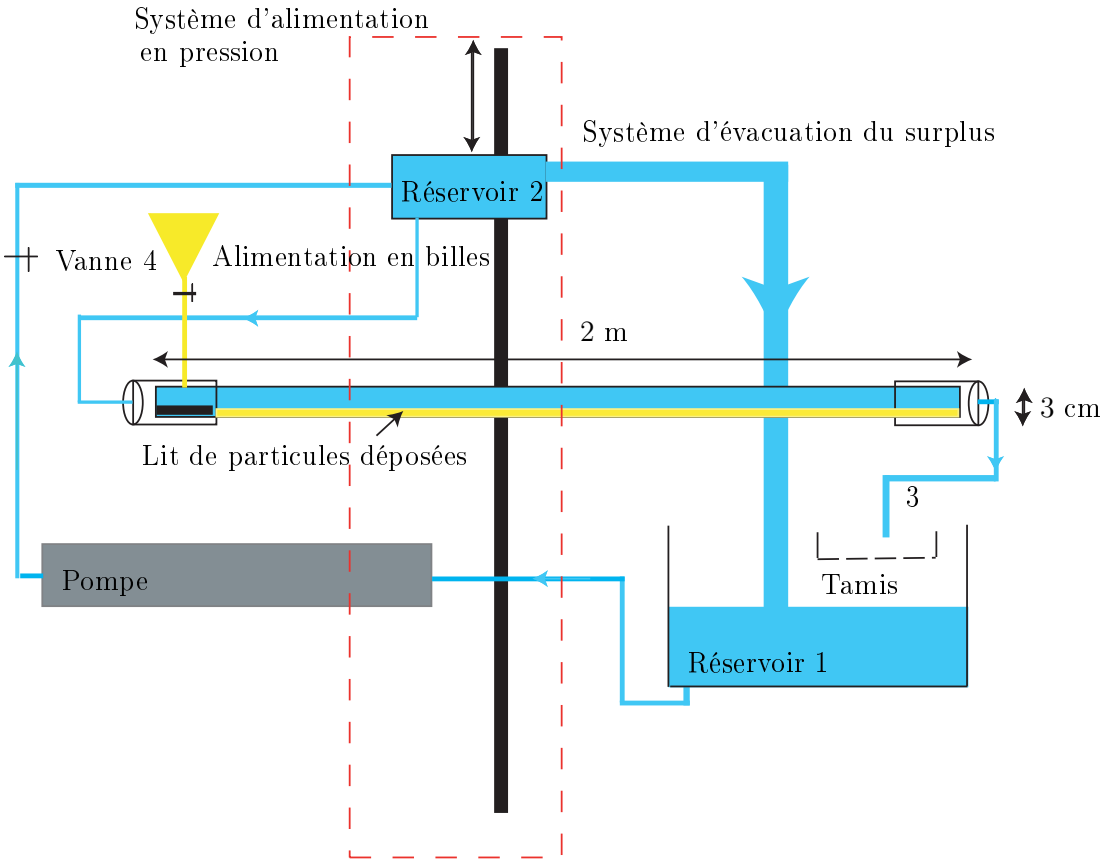


FIG. 2.3 – Montage expérimental avec le tube.

situé, la variation de pression entre la surface libre du fluide dans le réservoir 2 et la sortie 3 du système hydraulique va imposer un débit dans tout le circuit. La pompe (pompe moineau) aspire le fluide situé dans le réservoir 1 et l'envoie dans le réservoir 2. Les premières expériences ont été réalisées en travaillant directement avec la pompe, mais des mesures de l'écoulement du fluide ont mis en évidence des variations cycliques du débit. Afin de contourner ce problème, nous avons opté pour une alimentation en fluide contrôlée en pression. Cette méthode ne permettant pas d'obtenir des débits trop importants, nous sommes obligés d'utiliser directement la pompe moineau pour les forts débits. Heureusement pour les forts débits, les variation de débit sont négligeables. La vanne 4, placée entre la sortie du réservoir 2 et l'entrée du canal, permet de garder le circuit constamment amorcé. Un tuyau de gros diamètre reliant les réservoirs 1 et 2 assure l'évacuation du surplus du réservoir 2 et le maintien de la surface libre à hauteur constante. Le débit est mesuré avec un débit-mètre GF-1560 de la marque Gilmont Instruments. Le débit-mètre a été étalonné manuellement (temps mis par le fluide en sortie du système pour remplir un litre pour différents débits). Le réservoir 1 a de nombreux usages. Il permet :

- le maintien du fluide à température constante par l'intermédiaire d'un thermostat,
- l'insémination du fluide qui est nécessaire pour réaliser des mesures de *Vélo-*

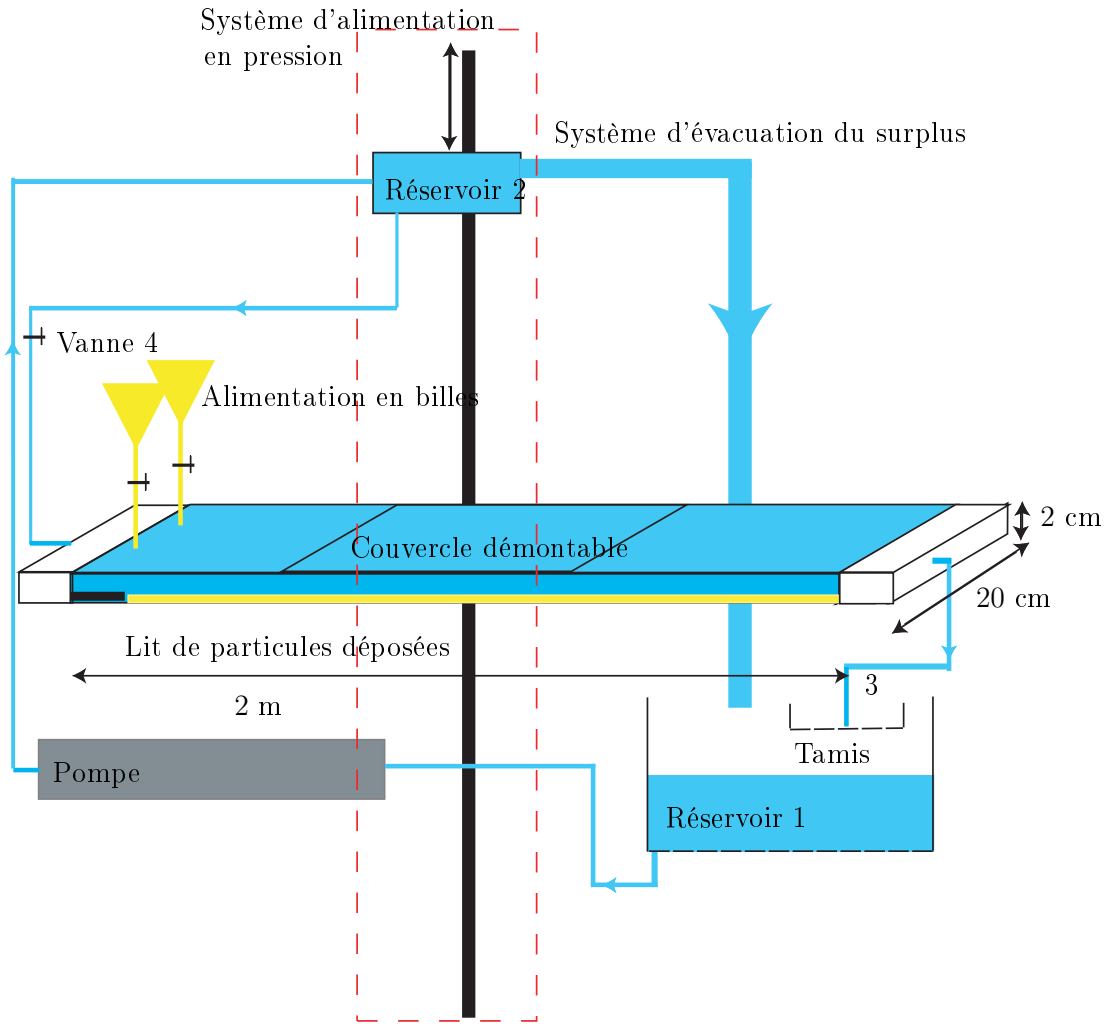


FIG. 2.4 – Montage expérimental avec le canal rectangulaire de 2 m.

cimétrie par Images de Particules,
– la récupération dans un tamis des particules entraînées par l'écoulement hors du canal.

2.2.2 Expériences réalisées à débit ou à pression imposé ?

La plupart des expériences ont été réalisées en utilisant le montage contrôlé en pression pour gouverner l'écoulement. Le différentiel de pression de l'écoulement est directement relié à la différence de hauteur entre le réservoir 2 et la sortie du tube située au niveau du réservoir 1. Cette différence de hauteur étant constante au cours de l'expérience, le différentiel de pression entre l'entrée et la sortie est supposé constant. La grandeur qui nous intéresse est le débit de fluide et sa variation au cours du temps. Pour calculer ce débit, il faut commencer par déterminer les différentes pertes de charge dans le circuit. Le circuit est constitué d'un assemblage compre-

Conduite	Diamètre hydraulique D_H(en m)	Longueur L (en m)	Section de la conduite S (en m^2)
Réservoir 2	37.5	0.08	$2.4\,10^{-4}$
Tuyau	0.008	14.4	$5\,10^{-5}$
Tube en verre : vide	0.03	1.8	0.00071
avec particules	D_{HT} [équation (2.5)]	1.8	S_T [équation (2.4)]
Débitmètre	0.02	0.025	$3.14\,10^{-4}$

TAB. 2.3 – Caractéristiques des composantes du circuit hydraulique

nant un réservoir, plusieurs mètres de tuyaux de raccord de diamètre constant, le tube en verre permettant de réaliser les expériences et un débit-mètre. Ces différentes conduites sont reliées entre elles par trois vannes, quatre raccords entre des conduites de même section et cinq raccords permettant des changements de section de conduite.

Au cours d'une expérience, la section de fluide pur dans le tube varie avec la hauteur de particules, entraînant ainsi une variation des pertes de charge au sein du système. Il est important de déterminer dans quelle mesure ces variations de pertes de charge peuvent modifier le débit de l'écoulement. En utilisant le théorème de Bernoulli, on peut relier la vitesse moyenne de l'écoulement en sortie du système, U_{ms}, avec les variations de charge dans le système. L'équation obtenue est de la forme,

$$\frac{1}{2}\rho_f U_{ms}^2 = \rho_f g(H_2 - H_1) - \Delta P_{reg} - \Delta P_{sing}, \tag{2.2}$$

où H_2 est la hauteur du réservoir d'entrée du système, H_1 la hauteur de sortie du système, ΔP_{reg} les pertes de charge régulières correspondant à l'écoulement dans une conduite droite et ΔP_{sing} les pertes de charge singulières correspondant aux changements de section dans les réseaux hydrauliques. La vitesse U_{ms} est reliée au débit de fluide dans le système par $Q_{pipe} = U_{ms}\pi D_t^2/4$, où D_t correspond au diamètre hydraulique du tuyau de sortie du système. Les pertes de charge régulières sont reliées à la section et à la longueur des conduites, ainsi qu'au matériau des conduites. Pour un écoulement laminaire elles sont données par

$$\Delta P_{reg} = \frac{K}{D_H}\frac{\rho_f Q_f^2 L}{2S^2} \tag{2.3}$$

où $K = 64/Re$ est le coefficient de perte de charge avec $Re = \frac{\rho Q_f D_H}{\eta S}$, D_H le rayon hydraulique, L la longueur de la conduite et S la section de la conduite.
Il a été montré empiriquement que les pertes de charge singulières dépendent du type de changement de section. Le tableau 2.4 décrit les différentes formules utilisées dans cette étude où v_f correspond à la vitesse dans la plus petite section, D_1 au plus petit diamètre et D_2 au plus grand diamètre.

Changement de section	$\Delta P_{singulieres}$
Vanne	$0.25\rho_f v_f^2/2$
Vanne d'angle	$3\rho_f v_f^2/2$
Raccord	$0.05\rho_f v_f^2/2$
Élargissement	$\frac{1}{2}\left(1-\frac{D_2^2}{D_1^2}\right)^2 \rho_f v_f^2/2$
Rétrécissement	$\frac{1}{2}\left(1-\frac{D_2^2}{D_1^2}\right) \rho_f v_f^2/2$
Sortie de réservoir	$(1/2)\rho_f v_f^2/2$

TAB. 2.4 – Définitions utilisées pour les pertes de charge singulières. Ces définitions sont tirées de tables empiriques.

Pertes de charge	Valeur calculée (en Pa)
singulières	$\Delta P_s \approx 1.10^{12}$
régulières dans le système de transport	$\Delta P_r \approx 1.10^{7}$
régulières dans le tube rempli à 87%	$\Delta P_{ex} \approx 5.10^{6}$
régulières dans le tube vide	$\Delta P_{ex} \approx 5.10^{2}$

TAB. 2.5 – Estimation des pertes de charge.

Géométriquement, on montre que la section S_T et le diamètre hydraulique D_{HT} du tube en verre sont reliés à la hauteur du milieu granulaire h_p par les relations suivantes,

$$S_T = \frac{D^2}{4}\arccos(2\frac{h_p}{D}-1) + (\frac{D}{2}-h_p)\frac{D}{2}\sin(\arccos(2\frac{h_p}{D}-1)) \tag{2.4}$$

$$D_{HT} = \frac{S_T}{2\sqrt{D^2/4-(h_p-D/2)^2}}. \tag{2.5}$$

Dans la plupart des expériences réalisées, h_p connaît des variations de l'ordre du millimètre. Dans cette étude, nous allons considérer les cas extrêmes, c'est à dire le tube vide et le tube rempli à 87%, afin de déterminer l'influence des variations de hauteur sur les variations de débit. De plus, on se place dans le cas le plus défavorable où le réservoir 2 est situé dans sa position la plus basse ($H_2 - H_1 = 1$ m). En combinant les équations (2.2) et (2.3), on obtient une équation permettant d'obtenir le débit dans le système.

Estimation des différentes pertes de charge

Le tableau 2.5 évalue les différentes pertes de charge dans le système expérimental. Ces pertes de charge sont totalement dominées par les pertes de charge singulières (cinq ordres de grandeur au dessus des autres). Le calcul du débit prédit un débit d'ordre 7.10^{-5}, dans des conditions correspondant à un débit expérimental d'ordre 4.10^{-6}. La détermination du débit basée sur le calcul des pertes de charge donne donc un ordre de grandeur raisonnable compte tenu de la difficulté à évaluer les pertes de charge dans les vannes. Entre les configurations, tube vide et tube

rempli à 87%, qui sont des configurations extrêmes, la variation de débit calculée est de l'ordre de 10%. Dans le cadre des expériences menées, les variations de hauteur du milieu granulaire étant largement inférieures, le débit peut donc être considéré comme constant. Les expériences sont donc réalisées à débit imposé et non à pression imposée comme on aurait pu le penser à priori.

2.2.3 Protocole expérimental

Toutes les expériences de mesure de l'évolution du lit de particules dans le canal cylindrique se sont déroulées suivant le même protocole expérimental. La première étape consiste à remplir le tube de fluide puis à établir un écoulement à très bas débit. Pour cela, il suffit de mettre la pompe en marche, puis d'ouvrir la vanne 4. En variant l'ouverture de la vanne, on fait varier l'intensité du débit dans le système. Ensuite, on introduit un mélange fluide/particules par l'entonnoir situé au-dessus du tube. Les particules entraînées par l'écoulement se déposent de manière à peu près homogène dans toute la longueur du tube. Dès que le lit de particules déposées a atteint la hauteur souhaitée, l'écoulement est coupé pour laisser les particules finir de sédimenter. Une fois les particules sédimentées, l'état de départ est obtenu. La sédimentation des particules permet d'obtenir un lit globalement plat, nous supposerons dans la suite que le lit est initialement plat et qu'il est entièrement défini par la hauteur initiale mesurée dans la zone de mesure. Pour débuter l'expérience, on impose le débit souhaité en jouant sur la hauteur du réservoir 2 et sur l'ouverture de la vanne 4. Au cours de l'expérience, le milieu granulaire n'est pas alimenté. L'expérience s'achève quand un état stationnaire est atteint (milieu granulaire complètement immobile) ou quand il n'y a plus de milieu granulaire dans le tube. Une expérience dure en moyenne deux ou trois jours, mais certaines expériences peuvent durer plus d'une semaine. Afin d'étudier l'influence des paramètres expérimentaux, nous réalisons des expériences à différents débits pour chaque couple fluide/particules.

2.2.4 Réalisation d'un fond sinusoïdal

L'étude de l'évolution d'un lit de particules soumis à un écoulement de fluide dans une conduite cylindrique constitue la grande majorité des expériences réalisées. Cependant, afin d'observer expérimentalement le déphasage existant entre les sommets d'un fond perturbé sinusoïdalement et le maximum du cisaillement du fluide décrit dans la sous-section 1.5.3, nous avons aussi réalisé des expériences de mesure d'écoulement au dessus d'un fond sinusoïdal fixe dans le canal $2D$.

Le fond sinusoïdal a été entièrement réalisé au laboratoire. La première étape a consisté à déterminer les caractéristiques géométriques du fond sinusoïdal. Ces caractéristiques devaient tenir compte de plusieurs contraintes :

- permettre une visualisation optimale de l'effet à observer (grande amplitude)
- être compatible avec le canal $2D$ (largeur de 20 cm, hauteur totale de l'ordre du cm)
- résister à l'eau (emploi d'un matériel imperméable)
- être techniquement réalisable avec les moyens disponibles dans le laboratoire.

Pour essayer de répondre au mieux à toutes ces contraintes, nous avons choisi de construire un fond sinusoïdal (figure 2.5), d'une largeur de 20 cm et d'une hauteur maximale de 1 cm. La forme sinusoïdale est caractérisée par une amplitude de 7 mm et par une longueur d'onde de 20 cm. L'épaisseur minimale du fond sinusoïdal est donc de l'ordre de 3 mm. Le plexiglas ne permettant pas la réalisation de pièces de si faible épaisseur, nous avons donc décidé de réaliser le fond sinusoïdal par moulage à partir de résine epoxy. La résine époxy est un produit particulièrement nocif pour la santé qui nécessite d'être manipulé sous une hotte. La réalisation d'un moule nécessite l'utilisation de la forme exacte à mouler. La pièce modèle a été réalisée en plexiglas à l'atelier. A cause des contraintes techniques, fragilité du plexiglas, longueur limitée des machines, nous avons obtenu une pièce représentant une longueur d'onde. Cette pièce est représentée figure 2.6. La présence des bords permet de définir exactement la zone servant à construire le moule. Pour réaliser le moule, nous avons utilisé du silicone mélangé avec un durcisseur (3% en masse). Aprés avoir homogénéisé le mélange, il suffit de le verser lentement sur la pièce à mouler. La difficulté consiste à ne pas piéger des bulles d'air dans le moule. Pour cela, il est indiqué d'appliquer une première couche au pinceau. Ensuite, le moule est laissé dans un endroit protégé afin d'éviter le dépot de poussière sur la surface du moule pendant la période de durcissement. Au bout d'environ 24h, le moule en silicone est prêt et peut être démoulé. La deuxième étape consiste à utiliser le moule pour réaliser les pièces en résine époxy. L'obtention d'un fond sinusoidal comprenant au moins deux longueurs d'onde a nécessité l'assemblage de trois pièces identiques. La réalisation de ces pièces est particulièrement pénible car elle nécessite de travailler sous hotte avec une blouse, des gants et un masque. La résine epoxy doit être mélangée avec un durcisseur. Une fois le mélange réalisé, il faut manipuler rapidement car la résine commence à durcir. Après avoir recouvert les bords du moule avec le mélange en utilisant un pinceau, on verse lentement le mélange dans le moule jusqu'à le remplir totalement puis on le laisse reposer plusieurs heures jusqu'à ce qu'il se solidifie totalement. La réalisation des pièces en résine époxy est plus difficile que la réalisation du moule car au cours de la solidification, il se crée des contraintes résiduelles qui peuvent déformer la pièce. La réalisation de ces pièces a donc demandé plusieurs essais préalables. Une fois les pièces réalisées, elles ont été alignées puis collées afin de former un fond sinusoidal.

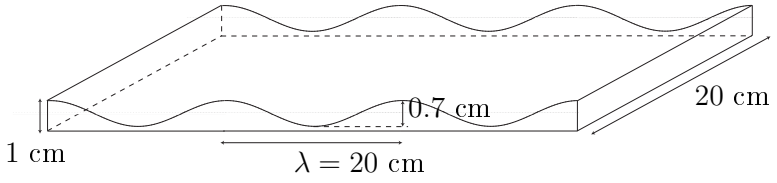


FIG. 2.5 – Schéma du fond sinusoïdal.

2.3 Techniques expérimentales

Au cours de cette étude, nous avons utilisé différentes techniques de mesure. L'étude bibliographique montre que la clef du mécanisme de formation des dunes se

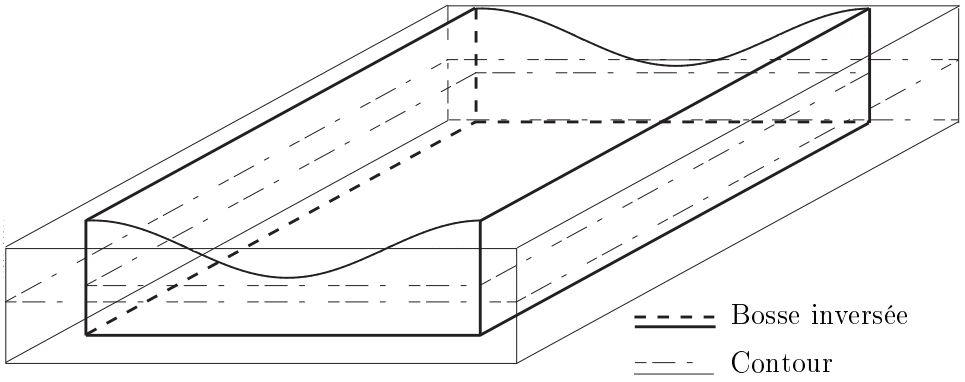


FIG. 2.6 – Contre-moule réalisé en plexiglas.

trouve dans un couplage entre l'écoulement de fluide et la forme du milieu granulaire. Afin d'essayer de comprendre ce couplage expérimentalement, il apparaît important d'obtenir des informations plus précises sur l'écoulement du fluide et sur l'évolution de la forme du milieu granulaire qui en découle. Nous avons donc choisi d'utiliser prioritairement deux techniques de mesure, une technique de *vélocimétrie à image de particules* (PIV) pour quantifier l'écoulement de fluide et une technique de *suivi de profil* pour mesurer l'évolution de la surface du lit de particules.

2.3.1 PIV

La connaissance de l'écoulement du fluide dans le canal est primordiale pour la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu. Dans ce but, nous utilisons une technique de suivi de particules, la vélocimétrie à image de particules (PIV). La PIV permet de mesurer le champs de vitesse d'un écoulement dans un plan. Le dispositif expérimental utilisé est relativement simple mais nécessite une mise en oeuvre délicate pour optimiser les réglages.

Principe

Un plan de l'écoulement, préalablement inséminé par des traceurs réagissant avec la longueur d'onde du laser, est éclairé par une tranche laser. Les traceurs vont s'illuminer en passant dans le plan délimité par la tranche laser. La caméra rapide située perpendiculairement au plan de la nappe prend des images à intervalle de temps régulier. En corrélant deux images consécutives, on peut remonter à la vitesse de l'écoulement dans le plan de la nappe laser.

Matériel et montage expérimental (figure 2.7).

Pour réaliser les mesures de PIV, nous utilisons un laser argon de la marque Ion Laser technology d'une puissance maximale de 400 mW, une lentille convexe permettant de créer une nappe laser, une caméra rapide pouvant acquérir jusqu'à 1000 images par seconde de la marque fastcam et un objectif micro (60mm, D 1 : 2.8) de la marque Nikon. Les traceurs utilisés sont des particules de très petites

dimensions (de l'ordre du micron) qui sont à base de Lycopodium. Cette poudre est vendue par la compagnie Lightning Powder sous le nom de redwop. Les traceurs sont mélangés avec le fluide dans le réservoir 1. Le laser, la lentille et la caméra rapide sont montés sur un banc de translation relié au bâti du canal. Grâce à ce banc de translation, il est possible de prendre des mesures à différents endroits dans la longueur du canal. Le laser n'étant pas très puissant, il est difficile d'obtenir une image correcte, les images prises par caméra rapide nécessitant une grande luminosité. Il est donc important d'optimiser le réglage de l'objectif de la caméra et le pourcentage de traceurs présents dans le fluide. Pour pouvoir travailler avec l'ouverture maximum de l'objectif et focaliser sur la nappe laser, la caméra est située perpendiculairement au plan de la nappe laser.

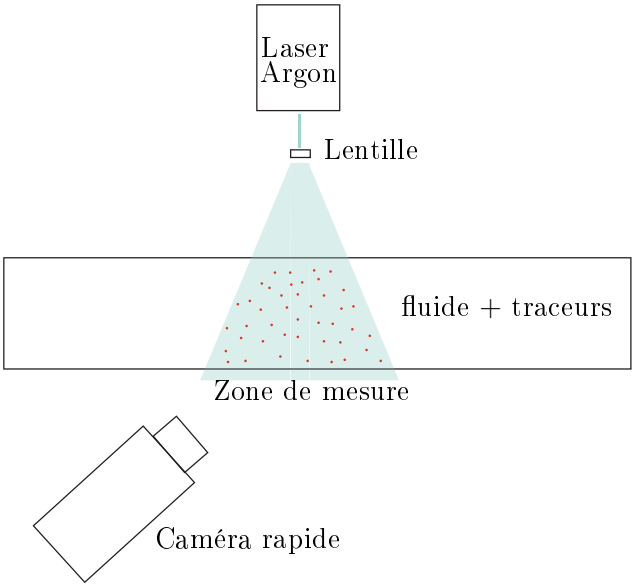


FIG. 2.7 – Montage PIV.

Traitement des images obtenues

Après utilisation de la caméra rapide, on obtient plusieurs images séparées par un intervalle de temps $\triangle t$. Les mesures de PIV s'effectuent toujours entre deux images (figure 2.8). A partir de deux images consécutives, il existe deux techniques principales pour remonter à la distance parcourue par un traceur durant $\triangle t$. La première méthode est basée sur une corrélation indirecte qui utilise la transformée de Fourier. La deuxième méthode est une méthode directe qui utilise le principe d'excursion.

Détermination de la zone d'interrogation

Avant d'opter pour l'une ou l'autre de ces méthodes, il faut commencer par délimiter la taille de la zone d'interrogation. En effet, la PIV est une méthode qui permet de mesurer le champs de vitesse d'un écoulement en différents points, chaque

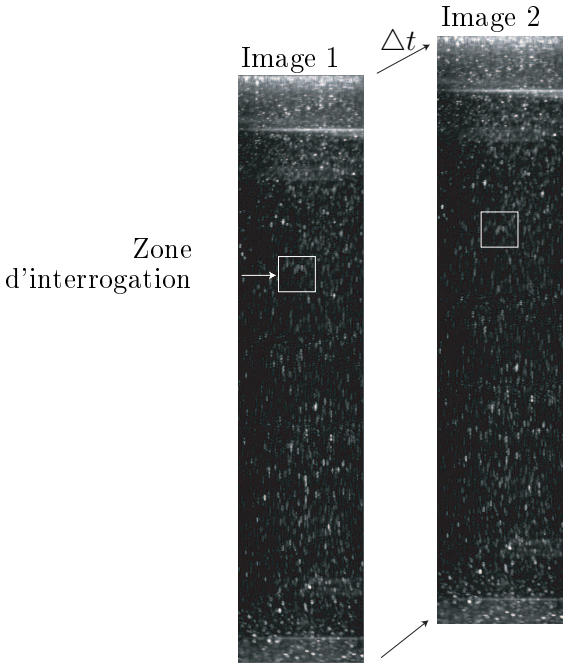


FIG. 2.8 – Deux images consécutives servant de base à la mesure de PIV.

point correspondant à une zone d'interrogation. Il est assez délicat de déterminer la zone d'interrogation sur laquelle on va travailler. Elle doit être assez grande pour contenir un nombre suffisant de traceurs tout en restant de taille raisonnable afin de minimiser les recouvrements. Plus une zone de mesure contient de traceurs et plus le résultat est précis. La taille de la zone d'interrogation est délimitée en pixels. Dans les programme de PIV de base, il s'agit d'une fenêtre carré. Une fois la taille de la zone d'interrogation fixée, il faut choisir le nombre de zones d'interrogation suivant x et y. De cette manière, on obtient une grille de mesure. Les mesures de PIV s'effectuent sur chaque zone d'interrogation. Il faut maintenant choisir une méthode pour mesurer le déplacement au sein de chaque zone d'interrogation.

Méthode indirecte

Il s'agit de la méthode que nous avons utilisée pour traiter les données. La méthode indirecte consiste à prendre les deux images entre lesquelles on veut réaliser la mesure et à réaliser une transformée de Fourier (FFT) de chacune de ces images. Ensuite, on calcule la transformée de Fourier inverse du conjugué de la transformée de Fourier de l'image 1 et de la transformée de Fourier de l'image $2FFT^{-1}(conj(FFT(Image1)) \times FFT(Image2))$. Une fois cette opération réalisée, on obtient une image donnant la corrélation. Cette image possède un pic d'intensité dont les coordonnées donnent directement accès à la valeur du déplacement.

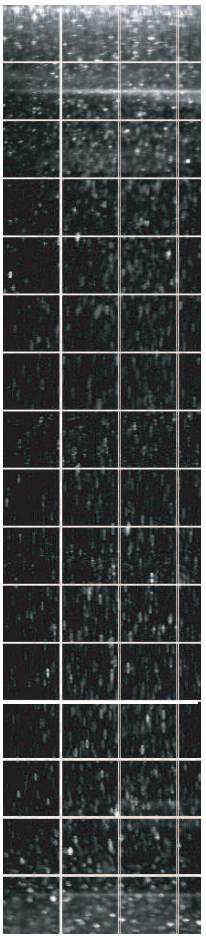


FIG. 2.9 – Image quadrillée en zone d'interrogation de 64 pixels×64 pixels.

Méthode directe

Dans cette méthode, il faut déterminer deux tailles de zone d'interrogation. La première zone d'interrogation comporte le motif de traceurs dont on veut suivre le déplacement tandis que la deuxième zone d'interrogation représente la zone dans laquelle on va déplacer la première zone afin de trouver un motif semblable.

Logiciel

Pour effectuer ces calculs, nous utilisons le logiciel DPIVsoft réalisé par P. Meunier, T. Leweke et R. Lebescond ($http://www.irphe.univ-mrs.fr/\ meunier$).

Validation de la technique de PIV

Pour valider le système de PIV, nous avons réalisé des mesures dans une configuration déjà connue, c'est-à-dire un écoulement de Poiseuille établi dans un tube vide pour un nombre de Reynolds de l'écoulement $Re_{pipe} = 26.2$. D'après Smith (1954) la longueur d'établissement L_e d'un écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique dépend du nombre de Reynolds suivant la relation,

$$L_e = 0.075 D Re_{pipe} \tag{2.6}$$

Pour le nombre de Reynolds considéré, la longueur d'établissement est de l'ordre de $L_e \approx 51\ cm$. La figure 2.10 montre les résultats obtenus pour une mesure de PIV sur la moitié haute du tube réalisée environ un mètre en aval de l'entrée du tube. Le profil complet obtenu en prenant les points symétriques pour la partie basse est représenté après adimensionnement par la vitesse moyenne et le diamètre du tube. Il correspond bien à un profil de Poiseuille développé.

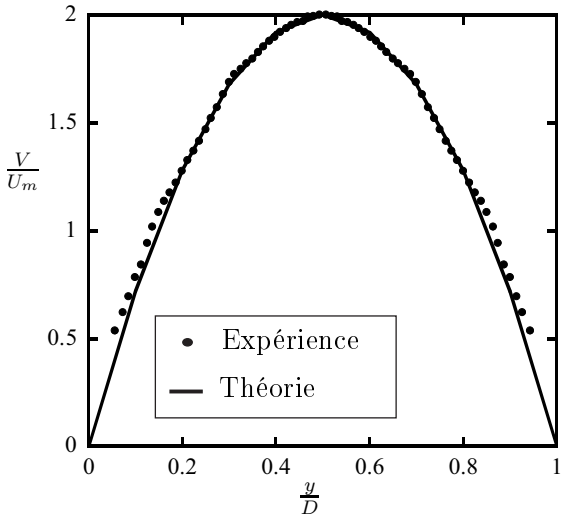


FIG. 2.10 – Profil de la vitesse du fluide adimensionnée par la vitesse moyenne en fonction de la hauteur adimensionnée par le diamètre du tube.

2.3.2 Suivi du profil des dunes

Afin de pouvoir suivre le profil du lit au cours du temps au centre du lit, nous utilisons une diode laser qui éclaire le lit avec une tranche laser (figure 2.11). Le lit est filmé à l'aide d'un caméscope légèrement incliné situé à environ 1 m de la zone de mesure. Le caméscope est piloté directement par ordinateur à l'aide du plugin *QT Capture* sous ImageJ. Le nombre d'images à prendre et l'intervalle de temps

entre ces images sont déterminés suivant les conditions de l'expérience. En jouant sur l'ouverture et le temps d'exposition, nous gardons uniquement le trait correspondant à l'intersection entre la tranche laser et le lit de particules sur les images filmées [figure 2.12 (a)]. Une fois l'expérience finie, les images sont traitées sous ImageJ où un seuillage est réalisé afin de garder uniquement la ligne représentant l'intersection entre la surface du lit et la nappe laser. Nous obtenons ainsi un film constitué de plusieurs images, représentant l'évolution de la surface supérieure du lit de particules [figure 2.12 (b)]. Ce film est ensuite traité sous Matlab où on détermine les maxima et les minima locaux du profil. En suivant au cours du temps l'évolution de ces maxima et minima, il est possible de remonter à l'évolution de la longueur d'onde, de l'amplitude et de la vitesse d'avancée du motif sédimentaire (ici des dunes). Afin de pouvoir suivre l'évolution des motifs sur un temps assez long, le caméscope est situé à distance du canal ($d \simeq 1.14$m), ce qui diminue la résolution verticale. L'amplitude des dunes étant largement inférieur à leur longueur d'onde, si les résultats obtenus ont une précision suffisante concernant la longueur d'onde, ce n'est pas le cas concernant l'amplitude des dunes.

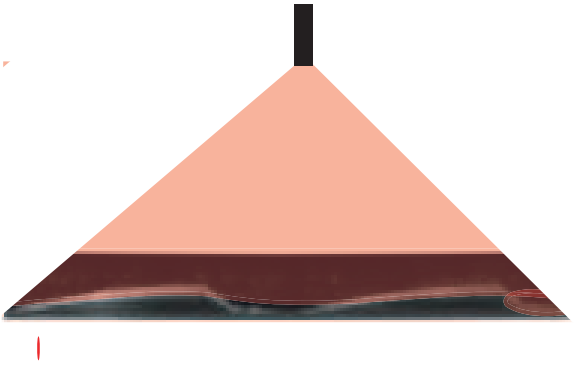


FIG. 2.11 – Montage expérimental pour réaliser des suivi de profil.

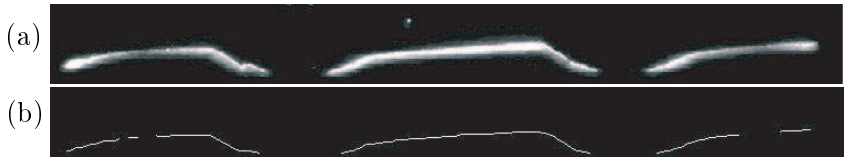


FIG. 2.12 – Profil des dunes (a) éclairées par le laser et (b) après traitement.

2.3.3 Mesure de la hauteur finale du lit de particules

Afin de pouvoir mesurer la hauteur finale des motifs, un caméscope est installé à proximité du tube ($d \simeq 10$cm). Ce caméscope est fixé sur un rail afin de pouvoir

mesurer avec une bonne précision la hauteur du lit de particules à différents endroits dans le tube.

2.3.4 Calibration

Toutes les images obtenues à partir des caméras, que ce soit la caméra rapide ou les caméscopes, sont codées en pixels. Il faut réaliser une calibration pour obtenir les valeurs réelles. Dans le cas du canal rectangulaire, l'image n'est pas déformée. Dans le cas du tube, il faut tenir compte de la déformation de l'image. Pour chaque zoom, nous avons introduit dans le canal une mire rigide de même hauteur que le tube. En prenant une photo de la mire avec la caméra, nous obtenons la transformation pixels/mm en fonction de la position verticale et horizontale.

2.4 Zoologie des dunes

Après avoir monté l'expérience et mis en place les différentes techniques de mesure, nous avons réalisé plusieurs expériences en faisant varier les paramètre expérimentaux afin de déterminer les différentes évolutions possibles d'un lit de particules soumis à un écoulement de fluide dans une conduite cylindrique. Nous avons déterminé l'existence de cinq régimes différents : particules immobiles, mise en mouvement du lit sans formation de dunes, formation de petites dunes en régime laminaire, apparition de dunes à vortex, apparition de dunes sinueuses. Chacun de ces régimes est décrit brièvement dans ce chapitre avant d'être détaillé dans la suite de ce manuscrit.

2.4.1 Paramètres expérimentaux

Nous avons vu dans le chapitre 1 qu'il existe plusieurs paramètres expérimentaux pouvant influencer l'évolution du milieu granulaire. On peut distinguer trois familles de paramètres, les paramètres liés aux caractéristiques du milieu granulaire, ceux liés aux caractéristiques du fluide et ceux liés à chaque expérience.
Concernant le milieu granulaire, les billes étant supposées sphériques et monodisperses, nous avons fait varier leur diamètre d et leur masse volumique ρ_p. Pour le fluide, nous avons fait varier la viscosité η et la masse volumique ρ_f.
Chaque expérience est caractérisée par le cisaillement du fluide au niveau de l'interface fluide/milieu granulaire. Cette grandeur dépend du débit de fluide, de la hauteur du milieu granulaire et de l'inclinaison de la conduite qui est ici imposée nulle. Comme nous travaillons dans une conduite cylindrique fermée de diamètre fixe $D = 3$ cm, la hauteur de fluide pur h_f et la hauteur du milieu granulaire h_p sont reliées par la relation $h_f = D - h_p$. Le cisaillement imposé par le fluide au niveau de l'interface fluide/milieu granulaire dépend donc uniquement du débit Q_{pipe} et de la hauteur du milieu granulaire h_p. Comme l'expérience n'est pas alimentée en milieu granulaire, h_p varie en fonction du temps quand le milieu granulaire est mis en mouvement. Afin de caractériser chaque expérience de manière unique, nous avons donc choisi de prendre comme paramètres expérimentaux, le débit de fluide Q_{pipe}, la hauteur initiale du lit de particules h_p^{start} et le diamètre du tube D. Chaque

Paramètres expérimentaux	ρ	l	η	Q_{pipe}	g
Dimensions physiques	ML^{-3}	L	$M(LT)^{-1}$	M^3T^{-1}	LT^{-2}

TAB. 2.6 – Paramètres physiques impliqués dans l'expérience.

expérience est donc définie par huit paramètres expérimentaux, ρ_f, ρ_p, d, η, Q_{pipe}, h_p^{start}, D et g la gravité. Certains de ces nombres correspondant à la même dimension physique, on peut définir des nombres caractéristiques sans dimension, tels que ρ_p/ρ_f ou dh_p^{start}/D^2. Pour déterminer les autres nombres caractéristiques, nous allons donc considérer une masse volumique $\rho = f(\rho_f, \rho_p)$ et une longueur $l = f(h_p^{start}, d, D)$. On peut construire un tableau contenant les différents paramètres expérimentaux et leurs dimensions physiques (table 2.6).

Il y a trois dimensions physiques impliquées dans ce problème, le temps T, la masse M et la distance L. Comme il y a cinq paramètres expérimentaux, on peut déduire du théorème de Pi que l'étude du transport de particules nécessite l'utilisation de deux nombres caractéristiques. Dans la littérature (chapitre 1), on utilise généralement le nombre de Reynolds défini à l'échelle de la particule ou à l'échelle de l'écoulement ainsi que le nombre de Shields. Dans notre configuration, afin de pouvoir définir un nombre de Reynolds de l'écoulement constant pendant chaque expérience, nous avons fait le choix de prendre comme longueur caractéristique le diamètre du tube vide,

$$Re_{pipe} = \frac{4\rho_f Q_{pipe}}{\pi\eta D}. \tag{2.7}$$

Nous définissons le Reynolds particulaire comme étant,

$$Re_p = Re_{pipe}\frac{d}{D} \tag{2.8}$$

et nous utiliserons le nombre de Shields

$$\theta = \frac{\tau^f}{\Delta\rho g d}, \tag{2.9}$$

où τ^f est la contrainte appliquée par le fluide sur le sommet du milieu granulaire. Une des difficultés expérimentales est de déterminer cette contrainte.

2.4.2 Différents régimes

Afin de réaliser une zoologie plus ou moins complète des différents régimes d'évolution du milieu granulaire, nous avons réalisé plusieurs expériences en faisant varier les différents paramètres expérimentaux. De cette manière, nous avons mis en évidence l'existence de cinq régimes d'évolutions différents représentés figure 2.13. Certains de ces régimes ont déjà été observés dans d'autres études expérimentales en écoulement de Couette [Mouilleron-Arnould (2002)] ou dans un écoulement plan [Langlois (2005)]. Le dernier régime découle spécifiquement de la configuration cylindrique de l'expérience.

Lit plat en mouvement

Petites dunes

Dunes à vortex

Dunes sinueuses

FIG. 2.13 – Différents régimes d'évolution du lit de particules (le régimes "particules immobiles" n'est pas représenté).

Pas d'évolution du lit

Ce régime correspond aux expériences pour lesquelles la forme du lit n'évolue pas. Il peut y avoir quelques mouvements sporadiques de particules qui se déplacent de quelques diamètres de grains avant de s'immobiliser. Pour comprendre ce régime, il faut se placer d'un point de vue géométrique. Considérons une particule sphérique soumise à un écoulement de fluide. Suivant son environnement géométrique, la particule pourra être mise en mouvement plus ou moins facilement. Par exemple, une bille posée sur un fond plat sera facilement mise en mouvement car seul le frottement à la paroi s'oppose à la force appliquée par l'écoulement sur la particule [figure 2.14 (a)]. Une particule posée sur un lit de particules de même diamètre dans une position instable [figure 2.14 (b)] va être mise en mouvement pour des débits très faibles et se déplacer sur le lit de particules jusqu'à ce qu'elle tombe dans un espace laissé entre des particules. Enfin dans le cas extrême où la particule est encadrée par d'autres particules [figure 2.14 (c)], il faut que toute la couche de particules soit mise en mouvement pour que la particule considérée puisse bouger. Entre ces configurations extrêmes, la mise en mouvement de la particule dépend de l'envi-

ronnement géométrique et du débit de fluide imposé. On peut donc avoir mise en mouvement de quelques particules sans avoir mise en mouvement de la surface du lit. Le mouvement de ces particules correspond à une réorganisation du lit, et le débit de particules diminue en fonction du temps jusqu'à s'annuler complètement. Le régime "pas d'évolution du lit" correspond donc à toutes les expériences pour lesquelles nous n'avons pas observé d'évolution macroscopique du lit.

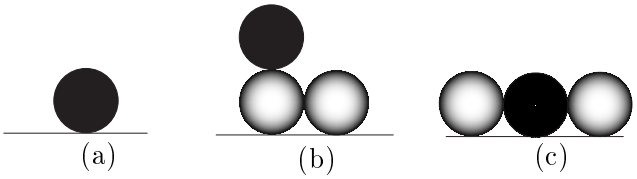


FIG. 2.14 – Différentes configurations possibles.

Les deux régimes suivants ont été observés pour des fluides possédant une viscosité supérieure à cinq fois la viscosité de l'eau.

Lit de particules en mouvement sans formation de structure

Ce régime appelé "lit de particules en mouvement" est caractérisé par un lit de particules dont les couches supérieures sont en mouvement. Au début de l'expérience, le lit est à peu prés plat. Sous l'action de l'écoulement la surface supérieure du lit de particules entre en mouvement sur toute la longueur du lit. Au cours de l'expérience, des particules sortent du tube et sont récupérées dans un tamis. Comme le lit n'est pas alimenté en particules, la quantité de particules dans le lit diminue entraînant une diminution de la hauteur moyenne du lit. La diminution de hauteur s'initie à l'entrée du tube, puis se propage progressivement le long du tube, entraînant une inclinaison de la surface supérieure du lit. À une hauteur donnée, les particules s'immobilisent et le lit arrête de diminuer. L'expérience est considérée comme finie quand la totalité du lit s'est immobilisée. L'état final de ce régime correspond donc à un lit plat de hauteur inférieure à la hauteur initiale. Une expérience de ce type dure en moyenne entre deux jours et une semaine.

Petites dunes

Ce régime est caractérisé par l'apparition de dunes de faible amplitude sur la surface du lit. La figure 2.15 montre l'évolution typique de la surface du lit à différents instants de l'expérience. Il s'agit d'une expérience réalisée avec des billes de verre (tableau 2.1 A). À l'état initial, t=0, le lit est plat. Une fois l'expérience lancée, on peut observer la formation de petites dunes sur la surface du lit. Ces dunes avancent en gardant une amplitude relativement constante alors que leur longueur d'onde augmente lentement. Au bout d'un certain temps, toutes les dunes sortent du tube. Il reste donc un lit plat dont la surface supérieure continue légèrement à avancer avant de s'immobiliser.

Enfin, les deux derniers régimes ont été observés en utilisant des fluides ayant une viscosité de l'ordre de celle de l'eau.

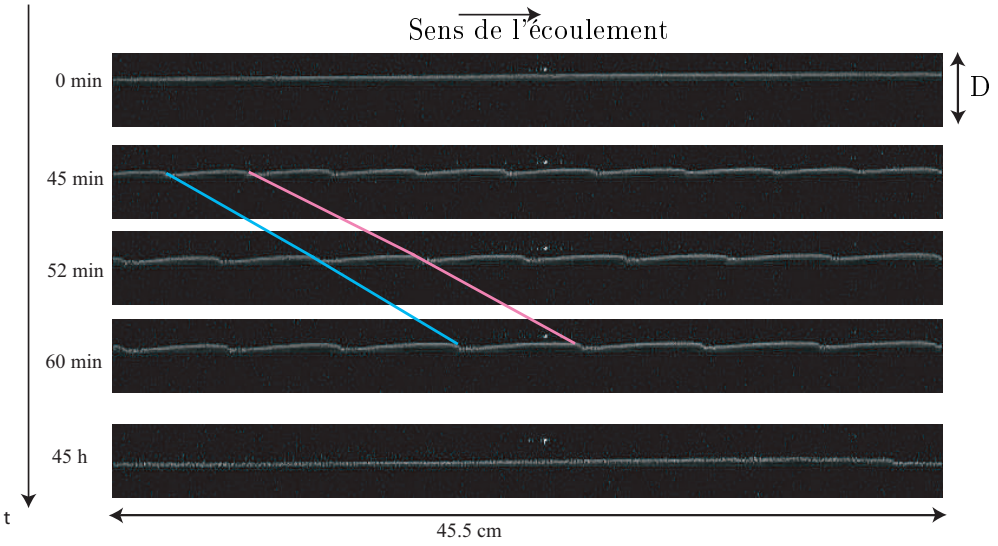


FIG. 2.15 – Petites dunes

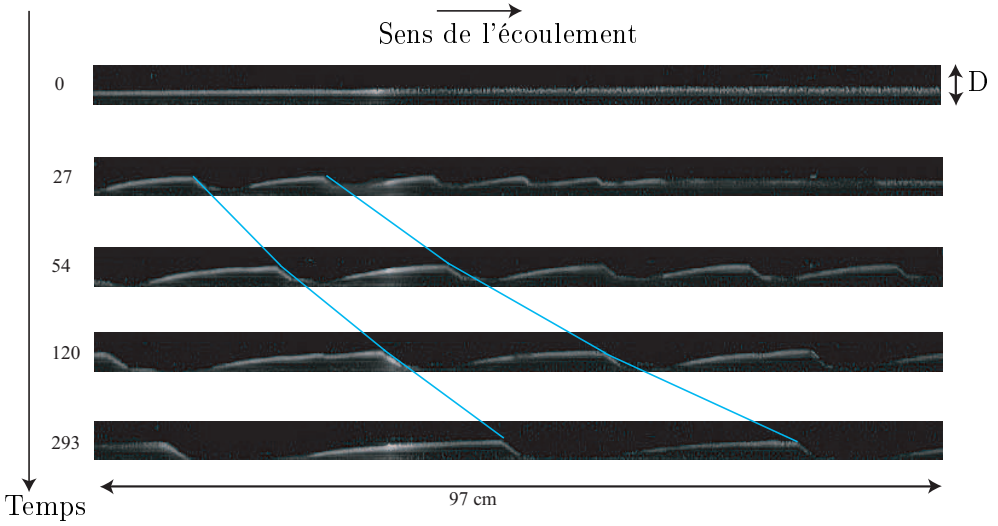


FIG. 2.16 – Dunes à vortex

Dunes à vortex

Ce régime est caractérisé par l'apparition de dunes de fortes amplitudes. Ces dunes sont formées de proche en proche par la propagation de la perturbation due à l'entrée et se propagent dans le sens de l'écoulement. La figure 2.16 montre l'évolution typique de ce régime en fonction du temps. Il existe une zone de recirculation en aval des dunes qui creuse le milieu granulaire jusqu'à séparer les dunes. Cette zone de recirculation est le moteur principal du mouvement des dunes. La figure 2.17 montre des dunes à vortex vues de dessus. On peut remarquer la présence de deux zones sans milieu granulaire. Ces zones sont situés en aval de la dune symétriquement de part et d'autre du tube en verre et correspondent à l'emplacement des zones de recirculation. Au cours du temps, la longueur d'onde et l'amplitude des dunes augmentent tandis que les dunes se séparent de plus en plus. Parallèlement, la vitesse d'avancée des dunes diminue jusqu'à ce qu'elles s'immobilisent complètement. À ce stade il n'y a plus aucun mouvement du milieu granulaire.

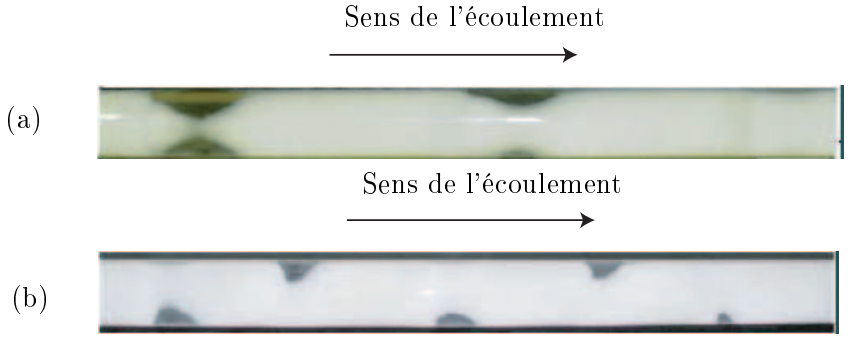


FIG. 2.17 – Vue de dessus (a) des dunes à vortex et (b) des dunes sinueuses.

Dunes sinueuses

Ces dunes sont caractérisées par une double longueur d'onde. Cette forme particulière semble due à un déplacement des zones de recirculation. Sur la figure 2.17 représentant des dunes sinueuses vues de dessus, on peut observer que les zones de recirculation se sont séparées. En aval de chaque dune, il y a une unique zone de recirculation dont la position de part et d'autre du tube alterne d'une dune à l'autre.

2.4.3 Zone d'existence de ces différents régimes

Le but de l'étude qui va suivre est de déterminer les zones d'existence de ces différents régimes. Expérimentalement, les critères liés au fluide influant sur l'existence de ces régimes semblent être la viscosité du fluide et le débit de l'écoulement. Pour donner une idée qualitative de la zone d'existence de ces régimes, nous avons représenté sur la figure 2.18 les régimes observés en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulemznt, Re_{pipe}, pour les différents types de particules. Pour des billes de verre, on peut observer que deux régimes différents peuvent coexister pour une

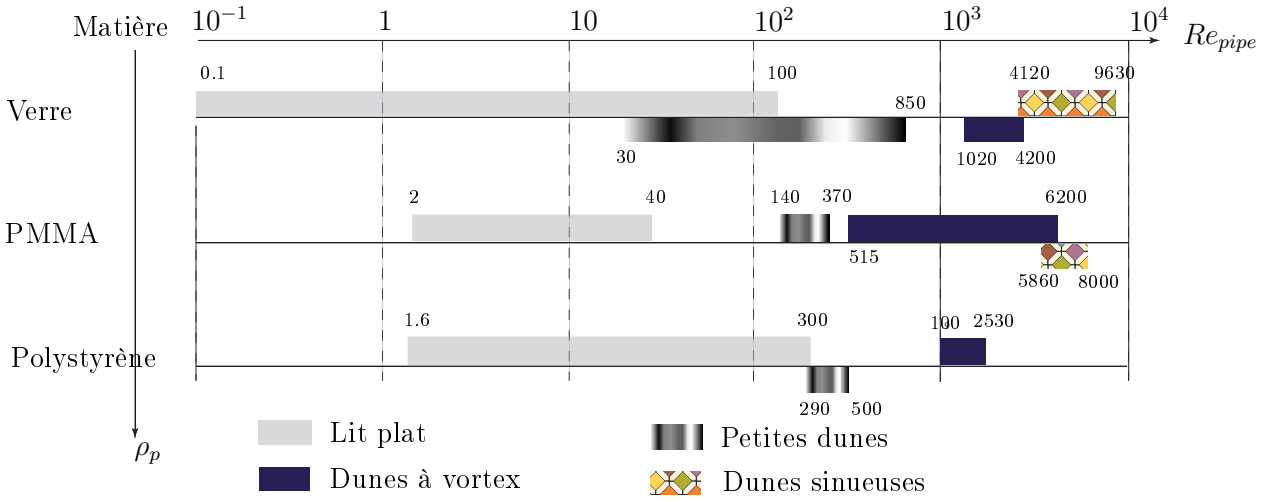


FIG. 2.18 – Zones d'existences des différents régimes.

même gamme de nombre de Reynolds. Si on compare les différentes courbes entre elles, on voit que les frontières entre les différents régimes varient suivant les types de billes. Les zones d'existence semblent donc dépendre également des paramètres expérimentaux liés aux particules.

Afin de tenter de comprendre les conditions nécessaires au développement de ces différents régimes, nous allons dans la suite consacrer une partie à l'étude de quatre de ces régimes et à leur domaine d'existence.

Chapitre 3

Seuil de mise en mouvement

Les expériences réalisées au cours de cette thèse montrent que pour des faibles débits, il existe des conditions expérimentales pour lesquelles la surface du lit n'évolue pas au cours du temps.Dans les mêmes conditions expérimentales, mais pour des débits de fluide plus élevés, les particules sont mises en mouvement et la surface du lit évolue. Les expériences effectuées confirment donc l'existence d'un seuil de mise en mouvement des particules. Ce seuil de mise en mouvement est décrit en terme de nombre de Shields critique θ^c depuis les travaux de Shields en 1936. De nombreux auteurs ont essayé de déterminer expérimentalement la valeur du nombre de Shields critique. Suivant les caractéristiques de l'écoulement, il existe une grande dispersion des valeurs expérimentales obtenues, mais la tendance générale décrit un nombre de Shields critique variant en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement. Dans ce chapitre, nous présentons une méthode expérimentale reproductible permettant de déterminer le seuil de mise en mouvement de particules soumises à un écoulement laminaire dans un tube. Cette méthode expérimentale nous a permis de montrer que le seuil de mise en mouvement correspond à un nombre de Shields critique constant $\theta^c = 0.12 \pm 0.03$ sur une large gamme de Reynolds particulaires ($1.5\ 10^{-5} \leq Re_p \leq< 0.76$).

3.1 Signification du seuil de mise en mouvement

L'étude bibliographique montre qu'expérimentalement, il est possible de déterminer deux seuils de mise en mouvement différents. Au dessus du premier seuil, il y a mouvement transitoire de quelques billes. Le deuxième seuil est atteint quand le débit de particules devient stationnaire. Le premier seuil dépend de l'état de compaction initial du lit, alors que le deuxième seuil semble indépendant de cet état initial. Pour mieux appréhender cette notion de seuil de mise en mouvement, il faut considèrer une configuration simplifiée à deux dimensions (figure 3.1). Une particule repose sur un lit de particules identiques et est soumise à un écoulement laminaire de fluide. Un bilan des forces appliquées sur cette particule permet de déterminer sa condition de mise en mouvement. Dans sa position d'équilibre la particule est en contact avec les deux particules sur lesquelles elle repose. Elle est soumise à quatre forces,

– son poids apparent, $\vec{P_m}$,

– la force de traînée due au fluide, $\vec{F_T}$,
– la force de contact avec la particule 1, $\vec{N_1}$,
– la force de contact avec la particule 2, $\vec{N_2}$.

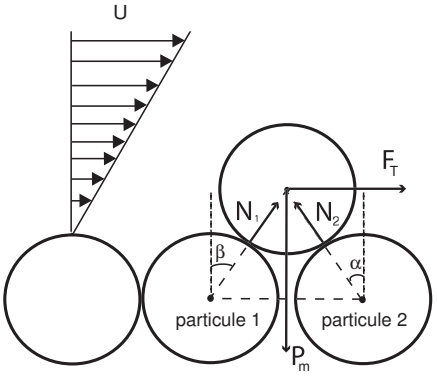


FIG. 3.1 – Bilan des forces appliquées sur une particule posée sur un lit de particules et soumise à un écoulement visqueux.

A l'équilibre, on obtient après projection,

$$0 = F_T + N_1 \sin(\beta) - N_2 \sin(\alpha)$$
$$0 = -P_m + N_1 \cos(\beta) - N_2 \cos(\alpha),$$

où les angles β et α sont définis figure 3.1. Pour qu'il y ait mise en mouvement, il faut que la particule quitte son état d'équilibre initial. Cette action se traduit par la perte de contact entre la particule considérée et la particule 1 ($N_1 = 0$) et peut être exprimée par,

$$F_T = P_m \tan(\alpha). \tag{3.1}$$

Le poids apparent de la bille est défini par, $P_m = \frac{\pi d^3}{6}\Delta\rho g$ où $\Delta\rho = \rho_p - \rho_f$. Pour déterminer F_T, on suppose que l'écoulement est laminaire et que la force de traînée s'applique uniquement sur la moitié supérieure de la bille.

La force de traînée appliquée sur une demi bille en coordonnées sphériques est donnée par,

$$F_T = 2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} \left(p\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \tau^f\right) r^2 sin(\theta) d\varphi = d^2\tau^f\pi,$$

où p et τ^f sont respectivement la pression et la contrainte appliquée par le fluide sur la bille. On peut donc déduire de l'équation (3.1) la contrainte critique de mise en mouvement de la particule,

$$\tau^{fc} = \frac{d}{6}\Delta\rho g \tan(\alpha). \tag{3.2}$$

Ce petit modèle géométrique permet d'obtenir une approximation du nombre de Shield critique,

$$\theta^c = \frac{\tau^{fc}}{\Delta\rho g d} \sim \frac{1}{6}\tan(\alpha).$$

Les valeurs typiques de α sont de l'ordre de 30° ce qui donne $\theta^c \sim 0.1$. Expérimentalement, la valeur de θ^c varie suivant la définition du seuil de mise en mouvement. On peut trouver des valeurs s'échelonnant entre 0.05 et 0.3. Cette approche basée sur un modèle géométrique simple est utilisée entre autres par Vanoni (1966) pour déterminer la contrainte critique. Il montre qu'elle dépend de l'angle de repos du sédiment et du rapport a_1/a_2 où a_1 correspond à la distance entre le centre de gravité de la particule et son point d'appui B et a_2 à la distance entre le point d'application de la force de traînée du fluide et le point B. L'influence de la pression dans la force appliquée par le fluide sur la particule varie suivant la nature de l'écoulement, ce qui entraîne une variation de la valeur du rapport a_1/a_2. Pour un écoulement turbulent, l'effet de la pression est prédominant et $a_1 \approx a_2$. Quand les effets visqueux deviennent important, alors $a_2 < a_1$. Cet effet peut expliquer en partie pourquoi le nombre de Shields critique mesuré pour un écoulement turbulent est inférieur au nombre de Shields critique obtenu en laminaire. Dans la suite, nous nous focaliserons uniquement sur le seuil de mise en mouvement dans un écoulement laminaire.

3.2 Seuil d'arrêt de mouvement

Dans le chapitre précédent, nous avons défini les cinq différents régimes observés dans le tube. Dans le régime "pas de mouvement", il peut y avoir mouvement de quelques particules correspondant à une réorganisation du lit de particules. Cette réorganisation n'entraîne pas de modification significative de la surface et de la forme du lit. Le premier seuil décrit dans la littérature [Charru *et al.* (2004)] semble donc être compris dans ce régime. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons plutôt au deuxième seuil décrit par Charru *et al.* (2004). Ce seuil correspond à la limite pour laquelle il y a mouvement stationnaire du lit.

Dans la suite de cette étude, nous considérerons donc uniquement les expériences appartenant aux régimes "lit plat en mouvement", "petites dunes" et "dunes à vortex". Aux cours de ces expériences, le milieu granulaire évolue jusqu'à atteindre un état stationnaire dans lequel les particules sont immobiles. Cet état peut exister sous trois configurations différentes :

- lit plat immobile,
- dunes immobiles,
- tube vide.

Dans le dernier cas, le fluide a érodé tout le milieu granulaire, vidant totalement le tube. Cette évolution nécessite que le nombre de Shields appliqué sur l'avant dernière couche de bille soit supérieur au nombre de Shields critique. À part une majoration, ce type d'expérience ne peut donc pas fournir beaucoup d'informations sur le nombre de Shields critique. Les deux premières configurations sont beaucoup plus instructives car elles impliquent que pour un débit de fluide constant, le milieu granulaire a évolué jusqu'à atteindre un état pour lequel la contrainte fluide appliquée à la surface du lit est inférieure à la contrainte critique. Les particules étant en mouvement avant de s'arrêter, on peut supposer que la contrainte appliquée par le

fluide à la surface du lit de particules correspond à la contrainte critique d'arrêt de mouvement. À ce stade, il se pose différentes interrogations :

- Est-ce que la contrainte critique d'arrêt de mouvement correspond à la contrainte critique de mise en mouvement ?
- Comment peut-on estimer cette contrainte critique ?
- Est-ce que le seuil d'arrêt de mouvement correspond à une contrainte critique constante pour un type de particules et de fluide ?
- Est-ce qu'on peut décrire le seuil d'arrêt de mouvement par un nombre de Shields critique et si oui dans qu'elle gamme de nombre de Reynolds ?

Dans la suite, nous donnerons des éléments de réponses aux deux premières questions, les réponses complètes étant décrites dans l'article "*Determination of the critical Shields number for particle erosion in laminar flow*" qui est publié dans "Physics of Fluids" (section 3.3).

3.2.1 Correspondance entre le seuil d'arrêt de mouvement et le seuil de mise en mouvement

Pour des conditions expérimentales fixées, on peut déterminer la hauteur finale critique du lit correspondant au seuil d'arrêt de mouvement. La question est de savoir si ce seuil d'arrêt de mouvement correspond au seuil de mise en mouvement ou s'il existe une hystéresis entre l'arrêt et la mise en mouvement. Pour des particules et un fluide fixés, les seuls paramètres variables sont le débit et la hauteur initiale du milieu granulaire. Le seuil d'arrêt de mouvement correspond donc à un débit et une hauteur finale donnés. Si le seuil d'arrêt de mouvement correspond bien au seuil de mise en mouvement, on devrait pouvoir remettre les particules en mouvement en faisant légèrement varier l'un de ces deux paramètres. Pour répondre à cette question, nous avons laissé évoluer une expérience jusqu'à son état final avant de légérement modifier le débit de fluide ou la hauteur du milieu granulaire de manière indépendante.
Si on augmente légèrement le débit de fluide imposé à une expérience ayant atteint son état final, on observe bien une remise en mouvement des particules situées à la surface du lit.
La figure 3.2 montre l'évolution de la hauteur finale maximale du lit h_p^{end}/D en fonction de la hauteur initiale h_p^{start} pour un débit donné. On peut noter que pour des hauteurs initiales inférieures à une hauteur critique h_p^c ($h_p^c/D = 0.5$ sur la figure 3.2), $h_p^{end}/D = h_p^{start}/D$. Il n'y a pas eu d'évolution de la surface du lit et le seuil de mise en mouvement n'a pas été atteint. Pour des hauteurs initiales supérieures à cette hauteur critique, il y a évolution de la surface supérieure, le seuil de mise en mouvement est dépassé et l'état final correspond à $h_p^{end} = h_p^c$ indépendamment de la hauteur initiale. On peut en déduire que le seuil d'arrêt de mouvement semble bien correspondre au seuil de mise en mouvement.

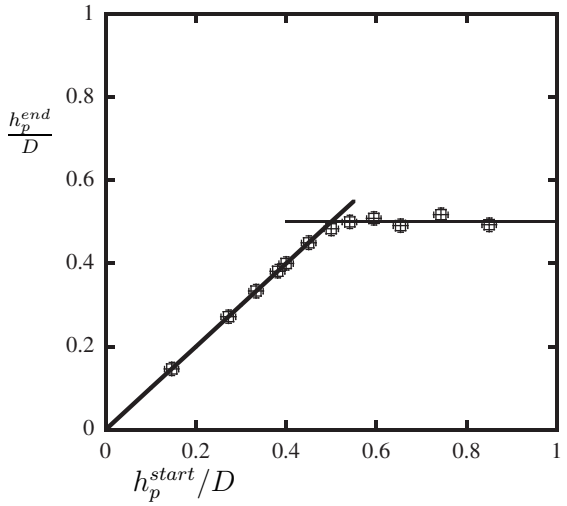


FIG. 3.2 – Évolution de h_p^{end} en fonction de h_p^{start} pour un débit fixé $Q_{pipe} = (2.77 \pm 0.09)10^{-5}\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ pour des billes de type B dans le fluide 2.

3.2.2 Dépendance de la contrainte du fluide appliquée à la surface du milieu granulaire

Dans un écoulement laminaire, la contrainte de cisaillement visqueuse du fluide est définie par,

$$\tau^f = \eta\dot{\gamma}, \tag{3.3}$$

où $\dot{\gamma}$ est le cisaillement du fluide. En milieu confiné, le cisaillement du fluide dépend du débit de fluide et de la hauteur de fluide h_f. La figure 3.3 décrit, dans le cas d'un écoulement de Poiseuille plan sur un fond solide, la relation existant entre $\dot{\gamma}$, le débit de fluide Q_{2D} et l'épaisseur du fond solide h_p. Il parait raisonnable de supposer que dans notre configuration tridimensionnelle correspondant à un tube tronqué, on garde une dépendance similaire entre $\dot{\gamma}$, le débit de fluide Q_{pipe} et h_p.
Les expériences étant réalisées à débit de fluide constant, la contrainte fluide varie localement en fonction de la hauteur du milieu granulaire au cours d'une expérience donnée. Dans les expériences réalisées, la hauteur maximale moyenne du lit h_p varie en fonction du temps. Elle peut connaître diverse évolutions, mais elle finit toujours par décroître jusqu'à atteindre la hauteur finale h_p^{end} pour laquelle les particules sont immobiles. Quand il n'y a pas formation de dunes, h_p correspond à la hauteur moyenne du lit. Dans les cas où des dunes se sont formées, h_p correspond à la moyenne des hauteurs des sommets des dunes présentes dans la conduite (la hauteur du sommet est relativement constante d'une dune à l'autre). À titre d'illustration, la figure 3.4 montre l'évolution de h_p pour un lit plat (a) et pour des dunes à vortex (b). Dans ces deux configurations, on observe bien une décroissance de h_p.

La contrainte visqueuse varie avec l'inverse de la hauteur du fluide $h_f = (D - h_p)$ et proportionnellement avec le débit. La figure 3.5 montre l'évolution de h_p^{end} en fonction du débit fluide. On peut noter que la hauteur finale diminue quand Q_{pipe} augmente. Cette variation est tout à fait compatible avec l'idée que que pour un type de bille donné, l'arrêt de mouvement s'effectue pour une contrainte fluide critique

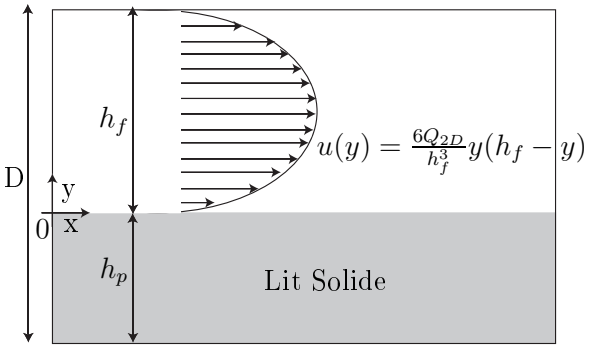


FIG. 3.3 – Écoulement de Poisuille à 2 dimensions.

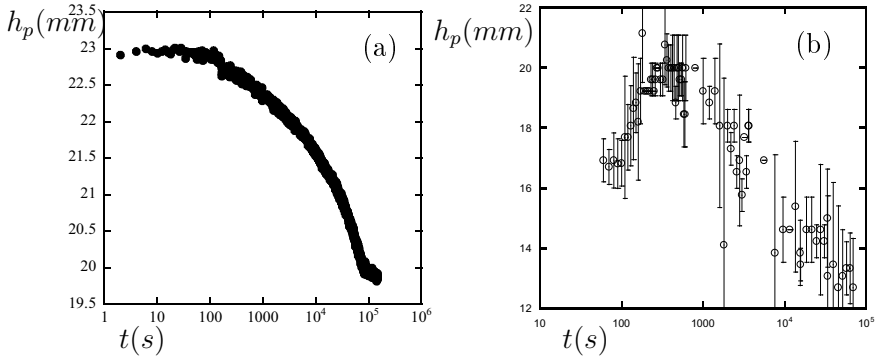


FIG. 3.4 – Évolution de h_p en fonction du temps (a) pour $Q_{pipe} = (7.97 \pm 0.09)10^{-7}\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ pour des billes de type B dans le fluide 3 et (b) pour $Q_{pipe} = (4.01 \pm 0.09)10^{-5}\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ pour des billes de type D dans le fluide 1.

constante.

Le seuil d'arrêt de mouvement semble bien correspondre au seuil de mise en mouvement des particules. Étudier le seuil d'arrêt du mouvement devrait donc nous permettre de caractériser le seuil de mise en mouvement des particules. Les pistes abordées dans le début de ce chapitre laissent penser que pour des conditions expérimentales fixés (fluide et particules), le seuil d'arrêt de mouvement correspond à une contrainte fluide constante qui dépend uniquement de la hauteur du milieu granulaire et du débit de fluide. Ce point a été vérifié et est décrit dans l'article qui suit.

3.3 Copie de la lettre

Cette lettre a pour objectif la caractérisation du seuil de mise en mouvement d'un lit de particules soumis à un écoulement laminaire confiné.
Une erreur typographique s'est glissée à la ligne 11 de la page 3, il faut lire : "Note this new number is in fact $\theta^c Ga$ in the viscous regime."

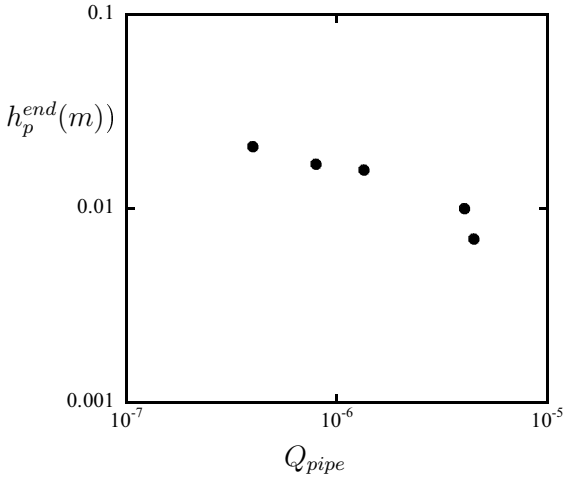


FIG. 3.5 – Evolution de h_p^{end} en fonction du débit de fluide Q_{pipe} pour des billes de type B dans le fluide 3.

Determination of the critical Shields number for particle erosion in laminar flow

Malika Ouriemi, Pascale Aussillous, and Marc Medale
IUSTI-CNRS UMR 6595, Polytech'Marseille, Technopôle de Château-Gombert, 13453 Marseille Cedex 13, France

Yannick Peysson
Institut Français du Pétrole, 1-4 avenue de Bois-Préau, 92852 Rueil-Malmaison Cedex, France

Élisabeth Guazzelli
IUSTI-CNRS UMR 6595, Polytech'Marseille, Technopôle de Château-Gombert, 13453 Marseille Cedex 13, France

(Received 20 February 2007; accepted 8 May 2007; published online 28 June 2007)

We present reproducible experimental measurements for the onset of grain motion in laminar flow and find a constant critical Shields number for particle erosion, i.e., $\theta^c = 0.12 \pm 0.03$, over a large range of small particle Reynolds number: $1.5 \times 10^{-5} \leqslant \mathrm{Re}_p \leqslant 0.76$. Comparison with previous studies found in the literature is provided. © *2007 American Institute of Physics*.
[DOI: 10.1063/1.2747677]

Erosion of particles by shearing flows commonly occurs in a wide variety of natural phenomena, such as sediment transport or dune formation, and of industrial processes, such as hydrate or sand issues in oil production and granular flow in food or pharmaceutical industries. The traditional way of representing the incipient motion of the grains is to use the Shields curve, which relates the dimensionless critical shear stress to the Reynolds number of the flow.[1,2] This dimensionless critical shear stress, also called the Shields number, is constructed as the ratio between the shear stress at the top of the particle bed and the apparent weight of a single particle.

Most of the data are available in the turbulent regime and present large scatters due to systematic methodological biases of incipient motion of the bed.[1–4] Values determined from bedload transport rate are usually larger than those deduced from visual observation of the grain motion. The discrepancy between the experiments may also be due to differences between the initial state of the bed as erosion and deposition are very sensitive to bed packing conditions.[5] The presumably simpler case of laminar flow suffers from the same difficulty.[6–9] The scatter of the data is also due to the multiple possible definition for incipient motion. The objective of this work is to provide a robust and reproducible experimental measurement for the onset of grain motion in laminar flow and infer the critical Shields number for particle erosion.

Four different batches of spheres [polystyrene particles supplied by Maxi-Blast, polymethylmethacrylate (PMMA) particles by Lehmann & Voss & Co., and glass particles by Potters-Ballotini] were used to perform the experiments. The particle size distributions were measured with a digital imaging system. The particle diameter distributions were observed to be approximately Gaussian for all the different batches and were therefore well represented by a mean diameter d indicated in Table I (the error corresponds to one standard deviation). The particle density ρ_p (also listed in Table I) was determined using a pycnometer. Experiments were carried out using four different mixtures of distilled water and UCON oil 75H-90000 supplied by Chempoint. The viscosity η and the density ρ_f of these different mixtures are listed in Table II.

The experimental test section was a horizontal glass tube of length $L = 1.8$ m and inner diameter $D = 3$ cm. First, the tube was filled with fluid and the particles were carefully introduced to build an uniform flat bed. Second, a constant flow rate was imposed. The pipe flow was driven by gravity using continuous overflow from an overhead tank, the elevation of which was varied. At the outlet from the test section, the particles were captured by a mesh while the fluid was run into a thermostated fluid reservoir. From this lower reservoir, the fluid was continuously returned to the overflowing reservoir by a pump. This arrangement isolated the test section from the pump and insured a constant temperature T across the whole experimental loop. Note that the captured particles were not re-injected into the test section.

For a given flow rate and combination of fluid and particles, the initial height of the bed h_p^{start} was varied to fill up 15% to 85% of the tube diameter D. The evolution of the bed height was then recorded as a function of time. The bed was illuminated by a laser sheet positioned perpendicularly to its surface and aligned with the tube length in its middle. The illuminated upper layer of particles intersecting the sheet was imaged by a digital camera. The images were then analyzed (with ImageJ available at http://rsb.info.nih.gov/ij/) to yield the position of the fluid-particle interface. Each image was thresholded to turn this interface into a white curve that was further eroded to a single-pixel-thick curve. After calibration, this provides a precise measurement of the fluid-particle interface with an accuracy of 0.8 mm. In order to perform the calibration, a grid was inserted into the tube filled with pure fluid. An image of this grid was then recorded under the same optical conditions used in interface-position measure-

 © 2007 American Institute of Physics

Downloaded 03 Jul 2007 to 147.94.96.134. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

TABLE I. Particle characteristics.

Batch	Composition	d (μm)	ρ_p (g/cm^3)
A (○)	Glass	132±22	2.490±0.003
B (□)	Polystyrene	538±24	1.051±0.002
C (△)	PMMA	132±20	1.177±0.002
D (◇)	PMMA	193±30	1.177±0.002

ments and the coordinates of its points were measured. The flow rate Q_{pipe} was measured with a flowmeter with an accuracy of 3.2%.

One can explore the threshold of motion by gradually increasing the flow rate until a single particle is entrained by the flow. This threshold strongly depends on the way the bed is prepared. When increasing the flow rate above this first threshold and until a second threshold is reached, the particle flux decreases and eventually vanishes with time due to the rearrangement of the particles near the bed surface. Above this second threshold, the particle flux reaches a nonzero saturated value. This saturated threshold is expected to be independent of the initial preparation of the bed.[8] These two thresholds are observed in the present experiments but the value of the second threshold is not easy to capture as one needs to measure the particle flux and checks that it is indeed saturated. Here, we choose instead to characterize this second threshold through the cessation of motion. We check that this threshold corresponds indeed to the threshold of incipient motion as, by increasing the flow rate by a small amount, particles are set again in motion.

For small initial height, the bed height is not observed to change in time although rearrangement of particles can occur. The final bed height h_p^{end} is then equal to h_p^{start}, as can be seen in Fig. 1. Above a critical initial height $h_p^{\text{start}} \geqslant h_p^c$ ($h_p^c = 0.5D$ in Fig. 1), the bed shape evolves and can either becomes slightly tilted or forms dunes moving downward. Since the test section is not fed in with particles and that a layer of particles is carried downward, the total amount of particles decreases with time. When the experiment is run for a long enough time (from two days to two weeks), the bed shape eventually freezes, exhibiting either a flat surface or dunes of uniform amplitude, as there is no particle motion and the bed compaction has reached a final state on its own. In other words, the onset for cessation of motion has been reached. The final maximum height of the bed is found to be constant, $h_p^{\text{end}} = h_p^c$, for $h_p^{\text{start}} \geqslant h_p^c$, as observed in Fig. 1. The shear stress applied at the top of the bed surface is related to the bed height and the flow rate. As for a given flow rate the final height is a constant, the onset for cessation of motion corresponds to a constant critical shear stress.

TABLE II. Fluid characteristics.

Fluid	%UCON	T (°C)	η (cP)	ρ_f (g/cm^3)
1	0	20	1.00±0.05	1.004±0.001
2	0	35	0.70±0.04	0.999±0.001
3	12	35	8.8±0.4	1.023±0.001
4	20	35	40±2	1.040±0.001

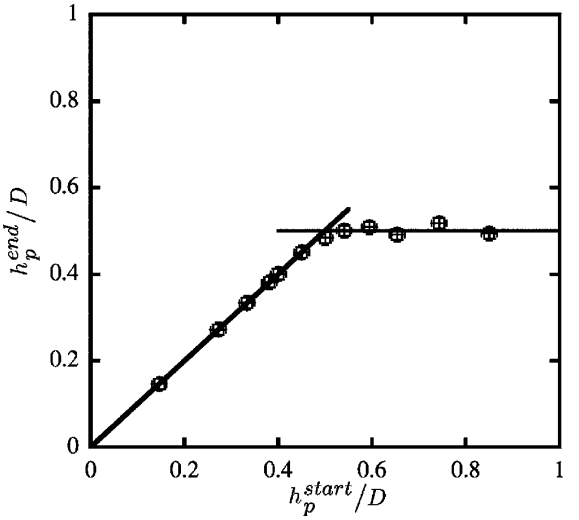


FIG. 1. Normalized final height of the bed h_p^{end}/D vs normalized initial height of the bed h_p^{start}/D for particles of batch B in fluid 2 at a flow rate of $Q_{\text{pipe}} = (2.77 \pm 0.09) \times 10^{-5}$ m^3/s. The solid lines represent the slope one (left) and the constant h_p^c (right).

Figure 2 shows h_p^c/D versus the dimensionless flow rate, i.e., the pipe Reynolds number $\text{Re}_{\text{pipe}} = 4\rho_f Q_{\text{pipe}}/\pi\eta D$, for different combinations of fluid and particles. For each curve, as the flow rate is increased, h_p^c/D is seen to diminish. This behavior is again consistent with the idea of a constant critical shear stress for the onset for cessation of motion. Particles of batch A have been used in two different fluids where the viscosity was varied by a factor of 4. For a given non-

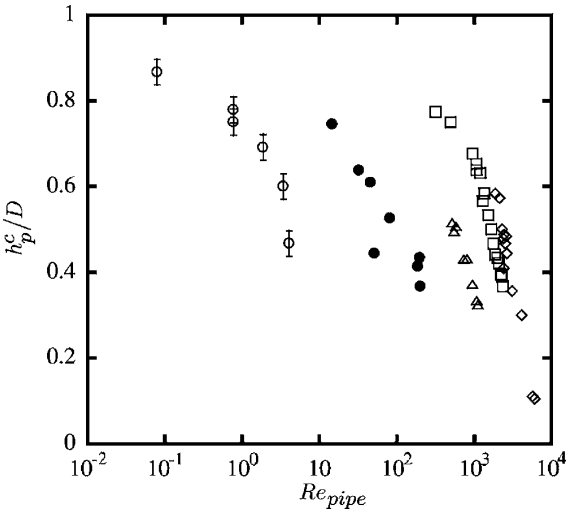


FIG. 2. Normalized critical height of the bed h_p^c/D vs Reynolds number Re_{pipe} for batch A in fluid 3 (●), for batch A in fluid 4 (○), for batch B in fluid 2 (□), for batch C in fluid 1 (△), and for batch D in fluid 2 (◇). The error bars are only indicated for batch A in fluid 4 (○). Note that the horizontal error bar is smaller than the size of the symbol.

Downloaded 03 Jul 2007 to 147.94.96.134. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

normalized flow rate Q_{pipe}, the final height is found to be smaller for the larger viscosity. Again, this behavior could be related to the existence of a constant viscous critical shear stress. When Q_{pipe} is normalized (see Fig. 2), the two sets of data (○ and ●), however, do not collapse into the same curve. In the same way, data coming from experiments using batches B (□) and D (◇) in the same fluid are not completely superimposed. Therefore, the simple scaling with Re_{pipe} is not sufficient to obtain a collapse of the curves. The relation between h_p^c/D and Re_{pipe} need to be interpreted in terms of the Shields number.

For simplicity, we first consider the case of a Poiseuille flow in a two-dimensional channel of thickness D comprising a flat solid bed of height $h_p=D-h_f$, where h_f is the fluid height. We take a viscous stress at the top of the bed $\tau_{2D}=\eta\dot{\gamma}_{2D}$ with a shear rate $\dot{\gamma}_{2D}=6(Q_{2D}/D^2)(D/h_f)^2$ and a channel flow rate Q_{2D}, and build the Shields number $\theta_{2D}=\eta\dot{\gamma}_{2D}/(\rho_p-\rho_f)gd$. The Shields number is then related to the channel Reynolds number $\text{Re}_{2D}=\rho_f Q_{2D}/\eta$ by the equation

$$\text{Re}_{2D}=\frac{\theta_{2D}}{6}\frac{(\rho_p-\rho_f)\rho_f g d^3}{\eta^2}\left(\frac{D}{d}\right)^2\left(\frac{h_f}{D}\right)^2, \tag{1}$$

where one recognizes the Galileo number $\text{Ga}=(\rho_p-\rho_f)\rho_f g d^3/\eta^2$, where g is the acceleration of gravity.

We now return to the more complicated experimental geometry of a pipe partially filled by a flat solid bed. The pipe Reynolds number is now $\text{Re}_{\text{pipe}}=4\rho_f Q_{\text{pipe}}/\pi\eta D$. The Shields number is again $\theta_{\text{pipe}}=\eta\dot{\gamma}_{\text{pipe}}/(\rho_p-\rho_f)gd$. The shear rate $\dot{\gamma}_{\text{pipe}}$ has been numerically computed at the top of the solid bed surface, assuming a uniform cross section along the longitudinal direction. The fluid velocity has only one nonvanishing component and the incompressible Navier-Stokes equations reduce to the Stokes equations. These equations have been solved with a no-slip boundary condition along the wetted perimeter and an imposed flow rate. They are discretized in space using the standard Galerkin finite element method and piecewise biquadratic approximations on an appropriate mesh with an accuracy of 10^{-6} in the L2 norm. As demonstrated in Fig. 3, a similar dependence $\dot{\gamma}_{\text{pipe}}=6k(Q_{\text{pipe}}/D^3)(D/h_f)^2$ is found in the limit $0.2\leqslant h_f/D\leqslant 0.8$ with the numerical coefficient $k=1.85\pm0.02$. In these limits, we found the new equation that substitutes for Eq. (1) in the case of a pipe partially filled by a solid bed:

$$\text{Re}_{\text{pipe}}=\frac{2\theta_{\text{pipe}}}{3k\pi}\text{Ga}\left(\frac{D}{d}\right)^2\left(\frac{h_f}{D}\right)^2. \tag{2}$$

In Fig. 4, we have plotted in logarithmic scales the data of Fig. 2 by taking $h_f^c/D=1-h_p^c/D$ instead of h_p^c/D and using the dimensionless flow rate $\text{Re}_{\text{pipe}}(d/D)^2/\text{Ga}=\text{Re}_p/\text{Ga}$, where $\text{Re}_p=\text{Re}_{\text{pipe}}(d/D)^2$ is the particle Reynolds number. The data collapse onto a single line. The logarithm of Re_p/Ga has been fitted to a linear function of the logarithm of h_f^c/D by the method of weighted least squares. This gives a slope of 1.98 ± 0.08 in good agreement with the exponent 2 given by Eq. (2). The data outside the limit of validity of the equation have been excluded from the fitting. We can conclude that Eq. (2) is in fairly good agreement with the experimental data in the limit $0.2\leqslant h_f/D\leqslant 0.8$. In this range,

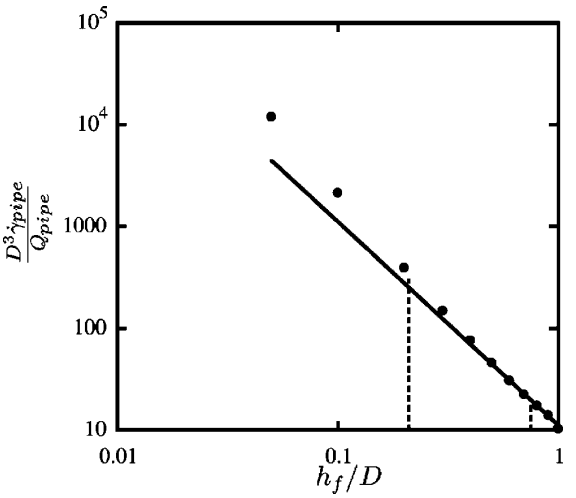


FIG. 3. Numerical dimensionless fluid shear rate $D^3\dot{\gamma}_{\text{pipe}}/Q_{\text{pipe}}$ at the bed surface h_p/D vs normalized height of the fluid h_f/D. The solid line represents the slope −2. The dotted lines indicate the limits $0.2\leqslant h_f/D\leqslant 0.8$.

we can infer the critical value of the Shields number for cessation of motion by using the best fit with exponent 2 and the numerical coefficient $k=1.85\pm0.02$. We find $\theta^c=0.12\pm0.03$ in the range $1.5\times10^{-5}\leqslant\text{Re}_p\leqslant0.76$.

Figure 5 compares our data (solid horizontal line) with previous results found in the literature.[6–11] As in the previous studies the particle Reynolds number has been defined in a different way by taking the shear at the top of the bed $\dot{\gamma}_c$, the critical Shields number θ^c is plotted versus this new defined number $\dot{\gamma}_c d^2\rho_f/\eta$. Note that this new number is in fact θ^c/Ga in the viscous regime. Therefore, this representation commonly found in the literature shows the variation in Ga and is somehow circular.

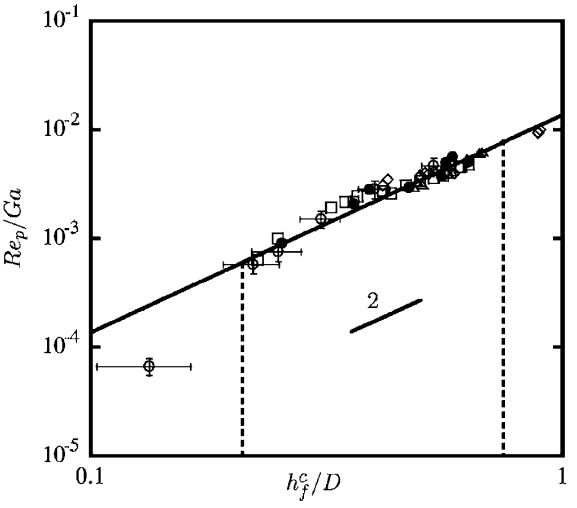


FIG. 4. Dimensionless ratio $\text{Re}_p/\text{Ga}=\text{Re}_{\text{pipe}}(d/D)^2/\text{Ga}$ vs normalized final fluid height $h_f^c/D=1-h_p^c/D$. The solid line represents the best fit. The dotted lines enclose the domain of validity of the model.

Downloaded 03 Jul 2007 to 147.94.96.134. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

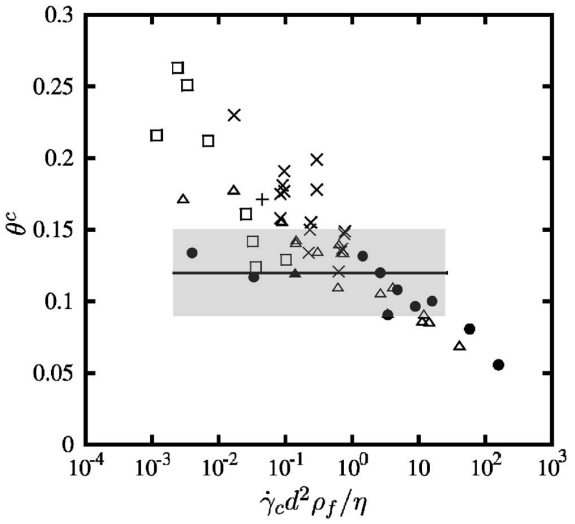


FIG. 5. Critical Shields number θ^c vs $\dot{\gamma}_c d^2 \rho_f / \eta$: experimental data of Charru *et al.* (Ref. 8) (▲), of Loiseleux *et al.* (Ref. 9) (●), of White (Ref. 6) cited by Loiseleux *et al.* (Ref. 9) (+), of White (Ref. 10) cited by Mantz (Ref. 11) (□), of Mantz (Ref. 11) (×), and of Yalin and Karahan (Ref. 7) (△). The solid line represents our result with the gray rectangle indicating the error range.

The single datum (▲) of Charru *et al.*[8] obtained in a Couette channel by measuring the saturated bedload flux is in excellent agreement with our result. There is also a good agreement, within the same range of particle Reynolds number, with the data (●) of Loiseleux *et al.*[9] using visual observations of grain motion in a Hele-Shaw cell and defining the erosion threshold as the lowest flow rate for which grains are still being eroded after fifteen minutes. The present method of characterizing the threshold through the cessation of motion yields same threshold value within experimental accuracy than by gradually increasing the flow rate and measuring the saturated particle flux. Indeed, in both experimental procedures, the compaction of the bed has reached a steady state. An important finding of our experiments is that θ^c is found to be constant over the range of small particle Reynolds number explored. This relies on the fact that we have adopted a viscous definition of the shear stress that has been found to be valid in this range. The results of Loiseleux *et al.*[9] show a decrease for larger particle Reynolds numbers. They also considered a viscous definition of the shear stress and attributed this decrease to inertial correction to the Stokes drag not accounted by this definition.

The older data (+,□,×,△) were mostly obtained using visual observation of the incipient grain motion in open channels. The shear stress was given by delicate measurements of the very low fluid surface gradients.[11] These data are more scattered and some results present larger values than our result in the range explored. This may be due to (i) their different definition of the shear stress, (ii) the difficulty of the measurement, and (iii) possible unsteadiness of the grain flux. The same order of magnitude is however recovered.

In summary, we have provided reproducible experimental measurements for the onset of grain motion in laminar flow and inferred a critical Shields number for particle erosion that was found to be constant, i.e., $\theta^c = 0.12 \pm 0.03$, for a wide range of small particle Reynolds number: $1.5 \times 10^{-5} \leqslant \mathrm{Re}_p \leqslant 0.76$. We have also shown that adopting a viscous definition of the shear stress is valid in this range.

Support from the Institut Français du Pétrole is gratefully acknowledged by M.O.

[1] J. M. Buffington and D. R. Montgomery, "A systematic analysis of eight decades of incipient motion studies, with special reference to gravel-bedded rivers," Water Resour. Res. **33**, 1993 (1997).
[2] V. A. Vanoni, "Sediment transportation mechanics: initiation of motion," J. Hydr. Div. **92**, 291 (1966).
[3] C. L. Dancey, P. Diplas, A. N. Papanicolaou, and M. Diplas, "Probability of individual grain movement and threshold condition," J. Hydraul. Eng. **128**, 12 (2002).
[4] A. S. Paintal, "Concept of critical shear stress in loose boundary open channels," J. Hydraul. Res. **9**, 91 (1971).
[5] A. N. Papanicolaou, P. Diplas, N. Evaggelopoulos, and S. Fotopoulos, "Stochastic incipient motion criterion for spheres under various bed packing conditions," J. Hydraul. Eng. **128**, 4 (2002).
[6] C. M. White, "The equilibrium of grains on the bed of a stream," Proc. R. Soc. London, Ser. A **174**, 322 (1940).
[7] M. S. Yalin and E. Karahan, "Inception of sediment transport," J. Hydr. Div. **105**, 1433 (1979).
[8] F. Charru, H. Mouilleron-Arnould, and O. Eiff, "Erosion and deposition of particles on a bed sheared by a viscous flow," J. Fluid Mech. **519**, 55 (2004).
[9] T. Loiseleux, P. Gondret, M. Rabaud, and D. Doppler, "Onset of erosion and avalanches for an inclined granular bed sheared by a continuous laminar flow," Phys. Fluids **17**, 103304 (2005).
[10] S. J. White, "Plane bed thresholds of fine grained sediment," Nature **228**, 152 (1970).
[11] P. A. Mantz, "Incipient transport of fine grains and flanks by fluids-extended Shields diagram," J. Hydr. Div. **103**, 601 (1977).

Downloaded 03 Jul 2007 to 147.94.96.134. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

Chapitre 4

Lit plat en mouvement

Si le nombre de Shields, $\theta = \tau^f/(\Delta\rho g d)$ au sommet du lit de particules est supérieur au nombre de Shields critique $\theta^c = 0.12$, le milieu granulaire se met en mouvement. Le lit peut alors connaître différents régimes d'évolution qui sont décrits dans le chapitre 2. Dans ce chapitre, nous allons nous focaliser sur le régime "lit plat en mouvement". Ce régime est caractérisé par un milieu granulaire qui avance sans se déformer, c'est-à-dire sans qu'il n'y ait formation de structures sédimentaires (rides ou dunes).
Le mouvement du milieu granulaire étant dû à l'action du fluide, il est primordial de comprendre le couplage existant entre le fluide et le milieu granulaire. Ce couplage s'exprime généralement à travers le lien entre le flux de particules q_p et le nombre de Shields. Dans la littérature, on trouve de nombreuses formules pour exprimer ce flux de particules. La plupart de ces expressions sont empiriques ou semi-empiriques et ont été proposées pour des écoulements turbulents [Einstein (1942), Meyer-Peter & Muller (1948), Einstein (1950), Bagnold (1956), Yalin (1963), Ribberink (1998), Camemen & Larson (2005) et Wong & Parker (2006)]. Indépendamment de la nature de l'écoulement, q_p est généralement exprimé sous la forme $q_p/Q_d = m\theta^n(\theta - \theta_c)^p$, ou m, n et p sont des constantes qui varient suivant les auteurs et Q_d est un débit caractéristique obtenu principalement par analyse dimensionnelle. Pour un écoulement turbulent, Q_d est défini de manière consensuelle par $(\Delta\rho g d^3/\rho_f)^{1/2}$ [Bagnold (1956) et Einstein (1942, 1950)], tandis que l'expression la plus souvent utilisée pour un écoulement laminaire semble être $Q_d = \Delta\rho g d^3/\eta$ [Charru & Hinch (2006) et Charru *et al.* (2004)]. Bien que basées sur des raisonnements physiques, les différentes formules proposées semblent avoir un domaine de validité limité. Dans ce chapitre, nous proposons une approche générale de l'étude de l'interaction fluide/milieu granulaire basée sur l'utilisation des équations diphasiques développées par Jackson (1997, 2000). Ce modèle nous permet de déterminer la vitesse des particules ainsi que l'épaisseur du milieu granulaire en mouvement et d'en déduire le flux de particules.

L'étude expérimentale du régime "lit plat en mouvement" nous permet d'évaluer de façon indirecte le flux de transport de particules et peut donc servir de test au modèle que nous présentons. Elle permet aussi de tester quelques unes des formules proposées dans la littérature et de discuter l'importance de la forme du flux de

transport de particules et de l'adimensionnement choisis.

4.1 Évolution du lit plat en mouvement : une mesure indirecte du flux de particules

4.1.1 Du lit plat idéal aux réalités expérimentales

Le but principal de cette étude est de déterminer le flux de transport de particules dans un lit plat soumis à un écoulement de fluide. De nombreuses expériences ont été réalisées afin de mesurer cette grandeur. L'expérience typique consiste à réaliser un lit plat homogène avant de le soumettre à un écoulement de fluide connu et de mesurer le flux de particules. Cependant, si le principe est relativement simple, la mise en oeuvre expérimentale s'avère plus difficile. Dans la littérature, on peut différencier les expériences réalisées en circuit ouvert pour des écoulements turbulents [Meyer-Peter & Muller (1948) et Paintal (1971)] et celles réalisées en canal fermé (couette cylindrique) pour des écoulements laminaires [Mouilleron-Arnould (2002), Charru & Mouilleron-Arnould (2002) et Charru *et al.* (2004)]. En circuit ouvert, le flux de particules est obtenu en mesurant la quantité de solide sortant du canal pendant un intervalle de temps fixé. Ce type de mesure est pertinent tant que q_p est stationnaire. Dans le cas des circuits fermés, le flux de particules est stationnaire tant que le lit reste plat mais sa mesure nécessite l'utilisation d'une technique non intrusive. De plus, cette mesure ne peut pas s'effectuer par suivi des particules au niveau de la paroi car le mouvement est modifié à cause du frottement. Une des solutions consiste à utiliser des particules ayant le même indice optique que le fluide. On ajoute ensuite au milieu granulaire un pourcentage de particules ayant un indice de réflexion différent qui servent de traceurs pour mesurer l'écoulement des particules. Ce montage expérimental étant particulièrement lourd à mettre en oeuvre, une technique de suivi des particules à la surface du lit a souvent été privilégiée [Mouilleron-Arnould (2002), Charru & Mouilleron-Arnould (2002) et Charru *et al.* (2004)], bien que cette technique fournisse seulement des informations sur la première couche en mouvement.

Notre configuration expérimentale est constituée d'un circuit ouvert dans lequel nous n'alimentons pas le milieu granulaire au cours du temps. Le flux de particules sortant est donc instationnaire et mesurer son évolution au cours du temps nécessiterait d'effectuer des mesures sur des intervalles de temps relativement court, or la quantité de particules sortante est trop faible pour obtenir une précision raisonnable sur le flux de particules. Nous avons donc choisi de ne pas utiliser cette méthode de mesure.

Dans la limite du régime "lit plat en mouvement", toutes les expériences évoluent de façon similaire (figure 4.1). Le lit est supposé initialement plat (de hauteur h_p^{start}). Sous l'action de l'écoulement, les couches supérieures du milieu granulaire sont mises en mouvement. Le milieu granulaire n'étant pas alimenté, la hauteur du milieu granulaire situé à l'entrée du tube diminue progressivement jusqu'à atteindre

la hauteur finale critique h_p^c. Cette diminution de hauteur se propage progressivement dans toute la longueur du tube, jusqu'à ce que tout le lit atteigne la hauteur finale h_p^c. À une position donnée, la hauteur commence donc à décroître quand la perturbation due à la non alimentation de l'entrée arrive. Les flèches sur la figure 4.1 montrent la position du front de cette perturbation à différents instants. Une fois que tout le milieu granulaire a atteint son état final, h_p^c, plus rien ne bouge, l'expérience est terminée. Comme la contrainte fluide est reliée à la hauteur de fluide h_f, elle varie en fonction du temps et de la position dans le tube, entraînant une variation similaire du flux de particules. Nous avons donc opté pour une mesure indirecte du flux de particules qui consiste à suivre l'évolution temporelle de la hauteur du lit de particules. Pour cela, nous utilisons la technique de suivi de profil décrite dans le chapitre 2. La mesure s'effectue sur une zone de longueur 5 cm et de hauteur le diamètre du tube, ce qui permet d'obtenir une précision de 0.8 mm sur la hauteur h_p du milieu granulaire. Pour un débit de fluide fixé, l'évolution de la hauteur du milieu granulaire situé à une distance L de l'entrée du tube peut être prédite en combinant une expression pour le flux de particules avec l'équation de conservation de la masse des particules. Comparer l'évolution de la hauteur du lit prédite avec celle mesurée expérimentalement représente donc un moyen indirecte de valider la formule exprimant le flux de particules. Cependant, à cause des limites du montage expérimental, il existe de nombreuses sources d'imprécisions pouvant amener une marge d'erreur qui n'est pas aisément quantifiable. Les deux principales sources d'erreur concernent l'état initial du lit et la forme de l'écoulement.

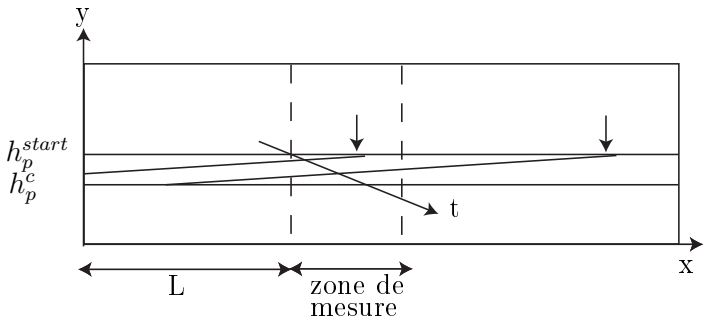


FIG. 4.1 – Évolution schématique du lit plat.

État initial du lit

La zone de mesure est située à environ $L = 80$ cm de l'entrée du tube. L'évolution temporelle du lit dans la zone de mesure dépend entièrement de l'évolution du lit de particules situé en amont. Dans la suite nous supposerons que la hauteur initiale de cette partie du lit peut être considérée comme constante. En réalité, l'intérieur du tube étant inaccessible, il est impossible d'obtenir un lit parfaitement plat et les moindres variations de hauteurs sont susceptibles de modifier l'évolution temporelle de la zone de mesure. Un début de lit incliné peut notamment expliquer une variation

de la hauteur du milieu granulaire dans la zone de mesure avant l'arrivée du front du à l'entrée.

Forme de l'écoulement

Théoriquement, nous considérons un écoulement de fluide stationnaire dépendant uniquement de la position verticale y. En réalité l'écoulement de fluide imposé au début du tube évolue suivant l'abscisse x jusqu'à atteindre un état développé. La longueur L_e sur laquelle il évolue dépend du nombre de Reynolds Re_{pipe} suivant la relation $L_e = 0.26DRe_{pipe}/4$ [Smith (1954)]. Ces perturbations de l'écoulement n'étant pas prises en compte par le modèle, elles peuvent entraîner un écart entre l'évolution prédite et l'évolution mesurée expérimentalement.

Dans la suite nous considérerons que ces perturbations sont négligeables. Le dernier problème expérimental rencontré concerne la gamme d'existence du régime "lit plat en mouvement". Pour réaliser des mesures d'évolutions du lit, il faut qu'il y ait mise en mouvement des particules sans formation de structures sédimentaires. Dans le chapitre 2 nous avons vu que ce régime est caractérisé par des écoulements à bas nombres de Reynolds. Le domaine d'existence de ce régime semble donc être minoré en terme de nombre de Shields ($\theta > \theta_c$) et majoré en terme de nombre de Reynolds. Le nombre de Shields et le nombre de Reynolds varient proportionnellement avec le débit de fluide mais ont des dépendances opposées en ce qui concerne la viscosité du fluide. Pour obtenir des nombres de Reynolds suffisamment bas tout en gardant $\theta > \theta_c$, il est donc pratique de travailler avec des fluides à forte viscosité. Expérimentalement, on observe que la viscosité typique permettant d'obtenir un lit plat en mouvement dépend du type de billes utilisées, mais doit être au moins de l'ordre de 10 fois la viscosité de l'eau. À cause de problèmes d'étanchéité du circuit expérimental, il n'est pas possible de travailler avec des fluides dont la viscosité dépasse environ 45 fois la viscosité de l'eau. On peut donc noter que la gamme de viscosité dans laquelle on peut travailler est relativement réduite, car ce paramètre expérimental est varié au maximum d'un facteur 4. À forte viscosité, le débit maximal obtenu en utilisant l'alimentation contrôlée en pression est de l'ordre de 6.10^{-6} m^3/s. Le débit minimal pour avoir mise en mouvement étant de l'ordre de 6.10^{-7} m^3/s, les variations du débit sont de l'ordre d'un facteur 10. La gamme de variation des paramètres expérimentaux est donc relativement réduite.

L'étude expérimentale réalisée fournit l'évolution temporelle de la hauteur du lit à une position donnée pour différents paramètres expérimentaux. Comment cette évolution peut-elle être reliée au flux de particules ?

4.1.2 Evolution du lit plat

L'évolution du lit plat est reliée à l'écoulement de fluide qui dépend localement de la hauteur du lit de particules. On est donc en présence d'un véritable couplage entre le fluide et le milieu granulaire et il est primordial de bien comprendre ce couplage. Pour cela, nous avons choisi de raisonner à partir de la géométrie d'un canal à

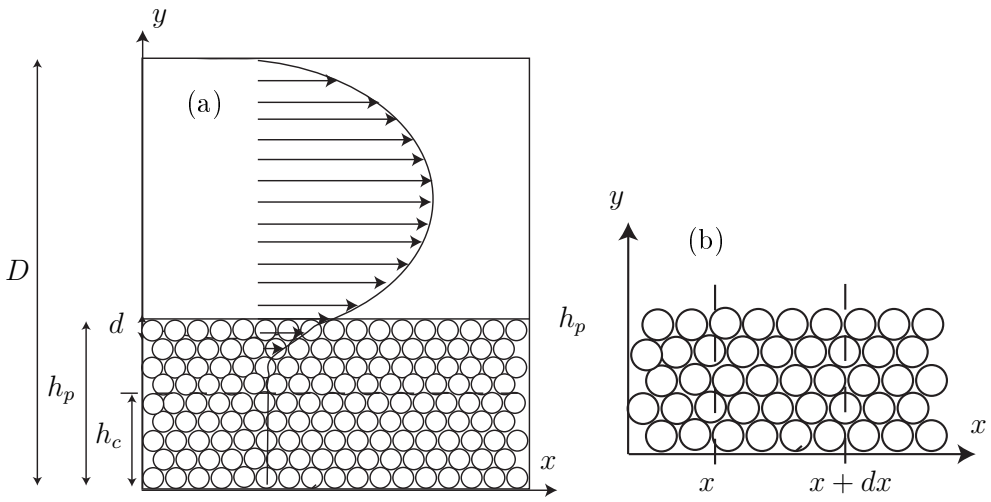


FIG. 4.2 – (a) Schéma du canal à deux dimensions et (b) bilan de masse des particules sur une longueur dx.

deux dimensions de hauteur D, rempli jusqu'à une hauteur h_p de milieu granulaire [figure 4.2 (a)]. Le canal n'étant pas alimenté, le couplage le plus immédiat entre le fluide et la hauteur du milieu granulaire est donné par l'équation de conservation de la masse des particules.

Faisons un bilan de l'évolution de la masse, m, de particules comprises entre x et x+dx pendant un intervalle de temps dt par unité de largeur du canal [figure 4.2 (b)]. Ce bilan s'exprime sous la forme

$$m(t + dt) - m(t) = J(x) - J(x + dx), \tag{4.1}$$

où J est le flux de masse. La masse m est définie par

$$m(t) = \rho_p \int_0^{h_p(t)} \phi(y) dy dx, \tag{4.2}$$

où ϕ correspond à la fraction volumique de milieu granulaire et ρ_p à la masse volumique des particules. Des mesures expérimentales récentes d'écoulement fluide à travers un lit immobile de particules, [Goharzadeh *et al.* (2005)], ont montré que ϕ varie linéairement au niveau de l'interface fluide/milieu granulaire, sur un diamètre de bille entre 0 et sa valeur finale ϕ_0 . Dans cette étude, nous avons choisi d'utiliser une modélisation similaire pour ϕ. La masse s'exprime alors sous la forme

$$m = \rho_p \phi_0 dx \left(h_p - d/2\right), \tag{4.3}$$

où d est le diamètre des particules. Le flux de masse de particules par unité de largeur est définit par

$$J = \rho_p \int_0^{h_p(x)} \phi(y) u^p(y) dy dt = dt \rho_p q_p(x), \tag{4.4}$$

où u^p est la vitesse moyenne locale des particules et $q_p = \int_0^{h_p(x)} \phi(y) u^p(y) dy$ correspond aux flux de particules. Après avoir remplacé J et m par leurs expressions respectives (4.4) et (4.3), l'équation (4.1) devient

$$\rho_p \phi_0 dx \left[h_p(t+dt) - h_p(t)\right] = \rho_p \left[q_p(x) - q_p(x+dx)\right] dt. \tag{4.5}$$

En faisant tendre dx et dt vers 0, on obtient la forme finale de l'équation de conservation de la masse,

$$\phi_0 \frac{\partial h_p}{\partial t} + \frac{\partial q_p}{\partial x} = 0. \tag{4.6}$$

Cette équation peut être intégrée numériquement en prenant comme condition initiale une non-alimentation afin d'obtenir l'évolution du profil du lit de particules. Pour cela, il faut connaître le flux de particules, q_p, dû à l'écoulement de fluide pour une hauteur de particules, h_p, et un débit de fluide, q_f, imposés. Le milieu granulaire étant composé de particules rigides dans un fluide, nous avons choisi d'utiliser un modèle de type milieu continu à deux phases.

4.2 Interaction fluide/milieu granulaire

4.2.1 Choix d'une modélisation

Dans cette étude, nous considérons un milieu diphasique constitué de particules rigides et d'un fluide. Les milieux multiphasiques existent sous de nombreux aspects dans la nature et dans l'industrie. On peut citer à titre d'exemple les milieux vapeur/liquide souvent employés dans les processus chimiques, les milieux solide/liquide qu'on retrouve dans les suspensions, les lits fluidisés et les réactions de combustion. Une bonne compréhension des écoulements multiphasiques est donc primordiale. Dans la littérature, de nombreuses études ont été menées afin de modéliser ces écoulements. Dans le cas d'un écoulement diphasique constitué de particules rigides en mouvement dans un fluide, il est théoriquement possible de décrire le mouvement de chaque particule en résolvant les équations de Navier-Stokes pour le fluide et les équations du mouvement pour la rotation et la translation des particules. Ces équations peuvent être résolues de manière numérique pour un petit nombre de particules. Pour un grand nombre de particules (cas le plus courant), il faut raisonner en terme de moyenne. On parle alors de modélisation diphasique. La modélisation diphasique ou multiphasique (quand le système est constitué de plus de deux phases) correspond à un moyennage des différentes quantités utilisées dans les équations de mouvement. Il existe deux approches principales pour effectuer le moyennage. La première méthode correspond à un moyennage réalisé sur un volume petit devant l'échelle macroscopique considérée mais grand devant la taille des particules [Jackson (1997, 2000)]. La deuxième méthode correspond à un moyennage de l'ensemble des réalisations possibles en un point donné de l'espace [Zhang & Prosperetti (1994) et Batchelor (1970)]. Ces deux techniques permettent d'obtenir le même système d'équations. Il s'agit donc uniquement d'un mécanisme formel, le choix de l'une ou l'autre des modélisations étant équivalent. Un tel processus de moyennage entraîne la création de nouvelles variables qui ne sont pas toutes déterminées. Une part importante du travail consiste alors à expliciter les termes utilisés dans les équations

diphasiques.

Dans la suite, nous utilisons les équations diphasiques et la définition des principaux termes obtenues à partir des travaux de Jackson (1997, 2000) et de Lhuillier (1992).

Équations de continuité

Les équations de continuité pour la phase fluide, la phase solide et le mélange sont données par

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial (\epsilon u_i^f)}{\partial x_i} = 0, \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial (\phi u_i^p)}{\partial x_i} = 0, \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \tag{4.9}$$

où u_i^f est la vitesse moyenne locale du fluide, u_i^p la vitesse moyenne locale des particules, $U_i = \phi\, u_i^p + \epsilon\, u_i^f$ la vitesse moyenne du mélange et $\epsilon = 1 - \phi$ la fraction volumique de l'espace occupé par le fluide.

Équation de conservation de la quantité de mouvement

Les équations de conservation de la quantité de mouvement pour les phases fluides et particulaires sont données par,

$$\rho_f \frac{D_f(\epsilon u_i^f)}{Dt} = \rho_f \left[\frac{\partial (\epsilon u_i^f)}{\partial t} + \frac{\partial (\epsilon u_i^f u_j^f)}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_j} - n f_i + \epsilon \rho_f g_i, \tag{4.10}$$

$$\rho_p \frac{D_p(\phi u_i^p)}{Dt} = \rho_p \left[\frac{\partial (\phi u_i^p)}{\partial t} + \frac{\partial (\phi u_i^p u_j^p)}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial \sigma_{ij}^p}{\partial x_j} + n f_i + \phi \rho_p g_i, \tag{4.11}$$

où g correspond à la gravité. La force nf_i représente la valeur moyenne locale de la résultante des forces exercées par le fluide sur les particules. Les tenseurs des contraintes σ_{ij}^f et σ_{ij}^p doivent être considérés comme des tenseurs effectifs associés respectivement à la phase fluide et à la phase particulaire.

Le mécanisme de moyennage permettant d'obtenir ces équations, ainsi que les hypothèses utilisées et l'expression précise des différents termes sont détaillés dans l'annexe A.

4.2.2 Choix des fermetures

Jackson (1997, 2000) a explicité la plupart des termes des équations (4.10) et (4.11) dans le cas des suspensions très diluées. Dans notre configuration expérimentale, les particules sont en contact, mais certaines fermetures restent identiques.

L'obtention de ces fermetures est détaillée dans l'annexe A. Certains termes sont modifiés par la présence de contacts entre les particules.

Force d'interaction fluide/particules, nf_i

Jackson (2000) décompose nf_i en un terme représentant la poussée d'Archimède généralisée et un terme qui prend en compte toutes les autres contributions,

$$nf_i = \phi \frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_j} + nf_i^1. \tag{4.12}$$

Dans notre configuration où un lit de particules rigides est soumis à un écoulement visqueux de fluide, les autres contributions se réduisent à la force de traînée visqueuse due au mouvement relatif du fluide par rapport aux particules. En modélisant cette traînée visqueuse à partir de la loi de Darcy nous obtenons

$$nf_i^1 = \eta \frac{\epsilon^2}{K}(u_i^f - u_i^p) = \eta \frac{\epsilon}{K}(U_i - u_i^p), \tag{4.13}$$

où η est la viscosité du fluide pur. La perméabilité K est définie par la relation de Carman-Kozeny,

$$K = \frac{\epsilon^3 d^2}{k\,(1-\epsilon)^2}, \tag{4.14}$$

où $k \approx 180$ [Happel & Brenner (1983) et Goharzadeh *et al.* (2005)].

Tenseur effectif des contraintes fluides associées à la phase fluide, σ_{ij}^f

Nous supposons que σ_{ij}^f est un tenseur newtonien construit sur la vitesse du mélange U,

$$\sigma_{ij}^f = -p^f \delta_{ij} + \tau_{ij}^f = -p^f \delta_{ij} + \eta_e \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \tag{4.15}$$

où η_e est la viscosité effective du mélange. Ce choix peut être justifié dans le cas d'une suspension diluée de particules par la détermination exacte de σ_{ij}^f réalisée par Zhang & Prosperetti (1994) et Jackson (1997). Dans cette limite, η_e est donné par la formule d'Einstein $\eta_e = \eta(1 + 5\phi/2)$. Dans notre configuration, les grains sont en contact, mais par souci de simplicité et en nous basant sur les résultats expérimentaux de Goharzadeh *et al.* (2005), nous avons choisi d'utiliser la viscosité effective proposée par Einstein. L'utilisation d'autres formules empiriques seront discutées dans la section 4.3.

Tenseur des contraintes solides dues aux contacts entre les particules, σ_{ij}^p

La fermeture du terme σ_{ij}^p n'a pas été étudiée par Jackson (1997) qui a négligé les contacts dans le cadre des suspensions très diluées. Exprimer σ_{ij}^p revient à choisir une rhéologie régissant l'interaction entre les grains. La contrainte solide se décompose en un terme de pression isotrope et un terme déviatorique,

$$\sigma_{ij}^p = -p^p \delta_{ij} + \tau_{ij}^p,$$

où p^p correspond à la pression de confinement du milieu granulaire. On va supposer que la contrainte solide déviatorique τ_{ij}^p peut être modélisée par une rhéologie de type frottement solide. Il existe différentes rhéologies de ce type.

Rhéologie de type frottement de Coulomb

Cette rhéologie permet de modéliser le contact entre deux solides. Partant du repos, il faut appliquer une force tangentielle $|T_s| = \mu N$ pour mettre le solide en mouvement. Le coefficient μ est appelé coefficient de friction statique et N représente la force normale. Pour maintenir le solide en mouvement, il faut appliquer une force tangentielle $|T_d| = \mu_d N$ où μ_d est le coefficient de frottement dynamique. Les coefficients μ et μ_d sont des constantes qui ne dépendent que de la nature des matériaux en contact avec typiquement $1 > \mu > \mu_d > 0.1$. Quand la vitesse relative entre le solide et son support est nulle, la force tangentielle est une inconnue dont la valeur absolue est bornée par μN. Cette rhéologie a été développée suite à des observations expérimentales, afin de modéliser les forces de frottements résultant d'un contact entre deux solides. Dans notre configuration, utiliser une rhéologie de type Coulomb revient à écrire,

$$\tau^p = \mu p^p \tag{4.16}$$

quand il y a écoulement, où p^p représente la pression de confinement du milieu granulaire, et μ est une constante qui représente le coefficient de friction du matériau .

Pour décrire les contacts existant au sein d'un milieu granulaire, les recherches se sont orientées vers une rhéologie plus complexe qui prend en compte le cisaillement du milieu granulaire.

Rhéologie $\mu(I)$

La détermination d'une rhéologie permettant de modéliser les contacts solides dans un milieu granulaire en mouvement a donnée lieu à de nombreuses recherches ces dernières années. La récente mise en commun de l'étude de différentes configurations expérimentales [GDR-Midi (2004) et Pouliquen *et al.* (2005)] a permis une meilleure compréhension de la rhéologie régissant les contacts. Considérant un milieu granulaire cisaillé à un taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ et soumis à une pression de confinement p^p, des études numériques semblent montrer que la contrainte de cisaillement τ^p est proportionelle à la pression de confinement p^p suivant la relation,

$$\tau^p = \mu(I) p^p, \tag{4.17}$$

où le coefficient de frottement μ dépend d'un unique paramètre adimensionné I,

$$I = \frac{\dot{\gamma}^p d}{\sqrt{p^p/\rho_p}}. \tag{4.18}$$

Ce paramètre être interprété comme le rapport de deux temps caractéristiques existant à l'échelle du grain,

$$I = \frac{T_p}{T_{\dot{\gamma}}}, \tag{4.19}$$

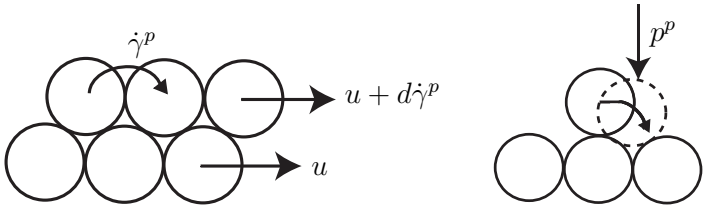


FIG. 4.3 – Schématisation du temps de déformation (gauche) et du temps de confinement (droite).

où $T_{\dot{\gamma}}$ correspond au temps de déformation et T_p au temps de confinement. Le temps de déformation correspond au temps nécessaire à une couche de grains pour se déplacer d'une distance d sous l'action du champs de cisaillement $\dot{\gamma}^p$ du milieu. En d'autres termes, en considérant un grain situé sur une couche de grain (figure 4.3), $T_{\dot{\gamma}}$ représente le temps mis par la particule soumise au cisaillement pour passer d'une position d'équilibre à une autre, la position d'équilibre représentant le creux entre deux sommets de grains. Ce temps semble être indépendant du milieu dans lequel baigne le milieu granulaire. Il dépend uniquement du cisaillement,

$$T_{\dot{\gamma}} = \frac{1}{\dot{\gamma}^p}. \tag{4.20}$$

La définition du temps de confinement T_p semble plus problématique. Une étude expérimentale récente réalisée sur les avalanches sous-marines par Cassar *et al.* (2005) a montré que la définition de T_p dépend du milieu environnant. Le temps T_p peut être interprété comme le temps mis par une particule pour tomber d'un diamètre d sous l'action de la pression de confinement p^p (figure 4.3). Dans l'air, T_p correspond à un temps de chute libre et peut être définit par

$$T_p = \frac{d}{\sqrt{p^p/\rho_p}}. \tag{4.21}$$

Dans le cas où le fluide interstitiel joue un rôle, par exemple de l'eau, il existe divers régimes [du Pont *et al.* (2004) et Cassar *et al.* (2005)], suivant le nombre de Stokes, St et le rapport des densités r. Ces nombres sont définis par

$$St = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \frac{\alpha d\sqrt{\rho_p P}}{\eta} \quad \text{et} \quad r = \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_f C_d}}, \tag{4.22}$$

où $\alpha = 0.01$ est un coefficient qui relie la perméabilité d'un milieu poreux constitué de sphères au diamètre d de ces sphères, $K = \alpha d^2$, η correspond à la viscosité du fluide pur, ρ_f à la masse volumique du fluide et $C_d = 0.4$ pour $10^3 < Re_p < 10^5$ est le coefficient de traînée.
Dans le cas où $St << 1$ et $r >> St$ (régime visqueux), la chute des grains est équilibrée par un frottement visqueux et le déplacement du liquide se fait à travers un milieu poreux de perméabilité $K = \alpha d^2$. Le temps de confinement est défini par

$$T_p = \frac{\eta}{\alpha p^p}. \tag{4.23}$$

FIG. 4.4 – Fraction volumique maximale (gauche) ou fraction volumique minimale (droite).

Dans le cas où $St >> r$ et $r << 1$ (régime inertiel), les effets liés à l'inertie doivent être pris en compte et le temps de confinement est défini par

$$T_p = d\sqrt{\frac{2\rho_f C_d}{3P}}. \tag{4.24}$$

La définition du paramètre I dépendant du temps de confinement, elle varie suivant la nature du fluide interstitiel. Cependant, la forme de la fonction $\mu(I)$ semble être indépendante de la forme choisie pour le paramètre I. Elle peut être obtenue par des simulations numériques de cisaillement ou indirectement en réalisant des mesures d'écoulements de particules sur un plan incliné [GDR-Midi (2004) et Pouliquen *et al.* (2005)]. Ces deux techniques semblent montrer que le coefficient de friction varie entre deux valeurs asymptotiques suivant les valeurs de I. Pour les très faibles valeurs de I, $\mu(I)$ tend vers μ_s, avant de tendre vers μ_2 quand I augmente. L'expression suivante a été proposée par Jop *et al.* (2005),

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{I_0/I + 1}, \tag{4.25}$$

où I_0 est une constante. Pour des billes de verre, ils obtiennent expérimentalement $\mu_s = \tan(21^\circ)$, $\mu_2 = \tan(33^\circ)$ et $I_0 = 0.3$. Pour complètement déterminer la loi régissant les contacts dans un milieu granulaire, il faut prendre en compte la variation de la fraction volumique de solide ϕ avec les différents paramètres. En terme de fraction solide, les deux arrangements extrêmes du milieu granulaire sont l'arrangement dense où les particules sont positionnées dans les trous formés par les particules en dessous et l'arrangement lâche où les particules sont positionnées sur leurs sommets (figure 4.4). Ces deux arrangements peuvent être décrits par $\phi = \phi_{max}$ et $\phi = \phi_{min}$, avec typiquement, $\phi_{max} = 0.6$ et $\phi_{min} = 0.5$. Pouliquen *et al.* (2005) proposent une loi dépendant de I pour l'évolution de la fraction solide,

$$\phi(I) = \phi_{max} - (\phi_{max} - \phi_{min})\, I. \tag{4.26}$$

La rhéologie décrite par les équations (4.26), (4.25) et (4.17) a été testée dans de nombreuses configurations mettant en oeuvre un écoulement unidirectionnel et montre un bon accord avec les résultats expérimentaux [GDR-Midi (2004), Jop *et al.* (2005) et Pouliquen *et al.* (2005)]. Cependant, cette rhéologie ne permet pas de prédire des écoulements plus complexes, notamment quand le cisaillement du milieu granulaire s'effectue suivant plusieurs directions. Afin de combler cette lacune, une

généralisation de cette rhéologie a récemment été proposée par Jop *et al.* (2006),

$$\sigma_{ij}^p = -p^p \delta_{ij} + \tau_{ij}^p,$$
$$\tau_{ij}^p = \mu(I) p^p \frac{\dot{\gamma}_{ij}^p}{\dot{\gamma}^p}, \tag{4.27}$$

où $\dot{\gamma}_{ij}^p = \frac{\partial u_i^p}{\partial x_j^p} + \frac{\partial u_j^p}{\partial x_i}$, $\dot{\gamma}^p = \sqrt{\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{ij}^p \dot{\gamma}_{ij}^p}$ et $\mu(I)$ est décrit par l'équation (4.25). Cette rhéologie a été testée pour prédire l'écoulement tridimensionnel d'un milieu granulaire confiné par deux parois rugueuses [Jop *et al.* (2006)], ainsi que l'instabilité tridimensionnelle de Kapitza qui apparaît quand un milieu granulaire s'écoule sur un plan rugueux incliné [Forterre (2006)]. Ces deux tests ont montré un bon accord quantitatif entre la rhéologie et les expériences.

La rhéologie $\mu(I)$ est définie localement à partir de la vitesse des particules u^p. Il peut paraître étonnant qu'elle ne soit pas directement reliée à la fraction volumique ϕ qui dépend du paramètre I. En fait, une fois les grains mis en mouvement, le volume du milieu granulaire en mouvement va légèrement se modifier (dilatation ou compaction suivant les cas) entraînant une modification de ϕ, afin de se placer dans le cas le plus favorable au mouvement. On peut différencier deux cas. Si l'empilement initial est lâche, le milieu se compacte au moment de la mise en mouvement et tend vers une fraction volumique limite constante. Il est alors possible de prédire l'évolution du milieu granulaire avec la rhéologie $\mu(I)$. Si l'empilement est très compact, la rhéologie ne peut pas prédire l'épaisseur de grains en mouvement car les couches inférieures sont plus difficiles à mettre en mouvement que ce que prédit la rhéologie.

Dans notre configuration expérimentale, le milieu granulaire est réalisé en laissant les grains sédimenter naturellement. L'empilement initial est donc lâche et il est possible d'utiliser une rhéologie du type $\mu(I)$.

Rhéologie choisie et forme finale du système d'équations

La figure 4.5, montre l'évolution de la courbe $\mu(I)$ et les cas limites μ_s et μ_2. La forme du coefficient $\mu(I)$ utilisée dans la rhéologie $\mu(I)$ introduit une trop grande complexité dans le cadre d'une première approche. On peut noter qu'au seuil de mise en mouvement, c'est à dire pour un cisaillement nul ($I = 0$), $\mu(0) = \mu_s$. Pour $I >> I_0$, $\mu(I)$ tend vers une valeur constante μ_2. Au seuil de mise en mouvement et pour les fortes valeurs du paramètre I, utiliser la rhéologie $\mu(I)$ revient donc à utiliser une rhéologie de Coulomb en prenant respectivement μ_s et μ_2 comme coefficient de friction solide.

Évaluons I au niveau de la première couche de grains dans notre configuration expérimentale. Les différentes expériences au cours desquelles nous avons observé le régime "lit plat en mouvement" sont comprises dans des gammes de nombre de Stockes et de coefficient r [équation 4.22] de l'ordre de $4\ 10^{-4} < St < 9\ 10^{-3}$ et $1.5 < r < 2.5$. Nous sommes donc clairement dans le régime visqueux et le para-

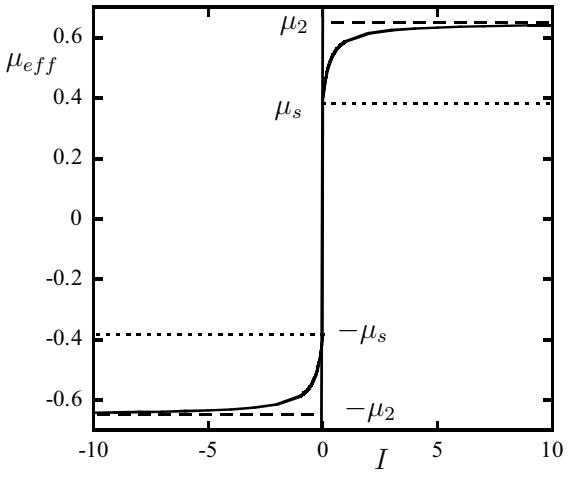


FIG. 4.5 – Variation de $\mu(I)$ en fonction du paramètre I (-). Les cas limites μ_s et μ_2 sont représentés respectivement par des pointillés et des tirets.

mètre I peut être défini par

$$I = \frac{\eta \dot{\gamma}^p}{\alpha p^p}. \tag{4.28}$$

La pression de confinement peut être écrite sous la forme $p^p = \Delta\rho g d$ et on peut donc relier I au nombre de Shields θ,

$$I = \alpha^{-1}\theta. \tag{4.29}$$

Cassar *et al.* (2005) propose $\alpha = 0.01$. Dans notre modélisation, α est défini par l'équation (4.14). En prenant $\epsilon = 0.45$, on obtient un paramètre I qui est de l'ordre de 500θ. Expérimentalement le lit est en mouvement pour $\theta > 0.12$ (chapitre 3), ce qui donne $I > 72$. Dans la littérature on trouve des valeurs pour I_0 variant entre 0.3 [Jop *et al.* (2005)] et 1 [Cassar *et al.* (2005)]. On peut donc considérer que la majorité des cas expérimentaux correspondent au cas $I >> I_0$ au niveau de la première couche et il semble raisonnable de modéliser le tenseur des contraintes associées aux contacts solides par une rhéologie de type frottement de Coulomb pour se placer dans un cas simplifié. On note μ le coefficient de friction associé à cette rhéologie. On pourra évaluer μ par μ_s au seuil de mise en mouvement et par μ_2 quand il y a mouvement, mais la solution la plus simple consiste à prendre μ constant.

Résumé

En intégrant les différentes fermetures dans les équations (4.10) et (4.11), on obtient un nouveau système d'équations qui est détaillé dans l'article *Bed-load transport by shearing flows.* dans le cas du lit plat, on considère un écoulement unidirectionnel. En utilisant comme échelle de longueur la hauteur du canal D, comme échelle de pression la pression hydrostatique $\Delta\rho g D$ et comme échelle de temps $\eta/\Delta\rho g D$, on obtient un système adimensionné (grandeurs notées par une barre au dessus) qui après projection suivant les axes x et y peut s'écrire sous la forme

– Projection suivant y

$$\frac{\partial \bar{p}^f}{\partial \bar{y}} = -\frac{\rho_f}{\Delta\rho}, \tag{4.30}$$

$$\frac{\partial \bar{p}^p}{\partial \bar{y}} = -\phi, \tag{4.31}$$

– Projection suivant x

$$Ga\frac{h^3}{d^3}\frac{D\epsilon\bar{u}^f}{D\bar{t}} = -\frac{\epsilon^2 D^2}{K}\left(\bar{u}^f - \bar{u}^p\right) - \epsilon\frac{\partial \bar{p}^f}{\partial \bar{x}} + \epsilon\frac{\partial \bar{\tau}^f_{xy}}{\partial \bar{y}}, \tag{4.32}$$

$$Ga\frac{h^3}{d^3}R\frac{D\phi\bar{u}^p}{D\bar{t}} = \frac{\epsilon^2 D^2}{K}\left(\bar{u}^f - \bar{u}^p\right) - \phi\frac{\partial \bar{p}^f}{\partial \bar{x}} + \phi\frac{\partial \bar{\tau}^f_{xy}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{\tau}^p_{xy}}{\partial \bar{y}}, \tag{4.33}$$

où $R = \rho_p/\rho_f$ et $\bar{U} = \phi\bar{u}^p + \epsilon\bar{u}^f$ correspond à la vitesse du mélange.
Les fermetures de $\bar{\tau}^f$ et $\bar{\tau}^p$ sont

$$\bar{\tau}^f_{xy} = \frac{\eta_e}{\eta}\frac{d\bar{U}}{d\bar{y}}$$
$$\bar{\tau}^p_{ij} = \mu_{eff}\bar{p}^p$$

Si on veut se placer dans un cas simple, on prend $\mu_{eff} = \mu$ constant, la valeur donnée à μ étant à discuter. La solution générale est obtenue en prenant $\mu_{eff} = \mu(I) = \mu_s + (\mu_2 - \mu_s)/(I_0/I + 1)$ avec $I = \eta\dot{\gamma}^p/(\alpha p^p)$.

Les équations diphasiques obtenues sont complexes à résoudre de façon analytique et ne permettent pas d'obtenir une formulation simple pour le flux de particules. Nous avons donc choisi de privilégier deux modes de résolution. Une résolution numérique basée sur une méthode des différences finies, qui nous permet d'obtenir les solutions exactes des équations et une résolution analytique asymptotique permettant d'obtenir des solutions simplifiées valables dans certaines conditions.

4.2.3 Résolution numérique : méthode des différences finies

La résolution numérique doit nous permettre de résoudre explicitement les équations (4.30), (4.31), (4.32) et (4.33). La technique de résolution numérique utilisée est basée sur la méthode des différences finies. La méthode simplifiée utilisée pour résoudre des équations linéaires étant décrite dans l'article, nous présenterons dans cette section la méthode générale permettant de résoudre les équations linéaires et non linéaires. Nous utilisons un pas d'espace variable, ce qui permet d'augmenter la résolution au niveau des interfaces en raffinant le maillage sans augmenter de manière significative le temps de calcul. La vitesse u^t_j, la pression p^t_j et la fraction volumique ϕ^t_j, à un temps t fixé, sont calculées au centre de la maille bornée par les noeuds j et $j+1$. Les autres grandeurs, le cisaillement $\dot{\gamma}^t_j$ et les différentes contraintes σ^t_j sont calculées sur le noeud j (figure 4.6).
Les dérivées premières en espace sont données par

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_j) \approx \frac{2f^n_j - 2f^n_{j-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}}. \tag{4.34}$$

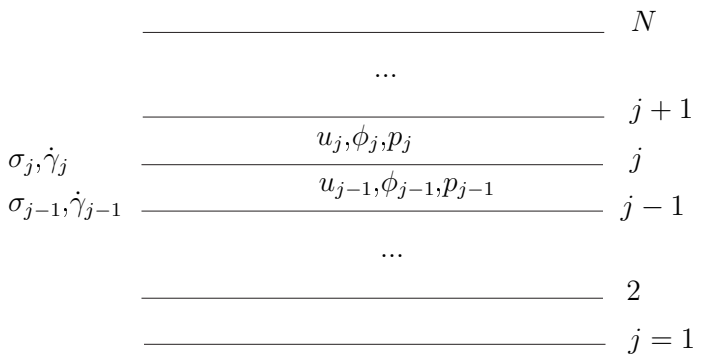


FIG. 4.6 – Maillage suivant y.

Nous utilisons deux schémas différents pour caractériser la dérivée en temps. Un schéma implicite,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_j) \approx \frac{f_j^n - f_j^{n-1}}{\Delta t}, \tag{4.35}$$

qui correspond à la différence finie décentrée amont et un schéma explicite,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_j) \approx \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t}, \tag{4.36}$$

qui utilise la différence finie décentrée aval.
Les équations (4.30) et (4.32) concernant la phase fluide sont discrétisées de manière explicite, tandis que les équations (4.31) et (4.33) concernant la phase solide sont discrétisées suivant un schéma implicite. La figure 4.7 représente l'écoulement du solide et du mélange obtenus numériquement pour $\theta = 0.43$ et $\theta = 4.33$ en modélisant les contraintes solides par une rhéologie $\mu(I)$. On peut noter qu'en augmentant le nombre de Shields, on augmente de manière significative la taille de la couche en mouvement ainsi que l'amplitude de la vitesse de la phase solide. En s'intéressant plus particulièrement au profil des vitesses de la phase solide au niveau de l'interface fluide/milieu granulaire ($\bar{y} = 0.5$), on peut noter qu'ils présentent des comportements différents suivant le nombre de Shields. Pour $\theta >> \theta^c$, la vitesse du mélange et de la phase solide sont pratiquement superposées sur toute l'épaisseur du solide en mouvement [figure 4.7 (c)]. Pour des nombres de Shields de l'ordre de θ^c, on observe une nette séparation entre la vitesse du mélange et celle de la phase solide, ainsi qu'un fort raidissement de la vitesse de la phase solide au niveau de l'interface [figure 4.7 (b)]. Ce raidissement n'existe pratiquement pas pour $\theta >> \theta^c$ [figure 4.7 (c)].
La figure 4.7 (d) représente l'évolution de $\mu_s \bar{p}^p$ et de $\bar{\tau}^p$ en fonction de $\bar{y}$ pour $\theta = 0.43$. On observe qu'il existe une petite zone au niveau de l'interface fluide/milieu granulaire pour laquelle $\bar{\tau}^p < \mu_s \bar{p}^p$. Cette relation se traduit par un cisaillement nul du milieu granulaire, c'est-à-dire une vitesse de la phase solide constante. Le fait que $\bar{\tau}^p$ soit inférieur à $\mu_s \bar{p}^p$ est dû aux conditions aux bords. Au niveau de l'interface, la contrainte solide est nulle. Elle passe de manière continue de 0 à $\mu_s p^p$ sur une épaisseur qui correspond à la zone sur laquelle $\bar{\tau}^p < \mu_s \bar{p}^p$. La taille de cette zone dépend de la rhéologie utilisée, de la variation de la fraction volumique solide et du

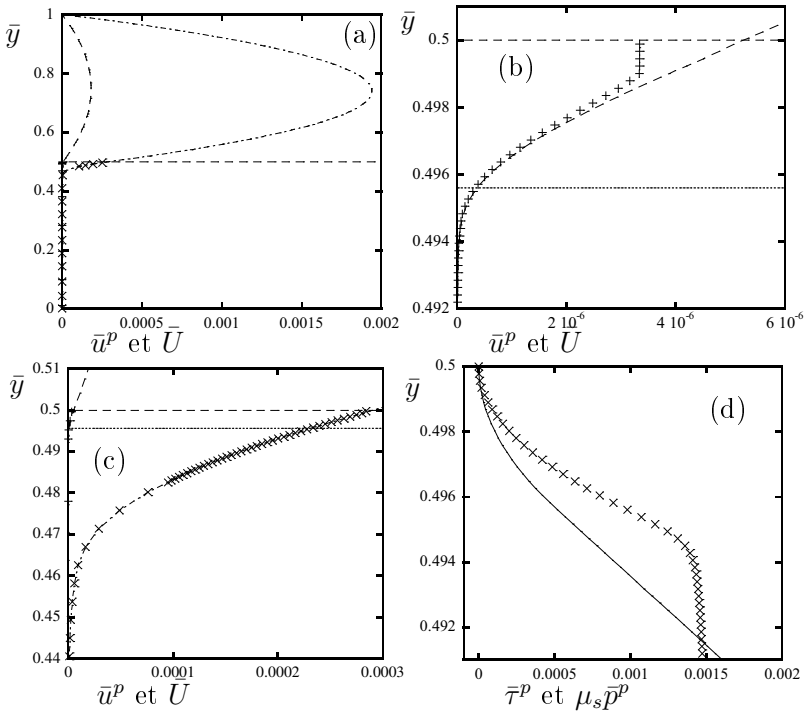


FIG. 4.7 – (a) Vitesses adimensionnées du solide et du mélange calculées numériquement pour des données expérimentales correspondant aux billes A dans le fluide 3 pour $\theta = 0.43$ [$\bar{U}$ (- -) et $\bar{u}^p$ (+)] et pour $\theta = 4.33$ [$\bar{U}$ (-.-) et $\bar{u}^p$ ($\times$)], (b) zoom sur les premières couches du milieu granulaire pour $\theta = 0.43$, (c) zoom sur les premières couches du milieu granulaire pour $\theta = 4.3$ et (d) évolution de la contrainte solide $\bar{\tau}^p$ ($\times$) et de $\mu_s\bar{p}^p$ ($-$) pour $\theta = 0.43$ en fonction de la hauteur adimensionnée $\bar{y}$. La ligne horizontale en tirets représente l'interface et celle en pointillés représente la première couche de bille.

nombre de Shields. Pour une rhéologie de type Coulomb, cette zone est très petit et le raidissement de la vitesse solide est à peine perceptible.

Pour obtenir une forme analytique simple du flux du particules et valider la résolution numérique, nous avons choisi de résoudre analytiquement dans des cas asymptotiques le système (4.30), (4.31), (4.32) et (4.33) en choisissant les fermetures les plus simples possibles. La résolution analytique ainsi que la comparaison avec les résultats expérimentaux sont détaillées dans l'article *Bed-load transport by shearing flows* qui est actuellement en préparation pour *Journal of Fluid Mechanics*.

4.3 Article

Bed-load transport by shearing flows

By MALIKA OURIEMI, PASCALE AUSSILLOUS, AND ÉLISABETH GUAZZELLI

IUSTI - CNRS UMR 6595, Polytech' Marseille, Technopôle de Château-Gombert, 13453 Marseille cedex 13, France

(Received 25 July 2007)

The objective of the present work is to provide a continuum approach describing the threshold for particle motion as well as the bed-load transport in laminar shearing flows. We propose to use a two-phase model having a Newtonian rheology for the fluid-phase and friction for the particle phase. The equations are shown to reduce to the momentum equation for the mixture and the Brinkman equation for the fluid velocity. We obtain the velocity profiles for the fluid and the particles inside the bed as well as the bed-load thickness, particle flow-rate, and the Shields number, θ, at the top of the bed. The critical shields number, θ^c, is found to be proportional to the tangent of the angle of repose and to the particle volume fraction, ϕ_0, in the bulk of the bed, independently of the specific shearing flow used and in excellent agreement with experimental data. The bed-load flow rate has a viscous scaling and is approximately proportional to $\phi_0\theta^3/\theta^{c2}$, independently of the chosen shearing flow. This formulation seems quite satisfactory for describing experimental data of bed-load transport in pipe flows.

1. Introduction

When beds constituted of sediment particles are submitted to shearing flows, the particles at the surface of the stream-bed are able to move as soon as hydrodynamic forces acting on them exceed a fraction of their apparent weight. Bed-load refers to the sediment in transport that is carried by intermittent contact with the stream-bed by rolling, sliding, and bouncing. This situation occurs in a wide variety of natural phenomena, such as sediment transport in rivers, and in industrial processes, such as hydrate or sand issues in oil production and granular transport in food or pharmaceutical industries. Despite the amount of work devoted to the subject for more than a century, a complete description of the mechanics of bed-load transport is still lacking as the coupling between the granular medium and the fluid flow is poorly understood.

The common way of representing the incipient motion of the particles is to use a dimensionless number called the Shields number, θ, which is constructed as the ratio of the shear stress at the top of the bed to the apparent weight of a single particle and which exceeds a critical value at threshold of motion, θ^c. Most of the studies usually attempt to provide this critical Shields number, θ^c, as well as to relate the bed-load flow-rate, q_p, to the excess Shields number, $\theta - \theta^c$.

The oldest and still widely used model to determine θ^c is to write a balance of forces on the grains at the top of the sheared bed, see e.g. White (1940) and Vanoni (1966). The threshold value is found to be proportional to the tangent of the angle of repose of the grains. The empirical pre-factor depends on the local packing of the bed but also on the treatment of forces. Most of the existing experimental data concerns the

Authors	Method	$q_p\sqrt{\frac{\rho_f}{\Delta\rho g d^3}}$
Einstein (1942)	empirical	$e^{0.391\frac{1}{\theta}}\dfrac{\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{36\eta^2}{gd^3\rho_f\Delta\rho}}-\sqrt{\frac{36\eta^2}{gd^3\rho_f\Delta\rho}}}{0.465}$
Meyer-Peter & Muller (1948)	empirical	$8\,(c_2c_3\theta-\theta^c)^{1.5}$
Einstein (1950)	semi-empirical	$\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-0.156f\frac{1}{\theta}-2}^{0.156f\frac{1}{\theta}-2}e^{-t^2}dt}{27f_c\left(2-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-0.156f\frac{1}{\theta}-2}^{0.156f\frac{1}{\theta}-2}e^{-t^2}dt\right)}$
Bagnold (1956)	semi-empirical	$8.5\sqrt{2\tan\alpha/(3\psi)}(\theta-\theta^c)\theta^{0.5}$
Yalin (1963)	semi-empirical	$\left[1-\dfrac{\log(1+2.45\left(\frac{\rho_f}{\rho_p}\right)^{0.4}\theta^{c0.5}\left(\frac{\theta}{\theta^c}-1\right))}{2.45\left(\frac{\rho_f}{\rho_p}\right)^{0.4}\theta^{c0.5}\left(\frac{\theta}{\theta^c}-1\right)}\right]\times 0.635\left(\dfrac{\theta}{\theta^c}-1\right)$
Ribberink (1998)	empirical	$10.4\,(\theta-\theta^c)^{1.67}$
Camemen & Larson (2005)	empirical	$12\,\theta^{1.5}e^{-4.5\frac{\theta^c}{\theta}}$
Wong & Parker (2006)	empirical	$4.93\,(\theta-\theta^c)^{1.60}$

TABLE 1. Various expressions proposed in the literature for turbulent flow, where c_2 is a side-wall correction, c_3 a bed-form correction, f_c the percentage of grains of a given size put into motion, f the correction function obtained experimentally for grain size dispersion, ψ the drag coefficient, ρ_p the density of the solid, ρ_f the density of the fluid ($\Delta\rho=\rho_p-\rho_f$), η the viscosity of the fluid, d the particle diameter, and $\tan\alpha$ the dynamic friction coefficient.

Authors	Method	$q_p\frac{\eta}{\Delta\rho g d^3}$
Charru & Mouilleron-Arnould (2002)	semi-empirical	$0.42\,(\theta-\theta^c)^3$
Cheng (2004)	semi-empirical	$\dfrac{\eta}{\sqrt{\Delta\rho g d^3\rho_f}}41\,\theta^{0.5}Re_*\times[\sinh(0.139\,\theta^{1.181}Re_*^{0.39})]^2$
Charru *et al.* (2002)	empirical	$0.025\,\theta\,(\theta-\theta^c)$
Charru & Hinch (2006)	semi-empirical	$0.096N\dfrac{\theta}{\theta^c}$

TABLE 2. Various expressions proposed in the literature for laminar flow, where $Re_*=u_*d\rho_f/\eta$ is the shear Reynolds number, u_* the shear velocity, and N the number of particles in motion per area.

turbulent regime and present large scatters which are due to the difficulty of defining as well as measuring the quantities of interest such as the shear rate and incipient motion, see Buffington & Montgomery (1997), Dancey *et al.* (2002), Paintal (1971), Vanoni (1966), and White (1940). Recent experiments in laminar flows have provided reproducible measurements for the onset of grain motion and inferred $\theta^c \approx 0.12$ for a wide range of small particle Reynolds number in closed channel, see Charru *et al.* (2002), Loiseleux *et al.* (2005), Ouriemi *et al.* (2007).

Several expressions have been proposed for the bed-load flow-rate, q_p, some of them are presented in tables 1 and 2. Again, most of the empirical or semi-empirical laws have been obtained in the turbulent regime. Notably, the same scaling, $\sqrt{\Delta\rho g d^3/\rho_f}$, for q_p found by dimensional analysis is used in these expressions. A viscous scaling, $\Delta\rho g d^3/\eta$, is generally obtained for laminar flows. Despite the fact that the modelling is based on firm physical concepts, see Einstein (1950), Bagnold (1956), Yalin (1963), Charru & Mouilleron-Arnould (2002), and Charru & Hinch (2006), the semi-empirical laws proposed have limited general validity and may not match each other.

The objective of the present paper is to provide a continuum approach describing the threshold for particle motion as well as the bed-load transport in the laminar viscous case. We propose the use of a two phase model having a Newtonian rheology for the fluid-phase and friction for the particulate phase, see § 2. For the purpose of the present study, the equations are shown to reduce to the momentum equation for the mixture and the Brinkman equation for the fluid velocity. Calculations of bed-load transport by shearing flows are performed numerically but also analytically in asymptotic cases, see § 3. These predictions are compared to experimental results obtained for a bed composed of spherical particles in laminar pipe flow, see § 4 and § 5.

2. Two-phase model

Many authors have derived two-phase governing equations to describe a system of particles and fluid in an average sense. There is an extensive literature around the process of averaging the equations of motion, for a review see e.g. Jackson (2000). Each type of averaging is purely a formal process and should led to essentially the same results if properly done. It generates averaged quantities more numerous than the available equations and therefore there is a closure problem which is a central issue in the modelling. There is no guarantee though that such a closure is possible. Here, we choose to use the equations derived by Anderson & Jackson (1967), see also Jackson (1997) and Jackson (2000), and propose some closures appropriate to the present problem.

2.1. *Two-phase equations*

The equations of continuity for the fluid and the particle phases are respectively

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\epsilon u_i^f)}{\partial x_i} = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(\phi u_i^p)}{\partial x_i} = 0, \tag{2.2}$$

where u_i^f is the local mean fluid velocity, u_i^p the local mean particle velocity, ϕ the particle volume fraction, and $\epsilon = 1 - \phi$ the void fraction or fraction of space occupied by the fluid.

Adding equations (2.1) and (2.2), the mixture (particles + fluid) is found to be incom-

pressible (no acceleration of the mixture)

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \tag{2.3}$$

where $U_i = \phi\, u_i^p + \epsilon\, u_i^f$ is the volume average velocity.

The momentum equations for the fluid and particle phases are respectively

$$\rho_f \frac{D_f(\epsilon u_i^f)}{Dt} = \rho_f \left[\frac{\partial(\epsilon u_i^f)}{\partial t} + \frac{\partial(\epsilon u_i^f u_j^f)}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_j} - n f_i + \epsilon \rho_f g_i, \tag{2.4}$$

$$\rho_p \frac{D_p(\phi u_i^p)}{Dt} = \rho_p \left[\frac{\partial(\phi u_i^p)}{\partial t} + \frac{\partial(\phi u_i^p u_j^p)}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial \sigma_{ij}^p}{\partial x_j} + n f_i + \phi \rho_p g_i, \tag{2.5}$$

where g_i is the specific gravity force vector, ρ_f the fluid density, ρ_p the particle density, n the number density (number of particles per unit volume). The force f_i represents the average value of the resultant force exerted by the fluid on a particle. The stress tensors σ_{ij}^f and σ_{ij}^p may be regarded as effective stress tensors associated with the fluid and particle phases, respectively.

2.2. *Closures*

Following Jackson (2000), the local average force exerted by the fluid on a particle $n f_i$ is decomposed into a generalised buoyancy force and a force which gathers all the remaining contributions

$$n f_i = \phi \frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_j} + n f_i^1. \tag{2.6}$$

In the case considered here of a viscous flow through a particle bed, the remaining contribution reduces to the dominant viscous drag caused by the relative motion. Extending the well-known empirical law of Darcy, $n f_i^1$ can be written as

$$n f_i^1 = \eta \frac{\epsilon^2}{K}(u_i^f - u_i^p) = \eta \frac{\epsilon}{K}(U_i - u_i^p), \tag{2.7}$$

where η is the viscosity of the pure fluid. The coefficient of permeability K is empirically related to ϵ and the particle diameter d by the Carman-Kozeny relation

$$K = \frac{\epsilon^3 d^2}{k\,(1-\epsilon)^2}, \tag{2.8}$$

with $k \approx 180$, see e.g. Happel & Brenner (1983) and Goharzadeh, Khalili, & Jørgensen (2005).

We assume that the effective stress tensor associated with the fluid phase σ_{ij}^f is of Newtonian form and is related to the volume average velocity by the relation

$$\sigma_{ij}^f = -p^f \delta_{ij} + \tau_{ij}^f = -p^f \delta_{ij} + \eta_e \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \tag{2.9}$$

where η_e is the effective viscosity of the mixture. The choice of this Newtonian form for the σ_{ij}^f can be justified for dilute suspensions of Stokesian particles by exact closure calculations done by Zhang & Properetti (1997) and Jackson (1997). In that limit, the familiar Einstein correction to the viscosity of the pure fluid $\eta_e = \eta(1+5\phi/2)$ is recovered. For non dilute suspensions, one needs to rely on empirical relations expressing η_e/η as a function of ϕ, see e.g. Stickel & Powel (2005). Following Goharzadeh, Khalili, & Jørgensen (2005), we choose for simplicity the Einstein viscosity in § 3 and will discuss other empirical laws in § 5.

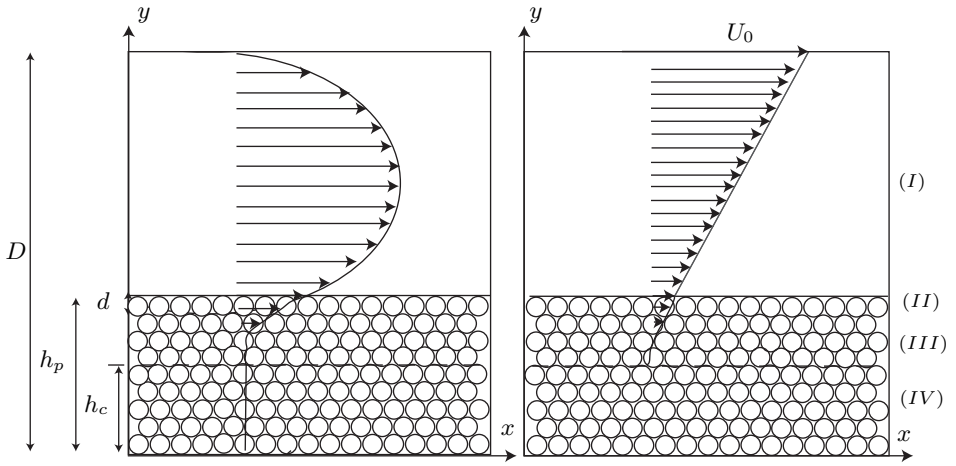


FIGURE 1. Sketch of a particle bed submitted to a Poiseuille (left) or a Couette (right) flow in a two dimensional channel.

The stress tensor of the particle phase σ^p_{ij} comprises a term coming from the particle contact interactions and the particle Reynolds stress. Clearly, for a bed of particles, close contacts are dominant. The simplest way to describe this stress coming from direct particle-particle interactions

$$\sigma^p_{ij} = -p^p \delta_{ij} + \tau^p_{ij} \tag{2.10}$$

is to use a Coulomb friction model where the tangential stress is proportional to the load with a friction coefficient μ which mostly depends upon the particle geometry and which is given by the tangent of the angle of repose. This simple Coulomb model will be used in § 3. In § 5, we will also consider a constitutive law which has been first derived for dry granular flows and has been then found successful for submarine granular flows, see GDR Midi (2004), Jop, Forterre & Pouliquen (2006), Cassar, Nicolas & Pouliquen (2005), and Pouliquen Cassar, Forterre, Jop, & Nicolas (2005).

3. Calculation of bed-load transport by shearing flows

3.1. *Formulation of the problem*

We consider a flat particle bed of thickness h_p submitted to a Poiseuille or a Couette flow in a two dimensional channel of thickness D, see figure 1. The flow is considered stationary and uniform. It is also parallel and the velocities U_i, u^f_i, u^p_i reduce to their x components noted U, u^f and u^p. Moreover, the x-invariance leads to $\partial p^p/\partial x = 0$. This also gives $\partial p^f/\partial x = 0$ in the case of a Couette flow whereas $\partial p^f/\partial x$ is a given constant in the case of a Poiseuille flow. With these assumptions, continuity equations (2.1), (2.2), and (2.3) show that U, u^f and u^p are sole functions of y.

We have the choice of length scale and time scale and since we do not know a priori what would be the correct scalings, we decide to make all the values dimensionless by scaling the length by the channel thickness D and the pressure by the hydrostatic pressure $\Delta\rho g D$, and therefore the time by $\eta/\Delta\rho g D$ where $\Delta\rho = \rho_p - \rho_f$. Using these scales and the proposed closures (2.7), (2.9), and (2.10), we obtain the dimensionless momentum equations

$$0 = -\epsilon \frac{\partial(\delta_{ij}\bar{p}^f)}{\partial \bar{x}_j} + \epsilon \frac{\partial \bar{\tau}^f_{ij}}{\partial \bar{x}_j} - \frac{\epsilon^2 D^2}{K}(\bar{u}^f_i - \bar{u}^p_i) + \epsilon \frac{\rho_f}{\Delta\rho}\frac{g_i}{|g|}, \tag{3.1}$$

$$0 = \frac{\partial \bar{\tau}^p_{ij}}{\partial \bar{x}_j} - \frac{\partial(\delta_{ij}\bar{p}^p)}{\partial \bar{x}_j} - \phi\frac{\partial(\delta_{ij}\bar{p}^f)}{\partial \bar{x}_j} + \phi\frac{\partial \bar{\tau}^f_{ij}}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\epsilon^2 D^2}{K}(\bar{u}^f_i - \bar{u}^p_i) + \phi\frac{\rho_p}{\Delta\rho}\frac{g_i}{|g|}. \quad (3.2)$$

The projection of these equations gives along the x direction

$$0 = -\epsilon\frac{\partial \bar{p}^f}{\partial \bar{x}} + \epsilon\frac{\partial \bar{\tau}^f_{xy}}{\partial \bar{y}} - \frac{\epsilon^2 D^2}{K}(\bar{u}^f - \bar{u}^p), \quad (3.3)$$

$$0 = \frac{\partial \bar{\tau}^p_{xy}}{\partial \bar{y}} - \phi\frac{\partial \bar{p}^f}{\partial \bar{x}} + \phi\frac{\partial \bar{\tau}^f_{xy}}{\partial \bar{y}} + \frac{\epsilon^2 D^2}{K}(\bar{u}^f - \bar{u}^p), \quad (3.4)$$

and along the y direction

$$\frac{\partial \bar{p}^f}{\partial \bar{y}} = -\frac{\rho_f}{\Delta\rho}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \bar{p}^p}{\partial \bar{y}} = -\phi, \quad (3.6)$$

showing that the pressure of the fluid phase along gravity is simply the hydrostatic pressure and that the pressure of the particle phase is proportional to the apparent weight of the solid phase and increases when penetrating inside the bed.

By expressing $\bar{u}^f$ in terms of the volume average velocity $\bar{U}$, equation (3.3) becomes

$$-\frac{\partial \bar{p}^f}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial \bar{\tau}^f_{xy}}{\partial \bar{y}} + \frac{D^2}{K}(\bar{U} - \bar{u}^p), \quad (3.7)$$

where the pressure gradient mostly balances the dominant Darcy term. By summing equation (3.3) and (3.4), we find the mixture (fluid + particles) momentum equation

$$0 = \frac{\partial \bar{\tau}^p_{xy}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{p}^f}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\tau}^f_{xy}}{\partial \bar{y}}, \quad (3.8)$$

which describes the exchange between the stress of the fluid phase, $\bar{\tau}^f_{xy} = (\eta_e/\eta)(d\bar{U}/d\bar{y})$, and that of the solid phase, $\bar{\tau}^p_{xy} = \mu\bar{p}^p$ when $d\bar{u}^p/d\bar{y} > 0$. The two above equations will be used used to solve the present problem. We note that the relevant equations are the Brinkman equation for the fluid phase (3.7), see Brinkman (1947a) and Brinkman (1947b), and the momentum balance equation for the mixture (3.8).

In the case of a Poiseuille flow, the kinematic boundary conditions are

$$\bar{u}^f(1) = \bar{U}(1) = 0 \quad \text{and} \quad \bar{u}^f(0) = \bar{u}^p(0) = \bar{U}(0) = 0. \quad (3.9)$$

In the case of a Couette flow, only the first condition is changed to $\bar{u}^f(1) = \bar{U}(1) = \bar{U}_0$.

At the top of the bed, $\bar{y} = \bar{h}_p$, we also have

$$\bar{\tau}^p_{xy}(\bar{h}_p) = 0 \quad \text{and} \quad \bar{p}^p(\bar{h}_p) = 0, \quad (3.10)$$

as there is no particle phase for $\bar{y} \geqslant \bar{h}_p$. Using the first condition of formulae (3.10), equation (3.8) can be integrated to give

$$\bar{\tau}^p_{xy}(\bar{y}) = -\frac{\partial \bar{p}^f}{\partial \bar{x}}(\bar{h}_p - \bar{y}) + \bar{\tau}^f_{xy}(\bar{h}_p) - \bar{\tau}^f_{xy}(\bar{y}). \quad (3.11)$$

At the top of the granular bed, $\bar{y} = \bar{h}_p$, only a tangential fluid stress $\bar{\tau}^f_{xy}(\bar{h}_p)$ is present. When penetrating inside the bed, this stress splits into a fluid stress which tends to put the granular media in motion and a particle stress which balances the motion. As it is proportional to the confinement pressure $\bar{p}^p$, the particle stress increases inside the bed until it becomes sufficient for inhibiting the granular motion at $\bar{y} = \bar{h}_c$. For $\bar{y} \leqslant \bar{h}_c$, the

Region	$\bar{U}$	$\bar{u}^p$	$\bar{p}^p$
(I)	$\frac{\partial \bar{p}^f}{\partial \bar{x}} \frac{\bar{y}^2-1}{2} + \left[-\frac{\partial \bar{p}^f}{\partial \bar{x}} \bar{h}_c + \mu\phi_0(\bar{h}_p - \bar{h}_c - \frac{\bar{d}}{2})\right](\bar{y}-1)$	undefined	0
(II)	$-\frac{\eta}{\eta_e}\mu\phi_0 \frac{(\bar{y}-\bar{h}_p+\bar{d})^3}{6\bar{d}} + \frac{\eta}{\eta_e}\left(\mu\phi_0 + \frac{\partial \bar{p}^f}{\partial \bar{x}}\right)\frac{(\bar{y}-\bar{h}_c)^2}{2}$	$\bar{U}$	$\frac{\phi_0}{2\bar{d}}(\bar{y}-\bar{h}_s)^2$
(III)	$\frac{\eta}{\eta_e}\left(\mu\phi_0 + \frac{\partial \bar{p}^f}{\partial \bar{x}}\right)\frac{(\bar{y}-\bar{h}_c)^2}{2}$	$\bar{U}$	$\phi_0(\bar{h}_p - \bar{y} - \bar{d}/2)$
(IV)	0	0	$\phi_0(\bar{h}_p - \bar{y} - \bar{d}/2)$

TABLE 3. Volume averaged velocity, particle velocity and pressure.

$\bar{h}_p - \bar{h}_c$	$\frac{\eta_e}{\eta}(1-\bar{h}_p)\left\{-1+\left[1-\frac{-\mu\phi_0\left(\frac{\eta}{\eta_e}\right)^2 \frac{\bar{d}^2}{3(1-h_p)^2} - \frac{\eta}{\eta_e}\mu\phi_0\frac{\bar{d}}{1-h_p} + \frac{\eta}{\eta_e}\frac{\partial \bar{p}^f}{\partial \bar{x}}}{\frac{\partial \bar{p}^f}{\partial \bar{x}} + \mu\phi_0}\right]^{1/2}\right\}$
$\bar{q}_p$	$\frac{\eta}{\eta_e}\phi_0\left(\mu\phi_0 + \frac{\partial \bar{p}^f}{\partial \bar{x}}\right)\left[\frac{(\bar{h}_p-\bar{h}_c)^4 - (\bar{h}_p-\bar{h}_c-\bar{d})^4}{24\bar{d}}\right] - \frac{\eta}{\eta_e}\mu\phi_0^2\frac{\bar{d}^3}{120}$
θ	$\frac{(\bar{h}_p-\bar{h}_c)}{\bar{d}}\left(\frac{\partial \bar{p}^f}{\partial \bar{x}} + \mu\phi_0\right) - \frac{\mu\phi_0}{2}$

TABLE 4. Bed-load thickness, particle flow rate, and Shields number.

particle stress is indeterminate, and equation (3.8) must be substituted with

$$\frac{d\bar{u}^p}{d\bar{y}} = 0. \tag{3.12}$$

The flow can be separated into four regions which are depicted in figure 1. Region (I) corresponds to the pure fluid above the bed ($\bar{h}_p \leqslant \bar{y} \leqslant 1$). Region (IV) is the region of the bed where the particles are at rest ($0 \leqslant \bar{y} \leqslant \bar{h}_c$). Regions (II) and (III) are those where both the fluid and particles are in motion. Region (III) corresponds to a granular media in motion with a constant porosity $\epsilon_0 = 1 - \phi_0$ ($\bar{h}_c \leqslant \bar{y} \leqslant \bar{h}_p - \bar{d}$). Region (II) is the transition layer between the pure fluid region (I) and the pure Darcy region (III). The thickness of this region has been observed to be of the size of a grain diameter $\bar{d}$ and to have a porosity which varies linearly with thickness as $\epsilon(\bar{y}) = 1 + \phi_0(\bar{y} - \bar{h}_p)/\bar{d}$ ($\bar{h}_p - \bar{d} \leqslant \bar{y} \leqslant \bar{h}_p$), see Goharzadeh, Khalili, & Jørgensen (2005).

The problem is solved both analytically and numerically for the case of a Poiseuille flow in the following subsections and the main results are summarised in appendix A for the case of a Couette flow.

3.2. *Analytical calculation*

For simplicity, we suppose that $\eta_e = \eta_e(\phi_0)$ and $K = K(\phi_0)$ are constant in region (II) and identical to their respective values in regions (III), and (IV). Equations (3.6), (3.7), (3.11) or (3.12) are solved to determine $\bar{p}^p(\bar{y})$, $\bar{U}(\bar{y})$, and $\bar{u}^p(\bar{y})$ in each regions by matching $\bar{U}$ and $\bar{p}^p$ at the different interfaces and using the boundary conditions (3.9)

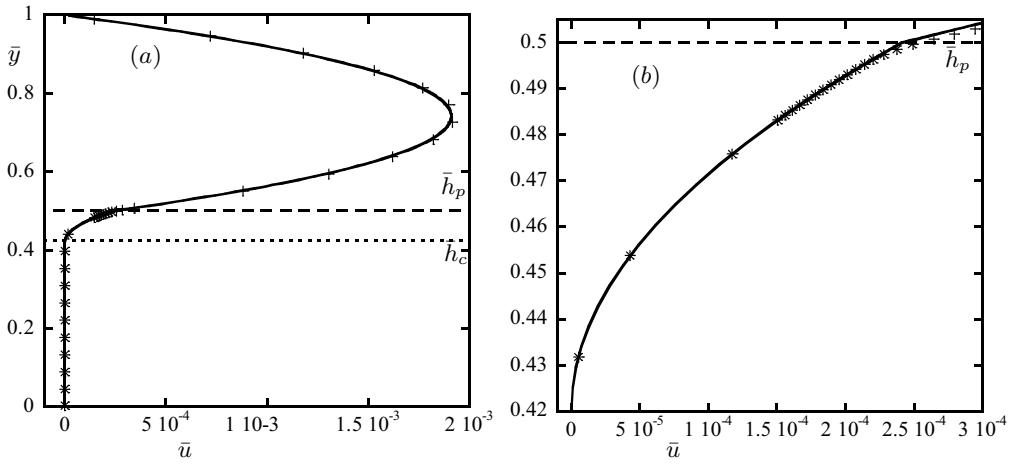


FIGURE 2. (a) Numerical velocity profiles for the fluid (+) and the particles (×) and analytical velocity profiles for the fluid and the particles (−) in the case of particles of batch A in fluid 3 at $\phi_0 = 0.55$ and $q_f = 6.2\ 10^{-3}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$. (b) Blow-up of the profiles for the same conditions.

in the limit $K(\phi_0) \ll h^2$, see table 3. Inside the bed, both particle and fluid phases move at the velocity of the mixture as the Darcy drag term is dominant in that limit, i.e. $\bar{u}^p \approx \bar{u}^f \approx \bar{U}$ in regions (II), (III), and (IV). Above the bed ($\bar{h}_p \leqslant \bar{y} \leqslant 1$), the fluid flow is a slightly asymmetric Poiseuille flow having a slip velocity at the top of the bed, see figure 2. This determination also yields the bed-load thickness, $\bar{h}_p - \bar{h}_c$, the particle and fluid flow-rates

$$\bar{q}_p = \int_0^{\bar{h}_p} \phi\, \bar{u}^p d\bar{y} \quad \text{and} \quad \bar{q}_f = \int_0^1 \epsilon\, \bar{u}^f d\bar{y}, \tag{3.13}$$

and the Shields number at the top of the bed

$$\theta = \frac{1}{\bar{d}} \frac{d\bar{u}^f}{d\bar{y}}(\bar{h}_p), \tag{3.14}$$

given as a function of the bed-load thickness, $\bar{h}_p - \bar{h}_c$, in table 4.

We consider that the critical Shields number, θ^c, is given by the value of θ for $\bar{h}_p - \bar{h}_c = \bar{d}$, i.e. for a single grain layer in motion. This yields

$$\theta^c = \frac{\partial \bar{p}^f}{\partial \bar{x}} + \mu \frac{\phi_0}{2} \approx \mu \frac{\phi_0}{2}, \tag{3.15}$$

as $\partial \bar{p}^f / \partial \bar{x} = O(\bar{d})$ at incipient motion. We recover that this threshold value is proportional to the tangent of the angle of repose. Another interesting finding is that it is also proportional to the particle volume fraction in the bulk of the bed.

In the limit $Re_{2D} << (\mu_s \phi_0/12) \left[(D - h_p)^3 / d^3 \right] Ga$ with $Ga = \Delta\rho\rho_f g d^3/\eta^2$ and $Re_{2D} = \rho_f q_f / \eta$, one finds

$$\theta = 6 \frac{d^2}{D^2} \frac{Re_{2D}}{Ga} \left(\frac{D}{D - h_p} \right)^2, \tag{3.16}$$

showing that the perturbation induced to the Poiseuille flow by the motion of the granular media is negligible. In other words, this Shields number corresponds to the case of a Poiseuille flow comprising a flat solid bed of height h_p, see Ouriemi *et al.* (2007). The

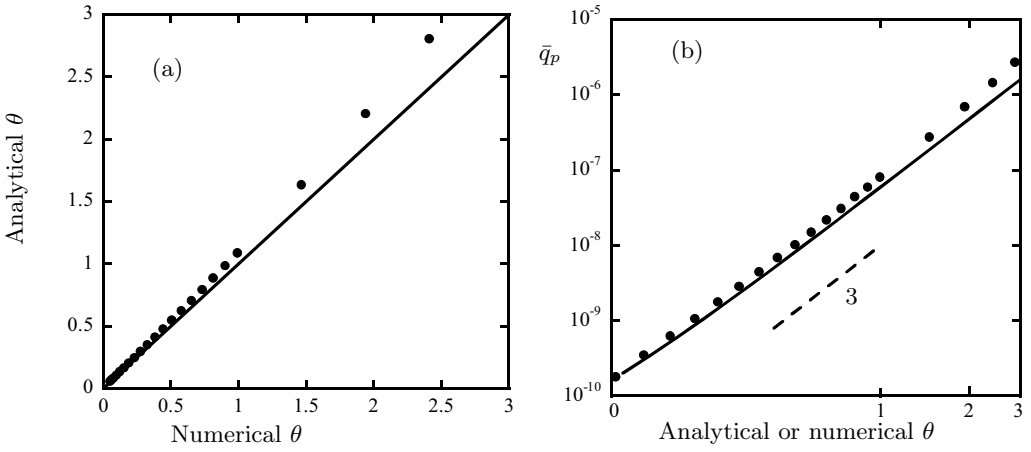


FIGURE 3. (a) Analytical Shields number [equation (3.16)] versus numerical Shields number in the case of particles of batch A in fluid 3. The solid line represents the slope one. (b) Adimensional analytical solid flux $\bar{q}_p$ $(-)$ [equation (3.17)] versus analytical θ [equation (3.16)] and adimensional numerical solid flux $\bar{q}_p$ $(\bullet)$ versus numerical θ in the case of particles of batch A in fluid 3. The dashed line $(--)$ represents the slope 3.

bed-load flow-rate given in table 4, q_p, can be further simplified to give

$$q_p/\frac{\Delta\rho g d^3}{\eta_e} = \phi_0 \frac{\theta^c}{12}\left[\frac{\theta}{2\theta^c}\left(\frac{\theta^2}{\theta_c^2}+1\right)-\frac{1}{5}\right] = \phi_0 f(\theta^c,\theta), \tag{3.17}$$

which has a viscous scaling built on the effective viscosity $\eta_e(\phi_0)$. The dimensionless particle flux is proportional to the particle volume fraction in the bulk of the bed and to a function of θ^c and θ and not simply of the excess Shields number $\theta - \theta^c$. These quantities of practical interest are plotted in figure 3 for $h_p = 0.5D$ and varying flow rate. We have chosen $\phi_0 = 0.55$ which yields $\theta^c = 0.12$ with $\mu = 0.43$ as deduced by Cassar, Nicolas & Pouliquen (2005) for glass spherical particles.

3.3. *Numerical calculation*

As indicated in § 2.2, we use the Einstein viscosity for η_e and the Carman-Kozeny relation (2.8) with $k = 180$ for the coefficient of permeability K. The only unknown parameters (which can be measured independently) are then ϕ_0 and μ. The system of linear ordinary-differential-equations (3.7) and (3.11) or (3.12) together with the boundary conditions (3.9) and the integrated $\bar{p}^p$ deduced from (3.6) have been solved using a finite difference method with a non uniform grid which is chosen to be more refined near the interfaces.

The difficulty is to find the different domain of validity of equations (3.11) and (3.12) inside the bed. First, we suppose that equation (3.11) is valid everywhere in the granular media. The fluid and solid velocity profile can be computed as shown in figure 4 (a) and $d\bar{u}^p/d\bar{y}$ can be found to be negative in some locations. Secondly, equation (3.11) is replaced by equations (3.12) at these locations and the velocity profiles are again calculated as seen in figure 4 (b). This process is iterated until $d\bar{u}^p/d\bar{y} \geqslant 0$ everywhere inside the bed, see figure 4 (c).

Figures 2 and 3 show that there is an good agreement between the numerical calculation and the simplified analytical calculations in their range of validity. The velocity profiles for the particles, fluid, and mixture inside the bed are superimposed, see figure 2 (a). This implies that $K(\phi_0) \ll D^2$ is verified inside the bed except very close to the interface where the numerical profile of the particle velocity becomes more sharpened as a result

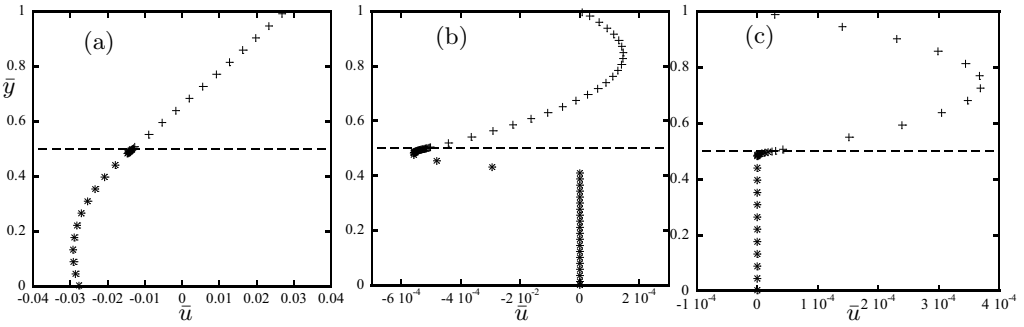


FIGURE 4. Numerical velocity profile for the fluid (+) and solid (×) phases at different steps of the computation in the case of particles of batch A in fluid 3 at $q_f = 1.85\ 10^{-3}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$.

Batch	Composition	d (μm)	ρ_p (g/cm^3)
A	Glass	132 ± 22	2.490 ± 0.003
B	Polystyrene	538 ± 24	1.051 ± 0.002
D	PMMA	193 ± 30	1.177 ± 0.002

TABLE 5. Particle characteristics

of the use of a variable permeability coefficient, see figure 2 (b). Along the same line, at the top of the bed (approximately at half a grain size from the top), the fluid analytical and numerical profiles do not coincide perfectly as a variable effective viscosity is used in the numerical calculation, see again figure 2 (b). Figure 3 (b) shows that the numerical and analytical [equation (3.17)] particle flow-rates coincide in the range of validity of equations (3.16) and (3.17), i.e. for $\theta \leqslant 1.5$. For $\theta > 1.5$, equation (3.16) overestimates θ, see figure 3 (a). Note that the log-log plots of figure 3 (b) present a slope in good agreement with the exponent 3, showing that $\bar{q}_p \sim \theta^3$, i.e. the θ^3 term dominates in equation (3.17).

4. Experimental measurements of bed-load transport in pipe flows

4.1. *Particles and fluids*

Three different batches of spheres (polystyrene particles supplied by Maxi-Blast, PMMA particles by Lehmann & Voss & Co., and glass particles by Potters-Ballotini) were used to perform the experiments. The particle size distributions were measured with a digital imaging system. The particle diameter distributions were observed to be approximately Gaussian for all the different batches and therefore well represented by a mean diameter d indicated in table 5 (the error corresponds to one standard deviation). The particle density ρ_p (also listed in table 5) was determined using a pycnometer and a fluid of measured density. Experiments were carried out using seven different mixtures of distilled water and UCON oil 75H-90000 supplied by Chempoint. The density ρ_f, listed in table 6, of these different mixtures was measured using a pycnometer. The viscosity η (also listed in table 6) was measured using a Falling Ball Viscometer from GILMONT INSTRUMENTS (Barrington, USA). The mixture was maintained at a constant temperature $T = 35°\mathrm{C}$ during all the experiments.

Fluid	T (°C)	η (cP)	ρ_f (g/cm^3)
1	35	22 ± 2	1.031 ± 0.001
2	35	30 ± 2	1.036 ± 0.001
3	35	37 ± 2	1.038 ± 0.001
4	35	33 ± 2	1.038 ± 0.001
5	35	17 ± 1	1.029 ± 0.001

TABLE 6. Fluid characteristics

4.2. *Experimental apparatus*

The apparatus test section was a horizontal glass tube of inner diameter $D = 3$ cm. The tube had a length $L = 1.8$ m which is longer than the entry length $L_e \approx 60$ cm necessary for the laminar flow to fully develop at $Re_{pipe} \approx 300$, where $Re_{pipe} = 4Q_{pipe}\rho_f/\pi D\eta$ is the tube Reynolds number and $Q_{\rm pipe}$ the flow rate. All the experiments were performed for $Re_{pipe} < 300$. First, the tube was filled with fluid, a low flow rate was imposed, and a mixture of particles and fluid was carefully introduced using a funnel to build an uniform flat bed. Secondly, a constant flow rate was imposed. The pipe flow was driven by gravity using continuous overflow from an overhead tank the elevation of which was varied. At the outlet from the test section, the particles were captured by a mesh while the fluid was run into a thermostated fluid reservoir. From this lower reservoir, the fluid was continuously returned to the overflowing reservoir by a Moineau progressing cavity pump (PCM model MR2.6H24). This arrangement isolated the test section from the pump and insured a constant temperature $T = 35$°C across the whole experimental loop. Note that the captured particles were not re-injected into the test section. The flow rate, $Q_{\rm pipe}$, was determined by measuring a collected volume of the fluid at the outlet of the tube in a given time.

4.3. *Bed profile measurement*

For a combination of fluid and particles, the evolution of the bed height was recorded as a function of time for a given flow rate $Q_{\rm pipe}$ and starting with an initial height of the bed, h_p^{start}. The bed was illuminated by a laser sheet positioned perpendicularly to its surface and aligned with the tube length in its middle at a distance $L \approx 80$ cm from the entrance of the tube. The illuminated upper layer of particles intersecting the sheet (of length ≈ 5 cm) was imaged by a digital camera. The images were then analysed (with ImageJ available at http://rsb.info.nih.gov/ij/) to yield the position of the fluid-particle interface. Each image was thresholded to turn this interface into a white curve which was further eroded to a single-pixel-thick curve. After calibration, this provides a precise measurement of the fluid-particle interface. In order to perform the calibration, a grid was inserted into the tube filled with pure fluid. An image of this grid was then recorded under the same optical conditions used in interface-position measurements and the co-ordinates of its points were measured.

4.4. *Bed profile evolution*

We choose to be in the condition of bed-load transport, i.e. above the critical Shields number. Particles at the surface of the bed are then always set in motion by the fluid flow and are observed to roll and slide as can be seen in the accompanying movie. The bed-load thickness is of the order of a few particle layers. The temporal evolution of the bed height (averaged over the 5 cm of the measurement zone) measured at the middle of

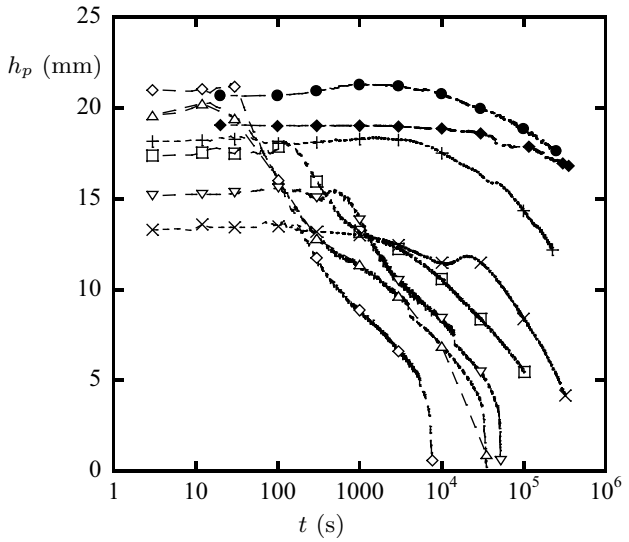


FIGURE 5. Temporal evolution of the bed height, h_p, for (i) batch A in fluid 2 with $Q_{pipe} = 6.45\ 10^{-6}\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ (•) and in fluid 4 with $Q_{pipe} = 5.21\ 10^{-6}\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ (⧫), (ii) for batch B in fluid 1 with $Q_{pipe} = 3.37\ 10^{-6}\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ (□), in fluid 5 with $Q_{pipe} = 6.98\ 10^{-6}\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ (△), in fluid 5 with $Q_{pipe} = 1.04\ 10^{-5}\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ (⋄), and in fluid 3 with $Q_{pipe} = 2.56\ 10^{-6}\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ (▽), and (iii) for batch C in fluid 3 with $Q_{pipe} = 2.13\ 10^{-6}\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ (+) and with $Q_{pipe} = 5.16\ 10^{-6}\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ (×).

the pipe is shown in figure 5. The bed height is always seen to decrease with increasing time as the test section is not fed in with particles. As expected, the bed height decrease is larger when increasing the flow rate and the viscosity for a given batch of particles and when decreasing the particle density for a given fluid. Note that, as the experiments are performed in a closed pipe, the Shields number evolves with the bed height. When the experiment is run for a long enough time (from one day to one week), the bed evolution eventually stops at a final bed height, h_p^{end}. This threshold for cessation of motion coincides with that for incipient motion as, by increasing the flow rate by a small amount, particle are set again in motion. Precise measurements of this critical bed height have provided the determination of the critical Shields number $\theta^c = 0.12 \pm 0.03$ in the same viscous laminar flows, see Ouriemi *et al.* (2007). In some cases, the tube can be completely emptied if the Shields number for the empty tube is larger than the critical Shields number.

5. Comparison and conclusion

We now compare the analytical predictions to the experimental data. First, we consider the prediction for the critical Shield number θ^c. Note that this prediction, $\theta^c = \mu\phi_0/2$, relies on the criterion that a single grain layer is in motion at threshold. It is proportional to the tangent of the angle of repose which has been evaluated $\mu = 0.43$ by Cassar, Nicolas & Pouliquen (2005) for spherical particles and to the particle volume fraction ϕ_0 in the bulk of the bed. This last quantity has not been measured experimentally but can be estimated to be in the range $0.55 \leqslant \phi_0 \leqslant 0.65$, see e.g. Goharzadeh, Khalili, & Jørgensen (2005). This gives a prediction 0.13 ± 0.01 in good agreement with the experimental measurements 0.12 ± 0.03 obtained in the same experimental conditions of viscous laminar flows by Ouriemi *et al.* (2007). We should point out

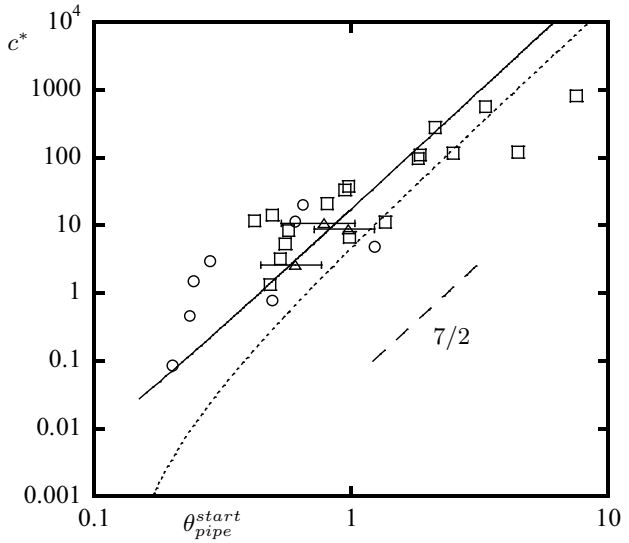


FIGURE 6. Dimensionless velocity, $c^* = \alpha L^*/t_p^*$, as a function of the initial Shields number, θ_{pipe}^{start} [equation (5.4)], for batch A ($\circ$), batch B ($\square$), and Batch C ($\triangle$). The solid line represents equation (5.3). The dotted line ($\cdots$) represents equation (5.5) using the semi-empirical law of Charru & Mouilleron-Arnould (2002) listed in table 2. The dashed line ($--$) represents the slope 7/2.

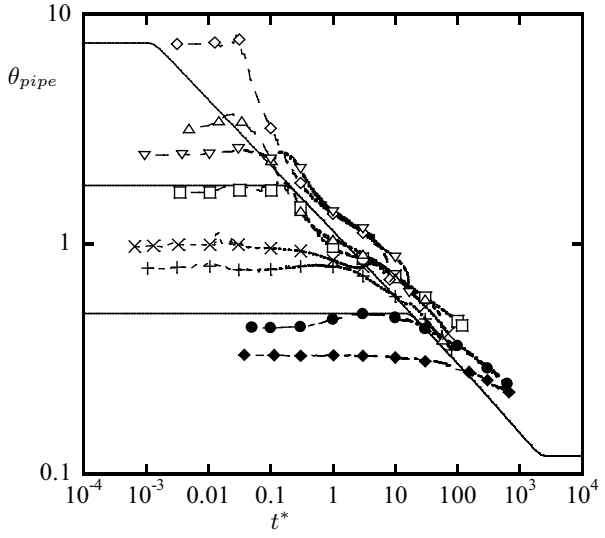


FIGURE 7. Dimensionless evolution of the Shields number θ_{pipe} [equation (5.4)] for batch A in fluid 2 with $Q_{pipe} = 6.45\ 10^{-6}\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ ($\bullet$), for batch A in fluid 4 with $Q_{pipe} = 5.21\ 10^{-6}\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ ($\blacklozenge$), for batch B in fluid 1 with $Q_{\mathrm{pipe}} = 3.37\ 10^{-6}\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ ($\square$), for batch B in fluid 5 with $Q_{\mathrm{pipe}} = 6.98\ 10^{-6}\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ ($\triangle$), for batch B in fluid 5 with $Q_{pipe} = 1.04\ 10^{-5}\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ ($\diamond$), for batch B in fluid 3 with $Q_{\mathrm{pipe}} = 2.56\ 10^{-6}\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ ($\triangledown$), for batch C in fluid 3 with $Q_{\mathrm{pipe}} = 2.13\ 10^{-6}\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ ($+$), and for batch C with $Q_{\mathrm{pipe}} = 5.16\ 10^{-6}\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ ($\times$). The solid line corresponds to the numerical integration of equation (5.2) for $\theta_{pipe}^{start} = 0.5$, $\theta_{pipe}^{start} = 1.8$, and $\theta_{pipe}^{start} = 7.5$.

that the theoretical prediction, $\theta^c = \mu\phi_0/2$, is independent of the specific shear flow used as it is identical for Poiseuille and Couette flows, see § 3 and appendix A. This is also confirmed by experiments as θ^c has been found to be ≈ 0.12 in the Couette apparatus of Charru *et al.* (2002) and in the Hele-Shaw cell of Loiseleux *et al.* (2005).

Secondly, we move to the prediction for the particle flux q_p. We do not have a direct experimental measurement of the particle flux but have the experimental evolution of the bed height which can be related to the particle flux by the particle flux conservation equation obtained by integrating the continuity equation (2.2) over D

$$\phi_0 \frac{\partial h_p}{\partial t} + \frac{\partial q_p}{\partial x} = 0. \tag{5.1}$$

Using equations (3.16) and (3.17), the mass conservation (5.1) can be written as a kinematic wave equation in dimensionless form

$$\frac{\partial \theta}{\partial t^*} + c^*(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x^*} = 0, \tag{5.2}$$

exhibiting now the Shields number θ instead of h_p and q_p. The length-scale is again D but the time-scale differs from that ($= \eta/\Delta\rho g D$) used in § 3 and has been chosen to be $= (6Re_{2D}/Ga)^{1/2}\,(D/d)(\eta_e/\Delta\rho g d)$. The dimensionless kinematic velocity

$$c^*(\theta) = \frac{1}{12}\theta^{3/2}\left(3\frac{\theta^2}{\theta^{c2}} + 1\right), \tag{5.3}$$

describes the propagation of a perturbation in Shields which is related to a perturbation in bed height. It becomes $\approx \theta^{7/2}/4\theta^{c2}$ for $\theta \gg \theta^c$.

To check the validity of this expression, we need to determine experimentally the kinematic velocity as well as the Shields number. We evaluate the arrival time t_p of the initial perturbation created at the entrance of the bed as the time for which the initial height has decreased of 0.5% at the measurement location L. The initial kinematic velocity is then experimentally defined as $\alpha L/t_p$ where the numerical factor $\alpha = 0.87$ corrects this criterion chosen for the arrival time evaluation. We also deduce the initial height h_p^{start} from the time-evolution curves of figure 5. The Shields number is now estimated to be

$$\theta_{pipe} = \frac{3}{2}\frac{d^2}{D^2}\frac{\pi\beta Re_{pipe}}{Ga}\left(\frac{D}{D-h_p}\right)^2 \tag{5.4}$$

which substitutes to equation (3.16) in the case of a pipe flow with $Re_{pipe} = 4\rho_f Q_{pipe}/\pi\eta D$ and with the numerical coefficient $\beta = 1.85$ in the limit $0.2 \leqslant 1 - h_p \leqslant 0.8$ as found by Ouriemi *et al.* (2007). The switch to this new formula for the Shields number is due to the switch from a shear rate $\dot{\gamma}_{2D} = 6(Q_{2D}/D^2)[D/(D-h_p)]^2$ in a plane flow to a shear rate $\dot{\gamma}_{pipe} = 6\beta(Q_{pipe}/D^3)[D/(D-h_p)]^2$ in a truncated pipe flow where the coefficient β is found from numerical analysis. In figure 6, the dimensionless initial kinematic velocity is plotted versus the initial Shields number defined by equation (5.4) with $h_p = h_p^{start}$. The data collapse on a master curve which suggests that the time-scale found theoretically is appropriate. The theoretical curve for $c^*(\theta)$ is in good agreement with the data when $\mu = 0.43$, $\phi_0 = 0.55$, and $\eta_e = \eta(1 + 5\phi_0/2)$. We can note that the approximation with the 7/2 power law, $c^* \approx \theta^{7/2}/4\theta^{c2}$, is well reproduced as $\theta > 2\theta^c$ in most of the experiments. For large θ, there is a departure due to the overestimation of the analytical Shields number, see figure 3 (a) where the analytical Shields number lies above the numerical Shields number for $\theta > 1.5$. Further comparison is given in figure 7 where the data of figure 5 are made dimensionless by using the Shields number (5.4) and the dimensionless time. Again, starting from different initial Shields numbers, the data even-

tually collapse onto a decay curve which is well predicted by the numerical integration of equation (5.2) using a classical Euler scheme and taking the same values for μ, ϕ_0 and η_e.

We have also tested our data against the semi-empirical law of Charru & Mouilleron-Arnould (2002) relating q_p to $(\theta - \theta^c)$ listed in table 2. Importing this law in equation (5.2) while using the same length and time scales gives the new dimensionless kinematic velocity

$$c^*(\theta) = \frac{\eta_e}{\eta} 2.52\, \theta^{3/2} \left(\theta - \theta^c\right)^2 . \tag{5.5}$$

The experimental data are in good agreement with equation (5.5) for large θ as the same power law 7/2 is recovered. Discrepancy occurs for small θ suggesting that q_p may not be linked to the excess Shields number $(\theta - \theta^c)$ but is more likely related to the Shields number θ.

We turn now to the discussion of the closures used in the two-phase model which have led to the momentum equation for the mixture and the Brinkman equation for the fluid velocity used in the present study. First, we have assumed that the effective stress tensor associated with the fluid phase was of Newtonian form and have chosen for simplicity to use the Einstein effective viscosity $\eta_e = \eta(1 + 5\phi_0/2)$. Figures (6) and (7) show that the time-scale $= (6Re_{2D}/Ga)^{1/2} (D/d)(\eta_e/\Delta\rho g d)$ build on the effective Einstein viscosity is the good order of magnitude. This may seem surprising as the Einstein viscosity is supposed to be valid for dilute suspensions while, in the present experimental configuration, the particles are in contact and thus the volume fraction is not far from close packing. There are many formulae describing the effective viscosity at high concentrations and most of them diverge at close packing, see e.g. Stickel & Powel (2005). Clearly, the effective viscosity cannot be described by such formulae as this would increase the time-scale by many orders of magnitude and would not match the experimental data.

Secondly, we have chosen to describe the stress tensor of the particle phase by a simple Coulomb model. This model neglects the shearing effect of the granular media. A refined closure would be to consider a constitutive law which has been first derived for dry granular flows and has been then found successful for submarine granular flows, see GDR Midi (2004), Jop, Forterre & Pouliquen (2006), Cassar, Nicolas & Pouliquen (2005), and Pouliquen Cassar, Forterre, Jop, & Nicolas (2005). The stress tensor of the granular material when sheared at a shear rate $\partial u_i^p/\partial x_j + \partial u_j^p/\partial x_i$ under a confinement pressure p^p is then written as

$$\sigma_{ij}^p = -p^p\delta_{ij} + \tau_{ij}^p = -p^p\delta_{ij} + \mu(I)p^p\,(\frac{\partial u_i^p}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^p}{\partial x_i})/|\frac{\partial u_i^p}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^p}{\partial x_i}|. \tag{5.6}$$

The friction coefficient $\mu(I)$ depends on a single dimensionless parameter I which is the ratio between the time of rearrangement of a particle when it is displaced from its hole and the time taken by the particle to move from one hole to the next. When an interstitial viscous fluid is present, this dimensionless number has been found to be

$$I = \frac{\eta}{p^p\alpha}|\frac{\partial u_i^p}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^p}{\partial x_i}|, \tag{5.7}$$

with $\alpha = 0.01$. The following expression for the friction coefficient has been proposed

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{1 + \frac{I_0}{I}}, \tag{5.8}$$

where I_0, μ_2, and μ_s are constant which depends upon the particle material used. When there is no grain motion, this rheology is not valid and one simply writes that $\dot{\gamma}^p = 0$.

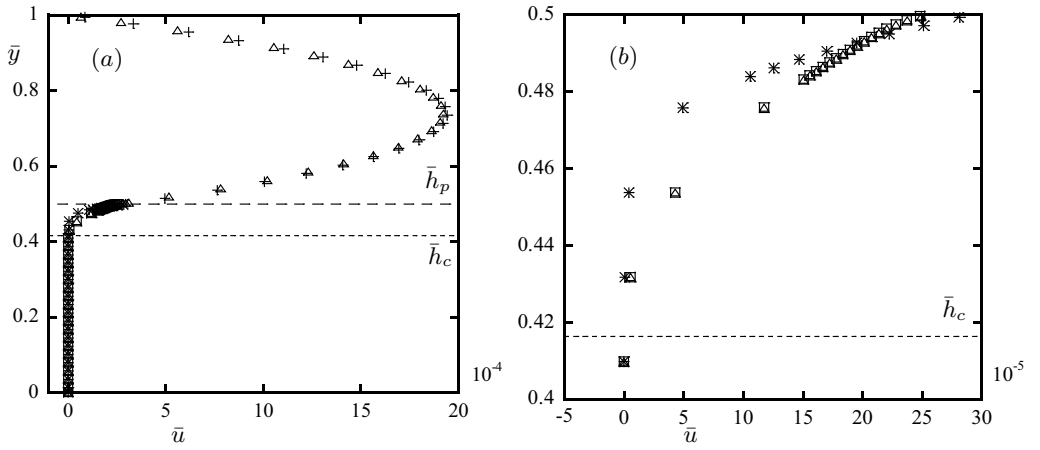


FIGURE 8. (a) Numerical velocity profiles for the fluid (Δ) and the solid ($\Box$) with a Coulomb rheology and profiles for the fluid (+) and the particles ($\times$) with the more refined $\mu(I)$ rheology in the case of particles of batch A in fluid 3 at $\phi_0 = 0.55$ and $q_f = 6.2\ 10^{-3}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$. (b) Blow-up for the same conditions.

Below the threshold, the medium behaves locally as a rigid body. Note that μ_s is the tangent of the angle of repose and is identical to the friction coefficient μ used in the simple Coulomb model.

We have solved numerically and analytically the Brinkman equation for the fluid phase and the momentum balance equation for the mixture with this new rheology, see figure 8. Near the thresholds of motion, $I \ll I_0$ and $\mu(I) \approx \mu_s + (\mu_2 - \mu_s)I/I_0$. This simplified rheology yields the same critical Shields number, $\theta^c = \mu_s\phi_0/2$. For $I >> I_0$, $\mu(I) \approx \mu_2$ and the same solution as in the Coulomb friction case is obtained by substituting μ by μ_2. The bed-load-transport can then be expressed as

$$q_p/\frac{\Delta\rho g d^3}{\eta_e} = \phi_0 \frac{\theta^c}{12}\frac{\mu_2}{\mu_s}\left[\frac{\theta}{2\theta^c}\frac{\mu_s}{\mu_2}\left(\frac{\theta^2}{\theta_c^2}\left(\frac{\mu_s}{\mu_2}\right)^2 + 1\right) - \frac{1}{5}\right]. \tag{5.9}$$

In the case of glass spherical particles, $\mu_2 = 0.82$, see Cassar, Nicolas & Pouliquen (2005), and q_p is only modified by a factor 1/4. Figure 8 shows that using this sophisticated rheology does not change significantly the velocity profiles. The only difference resides inside the granular media in motion where the fluid and particles profiles are overestimated by using the Coulomb friction.

In conclusion, we have used a two phase model having a Newtonian rheology for the fluid-phase and friction for the particulate phase to describe bed-load transport by viscous shearing flows. The relevant equations are found to be the Brinkman equation for the fluid phase and the momentum balance equation for the mixture. Solving these equations yields the velocity profiles for the fluid and the particles as well as the bed-load thickness, particle flow-rate, and the Shields number, θ, at the top of the bed. The critical shields number, $\theta^c = \mu\phi_0/2$, is proportional to the tangent of the angle of repose, μ, and to the particle volume fraction in the bulk of the bed, ϕ_0, independently of the specific shearing flow used. The predicted value for onset of motion is in excellent agreement with experimental data of Charru *et al.* (2002), Loiseleux *et al.* (2005), and Ouriemi *et al.* (2007) obtained in different flow geometries. The bed-load flow rate has a viscous scaling and is approximately proportional to $\phi_0\theta^3/24\theta^{c2}$ (and not to the excess Shields number $\theta - \theta^c$) in both Couette and Poiseuille flows. This algebraic law for the

Region	$\bar{U}$	$\bar{u}^p$	$\bar{p}^p$
(I)	$\mu\phi_0(\bar{h}_p - \bar{h}_c - \bar{d}/2)(\bar{y}-1) + \bar{U}_0$	undefined	0
(II)	$\dfrac{\eta}{\eta_e}\mu\phi_0\left[-\dfrac{(\bar{y}-\bar{h}_p+\bar{d})^3}{6d} + \dfrac{(\bar{y}-\bar{h}_c)^2}{2}\right]$	$\bar{U}$	$\dfrac{\phi_0}{2\bar{d}}(\bar{y}-\bar{h}_s)^2$
(III)	$\dfrac{\eta}{\eta_e}\mu\phi_0\dfrac{(\bar{y}-\bar{h}_c)^2}{2}$	$\bar{U}$	$\phi_0\left(\bar{h}_p - \bar{y} - \dfrac{\bar{d}}{2}\right)$
(IV)	0	0	$\phi_0\left(\bar{h}_p - \bar{y} - \dfrac{\bar{d}}{2}\right)$

TABLE 7. Volume averaged velocity, particle velocity and pressure.

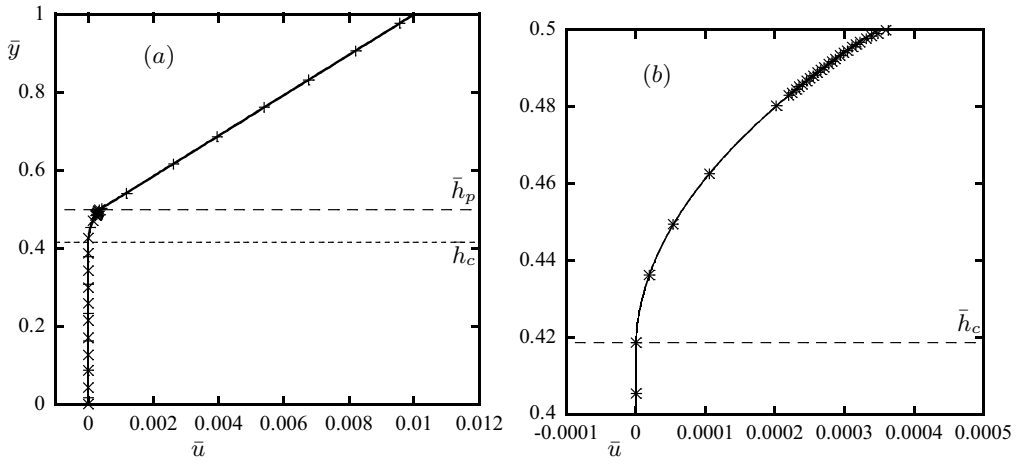


FIGURE 9. (a) Numerical velocity profile for the fluid (+) and the particles (×) and analytical velocity profiles for the fluid and the particles (−) in the case of particles of batch A in fluid 3 at $\phi_0 = 0.55$ and $U_0 = 3.45$ m.s^{-1}. (b) Blow-up of the profiles for the same conditions.

bed-load flow rate seems quite satisfactory for describing the evolution of the bed height, i.e. the evolution of the Shields number, in conditions of bed-load transport for pipe flows.

Appendix A. Particle bed submitted to a Couette flow

Using the same hypotheses as in § 3, we obtain $\bar{U}$, $\bar{u}^p$ and $\bar{p}^p$ in the case of a Couette flow, see table 7 and figure 9. This determination also yields the bed-load thickness, $\bar{h}_p - \bar{h}_c$, the particle fluxes $\bar{q}_p$ and the Shields number at the top of the bed θ as a function of the bed-load thickness, $\bar{h}_p - \bar{h}_c$, see table 8 and figure 10.

Using the same definition as in § 3, the critical Shields number is given by

$$\theta^c = \mu\frac{\phi_0}{2}. \tag{A 1}$$

$\bar{h}_p - \bar{h}_c$	$(\bar{h}_p - 1)\dfrac{\eta_e}{\eta}\left\{1 - \left[1 - \dfrac{\eta}{\eta_e}\dfrac{\bar{d}}{(\bar{h}_p - 1)} + 2\dfrac{\eta}{\eta_e}\dfrac{\bar{U}_0}{\mu\phi_0(\bar{h}_p - 1)^2} + \dfrac{\eta^2}{\eta_e^2}\dfrac{\bar{d}^2}{3(\bar{h}_p - 1)^2}\right]^{1/2}\right\}$
$\bar{q}_p$	$\dfrac{\eta}{\eta_e}\dfrac{\mu\phi_0^2}{24\bar{d}}\left[-\dfrac{\bar{d}^4}{5} + (\bar{h}_p - \bar{h}_c)^4 - (\bar{h}_p - \bar{h}_c - \bar{d})^4\right]$
θ	$(\bar{h}_p - \bar{h}_c)\dfrac{\mu\phi_0}{\bar{d}} - \dfrac{\mu\phi_0}{2}$

TABLE 8. Bed-load thickness, particle flow rate, and Shields number.

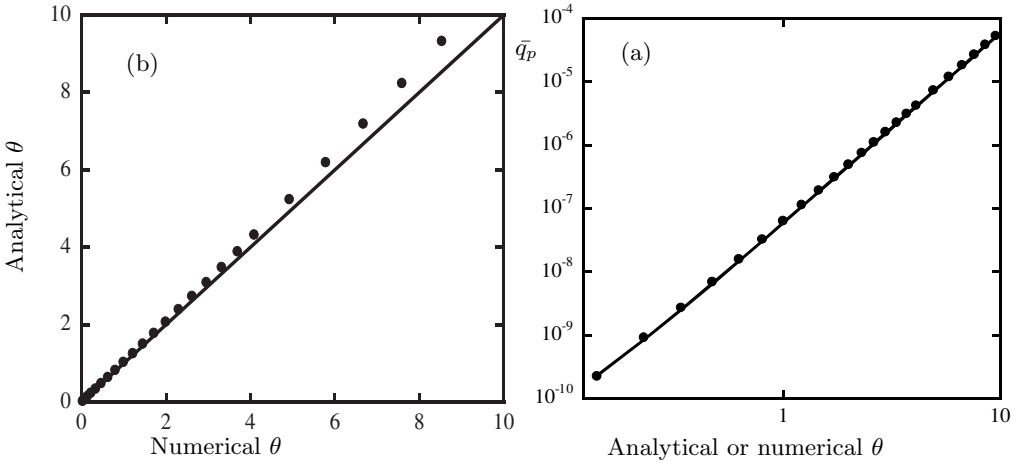


FIGURE 10. (a) Analytical Shields number [equation (A 2)] versus numerical Shields number in the case of particles of batch A in fluid 3. The solid line represents the slope one. (b) Adimensionnal analytical solid flux $\bar{q}_p$ (−) [equation (A 3)] versus analytical θ [equation (3.16)] and adimensionnal numerical solid flux $\bar{q}_p$ (•) versus numerical θ for the same conditions.

In the limit $1 - \bar{h}_p >> \bar{d}$ and $\bar{U}_0/\left[\mu\phi_0(\bar{h}_p - 1)^2\right] << 1$, one finds that

$$\theta = \frac{\bar{U}_0}{\bar{d}(1 - \bar{h}_p)}, \tag{A 2}$$

showing that the perturbation to the Couette flow due to the motion of the granular media is negligible. The bed-load flow-rate given in table 8, can be further simplified to yield

$$q_p/\frac{\Delta\rho g d^3}{\eta_e} = \frac{\phi_0\theta_c}{12}\left\{-\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\theta}{\theta_c}\right)^3 + \frac{\theta}{\theta_c}\right]\right\}. \tag{A 3}$$

Acknowledgement

We would like to thank D. Lhuillier for discussions regarding the two-phase equations and closures, Y. Forterre, P. Jop, and O. Pouliquen for discussions regarding the granular rheology, and P. Cervetti, S. Martinez, and F. Ratouchniak for technical assistance. Funding from the Institut Français du Pétrole is gratefully acknowledged by M.O.

REFERENCES

Anderson T. B. & Jackson R.1967 A fluid mechanical description of fluidized beds - Equation of motion. *Ind. Engng. Chem. Fundam.* **6**, 527–539.

Bagnold, R. A. 1956 The flow of cohesionless grains in fluids. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* A **249**, 235–297.

Brinkman H. C. 1947 A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Appl. Sci. Res.* A**1**, 27–34.

Brinkman H. C. 1947 On the permeability of media consisting of closely packed porous particles. *Appl. Sci. Res.* A**1**, 81–86.

Buffington, J. M. & Montgomery, D. R. 1997 A systematic analysis of eight decades of incipient motion studies, with special reference to gravel-bedded rivers. *Water Resources Research* **33**, 1993–2029.

Camemen, B. & Larson, M. 2005 A general formula for non-cohesive bed load sediment transport. *Estuarine Coastal* **63**, 249–260.

Cassar, C., Nicolas & Pouliquen, O. 2005 Submarine granular flows down inclined planes. *Phys. Fluids* **17**, 103301-1–103301-11.

Charru, F. & Hinch, E. J. 2006 Ripple formation on a particle bed sheared by a viscous liquid. *J. Fluid Mech.* **550**, 111–121.

Charru, F. & Mouilleron-Arnould, H. 2002 Instability of a bed of particles sheared by a viscous flow. *J. Fluid Mech.* **452**, 303–323.

Charru, F., Mouilleron-Arnould, H. & Eiff, O. 2004 Erosion and depositionof particles on a bed sheared by a viscous flow. *J. Fluid Mech.* **519**, 55–80.

Cheng, N. S. 2004 Analysis of bed load transport in laminar flows. *Adv. in Water ressources* **27**, 937–942.

Dancey, C. L., Diplas, P., Papanicolaou, A. N. & Diplas, M. 2002 Probability of individual grain movement and threshold condition. *J. Hydraul. Eng.* **128**, 1069–1075.

Goharzadeh, A., Khalili, A., & Jørgensen, B. B. 2005 Transition layer thickness at a fluid-porous interface. *Phys. Fluids* **17**, 057102.

Happel, J. & Brenner, H. 1983 *Low Reynolds number hydrodynamics with special applications to particulate media*, Martinus Nijhoff Publishers.

Einstein, H. A. 1942 Formulas for the transportation of bed load. *Transactions* **2140**, 561–597.

Einstein, H. A. 1950 The bed load function for sedimentation in open channel channel flows. *Technical report* **1026**, 1–69.

GDR Midi 2004 On dense granular flows. *Eur. Phys. J.* **14**, 341–365.

Jackson, R. 1997 Locally averaged equations of motion for a mixture of identical spherical particles and a Newtonian fluid. *Chemical Engineering Science* **52**, 2457–2469.

Jackson, R. 2000 *The dynamics of fluidized particles*, Cambridge University Press.

Jop, P., Forterre, Y., Pouliquen, O. 2006 A constitutive law for dense granular flows. *Nature* **441**, 727–730.

Loiseleux, T., Gondret, P., Rabaud, M., & Doppler, D. 2005 Onset of erosion and avalanches for an inclined granular bed sheared by a continuous laminar flow. *Phys. Fluids* **17**, 103304-1–103304-9.

Meyer-Peter, E. & Muller, R. 1948 Formulas for bed-load transport. *Report on the 2nd meeting international assoviation*, 39–64.

Mouilleron-Arnould, H. 2002 *Instabilités d'un milieu granulaire cisaillé par un fluide*. Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France.

Ouriemi, M., Aussillous, P., Medale, M., Peysson, Y. & Guazzelli, E. 2007 Determination of the critical Shields number for particle erosion in laminar flow. *Phys. Fluids* in press.

Paintal, A. S. 1971 Concept of critical shear stress in loose boundary open channels. *J. Hydraul. Research* **9**, 91–113

Pouliquen, O., Cassar, C., Forterre, Y., Jop, P. & Nicolas, M. 2005 How do grains flow: towards a simple rheology for dense granular flows. *Proceedings Powder and Grains*.

Ribberink, J. S. 1998 Bed-load transport for steady flows and unsteady oscillatory flows. *Coastal Engrg.* **34**, 58–82.

Stickel, J. J. & Powel, R. L. 2005 Fluid mechanics and rheology of dense suspensions. *Ann.*

Rev Fluid Mech. **37**, 129–149.

Vanoni, V. A. 1966 Sediment Transportation Mechanics: Initiation of Motion. *J. Hydraul. Div. Am. Soc. Civ. Eng.* **92**, 291–314.

White, C. M. 1940 The equilibrium of grains on the bed of a steam. *Proceedings of the Royal Society of London* **174**, 322–338.

Wong, M. & Parker, G. 2006 Reanalysis and correction of bed-load relation of Meyer-Peter and Muller using their own database. *J. Hydr. Engrg.* **132**, 1159–1168.

Yalin, S. 1963 An expression for bed-load transportation. *J. Hydraul. Division* **HY3**, 221–250.

Zhang, D. Z. & Properetti, A. 1997 Momentum and energy equations for disperse two-phase flows and their closure for dilute suspensions. *Int. J. Multiphase Flow* **23**, 425–453.

4.4 Compléments à l'article

4.4.1 Seuil naturel dans un milieu poreux

Dans ce chapitre, nous avons étudié un écoulement diphasique fluide/milieu granulaire constitué de particules rigides. Pour cela, nous avons utilisé la modélisation diphasique développée par Jackson (1997, 2000) à laquelle nous avons associé des fermetures simples. La rhéologie solide utilisée pour modéliser la contrainte solide associée aux contacts entre les particules σ_p est décrite par l'équation (4.16), dans laquelle nous avons pris $\mu = \mu_s$ pour les applications numériques [Cassar *et al.* (2005)]. Cette approche simple nous a permis d'obtenir une expression analytique ($\theta^c = \mu\phi_0/2$) du seuil de mise en mouvement en définissant ce seuil comme la valeur du nombre de Shields correspondant à un diamètre de particules en mouvement. Mais existe-t-il naturellement un seuil de mise en mouvement des particules ? Pour répondre à cette question, nous étudions l'écoulement de fluide dans un milieu poreux et nous regardons dans quelles conditions la contrainte solide σ^p est suffisante pour le mettre en mouvement.

Le mouvement du fluide dans le milieu poreux est décrit par l'équation (4.32) dans laquelle on impose une vitesse solide nulle. En considérant un écoulement stationnaire, on obtient une équation simplifiée pour le fluide,

$$0 = -\frac{\epsilon^2 D^2}{K}\bar{u}^f - \epsilon\frac{\partial \bar{p}^f}{\partial \bar{x}} + \epsilon\frac{\partial \bar{\tau}^f_{xy}}{\partial \bar{y}}, \tag{4.37}$$

$$\frac{\partial \bar{p}^p}{\partial \bar{y}} = -\phi, \tag{4.38}$$

où

$$\bar{\tau}^f_{xy} = \frac{\eta_e}{\eta}\frac{\partial \epsilon \bar{u}^f}{\partial \bar{y}}. \tag{4.39}$$

D'après l'équation (4.33), la contrainte solide est alors définie par

$$\frac{\partial \bar{\tau}^p_{xy}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial \bar{p}^f}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{\tau}^f_{xy}}{\partial \bar{y}}. \tag{4.40}$$

Ces équations peuvent être résolues numériquement dans le cas d'un écoulement de Poiseuille appliqué dans un canal en partie rempli par un milieu poreux. On peut également résoudre les équations analytiquement si on suppose que le milieu poreux est infini et si on néglige la variation de la fraction volumique solide ($\phi = \phi_0 = 0.55$). Nous modélisons la viscosité effective en utilisant la formule d'Einstein, $\eta_e = \eta(1 + 5/2\phi)$. En résolvant analytiquement l'équation (4.37), on obtient l'expression de la vitesse débitante du fluide,

$$\begin{aligned} \text{pour} \quad \bar{h_p} < \bar{y} < 1, \quad \bar{u}^f &= \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}\frac{\bar{y}^2 - 1}{2} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}\frac{\bar{y} - 1}{\delta + 1 - \bar{h}_p}\left(\bar{h}_p\delta + \frac{K}{D^2} + \frac{1 - \bar{h}_p^2}{2}\right), \\ \text{pour} \quad 0 < \bar{y} < \bar{h_p}, \quad \epsilon\bar{u}^f &= \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}\frac{K}{D^2} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}\frac{\delta e^{(\bar{y} - \bar{h}_p)/\delta}}{\delta + 1 - \bar{h}_p}\left(\frac{K}{D^2} + \frac{(1 - \bar{h}_p)^2}{2}\right), \end{aligned} \tag{4.41}$$

où $\delta = [K\eta_e/(D^2\eta)]^{1/2}$ est une échelle caractéristique de la porosité et K représente la perméablité [équation (4.14)]. L'expression du nombre de Shields au sommet du milieu poreux est donnée par

$$\theta = \frac{1}{\bar{d}}\frac{\partial \bar{u}^f}{\partial \bar{y}}(\bar{h}_p) = \frac{1}{\bar{d}}\left[\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}\bar{h}_p - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}\frac{1}{\delta + 1 - \bar{h}_p}\left(\bar{h}_p\delta + \frac{K}{D^2} + \frac{1-\bar{h}_p^2}{2}\right)\right], \qquad (4.42)$$

Dans la suite, nous allons négliger les termes d'ordre $\bar{d}$ devant les termes d'ordre un.

La condition pour que les particules constituant le milieu poreux se mettent en mouvement (cisaillement du milieu granulaire) est réalisée pour $\bar{\tau}^p \geq \mu_s \bar{p}^p$. La condition $\bar{\tau}^p = \mu_s \bar{p}^p$ se vérifie au moins en un point si la pente de $\bar{\tau}^p$ est supérieure ou égale à la pente de $\mu_s \bar{p}^p$. L'expression de la pente en $\bar{h}_p$ de la courbe représentant $\bar{\tau}^p$ est dérivée de l'équation (4.40) et l'égalité entre les deux pentes est donnée par

$$-\frac{\eta}{\eta_e}\frac{2\mu_s\phi_0\delta}{(\bar{h}_p - 1)} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}. \qquad (4.43)$$

En combinant cette équation avec l'équation (4.42), on obtient un nombre de Shields critique pour le poreux,

$$\theta_p^c = \mu_s\phi_0\frac{\eta}{\eta_e}\frac{\delta}{\bar{d}}. \qquad (4.44)$$

L'échelle de la porosité étant largement inférieure à $\bar{d}$, le nombre de Shields critique $\theta_p^c \approx 0.006$ obtenu est largement inférieur à la valeur obtenue expérimentalement $\theta_c \approx 0.12$ (chapitre 3). Cependant, pour obtenir une solution analytique simple, nous avons négligé les variations de la fraction volumique solide sur la première couche, alors qu'elle influe sur la perméabilité qui passe d'une valeur infinie à sa valeur moyenne sur une taille de grain. On s'attend donc à ce que l'échelle caractéristique de la porosité soit plutôt la taille du grain et que le nombre de Shields critique puisse s'écrire sous la forme,

$$\theta_p^c = \mu_s\phi_0 k_p, \qquad (4.45)$$

où k_p est une constante numérique de l'ordre de grandeur de l'unité.

En résolvant numériquement, les équations (4.40) et (4.37), il est possible de déterminer sans faire d'hypothèse, la valeur du nombre de Shields minimale θ_p^c pour laquelle la condition $\bar{\tau}^p = \mu_s \bar{p}^p$ est vérifiée au moins en un point. On trouve une valeur seuil $\theta_p^c = 0.06$. La figure 4.8 représente les contraintes solides existant au sein du milieu poreux pour différents nombres de Shields. On peut noter qu'en augmentant le nombre de Shields, on augmente la contrainte solide existant dans le milieu poreux. Pour $\theta < \theta_p^c$, τ^p est toujours inférieur à $\mu_s p^p$, la contrainte fluide n'est donc pas suffisante pour mettre le milieu en mouvement. Pour $\theta = \theta_p^c$, il existe un point pour lequel $\tau^p = \mu_s p^p$, on est donc bien au niveau du seuil de mise en mouvement. Pour $\theta = 0.071 > \theta_p^c$, τ^p est supérieur à $\mu_s p^p$ sur environ une taille de grains ($\approx 0.7\bar{d}$). On peut en déduire, que la contrainte fluide est suffisante pour mettre le milieu granulaire en mouvement. Il est intéressant de noter qu'il existe deux points de contact entre $\bar{\tau}^p$ et $\mu_s \bar{p}^p$ ($\approx \bar{h}_p - 2\bar{d}/3$ et $\approx \bar{h}_p - 1.4\bar{d}$). Au dessus et en dessous de la zone située entre ces deux points, la contrainte solide est inférieure à $\mu_s \bar{p}^p$. Cette

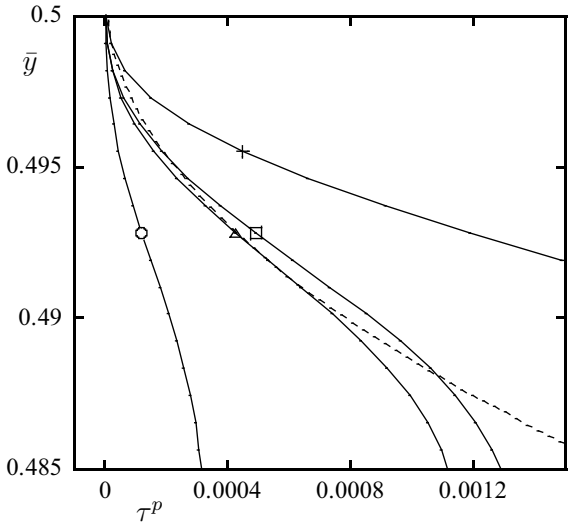


FIG. 4.8 – Contrainte solide $\bar{\tau}^p$ pour $\theta = 0.02$ ($\bigcirc$), $\theta = 0.071$ ($\square$), $\theta = 0.6$ ($+$), θ_p^c ($\triangle$) et $\mu_s p^p$ ($\cdots$) représentée en fonction de la hauteur adimensionnée $\bar{y}$ dans un milieu poreux.

observation explique les raidissements du profil de vitesse du milieu granulaire qu'on observe au niveau de l'interface fluide/milieu granulaire pour les faibles valeurs du nombre de Shields. Pour $\theta = 0.6 >> \theta_p^c$, la zone sur laquelle $\tau^p < \mu_s p^p$ au niveau de l'interface devient pratiquement négligeable, ce qui est concordant avec l'observation selon laquelle le raidissement du profil disparaît quand θ augmente.

Il existe donc bien un seuil exprimé en terme de nombre de Shields en dessous duquel il n'y a pas mouvement des grains. La valeur obtenue numériquement ($\theta_p^c \approx 0.06$) est du même ordre de grandeur que le seuil déterminé expérimentalement $\theta^c = 0.12$. Analytiquement, nous prédisons bien un seuil proportionnel à $\mu_s \phi_0$. Cette approche permet de déterminer le seuil de mise en mouvement des grains sans faire d'hypothèse supplémentaire, mais elle ne permet pas d'obtenir une modélisation analytique simple. Le fait de définir un seuil de mise en mouvement qui correspond à un diamètre de billes en mouvement, nous permet d'obtenir une forme analytique simple pour le nombre de Shields critique que nous pouvons ensuite utiliser dans la poursuite de l'étude.

4.4.2 Confrontation avec les différents modèles analytiques de la littérature

Dans la littérature, le flux de particules est généralement relié au nombre de Shields sous la forme,

$$q_p/Q_d = \phi_0 f(\theta^c, \theta). \tag{4.46}$$

La modélisation diphasique du mélange fluide/particules, nous a permis d'exprimer $Q_d = \frac{\Delta \rho g d^3}{\eta_e}$ et $f(\theta, \theta_c) = \frac{\theta^c}{12}\left[\frac{\theta}{2\theta^c}\left(\frac{\theta^2}{\theta_c^2}+1\right) - \frac{1}{5}\right]$ dans la limite $Re_{2D} << \frac{\mu_s \phi_0}{12}\frac{(h-h_p)^3}{d^3} Ga$

avec $Ga = \frac{\Delta\rho\rho_f g d^3}{\eta^2}$ et $Re_{2D} = \frac{\rho_f q_f}{\eta}$. Cette limite représente les conditions pour lesquelles on peut négliger les perturbations engendrées par la mise en mouvement du milieu granulaire sur l'écoulement du fluide pur. Dans cette limite, le nombre de Shields est défini par

$$\theta = 6\frac{d^2}{h^2}\frac{Re_{2D}}{Ga}\left(\frac{D}{D-h_p}\right)^2. \tag{4.47}$$

Utiliser l'équation (4.47) revient également à négliger le mouvement du fluide dans le milieu granulaire. En terme de nombre de Shields, cette limite se traduit par, $\theta << \theta^c(D-h_p)/d$. Le nombre de Shields critique étant constant, on peut noter que le domaine de validité de l'équation (4.47) dépend du diamètre des particules d et de la hauteur du milieu granulaire. Expérimentalement, nous avons accès à l'évolution de la hauteur du lit dans la zone de mesure en fonction du temps. Cette hauteur est reliée au débit solide par l'équation de conservation de la masse (4.6). En combinant les équations (4.6), (4.46) et (4.47), nous avons obtenu une équation analytique adimensionnée,

$$\frac{\partial\theta}{\partial t^*} + c^*(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x^*} = 0, \tag{4.48}$$

permettant de prédire l'évolution du nombre de Shields en fonction du temps. Cette équation a été adimensionnée en gardant comme longueur caractéristique la hauteur du canal D, tandis que le temps caractéristique $\tau = \left(\frac{6Re_{2D}}{Ga}\right)^{1/2}\frac{hd}{Q_d}$ découle directement de l'adimensionnement Q_d obtenu pour le débit de particules. La vitesse cinématique adimensionnée $c^*(\theta)$ dépend de la fonction de $f(\theta)$ reliant le nombre de Shields au débit solide et peut être exprimée sous la forme,

$$c^*(\theta) = 2\theta^{3/2}\frac{\partial f}{\partial\theta}(\theta,\theta_c). \tag{4.49}$$

Dans l'article, nous avons comparé l'évolution du nombre de Shields et la vitesse de propagation de la perturbation de l'entrée prédits par l'équation (4.5) avec nos résultats expérimentaux. La bonne concordance entre le modèle et les résultats expérimentaux nous a permis de valider le modèle. Dans la littérature, il existe plusieurs formules exprimant le débit solide en fonction du nombre de Shields. La plupart de ces formules ont été construites pour un écoulement turbulent [Einstein (1942, 1950), Meyer-Peter & Muller (1948), Bagnold (1956), Yalin (1963), Ribberink (1998), Camemen & Larson (2005) et Wong & Parker (2006)], mais il existe des modèles décrivant le flux de solide soumis à un écoulement laminaire [Charru & Mouilleron-Arnould (2002) ,Cheng (2004), Charru *et al.* (2004) et Charru & Hinch (2006)]. Ces formules s'écrivent sous la même forme que l'équation (4.47). Pour des écoulements turbulents, l'adimensionnement obtenu pour le débit solide est de la forme $Q_d = \sqrt{\frac{\Delta\rho g d^3}{\rho_f}}$. Pour des écoulements laminaires, l'adimensionnement obtenu est similaire à notre adimensionnement du débit, mais il est basé sur la viscosité plutôt que sur la viscosité effective. Suivant les auteurs, l'expression de $f(\theta,\theta_c)$ varie, mais elle est le plus souvent proportionelle à $(\theta-\theta_c)$. Dans la partie qui va suivre, nous allons tester quelques-unes de ces formules en les comparant à l'aide de l'équation (4.49) avec nos résultats expérimentaux. Cela nous permettra de conclure sur l'importance de l'adimensionnement et l'influence de la fonction $f(\theta,\theta_c)$ sur la prédiction

Auteurs	Q_d	$f(\theta, \theta_c)$
Ribberink (1998)	$\sqrt{\frac{\Delta\rho g d^3}{\rho_f}}$	$10.4(\theta - \theta^c)^{1.67}$
Camemen & Larson (2005)	$\sqrt{\frac{\Delta\rho g d^3}{\rho_f}}$	$12\theta^{1.5}e^{-4.5\frac{\theta^c}{\theta}}$
Wong & Parker (2006)	$\sqrt{\frac{\Delta\rho g d^3}{\rho_f}}$	$4.93(\theta - \theta^c)^{1.60}$
Charru & Mouilleron-Arnould (2002)	$\frac{\Delta\rho g d^3}{\eta}$	$0.42(\theta - \theta^c)^3$

TAB. 4.1 – Expression de Q_d et $f(\theta, \theta_c)$ proposées dans la littérature.

des résultats expérimentaux. Cette comparaison est aussi un bon moyen de tester le domaine de validité des formules proposées dans la littérature. Nous avons résumé dans le tableau 4.1 les différentes formules que nous allons tester.

Les données expérimentales étant obtenues dans une configuration à trois dimensions, il faut adapter le modèle 2D pour pouvoir le comparer avec les expériences. Pour cela nous utilisons la relation basée sur un calcul numérique qui a été développée dans le chapitre 3,

$$\begin{aligned} Re_{2D} &= Re_{3D}\frac{\beta\pi}{4} \\ Q_{f2D} &= Q_{f3D}\frac{\beta}{D}, \end{aligned} \tag{4.50}$$

où $\beta = 1.85$ est un coefficient numérique défini dans le chapitre 3. En utilisant ces formules, il est possible de comparer les données expérimentales avec le modèle analytique. La vitesse de propagation de la perturbation initiale obtenue expérimentalement pour différentes expériences est représentée en fonction du nombre de Shields initial sur les figures 4.9 et 4.10. Dans chaque figure, un adimensionnement différent a été utilisé. On peut remarquer que quelque soit l'adimensionnement utilisé, les données semblent plus ou moins s'ajuster sur une courbe maîtresse croissante en fonction du nombre de Shields initial. L'adimensionnement proposé par Charru & Mouilleron-Arnould (2002) diffère de notre adimensionnement par le facteur $\eta_e/\eta = 1 + 5/2\phi_0$. La viscosité effective étant considérée comme constante dans notre modèle, l'utilisation de l'un ou l'autre de ces adimensionnements n'influence pas sur la dispersion des données. On peut noter que les données adimensionnées par la vitesse caractéristique turbulente présentent une plus grande dispersion que celles adimensionnées par notre vitesse caractéristique. Le rapport entre l'adimensionnement turbulent et notre adimensionnement varie avec $\eta_e/(\rho_f^{1/2}\Delta\rho^{1/2}g^{1/2}d^{3/2})$. Au cours de nos expériences, g et ρ_f peuvent être considérées comme constants. Le produit $\Delta\rho^{1/2}d^{3/2}$ a été varié au maximum d'un facteur trois et η d'un facteur quatre.

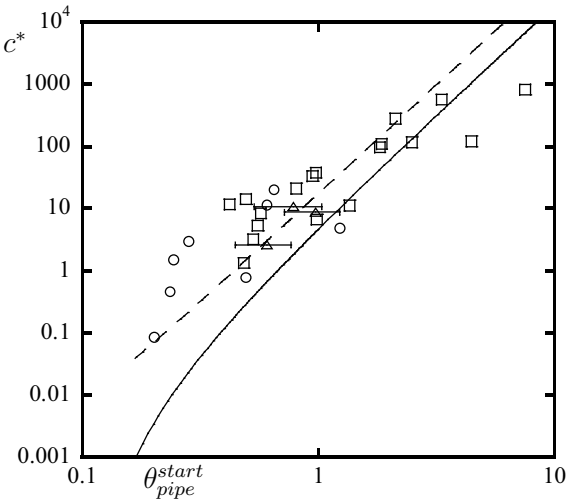


FIG. 4.9 – Vitesse de propagation $c^* = \alpha L^*/t_p^*$ adimensionnée par notre adimensionnement en fonction du nombre de Shields initial du lit θ_{pipe}^{start} pour des particules du type A ($\circ$), du type B ($\square$) et du type C ($\triangle$). Les courbes représentent l'équation (4.49) couplée avec notre expression de $\bar{q}_p$ ($--$) et l'expression proposée par Charru & Mouilleron-Arnould (2002) ($-$).

La différence entre les deux adimensionnements est au maximum d'un facteur quatre et il est donc difficile de différencier de manière quantitative les deux adimensionnements. Sur les figures 4.9 et 4.10 les courbes représentent les différents modèles théoriques. On peut noter que les différents modèles turbulent surestiment la vitesse adimensionnée de propagation, même si la dépendance en nombre de Shields semble être cohérente. On peut donc déduire de cette figure que, comme attendue, la modélisation turbulente n'est pas adaptée pour décrire le débit solide d'un milieu granulaire soumis à un écoulement laminaire. Le modèle proposé par Charru & Mouilleron-Arnould (2002) sous-estime la vitesse de propagation mesurée pour $\theta < 1$. La forte décroissance de la courbe aux environs du nombre de Shields critique est due à la forme du débit solide qui est relié à l'écart au seuil de la contrainte adimensionnée $\theta - \theta_c$. Le fait que notre modèle qui ne possède pas la même dépendance présente un meilleur ajustement des données aux environs de θ_c semble indiquer que le débit solide n'est pas relié à l'écart au seuil de la contrainte adimensionnée mais directement à la contrainte adimensionnée.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons modélisé l'interaction fluide/milieu granulaire en nous basant sur les équations diphasiques développées par Jackson (1997, 2000) et en utilisant des fermetures simples. Nous avons résolu analytiquement les équations diphasiques dans des cas asymptotiques simples. Cette solution analytique nous a permis de proposer des formules pour le flux de particules en mouvement et pour le seuil de mise en mouvement qui sont en bon accord avec les données expérimentales

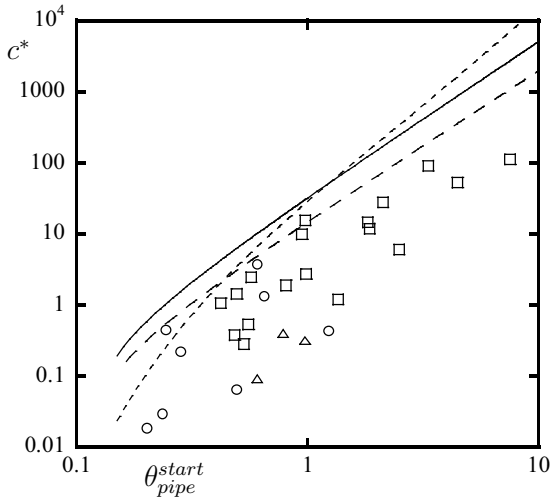


FIG. 4.10 – Vitesse de propagation $c^* = \alpha L^*/t_p^*$ adimensionnée en utilisant l'adimensionnement turbulent en fonction du nombre de Shields initial du lit θ_{pipe}^{start}, pour des particules du type A ($\circ$), du type B ($\square$) et du type C ($\triangle$). Les courbes représentent l'équation (4.49) couplée avec l'expression de $\bar{q}_p$ proposée par Ribberink (1998) (-), proposée par Wong & Parker (2006) (- -) et proposée par Camemen & Larson (2005) (...).

dans les limites du modèle. Les trois résultats principaux de cette étude sont les suivants : le seuil de mise en mouvement est proportionnel à $\mu\phi_0$ et est indépendant de la nature de l'écoulement. Le flux de particules obtenu est proportionnel à θ^3/θ^{c2} et non à la différence au seuil de la contrainte adimensionnée $\theta - \theta_c$. La viscosité effective η_e ne peut pas être modélisée par une formule qui diverge quand les particules sont en contact.

Chapitre 5

Formation des dunes

Nous avons vu dans le chapitre précédent, qu'il existe trois régimes ("petites dunes", "dunes à vortex" et "dunes sinueuses") pour lesquels le lit de particules se met en mouvement et se déforme. Cette déformation se traduit par l'apparition de structures sédimentaires couramment appelées dunes. Le but de ce chapitre est d'étudier les seuils d'apparitions de ces différentes structures, ainsi que leur évolution au cours du temps. S'il semble possible de décrire le seuil de déstabilisation du lit par une approche linéaire, l'évolution temporelle des différentes dunes apparait clairement non-linéaire. Aussi dans ce chapitre nous avons privilégié deux approches, une étude de stabilité linéaire basée sur le flux de transport défini dans le chapitre précédent (4) pour prédire le seuil d'apparition des "petites dunes" et une approche purement qualitative qui nous permet de décrire l'évolution temporelle des structures formées.

5.1 Seuil de formation des "petites dunes"

Dans cette section, nous allons étudier la stabilité du lit de particules soumis à un écoulement de Poiseuille laminaire afin de prédire le seuil d'apparition des "petites dunes".

5.1.1 Principe de l'étude

De nombreuses études ont été réalisées afin d'étudier les premiers stades d'apparition des structures sédimentaires. Une liste non exhaustive est détaillée dans le chapitre 1 de cette thèse.

On peut différencier deux méthodes principales pour réaliser l'étude de stabilité. La première méthode de type milieu continu consiste à considérer le fluide pur et le mélange fluide/milieu granulaire comme des milieux continus et à perturber l'interface entre les deux. La deuxième méthode consiste à étudier l'écoulement du fluide sur un fond solide perturbé, avant de le coupler avec l'évolution du milieu granulaire à travers l'équation de conservation de la masse. Cette méthode a l'inconvénient de négliger les perturbations induites dans l'écoulement par le mouvement du milieu granulaire, mais elle permet d'obtenir des résultats qui sont en bon accord avec les réalités expérimentales [Charru (2006)], notamment en ce qui concerne la prédiction

de la longueur d'onde la plus instable. La méthode basée sur une modélisation de type milieu continu a l'avantage de prendre en compte la rétroaction existant entre le milieu granulaire et le fluide, pourtant la concordance entre les prédictions et les données expérimentales n'est pas encore satisfaisante [Kuru *et al.* (1995)]. L'écart observé entre les prédictions et les résultats expérimentaux est sans doutes dû à une mauvaise modélisation du mélange fluide/milieu granulaire.

Afin d'étudier le seuil d'apparition des "petites dunes", nous avons privilégié la deuxième méthode. Pour cela nous nous sommes inspirés des travaux réalisés dans le cas d'un écoulement de Couette laminaire par Charru & Hinch (2000, 2006). Nous avons transposé leur étude dans le cas d'un écoulement de Poiseuille laminaire à deux dimensions. Afin de décrire le flux de transport de particules, nous avons utilisé la formule obtenue dans le cadre de l'étude du lit plat en mouvement (chapitre 4). Le flux de transport de particules varie en fonction du nombre de Shields θ et du nombre de Shields critique θ^c. En perturbant l'interface fluide/milieu granulaire, on perturbe l'écoulement, ce qui entraîne une perturbation du nombre de Shields mesuré au niveau de l'interface, tandis que l'inclinaison de l'interface fluide/milieu granulaire modifie le seuil de mise en mouvement (θ^c). À travers l'équation de conservation de la masse, nous pouvons étudier la stabilité du lit analytiquement dans le cadre de l'approximation des grandes longueurs d'ondes et numériquement pour toutes les longueurs d'ondes. Cette étude de stabilité est décrite dans l'article *Dune formation in pipe flow* qui est en cours de préparation pour être soumis au "Journal of Fluids Mechanics".

5.1.2 Article

Dune formation in pipe flow

MALIKA OURIEMI, PASCALE AUSSILLOUS, AND ÉLISABETH GUAZZELLI

IUSTI - CNRS UMR 6595, Polytech' Marseille, Technopôle de Château-Gombert, 13453 Marseille cedex 13, France

(Received 12 October 2007)

We present a phase diagram of the different dune patterns observed when a bed composed of spherical particles is submitted to a pipe flow. A simple linear stability analysis based on a particle flux derived by Ouriemi, Aussillous & Guazzelli (2007) is performed to predict the threshold for dune formation. The control parameter of the instability is the Reynolds number and the predicted wavelength at onset is of the order of the fluid thickness. This basic analysis accounts reasonably well for the experimental observations.

1. Introduction

A very common feature that arises when bed constituted of particles are submitted to shearing flows is the formation of ripples, i.e. small waves on the bed surface, or of dunes, i.e. larger mounds or ridges. The widely recognised mechanism for dune or ripple formation is the fluid inertia or more precisely the phase-lag between the bottom shear stress and the bed waviness generated by the fluid inertia, see e.g. Charru & Hinch (2006) and references therein. In that case, the shear stress, the maxima of which are slightly shifted upstream of the crests, drags the particles from the troughs up to the crests. This destabilizing mechanism seems to be robust enough to apply to any steady flow, either turbulent, see e.g. Engelund (1970), or viscous, see e.g. Charru & Mouilleron-Arnould (2002). A few stabilising mechanisms have been proposed, among which a well identified stabilising effect due to the inclination of the bed, see e.g. Fredsøe (1974), Richards (1980), Charru & Hinch (2006), and Charru (2006). For nonzero slope, the gravity force parallel to the bed surface favours the downhill motion of the particles and conversely impedes the uphill motion. Recent studies have proposed another stabilising mechanism arising from the phase-lag between the bottom shear stress and the particles flow rate which is related to particle inertia. This effect can be expressed in term of an inertial length, see e.g. Andreotti, Claudin & Douady (2002) and Valance & Langlois (2004), or a deposition length coming from a stabilising crest-erosion process, see e.g. Charru & Hinch (2006) and Charru (2006).

However, a complete description of the bed instability is still lacking as the coupling between the granular media and the fluid is poorly understood. Usually, one first calculates the fluid flow as if the wavy bottom were fixed by considering the superposition of a base flow on the flat bed and a perturbation induced by the wavy bottom. Then, one needs to relate the particle flow rate to the calculated shear stress at the top of the bed. Particle mass conservation equation is finally solved to provide the growth rate of the instability. Several algebraic law relating the particle flow rate to the bottom shear stress have been proposed in the literature, see tables 1 and 2 of Ouriemi, Aussillous & Guazzelli (2007), leading to different expressions for the instability threshold and wavelength selection, see tables 1 and 2. Different dimensionless numbers have been advanced for controlling

Authors	Flow	Thresholds prediction
Sumer & Bakioglu (1984)	turbulent	$Re_p = \frac{du_*}{\nu} = 10 - 26$
Charru & Mouilleron-Arnould (2002)	laminar	$\theta = \theta_0^c \left(\frac{30}{\theta_0^c Ga\mu}\right)^{1/2} \frac{d}{h_f}$
Charru & Hinch (2006)	laminar	$Ga = \frac{396}{\theta_0^c}\left(\frac{d}{h_f}\right)^3$

TABLE 1. Stability analysis prediction for the instability threshold, where u_* is the shear velocity, $Ga = d^3\rho_f\Delta\rho g/\eta$ is the Galileo number, $\Delta\rho = \rho_p - \rho_f$, and μ is a friction coefficient.

Authors	Flow	λ
Kuru, Leighton & McCready (1995)	laminar	$d\frac{2\rho_p \sin(\zeta)\cos(\zeta)}{\Delta\rho}\frac{U_p^2}{gd}$
Richards (1980)	turbulent	$50\, z_0 - 1000\, z_0$ (ripple)
		$2\pi h_f$ (dune)
Sumer & Bakioglu (1984)	turbulent	$\frac{\nu}{u^*} f\left(\frac{du^*}{\nu}\right).$
Claudin & Andreotti (2006)	turbulent	$l_{drag} = d\frac{\rho_p}{\rho_f}.$
Charru & Mouilleron-Arnould (2002)	laminar	$60\nu/u_*.$
Valance & Langlois (2004)	laminar	$1.75\pi\sqrt{3}l_{eq}$
		$\times\left[\left(1+\sqrt{1-r}\right)^{1/3} + \left(1-\sqrt{1-r}\right)^{1/3}\right]^3$
Kouakou & Lagrée (2005)	laminar	$\left[\left(\frac{\theta_0^c\Delta\rho g d}{\rho_f\mu}\right)^3 \frac{1}{\nu^2(U_0/\delta)^4}\right]^{1/2}$

TABLE 2. Stability analysis prediction for the most amplified wavelength where z_0 is the rugosity, ζ is the particle ejection angle during the saltation, U_p is the saltation velocity, c_d the coefficient of deposition, $l_{eq} = f(\dot{\gamma}d^2/\nu)l_{drag}$ is an equilibrium length, $b = (\theta - \theta^c)/\theta^c$, $r = \frac{8}{147}\frac{\nu/\dot{\gamma}}{(0.53\mu)^3(1+b)^3 l_{eq}^2}$, $l_{sat} = \frac{1}{0.4}\ln(u_*^2/z_0 g)l_{drag}$ is the saturation lenght used by Andreotti, Claudin & Douady (2002), U_0 is the velocity far from the soil, δ is the thickness of the boundary layer, and f represents a function.

Authors	Flow	λ
Yalin (1977)	turbulent	$2250\,dRe_p^{-1}$
Yalin (1985)	turbulent	$3.38\,dGa^{-0.25}f(3.38\,Ga^{-0.25}Re_p^{-1})$
Kuru, Leighton & McCready (1995)	laminar/turbulent	$\frac{U_m^2}{g}$
Coleman & Melville (1996)	turbulent	$316\,d(Re_p^c)^{-0.2}$
Raudkivi (1997)	turbulent	$150\,d^{0.5}$
Coleman & Eling (2000)	laminar	$175\,d^{0.75}$

TABLE 3. Empirical correlation for the most amplified wavelength where $Re_p = du_*/\nu$ is the particle Reynolds number, Re_p^c is the particle Reynolds number at the threshold of motion, U_m is the average liquid velocity, and f is a function given by a curve.

the instability among which the Shields number, θ, which is constructed as the ratio of the shear stress at the top of the bed to the apparent weight of a single particle, the Gallileo number, Ga, which is the Reynolds number based on the Stokes settling velocity of the particles, and the particle Reynolds number, Re_p, see table 1. There is not yet a clear physical picture of the instability threshold both in laminar and turbulent flows. The stability analyses of Sumer & Bakioglu (1984) and Charru & Mouilleron-Arnould (2002) having the particle transport described by an algebraic law, a Bagnold-type law and a cubic law respectively, have found preferred initial wavelengths to be an order of magnitude smaller than the observed dune lengths. A recent stability analysis by Charru (2006) seems to improve the predictions by including a phase-lag which erodes the peaks, i.e. the additional stabilisation mentioned above. The variations of the wavelengths with the experimental parameters have yielded to several empirical correlations, some of them are listed in table 3. Most of the correlations involve the diameter of the particles, in particular in the turbulent regime.

The present contribution aims at revisiting these issues for pipe flows. In § 2, we present an experimental study of the evolution of a particle bed in a pipe flow. Different dune patterns are observed as the flow rate is increased from the laminar to the turbulent regimes. In § 3, we adapt the stability analysis of Charru & Hinch (2000) to a Poiseuille flow and choose to use simply the algebraic law relating the particle flux to the Shields number found by Ouriemi, Aussillous & Guazzelli (2007). The predicted instability threshold and wavenumber selection are compared to the laminar experiments in § 4.

2. Experimental observations

2.1. *Experimental set-up*

The experimental test section was a horizontal glass tube of inner diameter $D = 3$ cm and length $L = 1.8$ m. The measurement zone was located at ≈ 50 cm from the entrance. This length corresponded to the entry length necessary for the laminar flow to develop fully inside the tube at $Re_{pipe} \approx 250$, where $Re_{pipe} = 4Q_{pipe}\rho_f/\pi D\eta$ is the tube Reynolds

Batch	Composition	d (μm)	ρ_p (g/cm^3)	Supplier
A	Glass	132 ± 22	2.490 ± 0.003	Potters-Ballotini
B	Polystyrene	538 ± 24	1.051 ± 0.002	Maxi-Blast
D	PMMA	193 ± 30	1.177 ± 0.002	Lehmann & Voss & Co.

TABLE 4. Particle characteristics. The particle density, ρ_p, was measured with a pycnometer and a fluid of measured density. The particle size distributions were determined with a digital imaging system. The mean diameter is noted d and its error corresponds to one standard deviation.

Fluid	η (cP)	ρ_f (g/cm^3)
1	10 ± 1	1.022 ± 0.001
2	0.7 ± 1	0.999 ± 0.001
3	12 ± 1	1.023 ± 0.001
4	6.7 ± 1	1.016 ± 0.001
5	8 ± 1	1.018 ± 0.001

TABLE 5. Fluid characteristics at $T = 35°$C. The viscosity, η, was measured with a falling ball viscosimeter and the fluid density, ρ_f, with a pycnometer.

number with Q_{pipe} the flow rate, ρ_f the fluid density, and η the viscosity. Experiments were performed in the range $10^{-1} \lesssim Re_{pipe} \lesssim 10^4$. For $Re_{pipe} \lesssim 250$, the laminar flow was then fully developed in all the measurement zone while it was not for $250 \lesssim Re_{pipe} \lesssim 2500$. The transition toward turbulence occurred for $Re_{pipe} \approx 2500$.

Three different batches of spheres and five different mixtures of distilled water and UCON oil 75H-90000 were used in the experiments as indicated in tables 4 and 5. First, the tube was filled with fluid and the particles were carefully introduced to form an uniform flat bed. Secondly, in order to avoid flow perturbations from a pump, the flow was driven by gravity. The fluid was delivered to the tube by continuous overflow from an overhead tank of variable height. At the outlet of the tube, the particles were captured by a mesh while the fluid was run into a reservoir. A pump carried the fluid back to the overflowing tank. The temperature of the fluid was maintained at $35 \pm 1°$ C by using a thermostated bath as a fluid reservoir in the fluid circulating loop. To measure Q_{pipe}, we collected a given volume of the fluid at the outlet of the tube in a given time.

2.2. *Classification of dune patterns*

Five different regimes can be observed as summarized in figure 1 for two different batches of particles (Batches A and D) and using fluids of varying viscosity to explore the full Re_{pipe} range. For convenience, we have chosen to represent their domain of validity as a function of Re_{pipe}. Below the critical Shields number for incipient particle motion, $\theta_0^c \approx 0.12$ (the 0 subscript indicates that this threshold corresponds to a flat bed), the bed shape does not evolve, see Charru, Mouilleron-Arnould & Eiff (2002), Loiseleux, Gondret, Rabaut & Doppler (2005), and Ouriemi et al (2007). Note that this first threshold is determined by the Shields number and not the Reynolds number. Above this first threshold, we observe a second regime where the bed shape evolves but without dune formation.

Increasing again Re_{pipe}, three regimes exhibiting different patterns of dunes can be found. For the first dune regime, which only exists in laminar flow, the dunes denoted

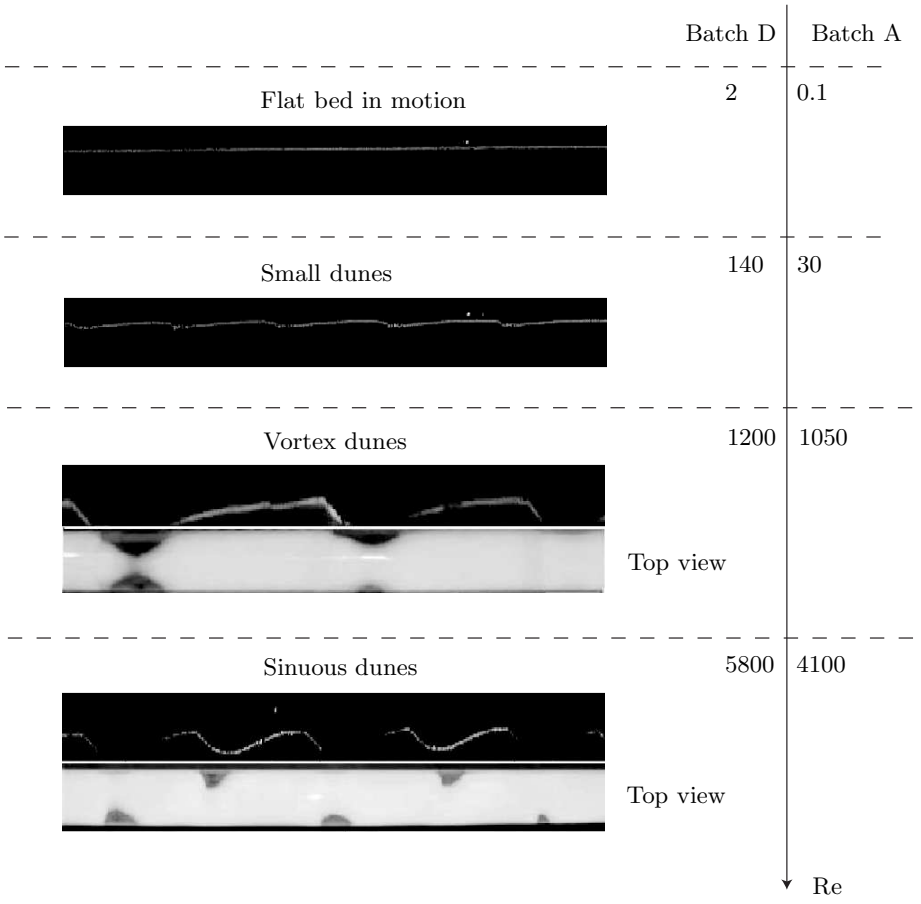


FIGURE 1. The different dune patterns.

'small dunes' present small amplitudes. The second dune regime is observed either in laminar or turbulent flow. In this regime, the dunes are characterized by the existence of vortices located at their front. The vortices erode the particle bed (see figure 1 top view of the vortex dunes). This thus leads to dunes of very large amplitude denoted 'vortex dunes'. Finally, when the flow is turbulent (and only in that case), we observe a new dune pattern that we called 'sinuous dune'. The bottom photograph of figure 1 shows a top view of a 'sinuous dune'. The particle bed is eroded asymmetrically leading to the formation of a pattern having a double periodicity. This may be explained by a destabilization of the initial vortices observed in the 'vortex dunes'.

2.3. *Evolution of dune amplitude, wavelength, and phase velocity*

To quantify more precisely the time-evolution of the dunes, we recorded the evolution of the bed height as a function of time, for a combination of fluid and particles, a given flow rate Q_{pipe}, and an initial height of the bed, h_p^{start}. Using the same experimental technique as in Ouriemi, Aussillous & Guazzelli (2007) where further details can be found, the bed height was measured by imaging the upper layer of the bed illuminated by a laser sheet aligned with the tube length in its middle. The measurement zone spanned over 45 or 75 cm and started at $\approx$ 50 cm from the entrance of the tube. The use of such a large measurement zone provided a precise study of the wavelength evolution over a long

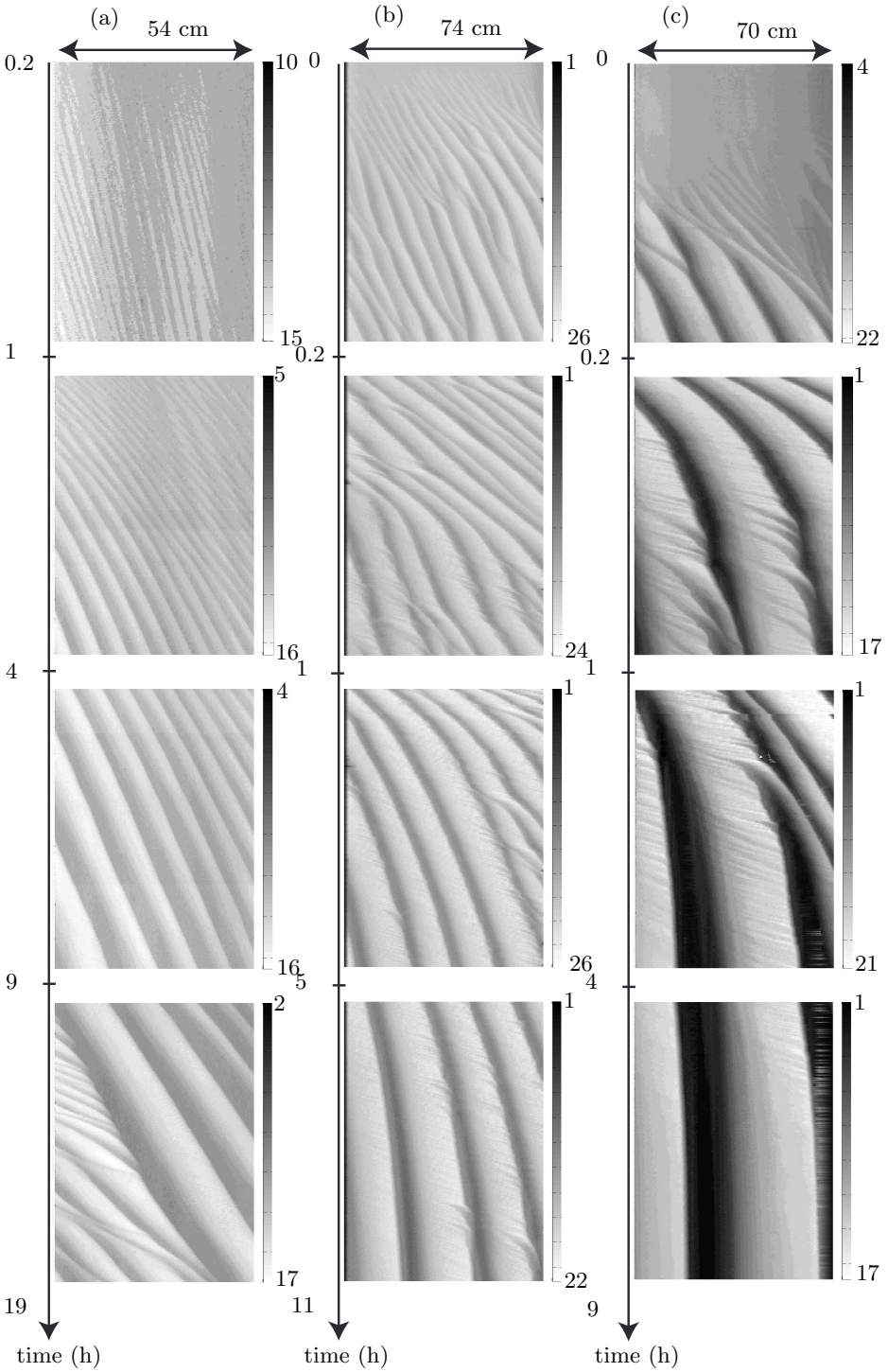


FIGURE 2. Spatio-temporal plots for (a) batch A in fluid 2 with $Q_{pipe} = 3.79\ 10^{-5}\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-1}$, (b) batch A in fluid 1 with $Q_{pipe} = 3.46\ 10^{-5}\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-1}$, and (c) batch B in fluid 2 with $Q_{pipe} = 2.37\ 10^{-5}\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-1}$. The grey scale represents the height h_p of the bed in mm.

time but leaded to a poor resolution in dune amplitude as the accuracy in height was $\approx 2-3$ mm.

Here, we focus on the two first dune regimes, i.e. the regimes of small and vortex dunes. The spatio-temporal evolution of the bed height for three experiments are plotted in figure 2, in the small dune regimes (a) and in the vortex dune regime (b) and (c), with bed heights coded in grey scale. In both regimes, we observe the formation of small initial dunes in the measurement zone. These dunes have a relatively uniform wavelength and move in the flow direction inside the tube.

In the case of vortex dunes, the flow perturbation at the entrance of the tube generates a first vortex dune whose vortices create a second dune downstream and so on. The vortex perturbation by propagating downstream creates dunes downstream over the entire length of the tube which progressively take over the initial dunes, see the top plots of figure 2 (b) and (c). At the same time, the dune pattern moves downstream as the dunes themselves are moving in the flow direction. With increasing time, the vortices between two adjacent dunes erode the particle bed and the dunes are separated by regions emptied of particles. Even though no dune coalescence is observed, the pattern wavelength increases with time whereas the dune velocity decreases. The dune motion eventually stops as the tube is not fed in with particles and the dunes are completely separated, see the bottom plots of figure 2 (b) and (c).

In the case of the small dunes, there is also a propagation of small dunes created by the entrance perturbation. But, as these dunes have no vortex, the velocities of dunes due to the entrance perturbation and of the initial dunes are similar and thus these dunes do not overtake the initial dunes, see the top plot of figure 2 (a). As time is increased, the wavelength increases without showing any saturation, the dune velocity decreases, and the dune amplitude increases, see the bottom plot of figure 2 (a). The small dunes never stop moving downstream and eventually leave the tube when they reach the tube outlet. When all the dunes have left the tube, the bed becomes flat again.

Small dunes and vortex dune are very different because they are generated by two fundamentally different mechanisms. Therefore, their dimensions greatly differ in magnitude. To obtain a quantitative comparison, we have measured the amplitude, wavelength, and phase velocity of the dunes in both regimes. The bed height measurements described above are further analysed to determine the local minima and maxima of the height profile. For each acquisition time, the wavelength is given by the average of the distance between two maxima over the measurement zone. In a similar way, the amplitude is given by the averaged difference in height between the minima and maxima. The velocity is given by averaging the displacements of maxima over typically 5 acquisition times.

Figure 3 shows the evolution of amplitude, wavelength, and phase velocity with time for small ($\square$) and vortex ($\circ$) dunes. The time scale of dune formation differs by a factor ten between small dunes and vortex dunes. The small dunes appear later than vortex dunes as can be seen in figure 3 (a). Small dunes have an amplitude about five times smaller than vortex dunes. The initial phase velocity of vortex dunes is about ten times larger than that of small dunes as shown in figure 3 (b). This may seem surprising as one can expect that large dune would move slowly but the vortices intensify the motion. Because of this vortex intensification, dunes of amplitude $\approx 0.5D$ have the same velocity as dunes of amplitude $\approx 0.1D$. Initial wavelength of small and vortex dune have the same order of magnitude but their time evolution greatly differs. While the wavelength of vortex dunes quickly increases and eventually reaches a saturate state, that of the small dunes shows a slow and continuous increase. It is worth noticing that, when small dunes reach a critical wavelength, they ultimately suffer an instability, see the bottom plot of figure 2 (a).

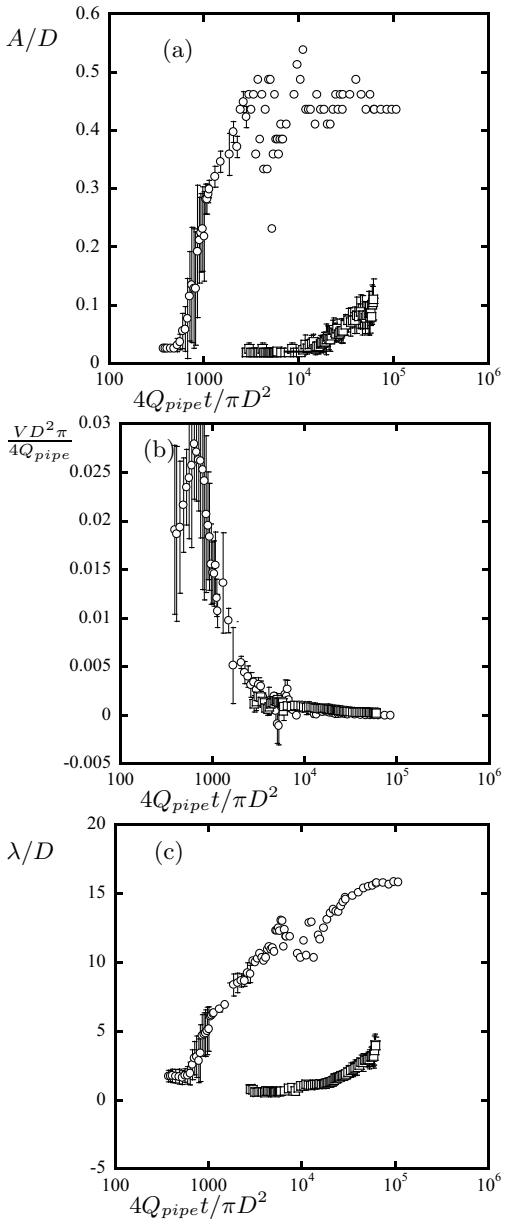


FIGURE 3. Dimensionless dune (a) amplitude, A, (b) velocity, V, and (c) wavelength, λ, for batch D in fluid 2 with $Q_{pipe} = 3.96\ 10^{-5}\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ ($\circ$) and for batch A in fluid 1 with $Q_{pipe} = 3.46\ 10^{-5}\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$ ($\square$)

3. A simple linear stability analysis

3.1. *Poiseuille flow on a wavy bottom*

To determine the fluid flow over a wavy bottom in a two-dimensional channel, we follow the approach of Charru & Hinch (2000) initially undertaken for a Couette flow that we adapt for a Poiseuille flow. We consider a fluid layer lying between a flat upper wall and a wavy bottom which is assumed to be perturbated sinusoidally as $\xi = \xi_1 \cos(kx)$ with wavenumber k and amplitude ξ_1 as sketched in figure 4. Following the previous studies

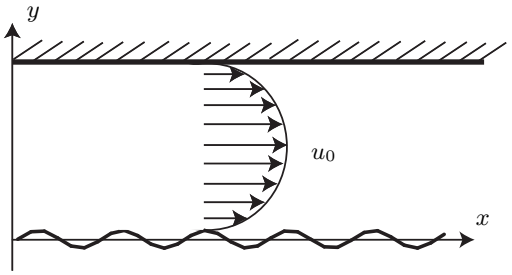


FIGURE 4. Poiseuille flow on a wavy bottom.

of Charru & Hinch (2000) and Charru & Hinch (2006), we assume that the time scale of the fluid flow is much shorter than the time scale of the bed evolution. The fluid flow can then be calculated as if the wavy bottom were fixed, by considering the superposition of a base flow, u_0 along the x direction, over a flat bed and a disturbance, u_1 and v_1 along the x and y directions respectively, induced by the wavy bottom.

We decide to make all the values dimensionless by scaling the length by the channel thickness h_f, the velocity by q_f/h_f where q_f is the fluid flow rate, and the pressure by a viscous pressure $\eta_f q_f/h_f^2$. Therefore the time is scaled by h_f^2/q_f. We note $Re_{2D} = q_f/\nu$ the Reynolds number of the channel. The dimensionless velocity and pressure are decomposed into a base Poiseuille flow, $\bar{u}_0 = 6\bar{y}(1-\bar{y})$ and $\partial\bar{p}_0/\partial\bar{y} = -\rho_f g h_f^3/\eta_f q_f$, and a disturbance $[\bar{u}_1(\bar{y}), \bar{v}_1(\bar{y}), \bar{p}_1(\bar{y})]e^{i\alpha\bar{x}}$, where $\alpha = kh_f$. Here, the upper bar indicates dimensionless values, the 0 subscript the base state, and the 1 subscript the perturbation.

Substituting this flow into the dimensionless linearized mass and momentum conservation equations, we obtain a set of linear ordinary differential equations

$$
\begin{aligned}
i\alpha\bar{u}_1 + \frac{\partial\bar{v}_1}{\partial\bar{y}} &= 0,\\
Re_{2D}\left(i6\alpha\bar{u}_1\bar{y}(1-\bar{y}) + 6\bar{v}_1(1-2\bar{y})\right) &= -i\alpha\bar{p}_1 - \alpha^2\bar{u}_1 + \frac{\partial^2\bar{u}_1}{\partial\bar{y}^2},\\
i6Re_{2D}\alpha\bar{v}_1\bar{y}(1-\bar{y}) &= -\frac{\partial\bar{p}_1}{\partial\bar{y}} - \alpha^2\bar{v}_1 - i\alpha\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial\bar{y}^2}.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

The kinematic boundary conditions become

$$
\bar{u}_1(0) = -6\bar{\xi}_1 \quad \text{and} \quad \bar{u}_1(1) = \bar{v}_1(1) = \bar{v}_1(0) = 0. \tag{3.2}
$$

Equations (3.1) with the boundary conditions (3.2) can be solved numerically using a Chebychev spectral collocation method, see Gottlieb, Hussaini & Orszag (1984). It is also interesting to find an analytical solution in the shallow viscous regime, $\alpha << 1$, by performing an asymptotic expansion for the small adimensional wavenumber α. Assuming $Re_{2D} = O(1)$, the fluid velocity components can be expended in powers of α which gives the shear-rate

$$
\frac{d\bar{u}_1}{d\bar{y}} = -6\bar{\xi}_1(6\bar{y}-4) + i\bar{\xi}_1\frac{Re_{2D}}{70}\left(504\bar{y}^5 - 1260\bar{y}^4 + 840\bar{y}^3 - 108\bar{y} + 12\right)\alpha + O(\alpha^2). \tag{3.3}
$$

This exhibits the phase-lag of the bottom shear rate disturbance $\alpha Re_{2D}/140$ due to inertia similar to that found by Charru & Hinch (2000) for Couette flow.

3.2. *Dune formation*

The dune growth is determined by the conservation equation for the particle flux, q_p, which is obtained by integrating the particle mass conservation equation over the bed

height

$$\frac{\partial \bar{q}_p}{\partial \bar{x}} + \phi_0 \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{t}} = 0, \tag{3.4}$$

where ϕ_0 is the particle volume fraction inside the bed.

We assume that the dynamics of the particle is well accounted by the algebraic law relating the dimensionless particle flux to the Shields number found by Ouriemi, Aussillous & Guazzelli (2007)

$$\bar{q}_p = \phi_0 \frac{\eta}{\eta_e} \frac{Ga}{24 Re_{2D}} \frac{\theta^3}{\theta^{c\,2}}, \tag{3.5}$$

where $Ga = \rho_f \Delta\rho g d^3/\eta^2$ is the Galileo number, $\theta = (\eta du/dy)/\Delta\rho g d$ the Shields number, and η_e an effective viscosity of the mixture of the particles and fluid that was found to equate well to the Einstein viscosity $\eta(1 + 5/2\phi_0)$. This algebraic law has been shown to be valid for moderate Shields numbers, i.e above the threshold for incipient motion (the moving thickness is larger than one particle diameter) but for shearing flow not substantially perturbed by the motion of the granular media, see Ouriemi, Aussillous & Guazzelli (2007).

We now introduce the time evolution of the bed surface, $\bar{\xi} = \bar{\xi}_1 e^{i(\alpha \bar{x} - \bar{\omega} \bar{t})}$. We decompose the Shields number into a base Shields number θ_0 corresponding to a flat bed and a perturbation $\theta_1 e^{i(\alpha \bar{x} - \bar{\omega} \bar{t})}$. In the same way, we write the critical Shields number as $\theta^c = \theta_0^c + \theta_1^c e^{i(\alpha \bar{x} - \bar{\omega} \bar{t})}$. Linearizing equation (3.5), we obtain

$$\bar{q}_p = \frac{\eta}{\eta_e} \phi_0 \frac{Ga}{24 Re_{2D}} \frac{\theta_0^3}{\theta_0^{c\,2}} \left(1 + 3 \frac{\theta_1 e^{i(\alpha \bar{x} - \bar{\omega} \bar{t})}}{\theta_0} - 2 \frac{\theta_1^c e^{i(\alpha \bar{x} - \bar{\omega} \bar{t})}}{\theta_0^c}\right). \tag{3.6}$$

The local inclination of the bed surface modifies the critical Shields number, see e.g Fredsøe (1974), Richards (1980), Charru & Hinch (2006), and Charru (2006), which becomes

$$\theta^c = \theta_0^c \left(1 + \frac{\partial \bar{\xi}/\partial x}{\mu}\right) = \theta_0^c + \frac{\theta_0^c}{\mu} i \alpha \bar{\xi}, \tag{3.7}$$

giving by identification

$$\theta_1^c = \frac{\theta_0^c}{\mu} i \alpha \bar{\xi}_1, \tag{3.8}$$

where μ is a friction coefficient that we identify with the tangent of the angle of repose of the grains and which mainly depends on the grain geometry.

We suppose that the time evolution of the bed surface is slow enough to relate the Shields number to the shear rate calculated at the top of the fixed wavy bottom found in the preceding section

$$\theta = \frac{Re_{2D}}{Ga} \left(\frac{d}{h_f}\right)^2 \left[\frac{d\bar{u}_0}{d\bar{y}}(\bar{\xi}) + \frac{d\bar{u}_1}{d\bar{y}}(\bar{\xi}) e^{i(\alpha \bar{x} - \bar{\omega} \bar{t})}\right]. \tag{3.9}$$

The linearized shear rate calculated at the top of the fixed wavy bottom is given by the two equations

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_0}{d\bar{y}}(\bar{\xi}) &= \frac{d\bar{u}_0}{d\bar{y}}(0) + \bar{\xi} \frac{d^2 \bar{u}_0}{d^2 \bar{y}}(0) + O(\bar{\xi}^2), \\ \frac{d\bar{u}_1}{d\bar{y}}(\bar{\xi}) &= \frac{d\bar{u}_1}{d\bar{y}}(0) + O(\bar{\xi}^2), \end{aligned} \tag{3.10}$$

exhibiting

$$\theta_0 = \frac{Re_{2D}}{Ga}(\frac{d}{h_f})^2 \frac{d\bar{u}_0}{d\bar{y}}(0),$$

$$\theta_1 = \frac{Re_{2D}}{Ga}(\frac{d}{h_f})^2 \left[\bar{\xi}_1 \frac{d^2\bar{u}_0}{d^2\bar{y}}(0) + \frac{d\bar{u}_1}{d\bar{y}}(0) + O(\bar{\xi}_1^2)\right]. \tag{3.11}$$

Considering the time evolution of the bed surface and introducing the linearized flow-rate given by equation (3.6), the conservation equation of the particle flux at leading order in $\bar{\xi}_1$ becomes

$$\bar{\omega}\bar{\xi}_1 = \alpha \frac{\eta}{\eta_e} \frac{Ga}{24Re_{2D}} \frac{\theta_0^3}{\theta_0^{c\,2}} \left(3\frac{\theta_1}{\theta_0} - 2\frac{\theta_1^c}{\theta_0^c}\right). \tag{3.12}$$

Clearly, the perturbation in critical Shields number due to the local inclination of the bed surface (which is purely imaginary) has always a stabilising effect while the imaginary part of the perturbation in Shields number contains the destabilising effect due to inertia. The frequency $\bar{\omega}$ is directly given by equation (3.12) where θ_1 is obtained using the numerical computation of equations (3.1) with the boundary conditions (3.2) mentioned in the preceding section. The frequency can be separated into an imaginary part and a real part, giving the growth rate $\bar{\omega}_i$ and the phase velocity $\bar{\omega}_r/\alpha$.

In the shallow viscous regime, $\alpha << 1$, equation (3.12) can be solved analytically by using the shear rate given by equation (3.3). At leading order in α, this gives

$$\bar{\omega} = \alpha \frac{\eta}{\eta_e} \frac{Ga}{24Re_{2D}} \frac{\theta_0^3}{\theta_0^{c\,2}} (6 + i\frac{3Re_{2D}}{35}\alpha - 2i\alpha\frac{1}{\mu}), \tag{3.13}$$

which leads to

$$\frac{\bar{\omega}_r}{\alpha} = \frac{\eta}{\eta_e} \frac{Ga}{4Re_{2D}} \frac{\theta_0^3}{\theta_0^{c\,2}}, \tag{3.14}$$

$$\bar{\omega}_i = \alpha^2 \frac{\eta}{\eta_e} \frac{Ga}{24Re_{2D}} \frac{\theta_0^3}{\theta_0^{c\,2}} (\frac{3Re_{2D}}{35} - 2\frac{1}{\mu}). \tag{3.15}$$

The instability threshold, corresponding to $\omega_i = 0$, occurs at

$$Re_{2D}^c = \frac{70}{3\mu}. \tag{3.16}$$

The important finding is that the control parameter for the dune instability is the Reynolds number, Re_{2D}, and not the Shields number, θ. It is worth mentioning that the threshold for incipient particle motion on a flat bed has been found to be $\theta_0^c = \mu\phi_0/2$ which is proportional to the friction coefficient μ and to the volume fraction of the particle inside the bed ϕ_0, see Ouriemi, Aussillous & Guazzelli (2007). The threshold for dune instability involves the Reynolds number and is also related to the friction coefficient. Using the above expression for θ_0^c, it can be expressed as

$$Re_{2D}^c = \frac{35\phi_0}{3\theta_0^c}. \tag{3.17}$$

These thresholds, θ_0^c and Re_{2D}^c, differ but are related. Consequently, the onset for the instability may not coincide with the onset for particle motion. In this simple modelling, these thresholds only depend on two physical parameters, the particle volume fraction inside the bed and the friction coefficient.

Figure 5 shows the dimensionless growth-rate, $\bar{\omega}_i$, versus dimensionless wavenumber, α, for $\phi_0 = 0.55$ and $\theta_0^c = 0.12$ as found experimentally by Charru, Mouilleron-Arnould

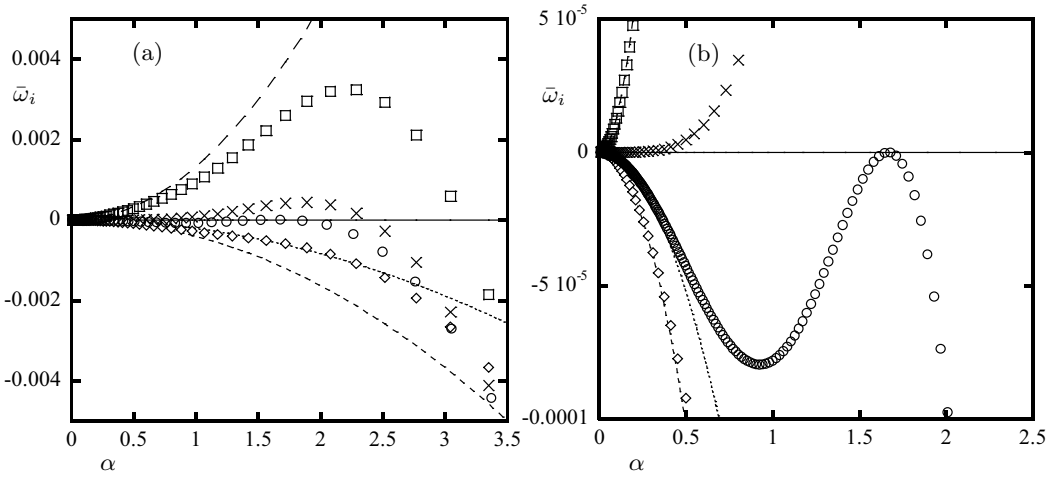


FIGURE 5. (a) Numerical $\bar{\omega}_i$ as a function of α for $Re_{2D} = 35$ ($\diamondsuit$), $Re_{2D} = 49.3$ ($\circ$), $Re_{2D} = 54.3$ ($\times$), and $Re_{2D} = 70$ ($\square$). The lines represent equation (3.15) for $Re_{2D} = 35$ (small-dashed line), $Re_{2D} = 49.3$ (dotted line), $Re_{2D} = 54.3$ (solid line), and $Re_{2D} = 70$ (long-dashed line) and (b) blow-up.

& Eiff (2002), Loiseleux, Gondret, Rabaut & Doppler (2005), and Ouriemi et al (2007) (or equivalently $\mu = 0.43$). Equation (3.15) valid in the shallow viscous regime, $\alpha << 1$, shows a long wavelength instability with a threshold at $Re^c_{2D} = 54.3$. The numerical predictions present a good agreement with this asymptotic case for $\alpha \lesssim 0.1$. However, the numerical solution indicates that the instability is not a long-wave instability at threshold but presents a finite value $\alpha \approx 1.7$ for a slightly different threshold $Re^c_{2D} = 49.3$, see blow-up in figure 5. This is an interesting finding as it indicates that the wavelength at onset is of the order of the fluid thickness.

4. Comparison and conclusion

We now compare the predictions of the stability analysis to the experimental observations. In the case of a pipe flow, the Reynolds number is $Re_{pipe} = 4\rho_f Q_{pipe}/\pi\eta D$ and the equations obtained for a two dimensional channel in § 3 are modified by replacing Re_{2D} by $\beta\pi Re_{pipe}/4$ (or equivalently q_f by $\beta Q_{pipe}/D$) where $\beta = 1.85$ has been found from numerical analysis in the limit $0.2 \leqslant h_f/D \leqslant 0.8$ by Ouriemi et al (2007).

Figure 6 presents the phase diagram of the dune patterns in the plane $Re_{pipe}, Ga(h_f/d)^2$. We choose this plane to exhibit both the threshold for incipient particle motion controlled by the Shields number and that for dune instability controlled by the Reynolds number. In this plane, the threshold for incipient particle motion is given by the dashed line $Re_{pipe} = (2\theta^c_0/3\beta\pi)Ga(h_f/d)^2 \approx 0.014\, Ga(h_f/d)^2$ with $\theta^c_0 = 0.12$ whereas the instability threshold is the horizontal solid line $Re_{pipe} = 140\phi_0/3\beta\pi\theta^c_0 \approx 37$. The dotted line indicates the domain of validity of the algebraic law relating the dimensionless particle flux to the Shields number found by Ouriemi, Aussillous & Guazzelli (2007). The three regimes of 'no motion' ($\times$), 'flat bed in motion' ($\blacksquare$ and $\square$ when outside the domain of validity of the model), and 'small dunes' ($\circ$) are well delineated by these boundaries in the given limit of validity. The regimes of 'vortex dunes' ($\blacktriangle$) and 'sinuous dunes' ($\triangle$) seem separated and their boundaries well described by Re_{pipe} as a control parameter.

We have also tested in figure 6 the prediction for instability threshold of Charru & Mouilleron-Arnould (2002) (dashed-dotted line) and Charru & Hinch (2006) (vertical

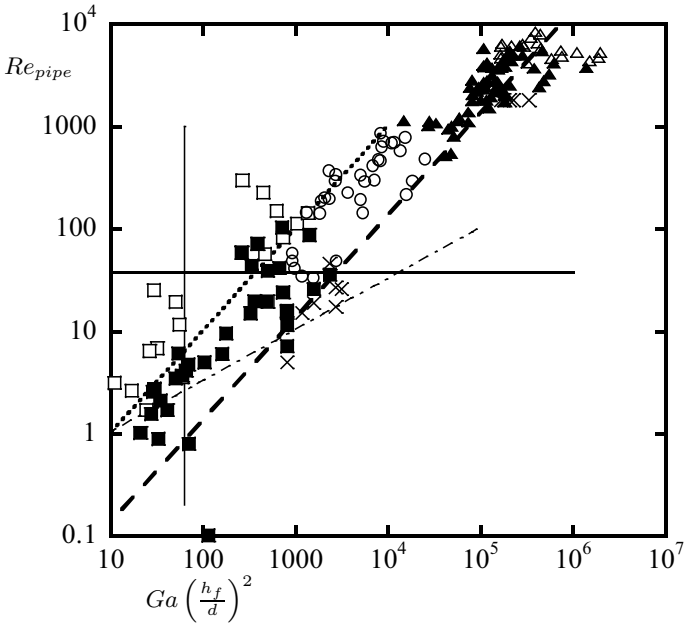


FIGURE 6. Phase-Diagram of the dune patterns. The symbols and the lines are explained in the text.

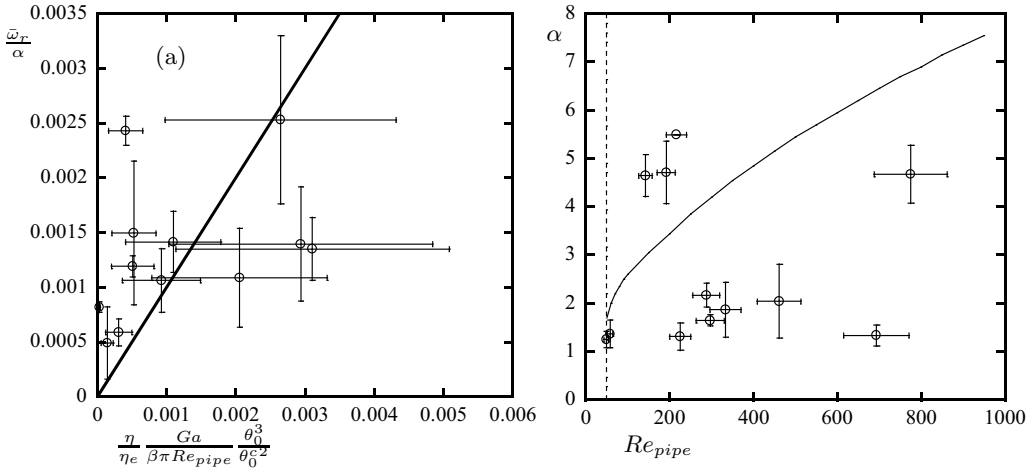


FIGURE 7. (a) Dimensionless initial dune velocity against equation (3.14) (the solid line corresponds to the slope one) and (b) dimensionless initial wavenumber as a function of Re_{pipe} ($\circ$) (the solid line represents the numerical prediction and the dotted line the threshold).

solid line) listed in table 1. Below both of these predicted thresholds, no dune is observed as expected but these boundaries do not properly delimitate the regime of dunes formation in the present experiment in pipe flow. The difference between the present stability analysis and that of Charru & Mouilleron-Arnould (2002) only lies into the algebraic law relating q_p to θ. The present analysis uses $q_p \propto \theta^3/\theta^{c2}$ while Charru & Mouilleron-Arnould (2002) takes $q_p \propto (\theta - \theta^c)^3$. Using a power law involving the excess Shields number yields a threshold depending both on the Reynolds and Galileo numbers (see table 1) and having the slope of the dashed-dotted line in figure 6. The analysis of

Charru & Hinch (2006) differs from the present analysis by the use of a different model for particle transport which introduces a new stabilising effect of the crest erosion. The competition between this new stabilising effect and the destabilising fluid inertia depends on the Galileo number. If the Galileo number is smaller than a critical number (given in table 1 and vertical solid line plotted in figure 6), crest erosion overcomes and the bed is stable. In the opposite case, the bed is unstable above a critical Shields number. This last threshold would correspond to a line with a slope similar to that of the dashed line in figure 6 which clearly does not delimitate the observed instability.

Further quantitative comparisons can be made for the onset of small dunes with particles of batch A with fluids 3 to 5. Figure 7 (a) compares the initial dune velocity with equation (3.14). Despite large error bars and dispersion of the data, the agreement is good. Figure 7 (b) presents the initially observed wavenumbers as well as the most amplified numerical wavenumber as a function of Re_{pipe}. The experimental wavenumbers seem rather independent of Re_{pipe} with values $\approx 2 - 5\,h_f^{-1}$ while the numerical wavenumber is $\approx 1.7\,h_f^{-1}$ at threshold and presents an increase with increasing Re_{pipe}. Nonetheless, same order of magnitude is recovered close to threshold. A long-wave instability is not observed. It should be, however, mentioned that experimental measurements at instability onset are very delicate and thus do not permit further detailed comparisons. Note that, as expected, the stability analysis developed here is unable to account for the onset of the vortex dunes. Equation (3.14) underestimates by a factor 10^4 the experimental velocity of the vortex dunes.

In conclusion, we have given the phase diagram of the different dune patterns observed when a bed composed of spherical particles is submitted to a shearing flow in a pipe. 'Small dunes' present small amplitudes and only exist in laminar flow. 'Vortex dunes' are characterized by the existence of vortices at their front and are found either in laminar or turbulent flow. 'Sinuous dunes', showing a double periodicity, appear in turbulent flow.

To predict the small dune formation, we have performed a simple linear stability analysis where inertia in the fluid produces a phase-lag in the shear stress which is destabilising, while the component of gravity down an incline stabilises the perturbations. We first calculated the perturbed fluid flow over a wavy bottom considered as if fixed. Then we used the particle flux found by Ouriemi, Aussillous & Guazzelli (2007) to relate the bed height evolution to the shear stress at the top of the bed through the particle mass conservation. The threshold for dune formation is found to be controlled by the Reynolds number while the threshold for incipient motion is determined by the Shields number. The regimes of 'no motion', 'flat bed in motion', and 'small dunes' are well delineated by these predicted thresholds. The predicted wavelength at the onset of instability is of the order of the fluid thickness. The order of magnitude of the experimental initial dune velocity and wavelength are in good agreement with the model.

This simple stability analysis containing the basic ingredient of the destabilising fluid inertia and stabilising gravity is found sufficient to provide realistic predictions. An interesting question is whether there is any delay in the flux adapting to a change in the shear stress and whether this additional stabilising mechanism is significant. This can be answered in the future using the two-phase model developed by Ouriemi, Aussillous & Guazzelli (2007).

Acknowledgement

We would like to thank Y. Forterre and O. Pouliquen for discussions regarding the dune stability analysis, F. Charru and E. J. Hinch for critical reading and suggestions, and

P. Cervetti, S. Martinez, and F. Ratouchniak for technical assistance. Funding from the Institut Français du Pétrole is gratefully acknowledged by M.O. This study is supported by a grant from the Agence Nationale de la Recherche.

REFERENCES

Andreotti, B., Claudin, P. & Douady, S. 2002 Selection of dune shapes and velocities. Part 2: a two-dimensional modelling. *Eur. Phys. J. B* **28**, 341–352.

Charru, F. & Hinch, E. J. 2000 'Phase diagram' of interfacial instabilities in a two-layer Couette flow and mechanism of the long-wave instability. *J. Fluid Mech.* **414**, 195–223.

Charru, F. & Hinch, E. J. 2006 Ripple formation on a particle bed sheared by a viscous liquid. *J. Fluid Mech.* **550**, 111–121.

Charru, F. & Mouilleron-Arnould, H. 2002 Instability of a bed of particles sheared by a viscous flow. *J. Fluid Mech.* **452**, 303–323.

Charru, F., Mouilleron-Arnould, H. & Eiff, O. 2004 Erosion and deposition of particles on a bed sheared by a viscous flow. *J. Fluid Mech.* **519**, 55–80.

Charru, F. 2006 Selection of the ripple length on a granular bed sheared by a liquid flow. *Phys. Fluids.* **18**, 121508-1–9.

Claudin, F. & Andreotti, B. 2006 A scaling law for aeolian dunes on Mars, Venus, Earth, and for subaqueous ripples. *Earth and Planetary Science Letters.* **252**, 30–44.

Coleman, S. & Melville, B. 2000 Initiation of bed forms on a flat sand bed. *J. Hydraul. Engrg.* **122**, 301–310.

Coleman, S. & Eling, B. 2000 Sand wavelets in laminar open-channel flows. *J. Hydraul. Res.* **38**, 331–338.

Engelud, F. 1970 Instability of erodible beds. *J. Fluid Mech.* **42**, 225–224.

Fredsøe, J. 1974 On the development of dunes in erodible channels. *J. Fluid Mech.* **64**, 1–16.

Gottlieb, D., Hussaini, M. Y.& Orszag, S. A. 1984 Theory and application of spectral methods. In *Spectral Methods for Partial Differential Equations* (ed. R. G. Voight, D. Gottlieb & M.Y. Hussaini). SIAM.

Kouakou, K. K. J. & Lagrée, P. Y. 2005 Stability of an erodible bed in viscous shear flows. *Eur. Phys. J. B* **45**, 115–125.

Kuru, W. C., Leighton, D. T. & McCready, M. J. 1995 Formation of waves on a horizontal erodible bed of particles. *Int. J. Multiphase Flow* **21**, 1123–1140.

Loiseleux, T., Gondret, P., Rabaud, M., & Doppler, D. 2005 Onset of erosion and avalanches for an inclined granular bed sheared by a continuous laminar flow. *Phys. Fluids* **17**, 103304.

Mouilleron-Arnould, H. 2002 *Instabilités d'un milieu granulaire cisaillé par un fluide.* Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France.

Ouriemi, M., Aussillous, P., Medale, M., Peyson, Y. & Guazzelli, E. 2007 Determination of the critical Shields number for particle erosion in laminar flow. *Phys. Fluids* **19**, 061706.

Ouriemi, M., Aussillous, & Guazzelli, E. 2007 Bed-load transport by shearing flows. Submitted to *J. Fluid Mech.*.

Pouliquen, O., Cassar, C., Forterre, Y., Jop, P. & Nicolas, M. 2005 How do grains flow: towards a simple rheology for dense granular flows. *Proceedings Powder and Grains.*

Raudkivi, A. 1997 Ripples on stream bed. *J. Hydraul. Engrg.* **123**, 58–64.

Ribberink, J. S. 1998 Bed-load transport for steady flows and unsteady oscillatory flows. *Coastal Engrg.* **34**, 58–82.

Richards, K. 1980 The formation of ripples and dunes on an erodible bed. *J. Fluid Mech.* **99**, 597–618.

Sumer, M. & Bakioglu, M. 2005 On the formation of ripples on an erodible bed. *J. Fluid Mech.* **144**, 177–190.

Valance, A. & Langlois, V. 2004 Ripple Formation over a sand bed submitted to a laminar shear flow. *Eur. Phys. J. B* **43**, 283–294.

Yalin, S. 1977 On the determination of ripple length. *J. Hydraul. Division* **103**, 439–442.

Yalin, S. 1985 On the determination of ripple geometry. *J. Hydraul. Division* **111**, 1148–1155.

5.2 Complément à l'article

A travers l'étude de stabilité linéaire réalisée dans l'article *Dune formation in pipe flow*, nous avons prédit analytiquement et numériquement le seuil d'apparition des "petites dunes" ainsi que leur longueur d'onde et leur vitesse initiale. Ces différents résultats montrent un bon accord au niveau des ordres de grandeur avec les résultats expérimentaux. L'étude théorique étant réalisée dans une configuration à deux dimensions alors que les résultats expérimentaux sont obtenus dans un tube, nous avons réalisé le passage d'une configuration à l'autre en utilisant les formules données dans le chapitre 3. La résolution analytique réalisée dans la limite des grandes longueurs d'ondes et en prenant en compte les limites du modèle ($\theta << \theta^c(D-h_p)/d$), nous permet de prédire le seuil de destabilisation en considérant un taux d'amplification nul. Le seuil obtenu correspond à un nombre de Reynolds de l'écoulement constant $Re_{pipe} = \frac{140}{3\beta\pi\theta_0^c}\phi_0$, où $\beta = 1.85$ est un facteur géométrique. La détermination de ce seuil associée à la détermination du seuil de mise en mouvement θ^c, nous permet de commencer à séparer les zones d'existence des différents régimes. D'après le modèle simple à la base de la détermination du nombre de Shields critique (chapitre 3), un nombre de Shields constant correspond à une variation linéaire du nombre de Reynolds de l'écoulement Re_{pipe} en fonction du produit $Ga(h_f/d)^2$. La prédiction pour le seuil de destabilisation du lit correspondant à Re_{pipe} constant, le choix du plan $Re - Ga(h_f/d)^2$ pour représenter les zones d'existence des différents régimes vient naturellement. Le diagramme de phase obtenu est présenté dans l'article. On peut noter la bonne concordance entre les deux seuils prédits théoriquement et les données expérimentales dans la limite des modèles servant de base à ces prédictions. La vitesse initiale d'avancée des dunes a été prédite analytiquement dans la limite des grandes longueurs d'onde. Elle est donnée par $\bar{\omega}_r/\alpha = (\eta/\eta_e)(Ga/4Re_{2D})(\theta_0^3/\theta_0^{c2})$, où l'indice 0 se rapporte au lit plat.
La longueur d'onde initiale obtenue expérimentalement est de l'ordre de grandeur de la hauteur de fluide qui est l'échelle caractéristique des longueurs. Le modèle analytique étant résolu dans la limite des grandes longueurs d'ondes, il ne peut pas prédire une longueur d'onde la plus amplifiée de l'ordre de la hauteur de fluide. Nous avons donc choisi de déterminer la longueur d'onde la plus amplifiée de manière numérique.

La modélisation choisie comporte de nombreuses limites, notamment, le mouvement du lit de particules est négligé. Dans le cas où la vitesse d'avancée des dunes est suffisamment lente, cette hypothèse est tout à fait justifiable. Pour des configurations où cette vitesse augmente, la validité du modèle devient questionnable.
Une autre limite provient de la définition du flux de transport des particules. Nous avons supposé que le flux de transport calculé pour un lit plat restait valide dans le cas d'un lit perturbé et nous avons rajouté artificiellement l'influence des perturbations à travers le nombre de Shields et le nombre de Shields critique. De ce fait, nous avons pris en compte l'effet de la pente et la perturbation de l'écoulement générée par la déformation de l'interface fluide/milieu granulaire. D'autres effets décrits dans la littérature comme l'inertie des grains [Valance & Langlois (2004)] ou l'érosion des crêtes [Charru (2006)] peuvent également influer sur la stabilité des grains. Ces effets ne sont pas pris en compte dans cette étude. Afin de prendre en

compte toutes les interactions existant entre le fluide et le mélange fluide/particules, ainsi que l'ensemble des effets physiques impliqués dans la stabilité du lit, il faudrait réaliser l'étude de stabilité directement à partir des équations diphasiques décrites dans le chapitre 4.

S'il existe un désaccord au niveau des effets stabilisants impliqués dans la formation des dunes, il est unanimement reconnu que la destabilisation du lit est due à l'inertie du fluide qui crée un déphasage entre les sommets du lit et le cisaillement maximum du fluide. Depuis la mise en évidence de cet effet par Kennedy (1963), ce déphasage a été calculé théoriquement pour de nombreux écoulements [Fredsœ (1974), Engelud (1970), Charru & Hinch (2000), Valance & Langlois (2004)...], mais à notre connaissance, il n'a pas encore donné lieu à des mesures expérimentales. Dans le cadre de cette thèse, nous avons effectué des mesures d'écoulement au dessus d'un fond sinusoïdal, malheureusement, les données obtenues nécessitant un traitement approfondi qui n'a pas encore été effectué, elles ne pourront pas être présentées dans ce manuscrit.

L'étude de stabilité réalisée ne nous a pas fourni de prédiction théorique pour le seuil d'apparition des dunes à vortex et des dunes sinueuses. D'un point de vue purement qualitatif, l'étude du diagramme de phase semble montrer que ces seuils pourraient correspondre à un nombre de Reynolds constant.
L'étude de stabilité effectuée étant linéaire, elle ne donne aucune indication sur l'évolution temporelle des dunes qui est fortement non linéaire. Au cours des expériences réalisées dans le cadre de cette thèse, nous avons accumulé un nombre de données non négligeables concernant l'évolution temporelle des dunes, notamment en ce qui concerne l'évolution des longueurs d'ondes, de la vitesse d'avancée des dunes et de leur amplitude. Un exemple typique des données obtenues est présenté dans l'article *Dune formation in pipe flow*. Prédire les évolutions observées nécessite une étude complexe en trois dimensions de l'évolution instationnaire du lit de particules dans le tube. Afin d'obtenir cette prédiction, une modélisation numérique du milieu fluide/particules basée sur la modélisation diphasique présentée dans le chapitre 4 sera l'occasion de futurs travaux de recherche en collaboration avec M. Médale.

Dans la suite de cette section, nous nous contenterons de présenter quelques aspects qualitatifs de l'étude des différentes dunes observées.

5.2.1 Évolution temporelle des dunes : instabilité convective ou absolue ?

Expérimentalement, nous avons accès à l'évolution en fonction du temps d'une portion donnée du milieu granulaire. Ces informations brutes peuvent être représentées sous forme de spatio-temporel, comme décrit dans la section précédente. La plupart des dunes étudiées sont créées suite à la propagation de la perturbation de l'entrée. À ce titre, elles présentent une double évolution, à la fois spatiale et temporelle. En d'autres termes, à une position donnée dans le tube, les caractéristiques d'une dune dépendent du temps [figures 5.1 et 5.2]. À un temps donné, la forme des

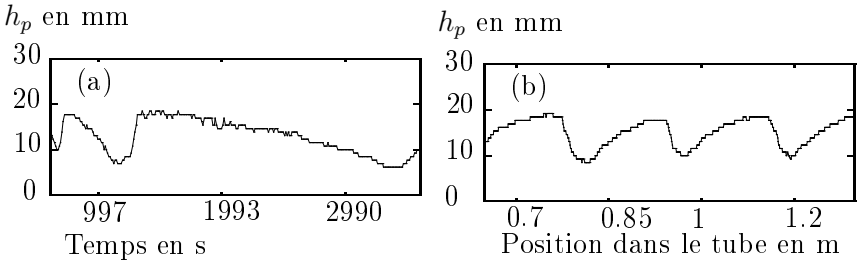


FIG. 5.1 – Évolution de h_p (a) à 84 cm de l'entrée du tube et (b) 660 s après le début de l'expérience pour des "dunes à vortex".

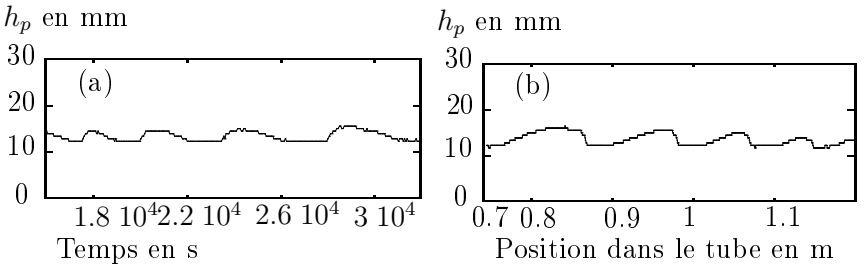


FIG. 5.2 – Évolution de h_p (a) à 90 cm de l'entrée du tube et (b) 9 h après le début de l'expérience pour des "petites dunes".

dunes observées dans le tube dépend de leur position [figures 5.1 et 5.2]. Les dunes croissent en longueur d'onde au fur et à mesure qu'elles s'éloignent de la la perturbation qui les a créées (l'entrée du tube). Il s'agit probablement d'une instabilité convective.

5.2.2 Signification des valeurs moyennées

L'évolution d'une dune dépend du temps, mais aussi de sa position dans le tube. À un instant donné, les différentes dunes situées dans la zone de mesure étant à des positions différentes, elles ne correspondent pas au même stade d'évolution et leurs grandeurs caractéristiques (vitesse, longueur d'onde, amplitude) différent. Devant cette constatation, on peut se demander s'il est réaliste de considérer des moyennes en temps ou si il faut considérer chaque dune de façon indépendante, ce qui réduit considérablement le temps sur lequel on peut suivre l'évolution des grandeurs caractéristiques. Afin de répondre à cette question, nous avons représenté sur la partie de gauche de la figure 5.3, pour une expérience donnée, l'évolution des longueurs caractéristiques de l'ensemble des dunes qui ont traversé la zone de mesure au cours de l'expérience. On peut voir que même si à un temps donné, les valeurs observées présentent une large dispersion suivant les dunes, les différentes courbes (vitesse, amplitude et longueur d'onde) semblent suivre une même tendance. La partie de droite de la figure 5.3 représente les même données sur lesquelles nous avons superposé la courbe représentant la moyenne des différentes courbes observées associée à sa barre d'erreur mesurée à partir de la dispersion des courbes. On peut noter que la

moyenne représente bien la tendance générale. La dispersion est de l'ordre de 19% pour la longueur d'onde moyenne, de 27% pour l'amplitude moyenne et de 24% pour la vitesse moyenne, utiliser la moyenne pour représenter une expérience semble un bon compromis.

5.2.3 Dunes à vortex

L'évolution des dunes à vortex est très différente de l'évolution des petites dunes, notamment à cause de la présence de vortex qui creusent le milieu granulaire. Pourtant, aux stades initiaux de la formation des dunes à vortex, on observe l'apparition de dunes de faible amplitude qui ne sont pas dues à la perturbation de l'entrée. L'étude de stabilité du lit plat nous a permis de prédire les longueurs d'ondes initiales, ainsi que les vitesses initiales d'avancée des petites dunes et il serait intéressant de savoir si ces prédictions décrivent correctement les dunes initiales qui se forment dans le régime des dunes à vortex. Afin d'étudier les longueurs d'ondes initiales et les vitesses initiales observées dans le régime des dunes à vortex, nous avons comparés les données obtenues avec différents modèles.

Longueur d'onde initiale

Avant l'arrivée des dunes dues à la perturbation de l'entrée, il se forme des dunes dans la zone de mesure (article *Dune formation in pipe flow*). Ces dunes sont caractérisés par une longueur d'onde initiale relativement régulière que nous avons mesuré pour trois types de billes différentes (A, B et D). La figure 5.4 (a) représente l'évolution de la longueur d'onde initiale en fonction du nombre de Re_{pipe}. Le fluide utilisé au cours de ces différentes expériences étant identique, les variations du nombre de Reynolds traduisent uniquement les variations du débit de fluide. On peut noter que pour un type de billes fixé, la longueur d'onde initiale semble être indépendante de Re_{pipe}. Elle est de l'ordre de 2.8 cm pour les billes de type A, de l'ordre de 5.4 cm pour des billes de type D et de l'ordre de 20 cm pour des billes de type B. La longueur d'onde initiale semble donc varier en fonction des caractéristiques des billes. Les données concernant les billes de type B ont été obtenues pour des écoulements laminaires, tandis que les points obtenus pour les billes de type A et D correspondent à des écoulements allant du laminaire au turbulent. Il est intéressant de noter que la longueur d'onde initiale semble être indépendante de la nature de l'écoulement. Dans le modèle développé dans l'article *Dune formation in pipe flow*, pour la gamme des nombres de Reynolds considérés, nous prédisons une longueur d'onde variant faiblement avec le nombre de Reynolds mais indépendante du type de billes. Le modèle ne semble donc pas cohérent avec les observations précédentes. Récemment Claudin & Andreotti (2006) ont proposé un modèle basé sur l'étude de stabilité d'un lit soumis à un écoulement turbulent dans lequel ils prédisent une variation de la longueur d'onde $\lambda \approx 50 l_s$, où $l_s = d\rho_p/\rho_f$, . Le paramètre l_s dépendant uniquement des caractéristiques des billes, il peut être intéressant de le tester ici. La figure 5.4 (b) représente les données expérimentales en fonction de l_s. On peut noter que la variation observée n'est pas satisfaisante en ce qui concerne les données correspondant aux billes de type A et D, alors que ces données sont pourtant

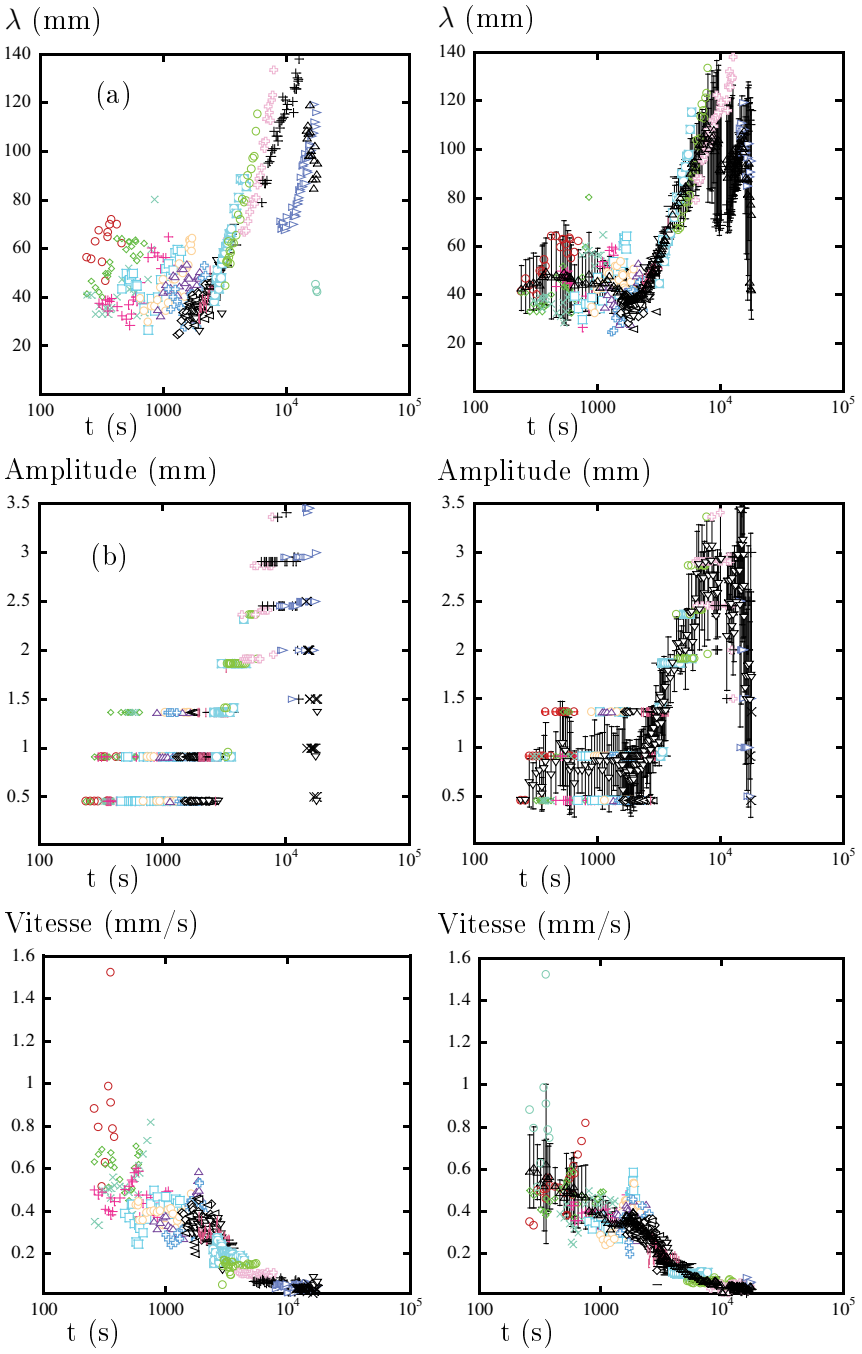


FIG. 5.3 – Evolution de (a) la longueur d'onde, (b) l'amplitude et (c) la vitesse des dunes pour des billes de PMMA (type D) et $Re_{pipe} = 225$. Sur les graphiques de droite, nous avons rajouté la valeur moyenne.

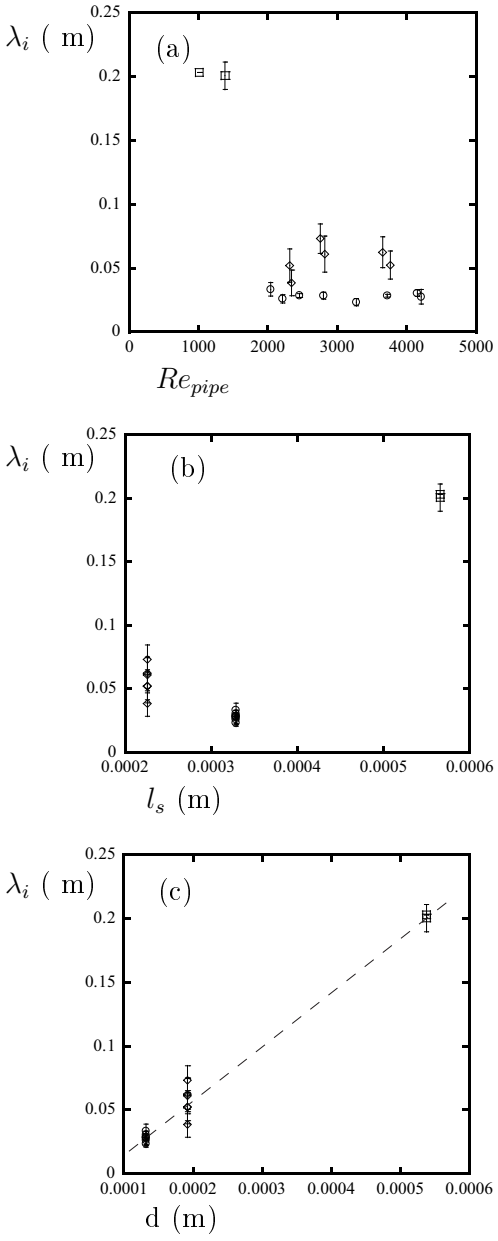


FIG. 5.4 – Évolution de la longueur d'onde initiale λ_i (a) en fonction du débit adimensionné Re_{pipe}, (b) en fonction de $l_s = d\rho_p/\rho_f$ et (c) en fonction du diamètre des particules d pour des billes de type A ($\circ$), B ($\square$) et D (Δ).

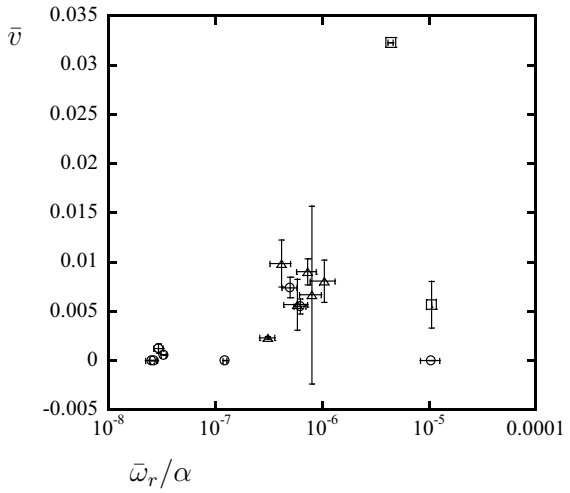


FIG. 5.5 – Vitesse d'avancée des dunes adimensionnée $\bar{v}$ représentée en fonction de l'équation (5.1) pour des billes de type A (○), B (□) et D (Δ).

majoritairement obtenues pour des écoulements turbulents. La dépendance en l_s ne semble donc pas être pertinente pour décrire la longueur d'onde initiale observée expérimentalement. Si on teste uniquement les variation en diamètre [figure 5.4 (c)], on observe que les longueurs d'onde initiales semblent bien s'ajuster sur une droite. Le diamètre des particules semble donc être un paramètre important qui influe sur la longueur d'onde initiale.

Concernant la vitesse d'avancée des dunes, nous avons représenté figure 5.5 les vitesses adimensionnées d'avancée des dunes mesurées expérimentalement en fonction de la vitesse prédite par le modèle présenté dans l'article *Dune formation in pipe flow* dans le cas d'un écoulement laminaire,

$$\frac{\bar{\omega}_r}{\alpha} = \frac{\eta}{\eta_e}\frac{Ga}{\beta\pi Re_{pipe}}\frac{\theta_0^3}{\theta_0^{c2}}. \tag{5.1}$$

On observe clairement que l'ordre de grandeur prédit n'est pas le bon, même pour les expériences correspondant à des écoulements laminaires. Il est intéressant de noter que pour un écoulement laminaire en utilisant le même type de billes (A), le modèle permet de décrire de façon très satisfaisante l'ordre de grandeur de la vitesse d'avancée des petites dunes alors qu'il la sous-estime d'un facteur 10^4 dans le cas des dunes à vortex.

Il n'est donc pas possible de prédire l'état initial des dunes à vortex en utilisant l'étude de stabilité réalisée dans l'article *Dune formation in pipe flow*. Certaines dunes à vortex étant observées pour des écoulements laminaire, on peut en déduire que l'écart entre le modèle et les expériences n'est pas lié à la nature de l'écoulement mais plutôt aux mécanismes physiques à l'origine de la destabilisation du lit dans le régime des dunes à vortex qui ne sont pas encore bien identifiés.

Étude du vortex

Une meilleure compréhension des mécanismes physiques à l'origine de la formation des dunes à vortex, nécessite notamment une étude approfondie des vortex situés en aval des dunes. Dans ce but, nous avons réalisé des mesures de l'écoulement en aval des dunes à l'aide d'une technique de PIV. Ces mesures n'ayant pas encore été pleinement exploitées, nous allons uniquement présenter une description qualitative de la structure des vortex en nous basant sur des données brutes obtenues.

La figure 5.6 représente la face d'avalanche d'une dune à vortex [figure 5.6 (a)], ainsi que la zone du tube située juste en aval de la face d'avalanche où le milieu granulaire a été creusé par le vortex [figure 5.6 (b)]. Les figures 5.6 (c) et (d) représentent les différents écoulements obtenus suite aux mesures de PIV réalisées dans un plan vertical au centre du tube, tandis que les figures 5.6 (e) et (f) représentent les différents écoulements obtenus suite aux mesures de PIV réalisées dans un plan vertical situé à environ 1 cm du bord du tube.

On se place dans un plan vertical au centre du tube. En observant l'écoulement au niveau de la face d'avalanche [figure 5.6 (c)], on peut noter que la vitesse juste au-dessus du milieu granulaire est largement inférieure à la vitesse située un peu plus haut dans l'écoulement. Un zoom réalisé au niveau du milieu granulaire montre l'existence d'un contre-écoulement qui marque la présence du vortex. Juste après la face d'avalanche [figure 5.6 (d)], on observe toujours la présence d'un contre-écoulement. Il est intéressant de noter que la vitesse de ce contre écoulement est beaucoup plus importante qu'au niveau de la face d'avalanche, ce qui explique que le milieu granulaire soit creusé. Si on se place maintenant dans un plan vertical situé à 1 cm du bord du tube [figures 5.6 (e) et (f)], on observe toujours la zone de recirculation due à la présence du vortex, mais son amplitude est plus importante qu'au centre du tube. Cette observation est concordante avec la vue de dessus des dunes à vortex (chapitre 2), qui montre que le milieu granulaire commence par être creusé sur les côtés du tube. On peut noter que la hauteur du vortex diminue de façon significative en se rapprochant de la dune.

Afin de mieux caractériser ce vortex, nous avons aussi réalisé des mesures de l'écoulement vue de dessus au niveau de la face d'avalanche (figure 5.7). L'existence de deux sens d'écoulements de part et d'autre du centre du tube laisse à penser qu'il y a bien deux vortex situés côte à côtes qui ne sont pas exactement symétriques.

Dunes sinueuses

Suite au calcul numérique de M. Médale réalisé pour un écoulement dans un tube sur un fond solide ayant la forme d'une dune à vortex, il semble que l'origine de l'apparition des dunes sinueuses soit liée à une destabilisation des vortex due au changement de section au passage du sommet de la dune. En effet, dans cette configuration pour des nombres de Reynolds suffisamment élevé, les vortex deviennent instationnaires. L'étude des dunes sinueuses sera l'occasion de futurs travaux de recherche.

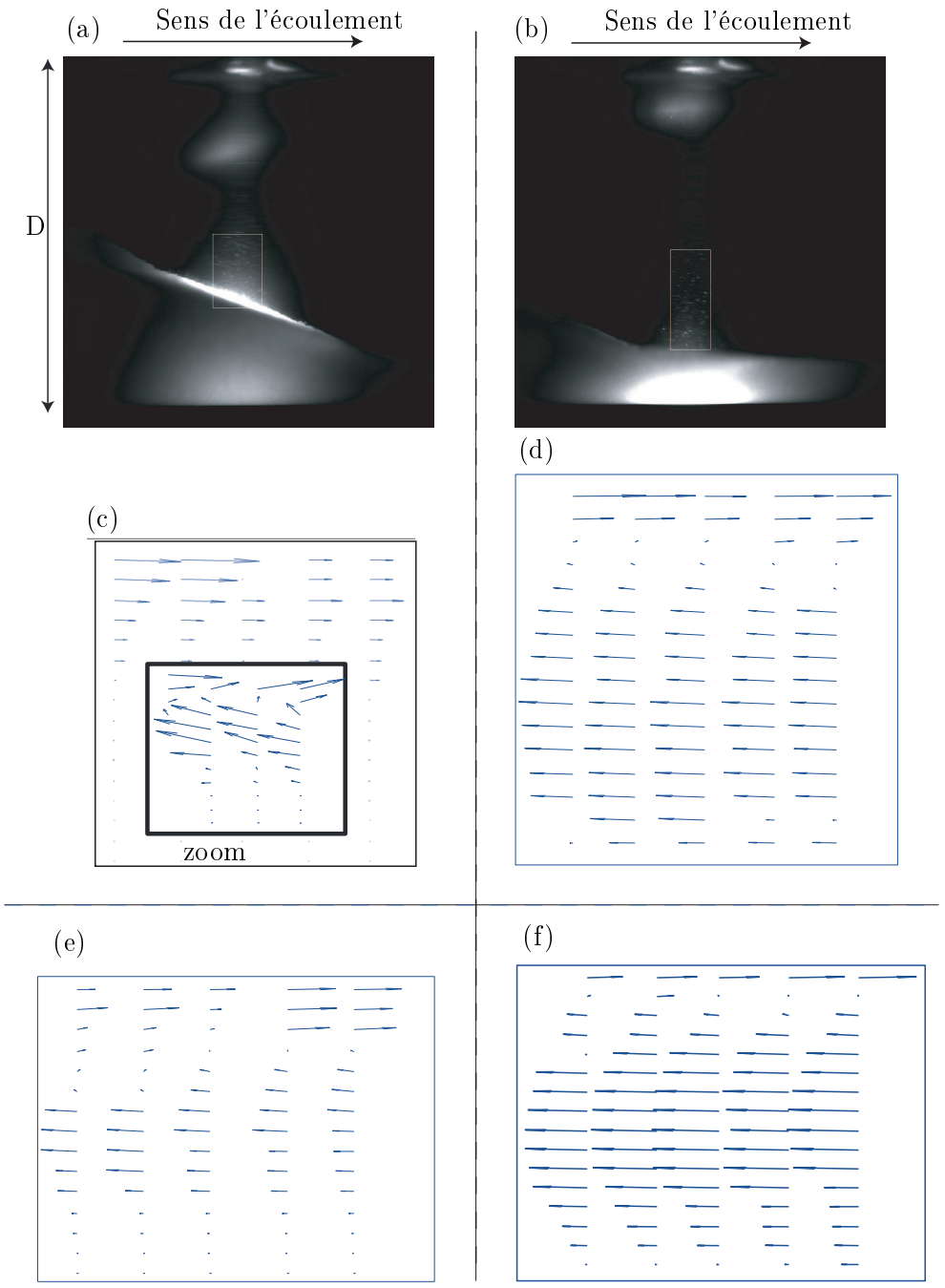


FIG. 5.6 – (a) et (b) Région où l'écoulement à été mesuré par PIV, (c) et (d) écoulement mesuré au centre du tube et (e) et (f) écoulement mesuré à 1 cm du bord du tube. Le carré blanc représente la partie de l'écoulement mésuré par PIV.

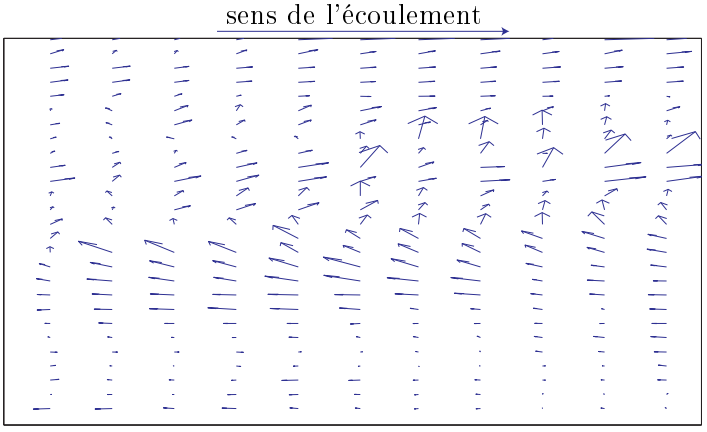


FIG. 5.7 – Mesure par PIV de l'écoulement du fluide dans un plan horizontal situé environ 1 cm en dessous du sommet de la dune au niveau de la face d'avalanche (vue de dessus).

5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la stabilité d'un lit de particules soumis à un écoulement de Poiseuille dans un canal à deux dimensions afin de prédire le seuil d'apparition des "petites dunes". Cette étude est basée sur le flux de particules déterminé dans le chapitre 4. La résolution analytique réalisée dans la limite des grandes longueurs d'ondes prédit un seuil de destabilisation du lit de particules, ainsi qu'une vitesse initiale d'avancée des dunes qui montrent un bon accord avec les données expérimentales. Il est intéressant de noter que le seuil de destabilisation du lit correspond à un nombre de Reynolds de l'écoulement constant. Il semble donc indépendant de la nature du milieu granulaire. La résolution numérique montre qu'il s'agit d'une instabilité à longueur d'onde finie et la longueur d'onde la plus instable obtenue numériquement prédit le bon ordre de grandeur. Cette modélisation semble donc pertinente pour décrire l'apparition des petites dunes. En revanche, elle ne permet pas de prédire la formation des dunes à vortex. L'étude de ce régime ainsi que du régime des dunes sinueuses, nécessite sans doute une modélisation instationnaire plus complexe prenant en compte la configuration tri-dimensionnelle du tube, la rétroaction entre le fluide et l'écoulement et les aspects non-linéaires de l'évolution des dunes. Les nombreux résultats expérimentaux décrivant l'évolution de ces dunes obtenus aux cours de cette thèse pourront servir de base de comparaison.

Conclusion

Le problème de l'interaction existant entre un fluide et un milieu granulaire est un sujet qui a été traité sous de nombreux aspects. Au cours de cette thèse, nous avons associé une approche expérimentale et théorique afin de proposer une modélisation en accord avec les réalités expérimentales. L'une des particularités de ce travail réside dans le choix du montage expérimental. L'étude expérimentale a été réalisée en utilisant un tube en verre dans lequel nous avons introduit un lit de particules et au dessus duquel nous avons imposé un écoulement de fluide. Le milieu granulaire n'étant pas alimenté, sa quantité diminue au cours de l'expérience. L'utilisation de différents types de fluides et de particules nous a donné accès à une gamme d'écoulement allant du laminaire au turbulent. Cette première phase de recherche a permis de mettre à jour l'existence de cinq régimes différents d'évolution du milieu granulaire dans le tube : pas de mouvement, lit plat en mouvement, formation de petites dunes, formation de dunes à vortex et formation de dunes sinueuses. Si les quatres premiers régimes ont déja été observés dans d'autres configurations, le dernier régime qui n'existe que pour des écoulement turbulents semble intrinsèquement lié à la forme du canal. Tous les autres régimes pouvant être observés pour des écoulements laminaires, nous avons choisi de considérer uniquement le cas des écoulements laminaires au cours de notre approche théorique.

Le lit de particules n'étant pas alimenté, son évolution complète, de sa mise en mouvement à son arrêt final, a pu être observée. Laisser le lit évoluer jusqu'à son arrêt total nous a permis d'étudier le seuil de mise en mouvement des particules indépendamment de l'état initial du lit. Nous avons mis en place une technique de mesure expérimentale reproductible qui nous a permis de montrer que le seuil de mise en mouvement correspond à une nombre de Shields critique constant, $\theta^c = 0.12 \pm 0.03$, sur une large gamme de nombre de Reynolds particulaire, $1.5\,10^{-5} < Re_p < 0.76$.

Pour modéliser l'interaction fluide/milieu granulaire, nous avons choisi d'utiliser un modèle continu en nous basant sur les équations diphasiques développées par Jackson (1997, 2000) auxquelles nous avons associé des fermetures simples. Les expressions du seuil de mise en mouvement et du flux de particules obtenues analytiquement dans des cas asymptotiques simples montrent un bon accord avec les données expérimentales dans les limites du modèle. Le choix d'une modélisation diphasique nous a permis de mettre en lumière plusieurs points importants. Le seuil de mise en mouvement est proportionel à $\mu\phi_0$ indépendamment de la nature de l'écoulement. Le flux de particules obtenu est proportionnel à θ^3/θ^{c2} et non à l'écart au seuil de la contrainte adimensionnée $\theta - \theta_c$. La viscosité effective η_e ne peut pas être

modélisée par une formule qui diverge quand les particules sont en contact.

Nous avons abordé l'étude de stabilité du lit sous une approche simplifiée dans laquelle nous couplons l'expression du débit solide obtenue analytiquement avec l'écoulement de fluide. Cette approche nous permet de montrer que dans la limite du modèle, le seuil de déstabilisation du lit correspond à un nombre de Reynolds de l'écoulement constant, $Re_{pipe} \approx 140\phi_0/3\beta\pi\theta^c$, où $\beta = 1.85$. Cette constatation montre que la formation de structures est principalement liée aux caractéristiques de l'écoulement. Il est important de noter la bonne concordance entre l'ordre de grandeur prédit par cette approche simplifiée et la longueur d'onde et la vitesse d'avancée initiale des dunes mesurées expérimentalement. Malgré ce bon accord, l'approche simplifiée a l'inconvénient de négliger la rétroaction du milieu granulaire sur l'écoulement de fluide. Afin de prendre en compte toutes les interactions pouvant exister entre le fluide et le milieu granulaire, il serait pertinent de résoudre les équations diphasiques en considérant une interface fluide/milieu granulaire perturbée.

L'analyse de stabilité décrite ci-dessus a été réalisée dans le cadre de l'approximation linéaire. Les observations expérimentales montrent que même si cette approche fournit une bonne description du seuil d'apparition des petites dunes, elle ne permet pas de prédire le seuil d'apparition des autres dunes ou leur évolution temporelle qui est fortement couplée à des effets non linéaires. Prédire l'évolution temporelle des dunes ainsi que leurs seuils d'apparition nécessite la réalisation d'une étude prenant en compte la configuration géométrique du tube ainsi que l'évolution temporelle de l'interface fluide/milieu granulaire. Les nombreuses données expérimentales recueillies au cours de cette thèse concernant l'évolution temporelle des différentes dunes pourront servir de base de comparaison à cette étude.

Annexe A

Obtention des équations diphasiques

A.1 Description statistique des milieux dispersés

Nous supposons que les particules de la phase dispersée sont suffisamment grosses pour être considérées comme un milieu continu. Ces particules baignent dans un fluide qui est lui-même considéré comme un milieu continu.

Pour établir les équations d'évolution d'un milieu dispersé, il faut disposer :

- des équations de conservation des phases pures considérées comme des milieux continus,
- de la fonction de présence caractérisant une configuration des particules au sein du mélange
- d'une loi de probabilité des différentes configurations possible et la moyenne d'ensemble qui lui est associée.

A.1.1 Équations de transport microscopiques

D'après le théorème de transport de Reynolds, la forme générale des équations de transport microscopique d'une certaine quantité A peut être rigoureusement dérivée des lois de conservation et est donnée par,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (A\underline{V}) = \underline{\nabla} \cdot \underline{J} + S.$$

Dans cette équation, A peut représenter la masse, la quantité de mouvement, l'enthalpie ou des concentrations d'espèce. La variable $\underline{J}$ est un tenseur d'un ordre supérieur à A qui représente la diffusion de A et S est un terme source. En modélisant A par la masse volumique ou par la quantité de mouvement, on obtient les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho\underline{V}) = 0$$
$$\frac{\partial \rho\underline{V}}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho\underline{V}\underline{V}) = \underline{\nabla}.\underline{\underline{\sigma}} + \underline{b},$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes et $\underline{b}$ représente les forces extérieures.

Dans le cas d'un milieu fluide/particules rigides, les forces extérieures appliquées sur chaque phase se réduisent à la gravité et les équations deviennent,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{A.1}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i, \tag{A.2}$$

où ρ représente la masse volumique de la phase considérée, u_i la vitesse, σ_{ij} le tenseur des contraintes et g_i la gravité. Dans le cas du fluide, σ_{ij} est connu, il s'agit du tenseur des contraintes visqueuses. Dans la phase solide, notamment quand il s'agit de particules solides, on ne sait pas à priori déterminer le tenseur des contraintes. Afin de contourner ce problème, une solution consiste à prendre directement les équations de mouvement d'une particule. Cette approche sera nommée dans la suite "approche cinétique".

Dans l'approche cinétique, le mouvement d'une particule est décrit par l'équation de conservation du moment et l'équation de conservation du moment angulaire,

$$\rho_p v \frac{d\underline{u}^p}{dt} = \int_{S_p} \underline{\underline{\sigma}}(y).\underline{n}(y) d_{S_y} + \Sigma_{p \neq q} \underline{f}^{pq} + \rho_p v \underline{g},$$

$$I \frac{d\underline{\Omega}^p}{dt} = \int_{S_p} \underline{r}^p(y) \otimes \underline{\underline{\sigma}}(y).\underline{n}(y) d_{S_y} + \Sigma_{p \neq q} \underline{R}^{pq} \otimes \underline{f}^{pq},$$

où $\underline{u}^p$ représente la vitesse de translation de la particule p, $\underline{\Omega}^p$ sa vitesse de rotation, $I = 2a^2 \rho_p v/5$ son moment d'inertie, a son rayon, $\underline{f}^{pq}$ est la force inter-particulaire, $\underline{R}^{pq}$ est le vecteur joignant le centre de la particule p et le point de contact entre les particules q et p, et $\underline{r}^p$ est le vecteur joignant le centre de la particule p avec un point de sa surface. Les termes $\int_{S_p} \underline{\underline{\sigma}}(y).\underline{n}(y) d_{S_y}$ et $\int_{S_p} \underline{r}^p(y) \otimes \underline{\underline{\sigma}}(y).\underline{n}(y) d_{S_y}$ correspondent aux forces exercées par le fluide sur les particules et les termes $\Sigma_{p \neq q} \underline{f}^{pq}$ et $\Sigma_{p \neq q} \underline{R}^{pq} \otimes \underline{f}^{pq}$ correspondent aux forces inter-particulaires. Dans la suite, on va exprimer les équations (A.3 et A.3) en terme de tenseur de rotation $\omega_{ij}^p = \epsilon_{ijk} \Omega_j^p$. On multiplie l'équation (A.3) par le symbole de Levi-Civita ϵ_{ijk}. En utilisant les relations,

$$\underline{\underline{\omega}}^p.\underline{r} = \underline{\Omega}^p \otimes \underline{r},$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl},$$

où δ_{in} est le symbole de Kronecker. On obtient un nouveau système d'équation,

$$\rho_p v \frac{du_i^p}{dt} = \int_{S_p} \sigma_{ik}(y).n_k(y) d_{S_y} + \Sigma_{p \neq q} f_i^{pq} + \rho_p v g_i, \tag{A.3}$$

$$I \frac{d\omega_{ij}^p}{dt} = \left\{ \int_{S_p} \left[\left(y_j - x_j^p\right) \sigma_{ik}(y) n_k(y) - \left(y_i - x_i^p\right) \sigma_{jk}(y) n_k(y) \right] d_{S_y} \right\} + \left\{ \Sigma_{pq} \left[\left(y_j^{pq} - x_j^p\right) f_i^{pq} - \left(y_i^{pq} - x_i^p\right) f_j^{pq} \right] \right\}, \tag{A.4}$$

où x^p correspond à la position du centre de la particule p et y^{pq} à la position du point de contact entre les particules p et q.

A.2 Passage microscopique-macroscopique : moyennes en terme de volume local [Jackson (1997)]

A.2.1 Définitions et théorèmes

Le moyennage en terme de volume local nécessite la définition d'une fonction $g(r)$ dépendant de la distance radiale, r, au point autour duquel on fait la moyenne. L'intégrale de g sur tout l'espace est normalisé par l'unité,

$$4\pi \int_0^\infty g(r) r^2 dr = 1. \tag{A.5}$$

On définit ensuite la taille du volume mésoscopique, par exemple une sphère de rayon l. La fonction $g(r)$ est alors définie par,

$$g(r) = \frac{3}{4\pi l^3} \quad \text{pour} \quad r \leq l$$
$$g(r) = 0 \quad \text{pour} \quad r \geq lo.$$

En utilisant cette fonction, on peut définir des moyennes qui peuvent être réalisées sur le milieu total, sur la phase fluide ou sur la phase solide. La phase solide étant constituée de particules rigides, il est aussi possible de réaliser une moyenne sur les particules rigides.

Moyenne sur le milieu total

Dans cette modélisation, la moyenne d'une fonction à un point x et au temps t est définie par,

$$< f > (x,t) = \int_V f(y,t) g(\mid x - y \mid) dV_y.$$

Moyenne sur la phase fluide

La fraction de l'espace ϵ occupée par le fluide est définie comme,

$$\epsilon(x) = \int_{V_f} g(\mid x - y \mid) dV_y, \tag{A.6}$$

où V_f est la portion de l'espace total occupée par le fluide.

La moyenne sur le fluide à un point x et au temps t d'une propriété du point (tel que la pression ou la vitesse) est définie par,

$$\epsilon(x) < f >^f (x,t) = \int_{V_f} f(y) g(\mid x - y \mid) dV_y.$$

Il existe deux théorèmes utilisés afin de calculer les dérivations spatiales et temporelles de la quantité moyennée sur le fluide.

Théorème 1
Il relie la moyenne de la dérivée temporelle et la dérivée temporelle de la moyenne,

$$\epsilon(x) < \frac{\partial f}{\partial t} >^f = \frac{\partial(\epsilon(x) < f >^f (x))}{\partial t} + \Sigma_p \int_{s_p} f(y) n_k^f(y) u_k(y) g(\mid x - y \mid) dS_y. \quad \text{(A.7)}$$

Théorème 2
Il relie la moyenne de la dérivée spatiale et la dérivée spatiale de la moyenne,

$$\epsilon(x) < \frac{\partial f}{\partial x_k} >^f = \frac{\partial(\epsilon(x) < f >^f (x))}{\partial x_k} - \Sigma_p \int_{s_p} f(y) n_k^f(y) g(\mid x - y \mid) dS_y, \quad \text{(A.8)}$$

où S_p représente la surface des particules, n_k^f est la k^{eme} composante de la normale à la surface des particules et u_k est la k^{eme} composante de la vitesse du point où on effectue la moyenne.

Moyenne sur la phase solide

La fraction de l'espace ϕ occupé par le solide est définie comme,

$$\phi(x) = \Sigma_p \int_{V_p} g(\mid x - y \mid) dV_y, \quad \text{(A.9)}$$

où V_p représente le volume d'une particule.

La moyenne sur le solide à un point x et au temps t d'une propriété du matériau solide est définie par,

$$\phi(x) < f >^s (x,t) = \Sigma_p \int_{V_p} f(y) g(\mid x - y \mid) dV_y.$$

Il existe deux théorèmes similaires à ceux utilisés pour le fluide.
Théorème 1
Il relie la moyenne de la dérivée temporelle et la dérivée temporelle de la moyenne,

$$\phi(x) < \frac{\partial f}{\partial t} >^s = \frac{\partial(\phi(x) < f >^s (x))}{\partial t} + \Sigma_p \int_{s_p} f(y) n_k^p(y) u_k(y) g(\mid x - y \mid) dS_y, \quad \text{(A.10)}$$

où $n_k^p = -n_k^f$ est la k^{eme} composante de la normale à la surface de la phase fluide.
Théorème 2
Il relie la moyenne de la dérivée spatiale et la dérivée spatiale de la moyenne,

$$\phi(x) < \frac{\partial f}{\partial x_k} >^s = \frac{\partial(\epsilon(x) < f >^s (x))}{\partial x_k} - \Sigma_p \int_{s_p} f(y) n_k^p(y) g(\mid x - y \mid) dS_y, \quad \text{(A.11)}$$

Relation entre les moyennes

La moyenne sur le milieu total est reliée aux moyennes réalisées sur les différentes phases par la relation,

$$< f >= \phi < f >^s + \epsilon < f >^f . \tag{A.12}$$

Il peut être commode de définir une moyenne massique,

$$\bar{\rho} < f >^m = \rho_s \phi < f >^s + \rho_f \epsilon < f >^f, \tag{A.13}$$

où $\bar{\rho} = \epsilon\rho_f + \phi\rho_s$. En combinant les théorèmes A.8 et A.11, on trouve,

$$\begin{aligned} \phi(x) < \frac{\partial f}{\partial x_k} >^s + \epsilon(x) < \frac{\partial f}{\partial x_k} >^f = \frac{\partial(\epsilon(x) < f >^s (x))}{\partial x_k} \\ - \Sigma_p \int_{s_p} f(y) n_{pk}(y) g(\mid x - y \mid) dS_y \\ + \frac{\partial(\epsilon(x) < f >^f (x))}{\partial x_k} - \Sigma_p \int_{s_p} f(y) n_{fk}(y) g(\mid x - y \mid) dS_y. \end{aligned}$$

En utilisant $n_k^p = -n_k^f$ et la relation A.12, on en déduit,

$$< \frac{\partial f}{\partial x_k} >= \frac{\partial(< f > (x))}{\partial x_k}. \tag{A.14}$$

Moyenne sur les particules rigides

Dans notre étude, on considère des particules rigides. Le mouvement de chaque particule peut être décrit à partir de la vitesse de translation de son centre et de sa vitesse de rotation (approche cinétique). Il n'est donc pas nécessaire de connaître les propriétés du solide (vitesse, tenseur des contraintes...) à l'intérieur de la particule (moyenne sur la phase solide), et il est intéressant de définir une moyenne permettant de décrire les propriétés de la particule en tant qu'unité rigide. Jackson (1997) introduit ce moyennage sous le nom "Particle-phase average". Dans la suite de cette étude, nous parlerons de moyenne sur les particules rigides. Dans le cadre de ce moyennage, le nombre de particules par unité de volume au temps t et à la position x est défini par,

$$n(x) = \Sigma_p g(\mid x - x^p \mid),$$

où x^p est la position du centre de la particule p.

La moyenne sur la phase particulaire des propriétés f^p intrinsèques à la particule est définie par,

$$n(x) < f >^p (x,t) = \Sigma_p f^p g(\mid x - x^p \mid).$$

On peut écrire un théorème similaire au théorème A.10,

$$n(x) < \frac{\partial f}{\partial t} >^p = \frac{\partial(n(x) < f >^p (x))}{\partial t} + \frac{\partial(\Sigma_p f^p u_k^p g(\mid x - x^p \mid)}{\partial x_k}, \tag{A.15}$$

où u_k^p est la k^{ieme} composante de la vitesse du centre de la particule p.

Procédure de dérivation

Dans le cas de l'approche diphasique, on utilise l'hypothèse de milieu incompressible $\frac{\partial u_k}{x_k} = 0$ et les théorèmes A.7, A.8, A.10 et A.11 pour obtenir le système,

$$\frac{\partial \epsilon(x)}{\partial t} + \frac{\partial(\epsilon < u_k >^f)}{\partial x_k} = 0$$
$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial t} + \frac{\partial(\phi < u_k >^s)}{\partial x_k} = 0.$$

Dans le cas de l'approche cinétique, on utilise le théorème A.15 en remplaçant f^p par 1 afin d'obtenir l'équation,

$$\frac{\partial n(x)}{\partial t} + \frac{\partial(n < u_k >^p)}{\partial x_k} = 0.$$

On réalise le moyennage sur la phase fluide en multipliant chaque terme de l'équation A.2 par $g(\mid x - y \mid)$, puis en intégrant sur V_f. On obtient une nouvelle forme pour l'équation A.2,

$$\epsilon < \rho_f \frac{\partial u_i}{\partial t} >^f + \epsilon < \rho_f \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} >^f = \epsilon < \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} >^f + g_i \epsilon < \rho_f >^f .$$

En utilisant les théorèmes A.7 et A.8 en posant $f = u_i$, $f = u_i u_j$ et $f = \sigma_{ij}$, l'équation devient,

$$\rho_f \frac{\partial \left(\epsilon < u_i >^f\right)}{\partial t} + \rho_f \frac{\partial \left(\epsilon < u_i u_j >^f\right)}{\partial x_j}$$
$$= \frac{\partial \left(\epsilon < \sigma_{ij} >^f\right)}{\partial x_j} - \Sigma_p \int_{s_p} \sigma_{ij}(y) n_j^p(y) g(\mid x - y \mid) dS_y + \rho_f \epsilon g_i.$$

Pour le solide, on trouve de la même manière,

$$\phi < \rho_p \frac{\partial u_i}{\partial t} >^s + \phi < \rho_p \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} >^s = \phi < \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} >^s + g_i \phi < \rho_p >^s .$$

En utilisant les théorèmes A.10 et A.11 et en posant $f = u_i$, $f = u_i u_j$ et $f = \sigma_{ij}$, l'équation devient,

$$\rho_p \frac{\partial \left(\phi < u_i >^s\right)}{\partial t} + \rho_p \frac{\partial \left(\phi < u_i u_j >^s\right)}{\partial x_j} =$$
$$\frac{\partial \left(\phi < \sigma_{ij} >^s\right)}{\partial x_j} - \Sigma_p \int_{s_p} \sigma_{ij}(y) n_j^f(y) g(\mid x - y \mid) dS_y + \rho_p \phi g_i.$$

Pour réaliser le moyennage dans l'approche cinétique, il faut multiplier chaque terme des équations (A.3) et (A.4) par $g(|\ x-x^p\ |)$, puis sommer sur le nombre de particules,

$$\sum_p g(|x-x^p|)\rho_p v\frac{du_i^p}{dt} = \sum_p g(|x-x^p|)\int_{S_p}\sigma_{ik}(y)n_k(y)d_{S_y} + \sum_p g(|x-x^p|)\Sigma_{p\neq q}f_i^{pq} + \sum_p g(|x-x^p|)\rho_p v g_i$$

$$\sum_p g(|x-x^p|)I\frac{d\omega_{ij}^p}{dt} = \sum_p g(|x-x^p|)\left[\Sigma_{p\neq q}\left(\left(y_j^{pq}-x_j^p\right)f_i^{pq} - \left(y_i^{pq}-x_i^p\right)f_j^{pq}\right)\right] + \sum_p g(|x-x^p|)\left[\int_{S_p}\left(\left(y_j-x_j^p\right)\sigma_{ik}(y)n_k(y) - \left(y_i-x_i^p\right)\sigma_{jk}(y)n_k(y)\right)d_{S_y}\right],$$

soit,

$$n(x) < \rho_p v\frac{du_i^p}{dt} >^p = \sum_p g(|x-x^p|)\int_{S_p}\sigma_{ik}(y)n_k(y)d_{S_y} + \sum_p g(|x-x^p|)\Sigma_{p\neq q}f_i^{pq} + \sum_p g(|x-x^p|)\rho_p v g_i$$

$$n(x) < I\frac{d\omega_{ij}^p}{dt} >^p = a\sum_p g(|x-x^p|)\left[\int_{S_p}\left(n_j(y)\sigma_{ik}(y)n_k(y) - n_i(y)\sigma_{jk}(y)n_k(y)\right)d_{S_y}\right] + a\sum_p g(|x-x^p|)\left[\Sigma_{p\neq q}\left(n_j^{pq}(y)f_i^{pq} - n_i^{pq}(y)f_j^{pq}\right)\right],$$

où n^{pq} est défini par $y_j^{pq}-x_j^p = an_j^{pq}$ et représente le vecteur unitaire normal à la surface de la particule p à son point de contact avec la particule q. En utilisant le théorème A.15, on obtient,

$$\rho_p v\frac{\partial\left(n(x) < u_i >^p\right)}{\partial t} + \rho_p v\frac{\partial\left(n(x) < u_i u_k >^p\right)}{\partial x_k} = \sum_p g(|x-x^p|)\int_{S_p}\sigma_{ik}(y)n_k(y)d_{S_y} + \sum_p g(|x-x^p|)\Sigma_{p\neq q}f_i^{pq} + n(x)\rho_p v g_i \quad \text{(A.16)}$$

$$I\frac{\partial\left(n(x) < \omega_{ij} >^p\right)}{\partial t} + I\frac{\partial\left(n(x) < \omega_{ij}u_k >^p\right)}{\partial x_k} = a\sum_p g(|x-x^p|)\left[\int_{S_p}\left(n_j(y)\sigma_{ik}(y)n_k(y) - n_i(y)\sigma_{jk}(y)n_k(y)\right)d_{S_y}\right] + a\sum_p g(|x-x^p|)\left[\Sigma_{p\neq q}\left(n_j^{pq}(y)f_i^{pq} - n_i^{pq}(y)f_j^{pq}\right)\right], \quad \text{(A.17)}$$

Dans la suite, on note $n < f_i^f >^p = \sum_p g(|x-x^p|)\int_{S_p}\sigma_{ik}(y)n_k(y)d_{S_y}$ et $n < f_i^s >^p = \sum_p g(|x-x^p|)\Sigma_{p\neq q}f_i^{pq}$.

A.3 Lien entre les différents moyennage

A.3.1 Interaction fluide/solide

Le terme $n < f_i^f >^p$ représente l'interaction fluide/particules dans l'approche cinétique. Il est différent du terme $\sum_p \int_{S_p} \sigma_{ik}(y) n_k(y) g(|x-y|) dS_y$ qui représente la même interaction dans la phase fluide. Pour relier ces deux termes, on utilise le développement de Taylor de $g(|x-y|)$,

$$g(|x-y|) = g(|x-x^p|) - \frac{\partial g(|x-x^p|)}{\partial x_j}(y_j - x_j^p) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(|x-x^p|)}{\partial x_j \partial x_m}(y_j - x_j^p)(y_m - x_m^p) - ... \tag{A.18}$$

Sur la surface S_p des particules $(y_j - x_j^p) = a n_j(y)$, donc le développement de Taylor de $g(|x-y|)$ réalisé sur S_p devient,

$$g(|x-y|) = g(|x-x^p|) - a\frac{\partial g(|x-x^p|)}{\partial x_j} n_j(y) + a^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(|x-x^p|)}{\partial x_j \partial x_m} n_j n_m - ...$$

En remplaçant $g(|x-y|)$ par son développement dans $\sum_p \int_{S_p} \sigma_{ik}(y) n_k(y) g(|x-y|) dS_y$, on obtient,

$$\sum_p \int_{S_p} \sigma_{ik}(y) n_k(y) g(|x-y|) dS_y = \sum_p \int_{S_p} \sigma_{ik}(y) n_k(y) g(|x-x^p|) dS_y$$
$$- \sum_p \int_{S_p} \sigma_{ik}(y) n_k(y) a \frac{\partial g(|x-x^p|)}{\partial x_j} n_j(y) dS_y + \sum_p \int_{S_p} \sigma_{ik}(y) n_k(y) a^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(|x-x^p|)}{\partial x_j \partial x_m} n_j n_m dS_y - ...$$

L'intégration a lieu suivant y, on peut donc inverser l'ordre de l'intégration et de la dérivation et sortir la fonction $g(|x-x^p|)$ de l'intégrale. De cette façon, on obtient,

$$\sum_p \int_{S_p} \sigma_{ik}(y) n_k(y) g(|x-y|) dS_y = \sum_p \int_{S_p} \sigma_{ik}(y) n_k(y) g(|x-x^p|) dS_y$$
$$- \frac{\partial a \sum_p g(|x-x^p|) \int_{S_p} \sigma_{ik}(y) n_k(y) n_j(y) dS_y}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 a^2 \sum_p g(|x-x^p|) \int_{S_p} \sigma_{ik}(y) n_k(y) \frac{1}{2} n_j n_m dS_y}{\partial x_j \partial x_m} - ...$$

Pour simplifier, on pose,

$$n < f_i^f >^p = \sum_p \int_{S_p} \sigma_{ik}(y) n_k(y) g(|x-x^p|) dS_y,$$
$$n < s_{ij}^f >^p = a \sum_p g(|x-x^p|) \int_{S_p} \sigma_{ik}(y) n_k(y) n_j(y) dS_y,$$
$$n < s_{ijm}^f >^p = a^2 \sum_p g(|x-x^p|) \int_{S_p} \sigma_{ik}(y) n_k(y) n_j n_m dS_y.$$

Le terme d'interaction entre le fluide et le solide devient,

$$\sum_p \int_{S_p} \sigma_{ik}(y) n_k(y) g(|x-y|) dS_y = n < f_i^f >^p - \frac{\partial n < s_{ij}^f >^p}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 n < s_{ijm}^f >^p}{\partial x_j \partial x_m} - ...$$

A.3.2 Interaction solide/solide

Pour expliciter le terme $n < f_i^s >^p = \sum_p g(|x - x^p|) \sum_{q \neq p} f_i^{pq}$, on considère la somme,

$$\sum_p \sum_{q \neq p} g(|x - y^{pq}|) f_i^{pq} = g(|x - y^{12}|) f_i^{12} + g(|x - y^{13}|) f_i^{13} + g(|x - y^{21}|) f_i^{21} + g(|x - y^{23}|) f_i^{23} + g(|x - y^{31}|) f_i^{31} + g(|x - y^{32}|) f_i^{32} + ...$$

Comme $f^{pq} = -f^{qp}$, cette somme est nulle. On utilise un développement de Taylor réalisé sur la surface des particules pour exprimer $\sum_p \sum_{q \neq p} g(|x - y^{pq}|) f_i^{pq}$ en fonction de $n < f_i^s >^p$,

$$\sum_p \sum_{q \neq p} g(|x - y^{pq}|) f_i^{pq} = \sum_p g(|x - x^p|) \sum_{q \neq p} f_i^{pq} - a \sum_p \frac{\partial g(|x - x^p|)}{\partial x_j} \sum_{q \neq p} n_j^{pq}(y) f_i^{pq} + a^2 \frac{1}{2} \sum_p \frac{\partial^2 g(|x - x^p|)}{\partial x_j \partial x_m} \sum_{q \neq p} n_k^{pq}(y) n_j^{pq}(y) f_i^{pq} - \text{(A.19)}$$

En utilisant les notations,

$$n < s_{ij}^s >^p = a \sum_p g(|x - x^p|) \sum_{q \neq p} f_i^{pq} n_j^{pq}$$

$$n < s_{ijm}^s >^p = a^2 \sum_p g(|x - x^p|) \sum_{q \neq p} f_i^{pq} n_j^{pq} n_m^{pq},$$

l'équation A.19 peut s'exprimer sous la forme,

$$n < f_i^s >^p = \frac{\partial n < s_{ij}^s >^p}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n < s_{ijm}^s >^p}{\partial x_j \partial x_m} + ... \qquad \text{(A.20)}$$

On obtient un système d'équations pour le fluide et le solide de la forme,

$$\rho_f \left[\frac{\partial \epsilon < u_i >^f}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon < u_i u_j >^f}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial \epsilon < \sigma_{ij} >^f}{\partial x_j} - n < f_i^f >^p + \frac{\partial n < s_{ik}^f >^p}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n < s_{ikl}^f >^p}{\partial x_k \partial x_l} + \rho_f \epsilon g_i \qquad \text{(A.21)}$$

$$\rho_p v \left[\frac{\partial n < u_i >^p}{\partial t} + \frac{\partial n < u_i u_j >^p}{\partial x_j} \right] = n < f_i^f >^p + \frac{\partial n < s_{ik}^s >^p}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n < s_{ikl}^s >^p}{\partial x_k \partial x_l} + \rho_p n v g_i. \qquad \text{(A.22)}$$

Tous les termes d'ordre $O(a^2)$ ont été négligés.

A.3.3 Lien entre $\phi(x)$ et $n(x)$

Afin de travailler en terme de fraction volumique solide $\phi(x)$ et de vitesse débitante du solide $\phi(x) < u >^s$, il faut exprimer $n(x)v$ et $n(x)v < u >^p$ en fonction de

$\phi(x)$ et $\phi(x) < u >^s$. Le développement de Taylor de $\phi(x)$ donne,

$$\phi(x) = \sum_p g(|x-x^p|) \int_{V_p} dV_y - \sum_p \frac{\partial g(|x-x^p|)}{\partial x_j} \int_{V_p} (y_j - x_j^p) dV_y + \frac{1}{2} \sum_p \frac{\partial^2 g(|x-x^p|)}{\partial x_j \partial x_m} \int_{V_p} (y_j - x_j^p)(y_m - x_m^p) dv_y - ...$$

On néglige le terme $\frac{1}{2}\sum_p \frac{\partial^2 g(|x-x^p|)}{\partial x_j \partial x_m} \int_{V_p} (y_j - x_j^p)(y_m - x_m^p) dv_y$ car il est d'ordre a^2. Comme $\int_{V_p} (y_j - x_j^p) dV_y = 0$, car l'intégration est réalisée sur une sphère, on obtient

$$\phi(x) = vn(x). \tag{A.23}$$

A.3.4 Lien entre la moyenne sur la phase solide et la moyenne sur les particules rigides

Soit f une fonction du solide au point x, en introduisant le développement en série de Taylor de $g(|y-x^p|)$ dans la moyenne de f sur la phase solide on obtient,

$$\phi(x) < f >^s = \sum_p \int_{V_p} f(y) g(|x-x^p|) dV_y - \sum_p \frac{\partial g(|x-x^p|)}{\partial x_j} \int_{V_p} f(y)(y_j - x_j^p) dV_y + \frac{1}{2} \sum_p \frac{\partial^2 g(|x-x^p|)}{\partial x_j \partial x_m} \int_{V_p} f(y)(y_j - x_j^p)(y_m - x_m^p) dV_y - ...$$

Si on remplace f par ρu_i, on obtient en prenant en compte l'égalité $u_i(y,t) = u_i^p(t) + \omega_{ij}(t)\left(y_j - x_j^p\right)$,

$$\rho_p \phi(x) < u_i >^s = n(x) v \rho_p < u_i >^p + \rho_p \sum_p g(|x-x^p|) \omega_{ij} \int_{V_p} \left(y_j - x_j^p\right) dV_y - \rho_p \sum_p \frac{\partial g(|x-x^p|)}{\partial x_k} u_i^p \int_{V_p} (y_k - x_k^p) dV_y - \rho_p \sum_p \frac{\partial g(|x-x^p|)}{\partial x_k} \omega_{ij} \int_{V_p} (y_j - x_j^p)(y_k - x_k^p) dV_y + \frac{1}{2} \rho_p \sum_p \frac{\partial^2 g(|x-x^p|)}{\partial x_k \partial x_m} u_i^p \int_{V_p} (y_k - x_k^p)(y_m - x_m^p) dV_y + \frac{1}{2} \rho_p \sum_p \frac{\partial^2 g(|x-x^p|)}{\partial x_k \partial x_m} \omega_{ij} \int_{V_p} (y_j - x_j^p)(y_m - x_m^p)(y_k - x_k^p) dV_y.$$

Les termes en $\int_{V_p} r^n dV$ avec n impair étant nuls, on obtient,

$$\phi(x) \rho_p < u_i >^s = n(x) v \rho_p < u_i >^p - \rho_p \sum_p \frac{\partial g(|x-x^p|)}{\partial x_k} \omega_{ij} \int_{V_p} (y_j - x_j^p)(y_k - x_k^p) dV_y + \frac{1}{2} \rho_p \sum_p \frac{\partial^2 g(|x-x^p|)}{\partial x_k \partial x_m} u_i^p \int_{V_p} (y_k - x_k^p)(y_m - x_m^p) dV_y.$$

Le terme $\frac{1}{2}\rho_p \sum_p \frac{\partial^2 g(|x-x^p|)}{\partial x_k \partial x_m} u_i^p \int_{V_p}(y_k - x_k^p)(y_m - x_m^p)dV_y$ étant d'ordre a^2, on peut le négliger devant le terme $n(x)v\rho_p < u_i >^p$. Le terme $\rho_p \sum_p \frac{\partial g(|x-x^p|)}{\partial x_k}\omega_{ij}\int_{V_p}(y_j - x_j^p)(y_k - x_k^p)dV_y$ peut s'exprimer sous la forme $\rho_p \sum_p \frac{\partial g(|x-x^p|)\omega_{ij}}{\partial x_k}\int_{V_p}(y_j - x_j^p)(y_k - x_k^p)dV_y$, en utilisant le fait que les particules soient rigides ($\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = 0$). L'équivalence entre k et j, permet de transformer ce terme sous la forme $\frac{(n(x)I<\omega_{ik}>^p)}{\partial x_k}$, avec $I = \rho_p \int_{V_p}(y_j - x_j^p)(y_k - x_k^p)dV_y$. L'équation (A.24) devient,

$$\phi(x)\rho_p < u_i >^s = n(x)v\rho_p < u_i >^p - \frac{(n(x)I < \omega_{ik} >^p)}{\partial x_k}. \tag{A.24}$$

En prenant $f = \rho u_i u_j$, on obtient,

$$\begin{aligned}
\phi(x)\rho_p < u_i u_j >^s &= n(x)v\rho_p < u_i u_j >^p \\
&+ \sum_p g(|x - x^p|)\omega_{ik}\omega_{jm}\int_{V_p}\rho_p(y_k - x_k^p)(y_m - x_m^p)dV_y \\
&- \sum_p \frac{\partial g(|x - x^p|)}{\partial x_s}u_i^p\omega_{jm}\int_{V_p}\rho_p(y_s - s_s^p)(y_m - x_m^p)dV_y \\
&- \sum_p \frac{\partial g(|x - x^p|)}{\partial x_s}u_j^p\omega_{ik}\int_{V_p}\rho_p(y_s - x_s^p)(y_k - x_k^p)dV_y.
\end{aligned} \tag{A.25}$$

L'équivalence entre les indices donne,

$$\begin{aligned}
\phi(x)\rho_p < u_i u_j >^s = n(x)v\rho_p < u_i u_j >^p + n(x)I < \omega_{ik}\omega_{jk} >^p \\
- \frac{\partial\left(n(x)I < u_i\omega_{jk} >^p\right)}{\partial x_k} - \frac{\partial\left(n(x)I < u_j\omega_{ik} >^p\right)}{\partial x_k}.
\end{aligned} \tag{A.26}$$

On dérive l'équation (A.25) par rapport à t et l'équation (A.26) par rapport à x,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi(x)\rho_p < u_i >^s}{\partial t} &= \frac{\partial\left(n(x)v\rho_p < u_i >^p\right)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{(n(x)I < \omega_{ik} >^p)}{\partial x_k}\right) \\
\frac{\partial\phi(x)\rho_p < u_i u_j >^s}{\partial x_j} &= \frac{\partial n(x)v\rho_p < u_i u_j >^p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(n(x)I < \omega_{ik}\omega_{jk} >^p\right) \\
&- \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\left(n(x)I < u_i\omega_{jk} >^p\right)}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\left(n(x)I < u_j\omega_{ik} >^p\right)}{\partial x_k}\right).
\end{aligned}$$

En utilisant ce système d'équation, on remplace $\frac{\partial(n(x)v\rho_p<u_i>^p)}{\partial t}$ et $\frac{\partial(n(x)v\rho_p<u_iu_j>^p)}{\partial x_j}$ dans l'équation (A.22),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi(x)\rho_p<u_i>^s}{\partial t}+\frac{\partial\phi(x)\rho_p<u_iu_j>^s}{\partial x_j}= \\
-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{(n(x)I<\omega_{ik}>^p)}{\partial x_k}\right) \\
+\frac{\partial}{\partial x_j}(n(x)I<\omega_{ik}\omega_{jk}>^p)-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial(n(x)I<u_i\omega_{jk}>^p)}{\partial x_k}\right) \\
-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial(n(x)I<u_j\omega_{ik}>^p)}{\partial x_k}\right)+n<f_i^f>^p+\frac{\partial n<s_{ik}^s>^p}{\partial x_k} \\
-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n<s_{ikl}^s>^p}{\partial x_k\partial x_l}+\phi(x)\rho_p g_i. \qquad \text{(A.27)}
\end{aligned}$$

Le terme ω_{ij} étant antisymétrique ($\omega_{ij}=-\omega_{ji}$), l'équation (A.27) peut s'écrire sous la forme,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi(x)\rho_p<u_i>^s}{\partial t}+\frac{\partial\phi(x)\rho_p<u_iu_j>^s}{\partial x_j}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{(n(x)I<\omega_{ik}>^p)}{\partial x_k}\right) \\
+\frac{\partial}{\partial x_j}(n(x)I<\omega_{ik}\omega_{jk}>^p)-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial(n(x)I<u_k\omega_{ij}>^p)}{\partial x_k}\right) \\
+n<f_i^f>^p+\frac{\partial n<s_{ik}^s>^p}{\partial x_k}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n<s_{ikl}^s>^p}{\partial x_k\partial x_l}+\phi(x)\rho_p g_i \qquad \text{(A.28)}
\end{aligned}$$

On utilise la dérivée suivant x_k de l'équation (A.17) pour remplacer le terme $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{(n(x)I<\omega_{ik}>^p)}{\partial x_k}\right)$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi(x)\rho_p<u_i>^s}{\partial t}+\frac{\partial\phi(x)\rho_p<u_iu_j>^s}{\partial x_j}=+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(I\frac{\partial(n(x)<\omega_{ik}u_s>^p)}{\partial x_s}\right) \\
-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a\sum_p g(|x-x^p|)\left[\int_{S_p}(n_k(y)\sigma_{is}(y)n_s(y)-n_i(y)\sigma_{ks}(y)n_s(y))\,d_{S_y}\right]\right) \\
-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a\sum_p g(|x-x^p|)\left[\Sigma_{p\neq q}(n_k^{pq}(y)f_i^{pq}-n_i^{pq}(y)f_k^{pq})\right]\right) \\
+\frac{\partial}{\partial x_j}(n(x)I<\omega_{ik}\omega_{jk}>^p)-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial(n(x)I<u_k\omega_{ij}>^p)}{\partial x_k}\right) \\
+n<f_i^f>^p+\frac{\partial n<s_{ik}^s>^p}{\partial x_k}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n<s_{ikl}^s>^p}{\partial x_k\partial x_l}+\phi(x)\rho_p g_i.
\end{aligned}$$

Le terme $a\sum_p g(|x-x^p|)\left[\Sigma_{p\neq q}(n_k^{pq}(y)f_i^{pq}-n_i^{pq}(y)f_k^{pq})\right]$ correspond à la partie antisymétrique, noté $n<s_{[ij]}>^p$, du tenseur $n<s_{ij}>^p$. En notant $n<s_{(ij)}>^p$ la

partie symétrique de $n < s_{ij} >^p$, on obtient,

$$\frac{\partial \phi(x)\rho_p < u_i >^s}{\partial t} + \frac{\partial \phi(x)\rho_p < u_i u_j >^s}{\partial x_j} =$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a\sum_p g(|x-x^p|)\left[\int_{S_p}\left(n_k(y)\sigma_{is}(y)n_s(y) - n_i(y)\sigma_{ks}(y)n_s(y)\right)dS_y\right]\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(n(x)I < \omega_{ik}\omega_{jk} >^p\right) + n < f_i^f >^p + \frac{\partial n < s^s_{(ik)} >^p}{\partial x_k}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 n < s^s_{ikl} >^p}{\partial x_k \partial x_l} + \phi(x)\rho_p g_i.$$

A.3.5 Équations diphasiques

Le processus de moyennage réalisé au niveau du fluide, du solide et des particules rigides permet d'obtenir un système moyenné constitué d'une équation pour la phase fluide et d'une équation pour la phase solide,

$$\rho_f\left[\frac{\partial \epsilon < u_i >^f}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon < u_i u_j >^f}{\partial x_j}\right] = \frac{\partial \epsilon < \sigma_{ij} >^f}{\partial x_j} - n < f_i^f >^p$$
$$+\frac{\partial n < s^f_{ik} >^p}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 n < s^f_{ikl} >^p}{\partial x_k \partial x_l} + \rho_f \epsilon g_i$$

$$\rho_p\left[\frac{\partial \phi < u_i >^s}{\partial t} + \frac{\partial \phi < u_i u_j >^s}{\partial x_j}\right] = \frac{\partial n < s^s_{(ik)} >^p}{\partial x_k} + n < f_i^f >^p$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a\sum_p g(|x-x^p|)\left[\int_{S_p}\left(n_k(y)\sigma_{is}(y)n_s(y) - n_i(y)\sigma_{ks}(y)n_s(y)\right)dS_y\right]\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(nI < \omega_{ik}\omega_{jk} >^p\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 n < s^s_{ikl} >^p}{\partial x_k \partial x_l} + \phi\rho_p g_i$$

Ces deux équations sont reliées entre elles par le terme $n < f^f >^p$ qui correspond aux forces d'interaction entre le fluide et les particules. Pour simplifier, on note
$S^f_{ij} = \epsilon < \sigma_{ij} >^f + n < s^f_{ij} >^p - \frac{1}{2}\frac{\partial n < s^f_{ijl} >^p}{\partial x_l}$, et
$S^p_{ij} = n < s^s_{(ij)} >^p + \left(nI < \omega_{ik}\omega_{jk} >^p\right)$
$-\frac{1}{2}\frac{\partial n < s^s_{ijl} >^p}{\partial x_l} - a\sum_p g(|x-x^p|)\left[\int_{S_p}\left(n_j(y)\sigma_{is}(y)n_s(y) - n_i(y)\sigma_{js}(y)n_s(y)\right)dS_y\right]$.

Le système d'équations devient,

$$\rho_f\left[\frac{\partial \epsilon < u_i >^f}{\partial t} + \frac{\partial\left(\epsilon < u_i u_j >^f\right)}{\partial x_j}\right] = \rho_f \epsilon g_i - n < f_i^f >^p + \frac{\partial S^f_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{(A.29)}$$

$$\rho_p\left[\frac{\partial \phi(x) < u_i >^s}{\partial t} + \frac{\partial\left(\phi(x) < u_i u_j >^s\right)}{\partial x_j}\right] = n < f_i^f >^p + \phi\rho_p g_i + \frac{\partial S^p_{ij}}{\partial x_j}. \quad \text{(A.30)}$$

A.4 Fermeture des équations

Au cours du processus de moyennage, de nouvelles variables ont été définies. La signification de ces variables n'est pas évidente et il est possible qu'elles ne puissent pas toutes être explicitées de manière satisfaisante. Jackson (1997) propose des expressions pour la plupart de ces termes dans le cas des suspensions très diluées. En nous basant sur son travail et en essayant d'adapter les différentes définitions dans notre configuration (sphères rigides en contact), nous allons présenter dans cette section différentes fermetures possibles.

A.4.1 Détermination des termes $< u_i u_j >^f$ et $< u_i u_j >^s$

Suite au moyennage, des termes représentant la moyenne de produit de grandeurs microscopiques tel que $< u_i u_j >^f$ et $< u_i u_j >^s$ sont apparus. Pour pouvoir fermer les équations, il faut décomposer ces termes en une somme de deux termes : le produit de la moyennes des grandeurs et le produit de la déviation de ces grandeurs par rapport à la valeur moyenne. Dans la suite de ce travail, nous noterons la déviation d'une grandeur f par f'. La déviation est définie par $f' = f - < f >^n$ ou n peut représenter la phase fluide, la phase solide ou le mélange, suivant le type de moyennage utilisé. En utilisant cette décomposition, on peut exprimer $< u_i u_j >^f$ et $< u_i u_j >^s$ sous la forme $< u_i u_k >^f = < u_i >^f < u_k >^f - < u_i' u_k' >^f$ et $< u_i u_k >^s = < u_i >^s < u_k >^s - < u_i' u_k' >^s$. Les termes $< u_i' u_k' >^f$ et $< u_i' u_k' >^s$ représentent le tenseur de Reynolds et ils seront négligés dans la suite de cette étude.

A.4.2 Expression de $n < f_i^f >^p$

Ce terme, particulièrement complexe à expliciter, est à l'origine de nombreux désaccords au niveau de la forme finale des équations diphasiques.

Fermeture proposée par Jackson (1997)

Le terme $n < f_i^f >^p$ correspond aux forces d'interaction entre le solide et les particules. Il est généralement décomposé en un terme représentant la poussée d'Archimède et des termes dus aux autres interactions pouvant exister entre le fluide et les particules. Afin d'essayer de mieux appréhender sa signification, on peut commencer par examiner des exemples simples.

- Cas d'un objet immobile dans un fluide immobile
  Dans cette configuration, $n < f_i^f >^p$ noté f se résume à la seule contribution du gradient de pression du fluide,

  $$f = -v\nabla p = -\rho_f v g,$$

  où v représente le volume de l'objet. Cette équation découle de l'expression hydrostatique du gradient de pression $-v\nabla p = -\rho_f v g$ et elle est invariante par translation. Elle reste donc vrai si on considère une corps se déplaçant à la vitesse u_0 plongé dans un liquide se déplaçant à la même vitesse.

– Cas d'un objet mobile dans un fluide se déplaçant à une vitesse u_0 constante loin de l'objet.
Dans cette configuration, il faut rajouter à la poussée d'Archimède un terme résultant du mouvement relatif du solide par rapport au fluide. En se basant sur le même type de décomposition que dans le premier exemple, on peut obtenir deux expressions différentes,

$$f = f_a - v\nabla p_0 = f_b - \rho_f v g.$$

L'équation de conservation du moment appliquée loin du solide donne $v\nabla p_0 = \rho_f v g$. On peut donc en déduire que ces deux relations sont équivalentes et que $f_a = f_b$.

– Cas d'un objet mobile dans un fluide se déplaçant à une vitesse $u_0 = \frac{da_0}{dt}$ uniformément accélérée loin de l'objet.
Dans cette configuration, l'équation de conservation du moment, donne $v\nabla p_0 = \rho_f v(g - a_0)$. Pour garder l'égalité entre f_a et f_b, il faut maintenant écrire,

$$f = f_a - v\nabla p_0 = f_b - \rho_f v(g - a_0).$$

– Cas d'un fluide uniformément accéléré à la vitesse $u_0 = \frac{da_0}{dt}$ se déplaçant dans un ensemble de particules de fraction volumique ϕ.
Dans cette configuration, l'équation de conservation du moment s'écrit en terme de moyenne sous la forme,

$$\rho_f \epsilon a_0 = -\nabla p_0 - nf + \rho_f \epsilon g.$$

En utilisant $f = f_a - v\nabla p_0$, on obtient,

$$\rho_f \epsilon a_0 = -\nabla p_0 - nf_a + nv\nabla p_0 + \rho_f \epsilon g.$$

Comme $nv = \phi$, l'équation de conservation du mouvement peut s'écrire sous la forme,

$$\rho_f \epsilon a_0 = -\epsilon\nabla p_0 - nf_a + \rho_f \epsilon g.$$

En utilisant $f = f_b - \rho_f \epsilon(g - a_0)$, on obtient,

$$\rho_f \epsilon a_0 = -\nabla p_0 - nf_b + \rho_f vn(g - a_0) + \rho_f \epsilon g,$$

qui se traduit par,

$$\rho_f a_0 = -\nabla p_0 - nf_b + \rho_f g.$$

Dans cette configuration, l'égalité entre f_a et f_b n'est plus vérifiée. On obtient une nouvelle relation $f_b = f_a/\epsilon$.

– Généralisation
On se place maintenant dans une configuration plus générale, où l'équation de conservation du moment du fluide s'écrit sous la forme,

$$\rho_f a_0 = \rho_f \epsilon g - nf + \nabla S^f.$$

L'expression de nf généralisée est donc,

$$nf = nf_a + \phi \nabla S^f = f_b - \phi \rho_f (g - a0).$$

En remplaçant nf par son expression dans le système d'équations de conservation de la quantité de mouvement pour le fluide et le solide, on obtient,

$$\rho_f \frac{D_f \epsilon < u >^f}{Dt} = \rho_f \epsilon g - nf_a + \epsilon \nabla S^f$$

$$\rho_p \frac{D_s \phi(x) < u >^s}{Dt} = nf_a + \phi \nabla S^f + \phi(x) \rho_p g + \nabla S^p. \tag{A.31}$$

Il est possible d'arriver au même résultat en se basant sur l'expression de $n < f_i^f >^p$ plutôt que sur sa signification physique.

Approche proposée par Lhuillier (1992)

Dans cette approche, il faut remonter à l'écriture du terme $n < f_i^f >^p$,

$$n < f_i^f >^p = \sum_p \int_{S_p} \sigma_{ik}(y) n_k(y) g(|x - x^p|) dS_y.$$

Ce terme correspond à la moyenne de l'intégration sur la surface des particules de la contrainte σ_{ik} définie à l'échelle microscopique. En prenant S_{ik}^f comme contrainte de référence, on peut exprimer σ_{ik} sous la forme, $\sigma_{ik} = S_{ik}^f + \left(\sigma_{ik} - S_{ik}^f\right)$. Soit,

$$n < f_i^f >^p = \sum_p \int_{S_p} S_{ik}^f(y) n_k(y) g(|x - x^p|) dS_y + \sum_p \int_{S_p} \left(\sigma_{ik}(y) - S_{ik}^f(y)\right) n_k(y) g(|x - x^p|) dS_y. \tag{A.32}$$

En faisant un développement limité au premier ordre en x_p du terme $S_{ik}^f(x,t)$, on obtient,

$$S_{ik}^f(x,t) = S_{ik}^f(x_p,t) + (x_l - x_{lp}) \frac{\partial S_{ik}^l}{\partial x_l}(x_p) + ... \tag{A.33}$$

Après intégration, ce terme devient,

$$\sum_p \int_{S_p} S_{ik}^f(y) n_k(y) g(|x - x^p|) dS_y = S_{ik}^f(x_p,t) \sum_p g(|x - x^p|) \int_{S_p} n_k(y) dS_y + \frac{\partial S_{ik}^l}{\partial x_l}(x_p) \sum_p g(|x - x^p|) \int_{S_p} (x_l - x_{lp}) n_k(y) dS_y,$$

$$\sum_p \int_{S_p} S_{ik}^f(y) n_k(y) g(|x - x^p|) dS_y = \frac{\partial S_{ik}^l}{\partial x_l}(x_p) \sum_p g(|x - x^p|) \int_{S_p} a n_l(y) n_k(y) dS_y,$$

$$\sum_p \int_{S_p} S_{ik}^f(y) n_k(y) g(|x - x^p|) dS_y = \frac{\partial S_{ik}^l}{\partial x_l}(x_p) n(x) v.$$

Pour calculer l'intégrale $\int_{S_p} an_l(y)n_k(y)dS_y$, on se place en coordonnées sphériques. Les vecteurs normaux s'expriment sous la forme,

$$\begin{aligned} n_z &= \cos(\theta) \\ n_x &= \sin(\theta)\cos(\phi) \\ n_y &= \sin(\theta)\sin(\phi). \end{aligned}$$

En utilisant la relation $n_k n_l = \frac{1}{3}\delta_{kl}$, on obtient la relation,

$$\int_{S_p} a^3 \frac{1}{3}\delta_{kl} sin(\theta) d\theta d\phi,$$

$$\sum_p \int_{S_p} S^f_{ik}(y) n_k(y) g(|x - x^p|) dS_y = \frac{\partial S^l_{ik}}{\partial x_l}(x_p) n(x) v. \tag{A.34}$$

En utilisant l'égalité (A.23), on obtient,

$$\sum_p \int_{S_p} S^f_{ik}(y) n_k(y) g(|x - x^p|) dS_y = \phi \frac{\partial S^l_{ik}}{\partial x_l}(x_p). \tag{A.35}$$

L'équation (A.32) devient,

$$n < f^f_i >^p = \phi \frac{\partial S^l_{ik}}{\partial x_l}(x_p) + \sum_p \int_{S_p} \left(\sigma_{ik}(y) - S^f_{ik}(y)\right) n_k(y) g(|x - x^p|) dS_y.$$

On relie cette équation à l'équation (A.31) en posant,

$$nf_a = \sum_p \int_{S_p} \left(\sigma_{ik}(y) - S^f_{ik}(y)\right) n_k(y) g(|x - x^p|) dS_y. \tag{A.36}$$

Expression du terme nf_a

Le terme nf_a correspond à la force d'interaction fluide/particule. Dans le cas des suspensions diluées, il s'agit de la force de traînée. Dans notre configuration, les particules sont en contact et leur mouvement est relativement lent. Nous avons donc choisi de représenter la force d'interaction fluide/particule par la force de Darcy dans un poreux,

$$nf_a = \eta \frac{\epsilon^2}{K} \left(< u >^f - < u >^s \right), \tag{A.37}$$

où K représente la perméabilité. Dans la littérature, on peut trouver différentes définitions de K. Pour un milieu poreux constitué de particules sphériques monodisperses, la relation d'Ergun définit la perméabilité par,

$$K = \frac{\epsilon^3 d^2}{k\left(1 - \epsilon\right)^2}$$

avec $k = 180$. Goharzadeh *et al.* (2005) ont montré qu'il y avait un bon accord entre cette relation et la perméabilité mesurée expérimentalement dans le cas d'un poreux constitué de sphères rigides. Nous avons donc choisi d'utiliser cette définition pour la perméabilité.

A.4.3 Expression de S_{ij}^f

Le terme S_{ij}^f représente une somme de plusieurs termes, $S_{ij}^f = \epsilon < \sigma_{ij} >^f + n < s_{ij}^f >^p - \frac{1}{2}\frac{\partial n < s_{ijl}^f >^p}{\partial x_l}$. Jackson (1997) a explicité ces différents termes dans le cas des suspensions très diluées. Il précise que dans le cas ou les interactions entre les particules sont dominées par les forces de contact, les termes $n < s_{ij}^f >^p$ et $\frac{\partial n < s_{ijl}^f >^p}{\partial x_l}$ peuvent être négligés.

Expression de $< \sigma_{ij} >^f$

Pour des particules rigides dans un fluide newtonien, il est aisé d'obtenir un expression générale pour ce terme [Jackson (1997)]. Il correspond à la moyenne sur la phase fluide du taux de déformation $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$. Dans le cas des particules rigides, le taux de déformation étant nul à l'intérieur des particules, il est équivalent de réaliser la moyenne sur le fluide ou sur l'ensemble du domaine,

$$\int_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_k} + \frac{\partial u_k}{\partial y_i} \right) g(|x-y|) dV = \int_{V_f} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_k} + \frac{\partial u_k}{\partial y_i} \right) g(|x-y|) dV.$$

Le tenseur des contraintes fluides est relié au taux de déformation par la relation,

$$\frac{\partial u_i}{\partial y_k} + \frac{\partial u_k}{\partial y_i} - = \frac{\sigma_{ik} + p\delta_{ik}}{\mu}.$$

En multipliant chaque terme par $g(|x-y|)$, puis en intégrant sur le volume de fluide, on obtient,

$$\int_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_k} + \frac{\partial u_k}{\partial y_i} \right) g(|x-y|) dV = \int_{V_f} \left(\frac{\sigma_{ik} + p\delta_{ik}}{\eta} \right) g(|x-y|) dV.$$

En utilisant l'égalité A.14, on obtient,

$$\frac{\partial < u_i >}{\partial y_k} + \frac{\partial < u_k >}{\partial y_i} = \epsilon \frac{< \sigma_{ik} >^f + < p\delta_{ik} >^f}{\eta},$$

où $< u_i >= \epsilon < u_i >^f + \phi < u_i >^s$ est la vitesse débitante du mélange. Le tenseur moyenné des contraintes fluides s'écrit donc sous la forme,

$$< \sigma_{ik} >^f = - < p\delta_{ik} >^f + \frac{\eta}{\epsilon} \left(\frac{\partial < u_i >}{\partial y_k} + \frac{\partial < u_k >}{\partial y_i} \right).$$

Expression de $n < s_{ij}^f >^p$ et de $n < s_{ijk}^f >^p$

Dans le cas des suspensions très diluées, Jackson (1997) propose pour $n < s_{ij}^f >^p = a \sum_p g(|x - x^p|) \int_{S_p} \sigma_{ik}(y) n_k(y) n_j(y) dS_y$ et $n < s_{ijm}^f >^p = a^2 \sum_p g(|x - x^p|) \int_{S_p} \sigma_{ik}(y) n_k(y) n_j n_m dS_y$ les expressions suivantes,

$$n < s_{ij}^f >^p = \phi \left[- < p >^f \delta_{ij} + 3\eta \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial < u_i >^f}{\partial x_j} - \frac{\partial < u_j >^f}{\partial x_i} \right) - \epsilon_{iaj} < \omega_a >^p \right) + \frac{5\eta}{2} \left(\frac{\partial < u_i >^f}{\partial x_j} - \frac{\partial < u_j >^f}{\partial x_i} \right) \right] + O(\phi^2)$$

et

$$n < s_{ijk}^f >^p = \phi \left[3\mu \left(< u_i >^f - < u_j >^p \right) \delta_{jk} - \frac{a^2 \rho_f}{5} \left(g_i \delta_{jk} + g_j \delta_{ki} + g_k \delta_{ij} \right) \right.$$
$$\left. + \eta a^2 C_{ijk}^{abc} \frac{\partial^2 < u_a >^f}{\partial x_b \partial x_a} \right] + O(\phi^2).$$

Dans les configurations où les contacts entre particules sont majoritaires, ces différents termes n'ont pas été définis. On suppose que le terme $n < s_{ijk}^f >^p$ est négligeable. Le terme $n < s_{ij}^f >^p$ est constitué d'un terme directement relié à la pression du fluide et d'une somme de termes dépendant de la moyenne sur la phase fluide du taux de déformation. Nous supposerons dans la suite que l'écriture de ce terme reste relativement inchangée dans le cas où il y a contact entre le particules. Ces composantes étant du même ordre de grandeur que le terme $\epsilon < \sigma_{ij} >^f$, ce terme ne semble pas négligeable au premier abord.

Expression de S_{ij}^f

En sommant $\epsilon < \sigma_{ij} >^f$ et $n < s_{ij}^f >^p$, on obtient une relation de la forme,

$$S_{ij}^f = - < p >^f + \eta_e \left(\frac{\partial < u_i >}{\partial y_k} + \frac{\partial < u_k >}{\partial y_i} \right)$$

ou $\eta_e = \eta f(\phi)$ représente la viscosité effective du mélange. A cause de la présence de particules, la viscosité du mélange diffère la viscosité du fluide pur. Dans le cas des suspensions diluées, il existe dans la littératures plusieurs expressions empiriques de cette viscosité effective. L'une des formules la plus couramment utilisée, n'est pas empirique. Il s'agit de la relation d'Einstein,

$$\eta_e = \eta \left(1 + \frac{5}{2} \phi \right), \tag{A.38}$$

qui est dérivée des équations diphasiques. Elle décrit la viscosité effective d'une suspension diluée mono-disperse. Stickel & Powel (2005) présentent une revue détaillée des différentes lois décrivant la viscosité effective d'un suspension dense. Ils définissent les suspensions denses comme celles où l'écart moyen entre les particules est inférieur au rayon des particules.

A.4.4 Forme du système d'équations

Après les différentes simplifications efféctuées, le système s'écrit sous la forme

$$\rho_f \left[\frac{\partial \left(\epsilon < u_i >^f \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\epsilon < u_i >^f < u_j >^f \right)}{\partial x_j} \right] = \rho_f \epsilon g_i - n f_{ia} + \epsilon \frac{\partial S_{ij}^f}{\partial x_j}$$

$$\rho_p \left[\frac{\partial \left(\phi < u_i >^s \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\phi < u_i >^s < u_j >^s \right)}{\partial x_j} \right] = n f_a + \phi \frac{\partial S_{ij}^f}{\partial x_j} + \phi(x) \rho_p g_i + \frac{\partial S_{ij}^p}{\partial x_j} \tag{A.39}$$

où $S_{ij}^f = \epsilon < \sigma_{ij} >^f$. En remplaçant nf_a et S_{ij}^f par leur expression, on trouve

$$\rho_f \left[\frac{\partial \left(\epsilon < u_i >^f \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\epsilon < u_i >^f < u_j >^f \right)}{\partial x_j} \right] = \rho_f \epsilon g_i - \eta \frac{\epsilon^2}{K} \left(< u_i >^f - < u_i >^s \right)$$
$$+ \epsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\eta_e \left(\frac{\partial < u_i >}{\partial x_j} + \frac{\partial < u_j >}{\partial x_i} \right) \right) - \epsilon \frac{\partial p}{\partial x_j}$$

$$\rho_p \left[\frac{\partial \left(\phi < u_i >^s \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\phi < u_i >^s < u_j >^s \right)}{\partial x_j} \right] = \phi \rho_p g_i + \eta \frac{\epsilon^2}{K} \left(< u_i >^f - < u_i >^s \right)$$
$$+ \phi \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\eta_e \left(\frac{\partial < u_i >}{\partial x_j} + \frac{\partial < u_j >}{\partial x_i} \right) \right) + \frac{\partial S_{ij}^p}{\partial x_j} - \phi \frac{\partial p}{\partial x_j}$$

Bibliographie

Andreotti, B. (2004). A two species model of aeolian sand transport. *Journal of Fluid Mechanics*, **510**, 47–70.

Ayrton, H. (1910). The origin and growth of ripple-mark. *Proceedings of the Royal Society of London*, **A 84**, 285–310.

Bagnold, R.A. (1956). The flow of cohesionless grains in fluids. *Proceedings of the Royal Society of London*, **A 249**, 235–297.

Batchelor, G.K. (1970). The stress system in a suspension of force-free particles. *Journal of Fluid Mechanics*, **41**, 245–270.

Buffington, J.M. (1999). The legend of a. f. shields. *Journal of Hydraulic Engineering*, **125**, 376–387.

Buffington, J.M. & Montgomery, D.R. (1997). A systematic analysis of eight decades of incipient motion studies, with special reference to gravel-bedded rivers. *Water Resources research*, **33**, 1993–2029.

Camemen, B. & Larson, M. (2005). A general formula for non-cohesive bed load sediment transport. *Estuarine Coastal*, **63**, 249–260.

Cassar, C., Nicolas, M. & Pouliquen, O. (2005). Submarine granular flows down inclined planes. *Physics of Fluids*, **17**, 103301.

Charru, F. (2006). Selection of the ripple length on a granular bed sheared by a liquid flow. *Physics of Fluids*, **18**, 121508.

Charru, F. & Hinch, E.J. (2000). Phase diagram of interfacial instabilities in a two-layer couette flow and mechanism of the long-wave instability. *Journal of Fluid Mechanics*, **414**, 195–223.

Charru, F. & Hinch, J. (2006). Ripple formation on a particle bed sheared by viscous liquid. part one : steady flow. *Journal of Fluid Mechanics*, **550**, 111–121.

Charru, F. & Mouilleron-Arnould, H. (2002). Instability of a bed of particles sheared by a viscous flow. *Journal of Fluid Mechanics*, **452**, 303–323.

Charru, F., Mouilleron-Arnould, H. & Eiff, O. (2004). Erosion and deposition of particles on a bed sheared by a viscous flow. *Journal of Fluid Mechanics*, **519**, 55–80.

Cheng, N.S. (2004). Analysis of bed load transport in laminar flows. *Adv. in Water ressources*, **27**, 937–942.

Claudin, P. & Andreotti, B. (2006). A scaling law for aeolian dunes on mars, venus, earth, and for subaqueous ripples. *Earth and Planetary Science Letters*, **252**, 30–44.

Coleman, S. & Melville, B. (1996). Initiation of beds forms on a flat sand bed. *Journal of Hydraulic Engineering*, **132**, 301–310.

Dancey, C.L., Diplas, P., Papanicolaou, A.N. & Diplas, M. (2002). Probability of individual grain movement and threshold condition. *Journal of Hydraulic Engineering*, **128**, 1069–1075.

Doppler, D. (2005). *Stabilité et dynamique de pentes granulaires sous-marines*. Ph.D. thesis, Université Paris *XI*.

du Pont, S.C., Gondret, P., Perrin, B. & Rabaut, M. (2004). Granular avalanche in fluids. *Physical Review Letter*, **90**, 044301.

Einstein, H.A. (1942). Formulas for the transportation of bed load. Tech. Rep. 2140, Transactions of the American society of civil engineers.

Einstein, H.A. (1950). The bed load function for sediment transportation in open chanel flow. Tech. Rep. 1026, U.S. Dep. of agriculture.

Engelud, F. (1970). Instability of erodible beds. *Journal of Fluid Mechanics*, **42**, 225–244.

Engelud, F. & Fredsœ, J. (1982). Sediment ripples and dunes. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **14**, 13–37.

Forterre, Y. (2006). Kapitza waves as a test for three-dimensional granular flow rheology. *Journal of Fluid Mechanics*, **563**, 123–132.

Francis, J.R.D. (1973). Experiment on the motion of solitary grains along the bed of a water-stream. *Proceedings of the Royal Society of London*, **A. 332**, 443–471.

Fredsœ, J. (1974). On the development of dunes on erodible channels. *Journal of Fluid Mechanics*, **64**, 1–4.

Garcia, M.H. (2000). The legend of a. f. shields discussion by marcelo h. garcia. *Journal of Hydraulic Engineering*, **126**, 718–720.

GDR-Midi (2004). On dense granular flow. *European Physical Journal*, **14**, 341–365.

Goharzadeh, A., Kalili, A. & Jorgesen, B.B. (2005). Transition layer thickness at a fluid-porous interface. *Physics of Fluids*, **17**, 057102.

Gondret, P., lance, M. & Petit, L. (2001). Bouncing motion of spherical particles in fluids. *Physics of Fluids*, **14**, 643–652.

Happel, J. & Brenner, H. (1983). *Low Reynolds number hydrodynamics with special applications to particulate media*. Martinus Nijhoff Publishers.

Hersen, P. (2004). *Morphogénèse et dynamique des Barchanes*. Ph.D. thesis, Université Paris *VII*.

Jackson, R. (1997). Locally averaged equations of motion for a mixture of identical spherical particles and a newtonian fluid. *Chemical Engineering Science*, **52**, 2457–2469.

Jackson, R. (2000). *The dynamics of fluidized particles*. Cambridge University Press.

Jop, P., Forterre, Y. & Pouliquen, O. (2005). Crucial role of side walls for granula surface flows : Consequences for the rheology. *Journal of Fluid Mechanics*, **541**, 167–192.

Jop, P., Forterre, Y. & Pouliquen, O. (2006). A constitutive law for dense granular flows. *Nature*, **441**, 727–730.

Kennedy, J.F. (1963). The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels. *Journal of Fluid Mechanics*, **16**, 521–544.

Kouakou, K.K.J. & Lagrée, P. (2005). Stability of an erodible bed in viscous shear flows. *European Physical Journal*, **45**, 115–125.

Kuru, W.C., Leighton, D.T. & McCready, M.J. (1995). Formation of waves on a horizontal erodible bed of particles. *International Journal of Multiphase Flow*, **21**, 1123–1140.

Langlois, V. (2005). *Instabilité d'un lit grabulaire cisaillé par un écoulement de fluide.*. Ph.D. thesis, Université de Rennes *I*.

Leighton, D. & Acrivos, A. (1986). Viscous resuspension. *Chemical engineering Science*, **41**, 1377–1384.

Lhuillier, D. (1992). Ensemble averaging in slightly non-uniform suspensions. *European Physical Journal*, **11**, 649–661.

Loiseleux, T., Gondret, P., Rabaud, M. & Doppler, D. (2005). Onset of erosion and avalanche for an inclined granular bed sheared by a continuous laminar flow. *Physics of Fluids*, **17**, 103304–1–9.

Meyer-Peter, E. & Muller, R. (1948). Formulas for bed-load transport. In *2nd meeting international association*, 36–64.

Mouilleron-Arnould, H. (2002). *Instabilités d'un milieu granulaire cisaillé par un fluide*. Ph.D. thesis, Université Paul Sabatier - Toulouse *III*.

Paintal, A.S. (1971). Concept of critical shear stress in loose boundary open channels. *Journal of Hydraulic Research*, **9**, 91–113.

Papanicolaou, A.N., Diplas, P., Evaggelopoulos, N. & Fotopoulos, S. (2002). Stochastic incipient motion criterion for spheres under various bed packing conditions. *Journal of Hydraulic Engineering*, **128**, 369–378.

Pilotti, M. & Menduni, G. (2001). Beginning of sediment transport of incoherent grains in shallow shear flows. *Journal of Hydraulic Research*, **39**, 115–124.

Pouliquen, O., Cassar, C., Forterre, Y., Jop, P. & Nicolas, M. (2005). How do grains flow : towards a simple rheology for dense granular flows. In *Powder and Grains*.

Ribberink, J.S. (1998). Bed-load transport for steady flows and unsteady oscillatory flows. *Coastal Engineering*, **34**, 58–82.

Richards, K. (1980). The formation of ripples and dunes on an erodible bed. *Journal of Fluid Mechanics*, **99**, 597–618.

Rijn, L.C.V. (1993). *Principle of sediment transport in rivers, estuaries and coastal seas*. Aqua Publications.

Rousseaux, G. (2003). *Etude de l'instabilité d'une interface fluide-granulaire : Application à la morphodynamique des rides de plage*. Ph.D. thesis, Université Paris *VI*.

Santoro, V.C., Amore, E., Cavallaro, L., Cozzo, G. & Foti, E. (2002). Sand waves in the messina strait, italy. *Journal of Coastal Research*, **63**, 460–653.

Schaflinger, U. (1994). Interfacial instabilities in a stratified flow of two superposed fluids. *Fluid Dynamics Research*, **13**, 299–316.

Sinquin, A., Palermo, T. & Peysson, Y. (2004). Rheological and flow properties of gas hydrate suspensions. *Oil and Gaz Science and technology - Rev. IFP*, **37**, 41–57.

Smith, A.M.O. (1954). Remarks on transition in a round tube. *Journal of Fluid Mechanics*, **7**, 565–576.

Stickel, J.J. & Powel, R.L. (2005). Fluid mechanics and rheology of dense suspensions. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **37**, 129–149.

Sumer, M. & Bakioglu, M. (1984). On the formation of ripples on an erodible bed. *Journal of Fluid Mechanics*, **144**, 177–190.

Valance, A. & Langlois, V. (2004). Ripple formation over a sans bed submitted to a laminar shear flow. *European Physical Journal*, **43**, 283–294.

Vanoni, V.A. (1966). Sediment transportation mechanics : Initiation of motion. *Journal of Hydraulic Engineering*, **92**, 291–312.

White, C.M. (1940). The equilibrium of grains on the bed of a steam. *Proceedings of the Royal Society of London*, **174**, 322–338.

Wienberg, C. & Hebbeln, D. (2005). Impact of dumped sediments on subaqueous dunes, outer weser estuary, german bight, southeastern north sea. *Geo-Marine Letters*, **25**, 43–53.

Wong, M. & Parker, G. (2006). Reanalysis and correction of bed-load relation of meyer-peter and muller using their own database. *Journal of Hydraulic Engineering*, **132**, 1159–1168.

Yalin, M.S. (1963). An expression for bed-load transportation. *Journal of the Hydraulics Division*, **HY3**, 221–250.

Yalin, M.S. & Karahan, E. (1979). Inception of sediment transport. *Journal of the Hydraulics Division*, **105**, 1433–1443.

Zhang, D.Z. & Prosperetti, A. (1994). Avaraged equations for inviscid disperse two-phase-flow. *Journal of Fluid Mechanics*, **267**, 185–219.

Zhang, K., Acrivos, A. & Schaflinger, U. (1992). Stability in a two-dimensional hagen-poiseuille resuspension flow. *International Journal of Multiphase Flow*, **18**, 51–63.

Érosion, transport et instabilités d'un lit de particules dans un tube

Résumé : Un lit de particules, par exemple le lit d'une rivière ou les dépots d'hydrates dans un pipeline, peut évoluer de différentes manières quand il est soumis à un écoulement de fluide. Nous étudions expérimentalement l'interaction fluide/particules dans la géométrie d'un tube. En faisant varier les paramètres expérimentaux, nous avons déterminé l'existence de cinq régimes différents : particules immobiles, mise en mouvement du lit plat, formation de dunes laminaires, formation de dunes à vortex et apparition de dunes sinueuses.

Ce travail s'articule principalement en quatre parties. Après l'étude qualitative des différents régimes existant, nous avons montré que le lit de particules se met en mouvement quand les forces hydrodynamiques deviennent supérieures à une fraction du poids apparent des particules, c'est-à-dire pour un nombre de Shields critique constant sur une large gamme de Reynolds particulaire. Un modèle continu à deux phases, dans lequel nous avons utilisé une rhéologie de type frottement solide pour modéliser la contrainte solide, nous permet de déterminer le flux de particules et de prédire l'évolution expérimentale du lit plat. En réalisant une étude de stabilité linéaire dans laquelle le flux de particules obtenu est couplé avec l'écoulement de fluide sur un fond fixe, nous avons déterminé le seuil d'apparition des dunes laminaires. Ce seuil correspond à un nombre de Reynolds constant et présente un bon accord avec les résultats expérimentaux dans la limite du modèle. Les expériences et les modèles réalisés nous permettent de construire un diagramme de phase représentant les zones d'existence des différents régimes observés dans le tube.

Erosion and dune formation on particle beds submitted to shearing flows

Abstract : We have studied experimentally the evolution of a particle bed submitted to a pipe flow. Depending on the experimental parameters, we have put in evidence five different regimes for the bed evolution : still particles, flat bed in motion, laminar dunes, vortex dunes and apparition of sinuous dunes.

This work is divided into four main parts. After a qualitative study of the different regimes, we have studied the incipient motion of the particles. Particles at the surface of the bed can move as soon as hydrodynamic forces acting on them exceed a fraction of their apparent weight. This corresponds to a critical Shields number that we have found to be constant over a large range of small particle Reynolds number. We have used a two phase model with a solid friction rheology for the particle phase to describe the bed-load transport as well as the erodible-bed instability. Calculations are performed numerically but also analytically in asymptotic cases. The theorical bed load transport gives a good prediction of the flat bed temporal evolution and the predicted thresholds of laminar dunes formation, which corresponds to a constant Reynolds number, accounts reasonably well for the experimental observations. Finally, we present the different regimes of bed evolution in a phase diagram.