

**La natura della mediazione offerta dai sistemi basati
su micromondi all'apprendimento della matematica
Parte I: Stato dell'arte e quadro teorico di
riferimento**

Rosa Maria Bottino & Giampaolo Chiappini

Istituto per la Matematica Applicata
Consiglio Nazionale delle Ricerche
Via De Marini 6, 16149 Genova
Tel. +39 - 10 - 6475676 / 682

E-mail: {bottino, chiappini}@ima.ge.cnr.it

Introduzione

Questo lavoro analizza il ruolo che ambienti basati sull'uso del calcolatore, ed in particolare i micromondi, possono assumere nelle attività di insegnamento e apprendimento di conoscenze matematiche.

Il lavoro parte dallo studio di alcuni risultati significativi che si sono avuti in questo campo a livello internazionale. Tale studio viene utilizzato come quadro di riferimento per situare e analizzare una ricerca specifica che abbiamo svolto in questo settore.

Tale ricerca riguarda la progettazione, la sperimentazione e la valutazione di un sistema informatico multiambiente che è stato realizzato per lo sviluppo di capacità di risoluzione di problemi aritmetici: il sistema ARI-LAB. La ricerca è stata illustrata e discussa anche in (Bottino et Al., 1994 e in Bottino & Chiappini, 1995).

Il presente lavoro è diviso in due parti. La prima parte è più generale ed è stata scritta con due obiettivi principali: fornire un quadro di riferimento sull'uso di ambienti informatici basati su micromondi nell'apprendimento della matematica e fornire un'analisi della natura del sapere che è coinvolto nelle attività di

risoluzione di problemi aritmetici. L'analisi di tale sapere ci ha guidato nella progettazione del sistema ARI-LAB.

La seconda parte del lavoro riguarda più in particolare il sistema ARI-LAB e l'analisi di alcuni risultati che si sono avuti dalla sua sperimentazione in classi di scuola elementare.

Il calcolatore e l'insegnamento della matematica

Attualmente è ampiamente riconosciuto che la mediazione del calcolatore può rendere possibili nuovi modi di dare significato ai concetti matematici oggetto di apprendimento, può strutturare nuove possibilità di interazione tra conoscenza ed alunno, può modificare le interazioni che si realizzano nella classe fra insegnante ed allievo e fra allievo ed allievo (vedere, ad esempio, Keitel and Ruthven eds., 1993).

Come, e sotto quali condizioni, questi nuovi modi possano realizzarsi è oggetto di ricerca e richiede, a nostro parere, di prendere in considerazione almeno due aspetti cruciali: i) la costruzione di interfacce che permettano all'utente un contatto, basato sui significati, con la conoscenza matematica oggetto di apprendimento; ii) la definizione di adeguati contesti d'uso in grado di sfruttare efficacemente le caratteristiche del sistema ai fini dell'apprendimento.

L'ottica che abbiamo assunto nel nostro lavoro si basa su alcuni assunti generali:

- L'uso della tecnologia non è neutrale rispetto al sapere in gioco, (cioè un mero strumento, e quindi utile per risolvere un dato problema applicativo).
- La tecnologia di per sé non può portare a un mutamento educativo. Spesso l'assunto alla base dell'impiego di una certa tecnologia per scopi educativi è quello che se la tecnologia che si usa è "buona" l'educazione cambierà necessariamente in meglio. Questo modo di vedere le cose spesso porta a presentare una tecnologia come semplice, comoda, interessante da usare, e

non mette in luce che un certo ambiente di apprendimento basato sul calcolatore possa essere complesso, necessiti di un tempo considerevole per essere appreso ed utilizzato in modo proficuo, implichi la ridefinizione dei contenuti e dei metodi stessi di insegnamento e del ruolo dell'insegnante. Per un approfondimento si veda (Noss, 1995).

- Questa impostazione di solito genera entusiasmo iniziale per un certo sistema e quindi un successivo discredito. Il problema è che questi ambienti vengono spesso valutati sulla base di aspettative impossibili, non ben definite o troppo generali. In questo modo si nasconde la ricerca e la definizione degli obiettivi specifici per cui il ricorso ad un certo prodotto può essere significativo.
- Di qui la necessità prima di tutto di calare la ricerca in precisi contesti disciplinari approfondendone gli aspetti epistemologici e didattici ad essi propri.

Nel seguito, analizzeremo brevemente il ruolo che è stato assegnato all'uso di micromondi nell'insegnamento della matematica, considerando alcune significative ricerche in questo settore.

I micromondi

Molti dei sistemi che, in base a verifiche essenzialmente sperimentali, sono attualmente giudicati efficaci per favorire l'apprendimento in campo matematico, sono basati su micromondi. Sebbene non ci sia una definizione precisa di che cosa si intenda per micromondo, attualmente c'è un sostanziale convergere fra ricercatori su un insieme di caratteristiche che sono considerate necessarie per qualificare un determinato ambiente come micromondo (Laborde & Strasser, 1990):

- fornire un insieme di primitive (oggetti e attività) che possono essere combinate al fine di produrre determinati effetti (computazionali, grafici...); a questo si affianca il concetto di

estensibilità: le primitive possono essere combinate in modo da formare nuove primitive;

- incorporare un dominio astratto descritto in un modello;
- offrire una varietà di modi per raggiungere un obiettivo;
- permettere la diretta manipolazione degli oggetti.

La nozione di micromondo ha avuto una forte evoluzione da quando per la prima volta questo termine venne utilizzato da Minsky e Papert in un rapporto del MIT (Lawer, 1987). Essa è cambiata - da nozione utile per insegnare al calcolatore a risolvere problemi in certi contesti circoscritti e vincolati - a nozione utile per la progettazione di ambienti di apprendimento che possano essere favorevoli all'appropriazione di conoscenze. Secondo quest'ultimo punto di vista assume un ruolo centrale l'analisi degli oggetti che vengono messi a disposizione dell'utente nel micromondo (oggetti transizionali, come sono stati definiti da Papert, cioè oggetti che stanno in mezzo fra il concreto e direttamente manipolabile e il formale e l'astratto).

Il quadro di riferimento teorico delle ricerche che hanno alla base l'analisi del ruolo dei micromondi nell'apprendimento matematico può essere schematicamente descritto dalle parole principali a cui fanno riferimento molti autori nel descrivere e nel situare il loro lavoro: "costruttivismo", "sistemi basati su chi apprende (learner centered)", "problem-based". Si veda anche (Norman & Spohrer, 1996). Alla base c'è l'idea che l'apprendimento migliori se lo studente (colui che apprende) è 'immerso' in un argomento ed è motivato a cercare nuova conoscenza e ad acquisire nuove capacità dalle necessità poste dal problema a cui sta lavorando. L'obiettivo è un apprendimento basato sull'esplorazione attiva e la costruzione personale piuttosto che basato su un modello di insegnamento di tipo trasmissivo. L'approccio è quello di realizzare un apprendimento per problemi. Problemi che l'insegnante struttura in

modo tale che nella loro soluzione lo studente possa in modo naturale affrontare le tematiche pertinenti.

Questa descrizione, pur semplificando molto i vari aspetti trattati, cattura però le tendenze principali di un'impostazione che viene attualmente considerata efficace per l'apprendimento (almeno nel settore della didattica delle materie scientifiche e della matematica in particolare). Nel passato l'obiettivo, per realizzare sistemi per l'apprendimento basati sul calcolatore, era sul contenuto. Per ogni area tematica i vari argomenti erano suddivisi in sottoargomenti che potessero essere affrontati secondo determinati piani didattici. L'approccio "learner centered", come è già stato osservato, si accompagna spesso ad un approccio basato sui problemi. L'obiettivo, quindi, si sposta, da un'analisi strutturata dei contenuti curricolari, allo studente e all'individuazione di problemi significativi per l'apprendimento di un determinato sapere. Questa filosofia non è nuova, ma le sue applicazioni pratiche sono attualmente rese attuabili dalle nuove tecnologie che consentono l'effettiva realizzazione di alcune delle idee messe in luce dal costruttivismo.

Micromondi nelle attività di insegnamento ed apprendimento in matematica

Da quanto esposto precedentemente, risulta quindi che l'obiettivo delle ricerche di tipo educativo sui micromondi è quello di progettare situazioni di apprendimento in cui la conoscenza possa essere la proprietà emergente dall'interazione tra studenti e ambienti.

In generale, nella maggior parte degli apporti che si trovano in letteratura a questo proposito, si afferma che un sistema basato su micromondi sia particolarmente efficace per l'apprendimento matematico perché incoraggia l'alunno a esplorare l'ambiente reso

disponibile dall'interfaccia. Ambiente che incorpora un modello di un dominio di conoscenze matematiche. L'esplorazione del micromondo, pur assumendo caratteristiche differenti a seconda dei sistemi, viene riconosciuta come funzionale, nel contesto d'uso, al raggiungimento di due obiettivi:

- favorire l'evoluzione delle strategie degli alunni in relazione al compito;
- favorire la costruzione di significati che permettano di stabilire una relazione tra concetti matematici e loro rappresentazioni.

Sotto quali condizioni un micromondo possa permettere il raggiungimento di questi due importanti obiettivi è attualmente un argomento di studio e di ricerca.

Alcune ricerche (vedi, ad esempio, Kaput, 1995) mettono in luce l'importanza per l'apprendimento matematico delle innovazioni che i medium interattivi possono produrre. Kaput, nel distinguere fra medium interattivi e medium inerti, sottolinea come i medium interattivi permettano di modificare le notazioni o creare nuove notazioni che rendono possibili nuovi modi di dare significato ai concetti matematici oggetto di apprendimento. Per esempio, si può utilizzare un dispositivo di puntamento e interfacce grafiche per agire direttamente sulle coordinate grafiche di una funzione. Questo è un modo di sfruttare efficacemente la conoscenza basata sull'esperienza cinestetica per agire sulla notazione matematica, e, quindi, per effettuare operazioni mentali su oggetti matematici, cioè funzioni. In altri casi il sistema di rappresentazione di un micromondo può condividere proprietà con il mondo degli oggetti fisici e, di conseguenza, nell'interazione con il micromondo, l'utente può ricorrere a quel patrimonio di competenze che si sviluppa anche fuori dalla scuola.

Per quanto riguarda il tipo di conoscenza che dovrebbe essere incorporata in un micromondo, un importante orientamento è stato dato circa una decina di anni fa da Swartz (Swartz, 1988). Egli affermava che il software doveva essere in grado di eseguire manipolazioni degli oggetti matematici che costituiscono il suo

domino di conoscenza ma che non doveva, però, fare inferenze sulle intenzioni dell'utente, in altre parole non doveva avere incorporato alcun modello dell'utente. Swartz riteneva, cioè, che il software dovesse essere in grado di eseguire, su richiesta dell'utente, una certa mossa (matematicamente corretta), ma non dovesse avere incorporato alcun meccanismo che cercasse di inferire se quella mossa fosse appropriata per un certo scopo. Questa impostazione era notevolmente diversa da quella usualmente adottata negli ITS (Intelligent Tutoring Systems), sistemi che in quel periodo avevano suscitato notevole interesse ed attesa, ma si sono poi rivelati di limitata validità sul piano pedagogico.

Un forte accento sull'importanza di un'analisi epistemologica del sapere per l'apprendimento del quale un certo micromondo viene progettato, è venuta dagli studi condotti dai ricercatori di Grenoble coinvolti nel progetto Cabri. Riteniamo che questa analisi sia fondamentale per stabilire sotto quali condizioni un sistema per l'apprendimento matematico risulti efficace. E' attraverso questa analisi, infatti, che possono essere evidenziate le difficoltà degli studenti e gli apporti che la mediazione di un micromondo può fornire per il superamento di tali difficoltà. La Laborde (in Laborde, 1993) discute i cambiamenti introdotti dall'uso di micromondi nell'insegnamento e nell'apprendimento della geometria. In particolare, discute questi cambiamenti in termini di: i) nuovo status assunto dalle figure geometriche in quanto mediate dal computer ii) comportamento degli studenti quando affrontano compiti geometrici con la mediazione del computer.

La mediazione del computer rende possibili vari modi di accesso alla nozione di figura geometrica che possono differire sensibilmente dall'usuale accesso che si realizza con carta e penna. I compiti assegnati agli studenti, e realizzati attraverso il computer, possono richiedere differenti strategie e coinvolgere, di conseguenza, differenti conoscenze rispetto a quelle coinvolte con carta e penna. Il computer, in questo quadro, è visto come parte

dell'ambiente di apprendimento organizzato in modo ottimale dall'insegnante al fine di promuovere l'apprendimento da parte dello studente della conoscenza matematica. Esso è cioè parte del "Milieu" (vedi definizione data in: Brousseau, 1986).

Le ricerche finora considerate sono state importanti per precisare alcuni degli aspetti significativi del ruolo che un micromondo basato sul calcolatore può avere nei processi di apprendimento di concetti matematici. Queste ricerche considerano come centrale il rapporto utente-software. L'analisi di tale rapporto è sicuramente di fondamentale importanza per definire le caratteristiche che deve possedere l'interfaccia di un micromondo in modo da favorire l'esplorazione matematica (e la generalizzazione delle proprietà trovate). Tuttavia in tempi recenti si assiste ad un progressivo interesse non solo per gli aspetti strettamente connessi con la progettazione di software, ma anche per quelli che riguardano la precisazione di contesti d'uso in grado di sfruttare efficacemente le caratteristiche del software nelle attività di insegnamento/apprendimento. Questo è in accordo con gli studi più recenti di ergonomia sociale che considerano il sistema sociale nel quale viene utilizzato un determinato sistema informatico come parte del sistema informatico stesso (si vedano, per esempio, i lavori di Brown, 1986 e Bevan e Macleod, 1994).

Per quanto riguarda i sistemi per l'apprendimento della matematica una spinta iniziale in questa direzione è stata data, ad esempio, dagli studi di Pea (Pea, 1987). Egli mette in luce che il valore di un certo software, relativamente allo sviluppo del pensiero matematico, non è una proprietà intrinseca del software, ma dipende dal tipo di utilizzo, e quindi, in sostanza dal suo contesto d'uso. Pea sottolinea l'importanza di assumere un approccio bidirezionale nel guardare agli effetti dell'uso del computer nell'educazione: non solo i computer hanno effetti sulle persone ma anche queste sui computer. Questa visione supera l'immagine tradizionale degli effetti cognitivi dell'uso del computer che è

unidirezionale: quella di uno studente seduto davanti ad una macchina il cui apprendimento è funzione diretta dell'interazione con questa macchina.

Questo modo di vedere le cose porta ad impostare la ricerca in questo settore secondo una diversa prospettiva che parte dall'assunto che le tecnologie educative hanno un ruolo cognitivo solo nell'ambito di un contesto. Contesto che è determinato dall'attività dei soggetti che interagiscono e dai loro scopi ed obiettivi. E' secondo questa prospettiva che discuteremo nel seguito l'evoluzione ed i risultati del nostro lavoro.

Questa idea è ripresa anche nel lavoro della Hoyles (Hoyles, 1993) dove ella realizza una riflessione sull'uso di alcuni micromondi (LOGO, spreadsheet) per l'apprendimento della matematica. Secondo la Hoyles l'interazione con uno di questi micromondi può mettere in luce due processi complementari: da una parte aiuta la matematica ad essere concreta attraverso la costruzione e la manipolazione di 'evocative computational objects' (ECO) e dall'altra aiuta a formalizzare l'azione attraverso l'articolazione di astrazioni in situazione. L'espressione ECO è sostanzialmente un altro modo per descrivere gli oggetti transizionali introdotti da Papert accentuando l'enfasi sull'aspetto 'evocatore' di conoscenza; un ECO ha senso dal punto di vista matematico ma anche dal punto di vista del senso comune. Un'astrazione in situazione è vista come la formulazione di una relazione matematica che è generale rispetto al micromondo utilizzato, ma che è interpretabile e significativa solo all'interno del micromondo stesso. L'attività con gli ECO fornisce l'esperienza matematica; l'articolazione di astrazioni in situazione rende le relazioni matematiche soggiacenti esplicite.

La Hoyles sviluppa la sua ricerca all'interno di un quadro concettuale che si rifà alle teorie di Vygotsky, in particolare viene considerata come fondamentale la nozione di mediazione da lui espressa. Secondo la Hoyles, le nozioni di ECO e di astrazione in situazione sono un modo di spiegare come un artefatto informatico possa mediare l'appropriazione e la comunicazione di idee

matematiche. Un micromondo non viene visto semplicemente come uno strumento ma come mezzo di comunicazione simbolica di relazioni matematiche. Di conseguenza il calcolatore può facilitare il processo di apprendimento della matematica attraverso la mediazione di segni. Il progetto ontogenetico di Vygotsky era di capire come i bambini si appropriassero di un linguaggio simbolico quale il linguaggio naturale attraverso l'appropriazione di forme dell'attività sociale. La Hoyles postula che i sistemi di segni della matematica possano essere utilmente considerati in questa luce, cioè come mediati da simbolizzazioni che sono fenomeni culturali, che strutturano e sono strutturati dalla vita sociale. Secondo Saxe (Saxe, 1991), che da un'interpretazione di Vygotsky, "capire l'acquisizione dei concetti scientifici richiede una prospettiva che includa anche un'analisi dei concetti spontanei dei bambini. Per Vygotsky i bambini costruiscono i concetti spontanei "dal basso": essi sono ricchi di significato ma locali e non correlati, ... viceversa i bambini costruiscono i concetti scientifici "dall'alto": inizialmente questi concetti sono astratti ma vuoti; il bambino può apprendere la "sintassi" delle relazioni di una rete di concetti ma questi hanno apparentemente poco a che vedere con i concetti spontanei. Nella loro interazione però i concetti spontanei arricchiscono i concetti scientifici di significato e i concetti scientifici offrono generalità allo sviluppo dei concetti spontanei." Il punto è quindi come stabilire questa interazione.

Secondo la Hoyles cruciale per l'apprendimento della matematica è dunque fornire l'opportunità al bambino di costruire il linguaggio simbolico della matematica sulla base dei suoi concetti spontanei locali. Il linguaggio formale dell'astrazione in situazione che segue la manipolazione di ECO esprime questa generalizzazione del bambino: è il suo linguaggio, il suo mezzo di comunicazione e come tale struttura le sue concezioni. In contrasto a ciò un sistema di segni dato "dall'alto" inibisce il ragionamento e colui che apprende guadagnerà poco dall'interazione con il software. Il punto è quindi costruire ECO che siano rilevanti dal punto di vista della

conoscenza matematica che deve essere appresa ma che siano rilevanti anche per colui che apprende.

Un problema che rimane aperto in questa analisi è quello della "fratturazione della conoscenza", problema che è sotteso all'interazione con diversi ambienti e che emergeva anche nella teorizzazione di Papert sul concetto di micromondo. Come si può sintetizzare la "conoscenza fratturata"?

La Hoyles sottolinea, a questo riguardo, il ruolo fondamentale dell'insegnante nell'aiutare il bambino nella costruzione di ECO, nell'articolazione di astrazioni in situazione e nel sintetizzare nozioni fra diversi ambienti.

Nel quadro di riferimento che illustreremo nel seguito, ci riferiremo anche noi, come la Hoyles, alla nozione di mediazione sviluppata da Vygotsky e considereremo in questo quadro il ruolo assunto da un artefatto informatico basato su micromondi ed il tipo di approccio alla conoscenza che esso può fornire. La nostra analisi si discosta da quella della Hoyles nell'introduzione di elementi presi dall'activity theory che ci consente di definire più precisamente il concetto di cicli espansivi di attività, concetto che consente, a nostro giudizio, un superamento del problema della fratturazione della conoscenza.

L'approccio che abbiamo seguito nella nostra ricerca

Dall'analisi precedente emergono alcuni aspetti importanti che caratterizzano l'approccio che abbiamo seguito nel nostro lavoro:

- L'analisi del ruolo che un artefatto informatico può avere nell'educazione matematica viene fatta mettendo in luce la natura della mediazione che esso può fornire alle attività di apprendimento ed insegnamento di contenuti matematici.
- Per far ciò occorre innanzi tutto partire da un'analisi dell'oggetto dell'attività di insegnamento e apprendimento. Tale analisi, infatti, consente di evidenziare le difficoltà che gli studenti possono incontrare nell'apprendimento di quel

determinato contenuto matematico e di mettere in luce gli apporti che la mediazione di un ambiente informatico può fornire per il superamento di tali difficoltà. Siamo qui interessati, in particolare, all'acquisizione non di una conoscenza limitata o di un'abilità specifica (micro-didattica) ma all'apprendimento di competenze che richiedono uno sviluppo sul lungo periodo, quali sono, ad esempio, le abilità matematiche connesse con la risoluzione di problemi aritmetici. L'oggetto dell'attività di insegnamento e apprendimento in questo caso non è statico ma evolve nel tempo, arricchendosi progressivamente.

- La natura della mediazione offerta da un sistema informatico ai processi di insegnamento e apprendimento non può essere studiata solo attraverso l'analisi del rapporto studente-software ma considerando il contesto d'uso nel suo complesso.
- Questo significa considerare non solo la mediazione che il software può offrire all'azione dello studente relativamente ai compiti che egli deve svolgere di volta in volta, ma anche la mediazione che il software può dare a tutta l'attività sociale che si realizza in una classe e che, nel suo complesso, contribuisce all'acquisizione di un determinato oggetto di sapere matematico. Di conseguenza occorre considerare il modo in cui il software può mediare non solo la relazione studente - compito che deve essere svolto per mezzo del software, ma anche la relazione fra studente ed insegnante e la relazione fra studente e studente, tenendo conto dei diversi ruoli che possono essere assunti e dell'evoluzione dell'oggetto dell'attività di insegnamento apprendimento.
- Assumere questa impostazione comporta, secondo noi, studiare come il computer possa contribuire a strutturare un contesto d'uso capace di assistere lo studente nell'acquisizione di un determinato contenuto matematico. Tharp in (Tharp, 1989) distingue cinque diversi modi attraverso i quali può essere fornita assistenza allo studente durante l'apprendimento:

modellazione, gestione della contingenza, dare feedback, dare informazioni, porre domande, fornire una struttura cognitiva. Questi diversi modi di fornire assistenza sono essenzialmente di natura sociale e sono finalizzati a fornire agli studenti quegli aiuti esterni e quegli strumenti di controllo che sono necessari per risolvere i compiti proposti nel corso dell'attività e per permettere l'acquisizione di un sapere complesso.

In accordo con il quadro delineato, nel seguito forniremo un'analisi della natura del sapere che è coinvolto nelle attività di problem solving aritmetico, cioè una descrizione dell'oggetto dell'attività di insegnamento/apprendimento per cui è stato progettato il sistema ARI-LAB. Nella seconda parte di questo lavoro descriveremo brevemente le caratteristiche principali del sistema e presenteremo l'analisi di alcuni risultati delle sperimentazioni del sistema al fine di mettere in luce come il sistema sia stato usato per strutturare un contesto d'uso in grado di fornire un'assistenza allo studente nello sviluppo dell'attività.

L'oggetto dell'attività di insegnamento-apprendimento dell'aritmetica

Il rapporto che si stabilisce tra linguaggio naturale e linguaggio simbolico della matematica è un rapporto complesso che incide sul modo in cui il pensiero si organizza e prende corpo nella soluzione di situazioni problematiche. In questo lavoro siamo interessati ad analizzare tale rapporto in relazione al problem solving aritmetico. Per fare ciò dobbiamo innanzitutto cercare di precisare quale è l'oggetto dell'attività di insegnamento/apprendimento dell'aritmetica mettendo in luce il significato di tale oggetto così come si è fissato nel linguaggio. Successivamente cercheremo di evidenziare il tipo di evoluzione che ha portato a tale oggettivazione di significato nelle forme linguistiche oggi utilizzate.

Tale analisi è importante per comprendere l'evoluzione dei cicli di attività che possono consentire di sviluppare la capacità di usare tale oggetto.

Per dare una descrizione del significato relativo all'oggetto dell'attività di insegnamento-apprendimento dell'aritmetica assumiamo come quadro di riferimento teorico il modello di semantica di Frege (Frege, 1977) che distingue tra *denotazione* e *sensò* di un'espressione (nome o enunciato) (denotazione: oggetto a cui il segno dell'espressione si riferisce; senso: modo in cui il denotato viene presentato alla mente o in altre parole pensiero che è espresso dall'espressione).

Per mettere in evidenza in cosa consista la distinzione tra senso e denotazione di un'espressione simbolica nel campo dell'aritmetica consideriamo ad esempio le due espressioni simboliche "1000-999" e "1000/1000"; esse denotano lo stesso oggetto (il numero 1) ma mettono in evidenza modi diversi attraverso i quali il denotato può essere ottenuto, a cui corrispondono sensi diversi: come differenza di due numeri consecutivi, come divisione di un numero con se stesso.

Nel quadro teorico elaborato da Frege la nozione di senso di un enunciato ha un carattere oggettivo e non individuale, in quanto costituisce il possesso comune di molti ed è distinto dalla nozione di rappresentazione che ha un carattere strettamente psicologico che è invece legata al soggetto e al momento e alle circostanze in cui viene realizzata.

Osserviamo inoltre che le due espressioni "1000-999" e "1000:1000" possono essere considerate due differenti nomi del numero /1/, diversi dal nome proprio "uno" che lo identifica. In accordo con il quadro fornito da Frege pensiamo che un nome designi un oggetto (che può essere anche un oggetto astratto come nel caso dei numeri) e contemporaneamente fornisca criteri per la sua identificazione cioè fornisca un modo per individuarlo mentalmente come oggetto che ha queste o queste altre caratteristiche che soddisfa queste o queste altre proprietà.

Riteniamo che quanto esposto sia importante per comprendere ciò che è coinvolto nella soluzione di un problema aritmetico.

Nella soluzione di un problema aritmetico il processo di nominalizzazione consiste nell'utilizzare nomi, propri o non propri, dei numeri per esprimere quantitativamente gli elementi della situazione di enunciazione con lo scopo di realizzare enunciati aritmetici in grado di dare una interpretazione quantitativa del problema. In altre parole i nomi introdotti possono combinarsi tra loro in proposizioni elementari, autentici modelli degli stati di cose espresse dal testo del problema di cui rappresentano una interpretazione quantitativa.

Un enunciato aritmetico può essere utilizzato in contesti d'uso diversi e in relazione ai differenti contesti ciascun enunciato può esprimere pensieri diversi che dipendono dagli aspetti culturali del contesto oltre che dalle circostanze di enunciazione. Distinguiamo perciò tra senso aritmetico e senso contestualizzato di un'espressione aritmetica intendendo per senso aritmetico il modo in cui il numero denotato può essere ottenuto attraverso l'applicazione di regole computazionali (cioè l'aspetto strumentale) e per senso contestualizzato il pensiero che si realizza come risultato di una corrispondenza tra gli aspetti culturali del dominio di conoscenza in cui l'espressione viene impiegata e la forma segnica dell'espressione in cui risultano inglobati il suo senso aritmetico e la sua denotazione (aspetto simbolico).

Il fatto di distinguere tra senso aritmetico (aspetto strumentale del linguaggio) e senso contestualizzato (aspetto simbolico del linguaggio) ci permette di mettere in luce che la fonte del senso dei simboli, anche in relazione ai vari contesti di applicazione, è strettamente connessa con l'uso che dei simboli è stato effettuato in una sorta di attività con i segni nel cui ambito essi sono arrivati ad acquistare il significato che in essi si è cristallizzato come pratica sociale dell'umanità. Come vedremo ciò riveste una grande importanza sul terreno didattico perché consente di porre la questione del linguaggio non come un sistema di segni definito,

con una sua sintassi e con un corredo di idee che rendono già significanti tali segni, di scarsa importanza dal punto di vista dell'apprendimento, ma come attività con i segni che attraverso l'uso mediato socialmente diventano linguaggio, cioè acquistano un significato riconosciuto e condiviso.

In (Chevallard, 1989) Chevallard spiega molto bene che cosa si può intendere per aritmetica in base ad un'analisi di tipo storico epistemologico. Egli nota innanzitutto che i segni che oggi in modo improprio chiamiamo aritmetici (+; -; *; :) per molto tempo non sono appartenuti al dominio dell'aritmetica bensì a quello dell'algebra nel cui ambito sono stati sviluppati.

Egli osserva inoltre che storicamente la soluzione aritmetica ha utilizzato per il suo sviluppo il linguaggio naturale arricchito da quello che si potrebbe definire un "linguaggio dei numeri", cioè arricchito dei mezzi di un sistema di numerazione determinato. In questo senso la soluzione di un problema aritmetico si presenta come un discorso, "un discorso che si deve pronunciare tutto di un fiato", perché il sapere aritmetico è intrinsecamente un saper fare orale. "

I problemi che l'aritmetica affronta sono problemi concreti. Secondo Chevallard il concreto dei problemi aritmetici gioca un ruolo cruciale in quanto consente di parlare della struttura matematica soggiacente al problema senza esplicitare le proprietà che risultano incorporate nel modello risolutivo che rimandano a concetti (linearità, additività...) che la soluzione orale non è in grado di mettere in evidenza in modo esplicito.

Consideriamo il seguente problema: *Sei bambini vogliono dividere fra loro 7300 lire in parti uguali. Quanto spetterà a ciascuno di essi ?*.

Una soluzione orale del problema può, per esempio, essere la seguente:

"Supponiamo che a ciascun bambino spettino 1500 lire. Ripeto 2 volte 1500 lire e fa 3000 lire, ripeto 3000 per 3 volte e fa 9000 lire. Mi accorgo che 1500 lire è troppo per ciascun bambino.

Supponiamo allora che a ciascun bambino spettino 1000 lire. Ripeto 6 volte 1000 e fa 6000. Per arrivare a 7300 mancano 1300. Supponiamo che a ciascun bambino vadano ancora 200 lire. Ripeto 200 per 6 volte e fa 1200, mancano ancora 100 lire per arrivare a 1300. Se divido 100 lire tra i sei bambini, non considerando le monete da 5 lire che non si trovano più, ad ogni bambino spettano ancora 10 lire. Quindi ad ogni bambino spettano 1210 lire e rimangono ancora 40 lire.”

La soluzione riportata si presenta come discorso; il ragionamento che il discorso esprime risulta essere una “messa in scena”, supportata dal concreto del problema, che permette di parlare delle proprietà in gioco e dei concetti coinvolti senza riferirsi direttamente ad essi. Il linguaggio naturale e il sistema di numerazione decimale sono i sistemi di rappresentazione attraverso i quali si realizza la messa in scena.

Secondo il quadro sopra esposto, possiamo osservare che la soluzione del problema si caratterizza per i seguenti aspetti:

- a) E' possibile riconoscere in ogni passo risolutivo espresso da un enunciato del discorso un senso contestualizzato in relazione al concreto del problema. Ciò è dovuto al fatto che il senso aritmetico dell'enunciato, cioè il modo in cui si ottiene l'oggetto denotato attraverso l'applicazione di regole computazionali (metto insieme 1500 lire a 1500 lire) consente di esprimere una struttura in grado di incorporare un senso contestualizzato pertinente per il concreto del problema. Osserviamo inoltre che all'interno di tale struttura il riferimento con il concreto del problema è determinato dal nome del numero denotato. Il concreto del problema fornisce al risolutore il supporto per riconoscere o attribuire significatività a tale nome.
- b) Il concreto del problema fornisce sempre, per ogni passo risolutivo, un riscontro per verificare se è possibile stabilire un giudizio di verità sull'ipotesi eventualmente formulata o se invece essa deve rimanere ancora in attesa di una verifica.

Notiamo che il fatto che il singolo studente possa non essere in grado di realizzare tale riscontro è un fatto accidentale di cui occorrerà tenere conto sul terreno didattico ma che non mette in discussione il fatto che tale riscontro può essere realizzato e che può essere condiviso, almeno in linea di principio, da tutti.

Secondo Chevallard la produzione di questo tipo di soluzione aritmetica è un saper fare orale perché si realizza potendo contare ad ogni passo sul supporto fornito dal concreto della situazione che fornisce al risolutore un costante riscontro di significatività in relazione a quanto va realizzando (vedi a)), proprio come nel dialogo orale l'interlocutore fornisce in ogni momento un riscontro di significatività al proprio interlocutore. Si comprende allora perché nell'aritmetica orale il sapere in gioco abbia poco a che vedere con i segni aritmetici: essi infatti nel registro orale, sono, almeno all'inizio, più un impedimento che un aiuto in quanto permettono sintesi ed economia di pensiero a svantaggio però del controllo del senso della procedura rispetto al concreto della situazione di enunciazione.

Così una soluzione del tipo "7300:6" per il problema illustrato altro non è che una sintesi del ragionamento espresso attraverso il linguaggio naturale e il linguaggio dei numeri che tuttavia continua a costituire la giustificazione che consente anche alla soluzione simbolica di essere socialmente condivisibile.

I simboli aritmetici usati per rappresentare l'azione risolutiva del soggetto non apportano quindi un cambiamento della natura del sapere coinvolto che continua ad essere un saper fare "orale", che per necessità può essere anche messo in forma scritta, magari attraverso l'utilizzo di simboli aritmetici.

L'analisi compiuta da Chevallard pone in modo cruciale il ruolo giocato dal concreto nella soluzione di un problema aritmetico. Per capire l'importanza che può avere il concreto sul piano individuale abbiamo bisogno di precisare il ruolo che esso può giocare nella formazione dei concetti che sono coinvolti nell'attività di soluzione di un problema aritmetico.

Engestrom, citando il lavoro sui concetti di Il'enkovv (Engestrom, 1991), mette in evidenza la ridefinizione compiuta da quest'ultimo delle nozioni di "concreto" e "astratto". Contrariamente alla nozione comune egli non vede "concreto" come qualcosa di afferrabile con i sensi e "astratto" come qualcosa di concettuale o costruito mentalmente. Concreto è la qualità olistica di un sistema interconnesso. Le nozioni generali sono astrazioni formali perché esse separano arbitrariamente le caratteristiche degli oggetti dalle loro interconnessioni. I concetti genuini sono astrazioni concrete perché esse riflettono e ricostruiscono la natura sistemica e interconnessa degli oggetti.

Si capisce, pertanto, come i concetti di valore posizionale e di additività, ad esempio, possano venire costruiti soltanto cogliendo la concretezza dei sistemi di interconnessioni nei quali essi risultano coinvolti e non attraverso una trattazione della nozione a livello generale, cioè attraverso l'imposizione di una formula pronta sugli oggetti delle attività. Il concreto del problema è il sistema di interconnessioni che è soggiacente alla struttura del suo enunciato esplicitato attraverso i mezzi di un sistema di numerazione.

In questo quadro l'oggetto dell'attività di insegnamento/apprendimento dell'aritmetica è lo sviluppo della capacità di utilizzare le potenzialità offerte dal sistema di numerazione decimale posizionale per mettere in evidenza il sistema di interconnessioni che sono incorporati nei problemi di struttura additiva e moltiplicativa. Ciò potrà essere sviluppato solo se l'attività di insegnamento terrà conto dell'evoluzione storica dei concetti correlati all'oggetto dell'attività e delle contraddizioni che hanno caratterizzato tale evoluzione.

Nell'insegnamento tradizionale lo sviluppo delle competenze aritmetiche viene perseguito secondo un modello pedagogico che prevede:

- 1) Un'introduzione del numero secondo la notazione posizionale decimale basata su approccio di decifrazione e di codifica.

- 2) Un'introduzione precoce degli algoritmi di calcolo scritto contestualmente all'introduzione dei segni aritmetici.
- 3) Un'introduzione precoce dei segni aritmetici per esplicitare il sistema di interconnessioni nella soluzione dei problemi;

A tale riguardo notiamo che questo approccio non tiene conto del fatto che il sistema di numerazione posizionale decimale è il punto di arrivo di una lunga evoluzione che parte dai sistemi di numerazione additivi di spunta che successivamente si è sviluppato secondo notazioni via via più formali. Osserviamo incidentalmente che le notazioni additive di spunta hanno una importante proprietà: le dimensioni della rappresentazione sono proporzionali al valore del numero. Le rappresentazioni di spunta possono essere viste come una sorta di "grafico" e permettono, quindi, di collegare l'aspetto percettivo visivo all'aspetto simbolico della rappresentazione.

Nei sistemi numerici additivi più formali, come quello romano, tale caratteristica sostanzialmente rimane anche se viene integrata all'interno di una notazione che richiede la padronanza di simboli diversi (sette) e delle relative regole di semplificazione per combinare simboli di valore inferiore per ottenere quelli di valore superiore.

Anche le competenze numeriche che i bambini costruiscono fuori dalla sistematizzazione scolastica sono generalmente di tipo additivo.

La notazione decimale posizionale viene spesso introdotta e appresa come puro esercizio di decifrazione senza tenere conto che nel passaggio da una rappresentazione additiva ad una posizionale emergono forti contraddizioni che il sistema di attività deve contribuire a risolvere. Come tutti gli insegnanti sanno, una decifrazione corretta può coesistere anche in assenza di una competenza numerica ben strutturata oppure scollegata da essa. Ciò si verifica quando non esiste più una concordanza tra il leggere o lo scrivere un numero e ottenere un significato. Questa discrepanza è

favorita quando il bambino ricorre ciecamente alla decifrazione mettendo da parte la competenza numerica acquisita.

Anche lo sviluppo degli algoritmi di calcolo scritto delle operazioni e l'uso dei segni aritmetici delle operazioni nella soluzione di problemi è il risultato di una lunga evoluzione e risponde ad esigenze di sintesi nella rappresentazione e di economia di pensiero.

Una loro introduzione precoce nella pratica scolastica può essere la fonte di ostacoli per il processo di apprendimento.

A tale riguardo è utile ricordare che la ricerca ha messo in luce che non c'è correlazione tra abilità di realizzare calcoli scritti e la capacità di risolvere problemi (Nesher 1986). E' stato infatti dimostrato che un'insistenza marcata sul calcolo scritto si è spesso rivelata di ostacolo allo sviluppo di capacità nel problem solving aritmetico.

La ricerca ha messo in luce anche i danni di una formalizzazione precoce.

L'introduzione del simbolismo aritmetico e della computazione scritta possono essere proficuamente introdotti quando i bambini hanno già sperimentato le potenzialità di un sistema di numerazione e sono in grado di mettere in atto strategie informali all'interno di situazioni problematiche concrete. Se i bambini non hanno ancora sviluppato queste abilità essi utilizzeranno i segni dell'aritmetica con una semantica molto povera, che spesso coincide con ciò che denota il risultato di un calcolo scritto.

Per questi bambini l'attività di soluzione dei problemi si trasforma spesso nell'indovinare l'operazione corretta e nell'eseguire il calcolo corrispondente. I segni aritmetici vengono utilizzati quindi sulla base di segnali specifici che possono essere dedotti dal testo, dall'insegnante o da qualche altro alunno (se nel testo c'è la parola "più" allora l'operazione è "+"; se l'insegnante sottolinea l'espressione "quante volte" allora l'operazione è ":"....).

Quanto qui sopra sottolineato pone rilevanti problemi didattici sul modo di sviluppare la padronanza del sistema di numerazione decimale e dei simboli aritmetici.

Noi pensiamo che la notazione decimale del numero e il formalismo aritmetico debbano essere introdotti in modo graduale quando le capacità nell'uso di un sistema di numerazione sono già state sviluppate all'interno di strategie risolutive di problemi utilizzando sistemi di rappresentazione che conservino qualche legame di tipo analogico con quelli di riferimento e in cui le regole operative siano il risultato di una maggiore condivisione sociale.

Questo quadro di riferimento ci ha guidato nella progettazione e sperimentazione del sistema ARI-LAB. Esso è stato realizzato per supportare e mediare un sistema di attività il cui oggetto è l'utilizzo del sistema di numerazione posizionale decimale e la costruzione del significato dei simboli aritmetici nella soluzione di problemi aritmetici di struttura additiva e moltiplicativa.

Riferimenti Bibliografici

- Bevan N., Macleod M. (1994): Usability measurement in context, *Behaviour & Information Technology*, Vol. 13, n° 1 & 2, 132-145.
- Bottino R.M., Chiappini G., Ferrari P.L. (1994), A hypermedia system for interactive problem solving in arithmetic, *Journal of Educational Multimedia and Hypermedia*, AACE, Vol. 3, n° 3/4, 1994, 307-326.
- Bottino R.M., Chiappini G. (1995), "ARI-LAB: models issues and strategies in the design of a multiple-tools problem solving environment", *Instructional Science*, Vol. 23, n°1-3, Kluwer Academic Publishers, 7-23.
- Brousseau G., Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol.7, n°2, 33-115.
- Brown J.S. (1986), From cognitive to social ergonomics and beyond, in Norman D.A. & Draper S. (eds): *User Centered System Design*, Hillsdale JY: Lawrence Erlbaum Associates, 457-486.
- Engestrom Y. (1991), Activity Theory and individual and social transformation, *Activity Theory* , 7/8.
- Frege G. (1977), *Logica ed aritmetica*, Torino: Boringhieri.
- Chevallard, Y.I. (1989). *Arithmetique, algebre, modelization*, Publications de l'IREM d'Aix-Marseille.
- Hoyle C. (1993), Microworlds/Schoolworlds: the transformation of an innovation, in Keitel C. & Ruthven K. (eds.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*, Nato Asi Series F, Vol. 121, Berlin: Springer Verlag, 1-17.
- Kaput J.J (1995), Overcoming phisicality and the eternal present: cybernetic manipulatives, in R. Sutherland & J. Mason (eds): *Exploiting mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, Nato Asi Series F, Vol. 138, Berlin: Springer Verlag, 161-177

- Keitel C., Ruthven K. (eds.), 1993, *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*, Nato Asi Series, vol. 121, Berlin: Springer.
- Laborde C. (1993), The computer as part of the learning environment: the case of geometry, in Keitel C. & Ruthven K. (eds.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*, Nato Asi Series F, Vol. 121, Berlin: Springer Verlag, 48-67.
- Laborde J.M. and Strasser R. (1990), 'Cabri-Géomètre: a microworld of geometry for guided discovery learning', *ZDM*, 90/5, 171-177.
- Lawer R.W. (1987), Learning environments: now, then and someday, in Lawer, R.W. & Yazdani M. (eds.), *Artificial Intelligence and Education*, Vol. 1, Norwood, NJ: Ablex, 1-26.
- Nesher, P. (1986). Are mathematics understanding and algorithmic performance related?, *For the Learning of Mathematics*, 6, n.3, 2-9.
- Norman D. A., Spohrer J.C. (1996), Learner Centered Education, *Communication of the ACM*, Vol. 39, n°4, 24-27.
- Noss R. (1995), Thematic Chapter: Computers as Commodities, in diSessa A.A., Hoyles C. , Noss R. (eds): *Computers and exploratory learning*, Nato Asi Series F, Vol. 146, Berlin: Springer Verlag, 363-381.
- Pea Roy D. (1987), "Cognitive Technologies for Mathematics Education", in A. H. Schoenfeld: *Cognitive Science and Mathematics Education*, Lawrence Erlbaum, pp.89-122.
- Saxe G.B. (1991), *Culture and Cognitive Development: Studies in Mathematical Understanding*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Schwartz J. L. (1988), Intellectual Mirrors - Software Tools to think with, Paper prepared for the Theory of Mathematics Education Conference, Antwerp, Belgium, 1988.